2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010033**

參展科別　數學

作品名稱　三角形周界中點幾何論證與旁切圓相關性

得獎獎項

就讀學校　臺北市立麗山高級中學

指導教師　徐鈞明

作者姓名　黃瑢、吳少穎、賴奕仲

關鍵詞　周界中點、旁切圓

作者簡介

第一作者:黃瑢

我是來自麗山高中的學生黃瑢，起初沒有想過自己會來到數學專題，在高一數學領域探索的課程結束後，沒有很大的想法想要選擇數學專題，反而是想要選擇對自然科系比較有用的物理，但是最後還是選擇了數學，因為自己還沒徹底知道以後要讀的科系，覺得選擇數學，不管以後念什麼科系數學還是會有用處，所以才能有現在所研究出的一連串的結果，過程中也遇到許多問題，不管是數學知識又或者是分工問題，如何解決是在這一年當中收穫最多的東西了。

第二作者:吳少穎

我是麗山高中 21001 吳少穎，在高一經過兩種探究課之後，原本想要往自然科的方面發展，後來發現數學能涵蓋許多類別與科系，對未來有許多幫助，所以最後選擇數學專題的課程。雖然我對數學理解方面常需花較多時間，但在老師的指導下還是能慢慢完成。希望在參加這次的比賽之後能學到更多東西，除了更了解自己對圖形和數字的推理能力，也能對升學有所幫助。

第三作者:賴奕仲

我是來自台北市麗山高級中學的賴奕仲，起初我加入數學專題只是因為這個專題剛好還有空位因此才加入的，但隨著老師的教導及帶領還有和同學間的互相討論，讓我逐漸沈浸在數學的世界裡，因而和兩位同學一起耗費一年多的時間，製作出了如今的作品，也很感謝兩位同學以及老師，讓我能在每週僅三個小時的課程中學到許多以前從未接觸過的知識。

作品摘要

本文旨在探討三角形周界中點的幾何問題，以及周界中點與旁切圓的相關性質。在討論三角形問題的過程中，注意到許多關於周界中點的延伸性質，起初很難發現旁切圓之間的關聯性，後來決定以三角形周界中點為主軸，找出其與旁切 圓的幾何特性。發現延伸的圖形後，除了上網查詢相關資料，我們更利用幾何繪 圖軟體進行幾何問題的實驗與論證，透過觀察、提出假說，並運用已知的定理推 得研究結果。

我們發現了許多性質，其中包括：畫出三角形並分別做出三邊的旁切圓，各 邊切點即為該邊的周界中點，而三角形頂點與對邊周界中點連線共點即為界心(納格爾點Na)，此點和三角形的重心 G、內心 I 共線，且$\overline{GNa}$=2$\overline{GI}$；而三邊旁切圓圓 心會共圓，其圓心和三角形三個周界中點的外接圓圓心以及Na也會共線等等。

透過此次研究，讓我們對數學有更深入的瞭解，也期許未來能有更多的發現。

Abstract

This article aims to explore the geometry of the midpoint of the perimeter of a triangle and the properties of the midpoint of the perimeter to the tangent circle of the triangle. In the process of discussing the triangle problem, we noticed that there are many extensions about the extension properties of the perimeter midpoint, and at first it was difficult to find the relationship between the sidecut circles, and then it was decided to use the midpoint of the triangle perimeter as the main axis to find out its geometric properties with the tangent circle of the triangle. After discovering the extended graph, in addition to searching the Internet for relevant information, we also use geometric drawing software to experiment and demonstrate geometric problems, through observation, hypothesis, and use known theorems to derive research results.

We found a number of properties, including: drawing triangles and making three-sided tangential circles, each tangent point is the perimeter midpoint of the edge, and the triangle vertex and the opposite perimeter midpoint are the center of the boundary (Nagel Na), this point and the triangle's center of gravity G, inner I collinear, and$\overline{GNa}$=2$\overline{GI}$; The center of the three-sided tangent circle will be cocircular, and the center of the circle and the center of the circumscribed circle and the center of the three perimeters of the triangle and the Na will also be collinear.

Through this research, we have a deeper understanding of mathematics and hope for more discoveries in the future.

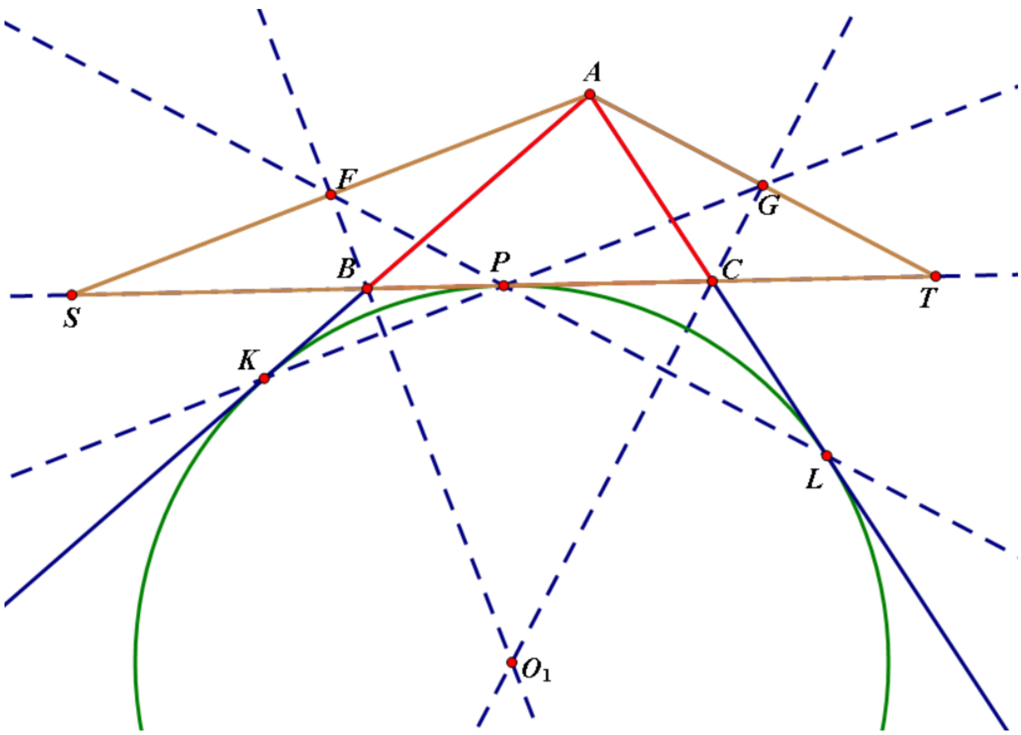
壹、前言

一、研究動機

在課堂上經過和老師在三角形方面的討論，我們注意到有許多關於周界中點的延伸性質。一開始其實很難發現旁切圓之間的關聯，後來我們決定以三角形周界為主軸來研究，找出其與旁切圓相關的幾何特性。雖然過去都已經有很多的研究內容，但對於這些論證與其他定理的結合尚未被解釋，而這也是我們研究的主題之一。

二、研究目的

(圖一:研究目的)



藉由△ABC 中 BC 邊的旁切圓切點連線，所引出的△AST，找出$\overline{ST}$的中點 P，即為△ABC 的周界中點，並進一步探討三邊周界中點與三邊旁切圓圓心的幾何特性。

三、文獻回顧

如果三角形一邊上的一點和這邊所對的頂點把三角形的周長分割為兩條等長的折 線，那麼就稱這一點為三角形的周界中點。在網路上看到了一篇有關三角形周界 中點的三個性質，內容講述了周界中點的定義，以及其所延伸出的幾何性質，了 解大概內容後，我們利用有別於其他的另一種證明方法，證明周界中點，並進一 步延伸新的幾何關係。 網路文獻中有很多證明周界中點的方法，而我們透過吸收文章知識後，找出了另 一種證明方法，且利用此證明，更深入探討三角形周界中點旁切圓相關性質

貳、研究過程與方法

一、研究設備及器材

我們的研究是利用 GSP 動態幾何軟體、GeoGebra 軟體，進行幾何問題的實驗與論證，透過觀察、猜測、提出假說及驗證，發掘並提出研究結果，然後加以證明。

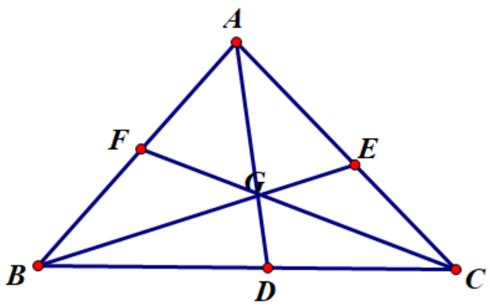
二、引理:

(一)、西瓦定理：

西瓦線段是各頂點與其對邊或對邊延長線上的一點連接而成的直線段。而西瓦定理指出：如果三角形 ABC 的塞瓦線段 AD、BE、CF 通過同一點 G，則

$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$=1,其逆定理亦成立

(圖二:西瓦定理)



西瓦定理證明:

∵面積比 $\triangle AGB:\triangle AGC=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\triangle BGA:\triangle BGC=\overline{AE}:\overline{EC}$

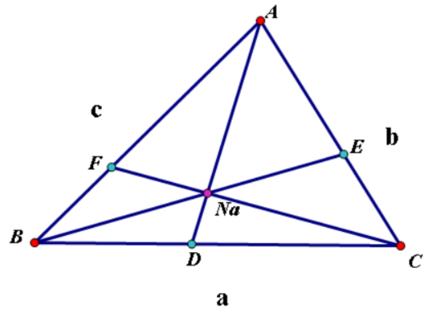
$\triangle CGB:\triangle CGA=\overline{FB}:\overline{AF}$

$\therefore\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\triangle CGA}{\triangle CGB}\times\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC}\times\frac{\triangle BGC}{\triangle BGA}$

=1 故得證

(二)三角形頂點與對邊周界中點連線共點⇒即為界心(納格爾點)

(圖三:納格爾點)



證明:

設△ABC 三邊邊長 $\overline{AB}$=c ,$\overline{BC}$=a ,$\overline{CA}$=b D,E,F 分別為三邊周界中點

∴$\overline{AF}$=s-b,$\overline{FB}$=s-a,$\overline{BD}$=s-c,$\overline{CD}$=s-b,$\overline{CE}$=s-a, $\overline{AE}$=s-c

$\Rightarrow\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{s-b}{s-a}\times\frac{s-c}{s-b}\times\frac{s-a}{s-c}=1$

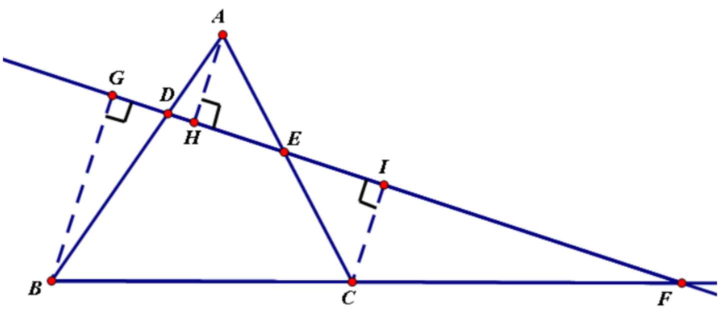
由西瓦逆定理知$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$三線共點於N_a(界心)

(三)孟式定理

孟式定理又稱為梅涅勞滋定理。△ABC 中，直線 AB 上一點 D，直線 BC 上一點 F，直線 AC 上一點 E，若 F、E、D 共線，則

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

(圖四:孟氏定理)



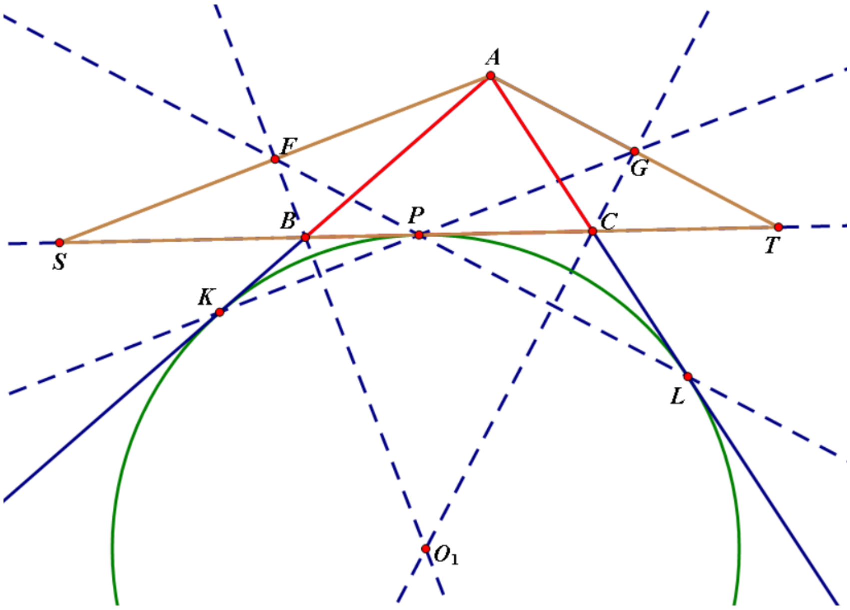
證明:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BG}}$ $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{CI}}$ $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{CI}}{\overline{AH}}$

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BG}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{CI}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{AH}}=1$

二、主題證明

(圖五:作圖方法)



做一三角形 ABC，做 A 點的內角平分線，及 B、C 的外角平分線，三線交於O_1點，以O_1點為圓心做旁切圓，與$\overline{BC}$切於 P 點，與$\overrightarrow{AB}$切於 K 點，與$\overrightarrow{AC}$切於 L 點，連接O_1B 與 LP 交於 F 點，O_1C 與 KP 交於 G 點，做 AF 延長線交$\overleftrightarrow{BC}$於 S 點、AG 延長線交$\overleftrightarrow{BC}$於 T 點，則發現 P 點為$\overline{ST}$中點。

(一)六點 A,G,L,O_1,K,F 共圓

證明:

$\beta=\angle KO_1B=\angle PO_1B \quad \alpha=\angle PO_1D=\angle LO_1D \quad \Phi=\angle PO_1O$

$2\beta+\Phi=2\alpha-\Phi \Rightarrow 2\Phi=2\alpha-2\beta \Rightarrow \Phi=\alpha-\beta \Rightarrow \alpha=\beta+\Phi$

$\angle AJL=2\alpha-\Phi=2\alpha-\alpha+\beta=\alpha+\beta$

$\angle GPD+\angle DPE=180^\circ \quad \angle EO_1D+\angle DPE=180^\circ$

$\Rightarrow\angle GPD=\angle EO_1D=\alpha+\beta \quad \therefore\angle GPD=\angle AO_1L$ 又$\angle ALO_1=\angle GDP=90^\circ$

$\Rightarrow\triangle ALO_1\sim\triangle GDP \quad \Rightarrow\angle O_1AL=\angle PGD$

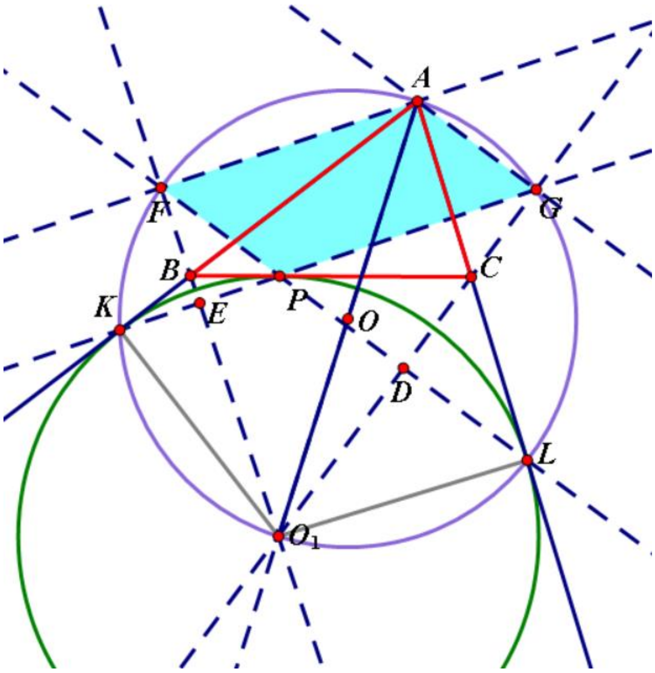
同理$\angle O_1AL=\angle PFE$ 且$\angle O_1AL=\angle O_1AK$(箏形)

$\Rightarrow\angle O_1FL=\angle KAO_1=\angle O_1AL=\angle KGO_1$

$\therefore$A、F、K、O_1、L、G 六點共圓

(二)四邊形 AFPG 為平行四邊形

(圖六: 四邊形 AFPG 為平行四邊形)



證明:

圓 O 中 ∠LFA 對應劣弧$\overset{\frown}{AG}$ +$\overset{\frown}{GL}$　∠FAG 對應弧$\overset{\frown}{GL}$ +$\overset{\frown}{LK}$ +$\overset{\frown}{KF}$

∵∠O_1DL=∠O_1LA=90°　∴∠GO_1L+∠O_1LD =∠ALF+∠O_1LD

⇒∠GO_1L=∠ALF ⇒劣弧$\overset{\frown}{AF}$=劣弧$\overset{\frown}{GL}$

⇒∠LFA+∠FAG=$\overset{\frown}{AG}$+$\overset{\frown}{GL}$ +$\overset{\frown}{GL}$ +$\overset{\frown}{LK}$ +$\overset{\frown}{KF}$ =$\overset{\frown}{AG}$+$\overset{\frown}{GL}$ +$\overset{\frown}{LK}$ +$\overset{\frown}{KF}$ +$\overset{\frown}{AF}$ =180°

⇒直線$\overline{AG}//\overline{FL}$(同側內角互補)

又△ALO_1~△GDP(由證明(一)可知) ∴∠GPD=∠AO_1L

且∠AFL=∠AO_1L(對應同劣弧$\overset{\frown}{AL}$)

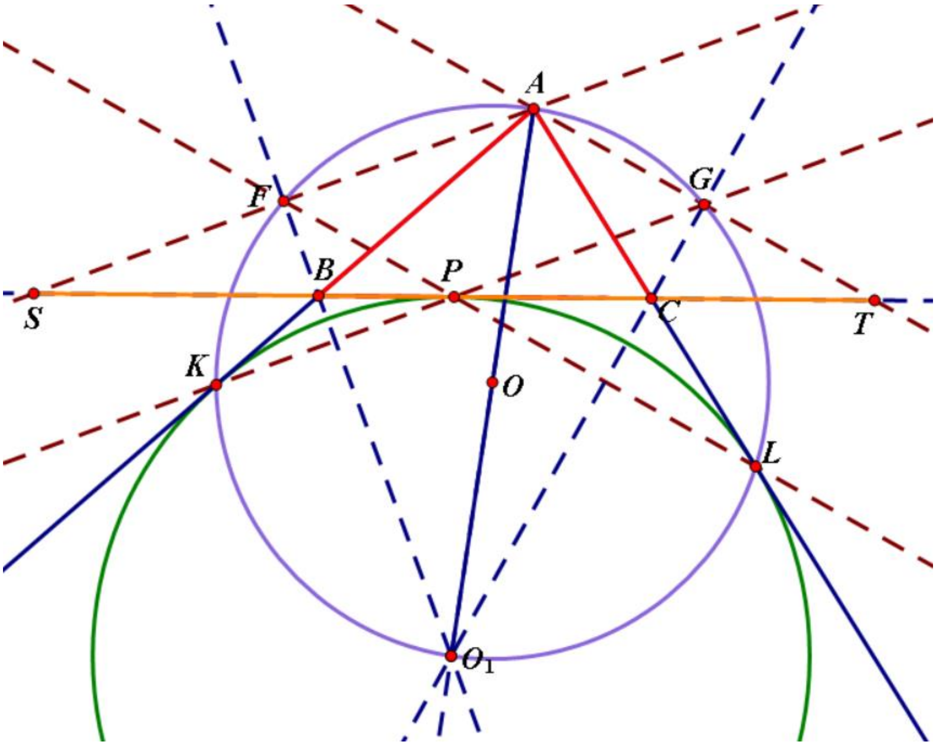
⇒∠GPD=∠AFL (同位角相等)

⇒直線$\overline{AF}//\overline{GK}$

故可證四邊形 AFPG 為平行四邊形

(三)點 P 為$\overline{ST}$中點

(圖七:點 P 為$\overline{ST}$中點)



證明:

$\because \overleftrightarrow{AT} // \overleftrightarrow{FL}$且$\overleftrightarrow{O_1G} \perp \overleftrightarrow{FL}$ $\therefore \overleftrightarrow{O_1G} \perp \overleftrightarrow{AT}$且$\overleftrightarrow{O_1G}$平分∠ACT

$\Rightarrow \overline{AG}=\overline{GT}$

又$\overline{AG}=\overline{FP}$(AFPG 為平行四邊形) $\therefore \overline{FP}=\overline{GT}$

⇒△SFP≅△PGT(SAS)

故可證點 P 為$\overline{ST}$中點

延伸結果:

$\because \overleftrightarrow{O_1F}$為$\overline{AS}$的垂直平分線 $\therefore \overline{AB}=\overline{SB}$

同理可證$\overleftrightarrow{O_1G}$為$\overline{AT}$的垂直平分線 $\therefore \overline{AC}=\overline{CT}$

由上述證明可知點 P 為$\overline{ST}$中點

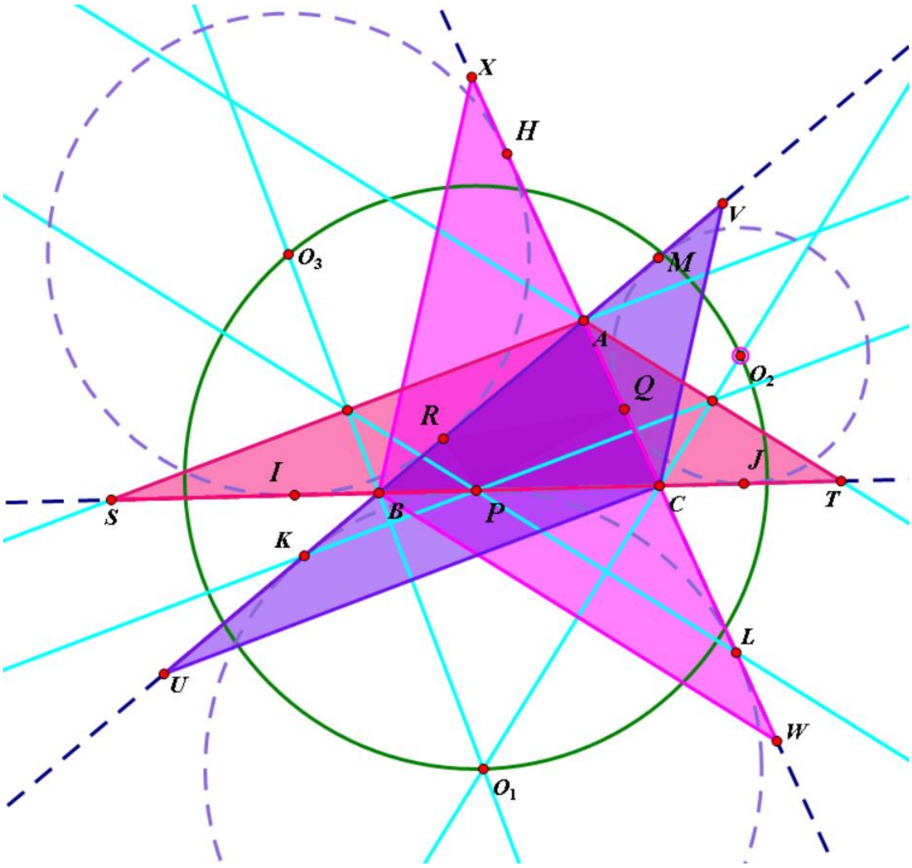
$\Rightarrow \overline{SP}=\overline{PT}$ $\Rightarrow \overline{SB}+\overline{BP}=\overline{PC}+\overline{CT}$ $\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BP}=\overline{AC}+\overline{PC}$

故可證點 P 為△ABC 中$\overline{BC}$邊上的周界中點

參、研究結果

一、三角形三邊周界中點

(圖八:三角形三邊周界中點)

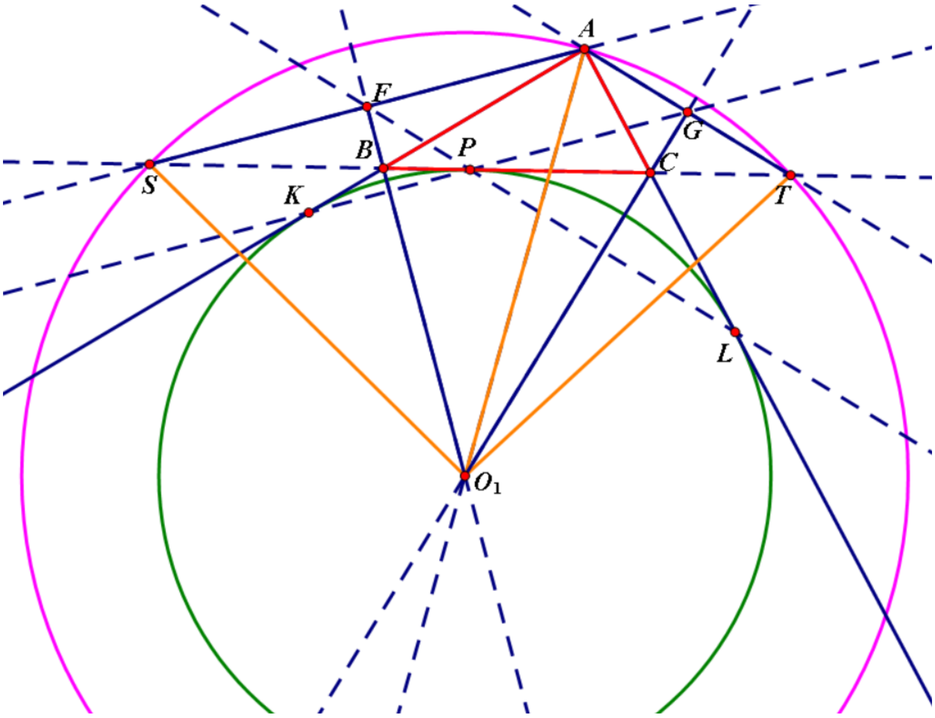


同理，在另外兩邊$\overline{AC}$、$\overline{AB}$分別做出旁切圓O_2、O_3，可做出△BWX、

△CUV，且得到 Q、R 分別為$\overline{WX}$與$\overline{UV}$的中點，也稱為$\overline{AC}$與$\overline{AB}$邊上的周界中點。

二、△AST 外接圓與△ABC 旁切圓共圓心

(圖九: △AST 外接圓與△ABC 旁切圓共圓心)



證明:

由證明(二)可知

$\overleftrightarrow{AT}$//$\overleftrightarrow{FL}$且$\overleftrightarrow{GO_1}\perp\overleftrightarrow{AT}$

由證明(三)可知

$\overline{AG}$=$\overline{GT}$ 故點 G 為$\overline{AT}$的中點

⇒$\overline{O_1G}$為$\overline{AT}$的垂直平分線

同理可證

$\overleftrightarrow{AS}$//$\overleftrightarrow{KG}$且$\overleftrightarrow{AS}\perp\overleftrightarrow{FO_1}$

$\overline{AF}$=$\overline{FS}$ 故點 F 為$\overline{AS}$中點

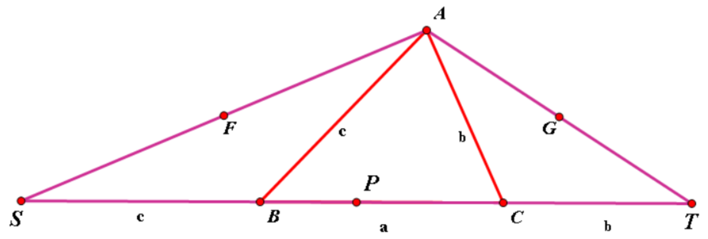
⇒$\overline{FO_1}$為$\overline{AS}$的垂直平分線

⇒$\overline{SO_1}$=$\overline{AO_1}$=$\overline{TO_1}$

故可證△AST 外接圓圓心為點O_1且與△ABC 旁切圓共圓心相同

三、△ABC 與△AST 的面積有固定比值

(圖十: △ABC 與△AST 的面積有固定比值)



證明:

$\angle AST=\frac{1}{2}\angle B$ $\angle ATS=\frac{1}{2}\angle C$ $\overline{AF}=\overline{FS}=c\times\cos\frac{1}{2}\angle B$ $\overline{AG}=\overline{GT}=b\times\cos\frac{1}{2}\angle C$

$\angle SAT=\angle A+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\angle A+\frac{1}{2}(180^{\circ}-\angle A)=90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle A$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AST}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin\angle A}{\frac{1}{2}(2c\cos\frac{1}{2}\angle B)(2b\cos\frac{1}{2}\angle C)\sin(90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle A)}$$

$$=\frac{bc\sin\angle A}{4bc\times\cos\frac{1}{2}\angle B\times\cos\frac{1}{2}\angle C\times\cos\frac{1}{2}\angle A}$$

$$=\frac{2\sin\angle\frac{A}{2}\cos\frac{1}{2}\angle A}{4\times\cos\frac{1}{2}\angle B\times\cos\frac{1}{2}\angle C\times\cos\frac{1}{2}\angle A}$$

$$=\frac{\sin\angle\frac{A}{2}}{2\times\cos\frac{1}{2}\angle B\times\cos\frac{1}{2}\angle C}$$

$$=\frac{\cos(\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2})}{2\times\cos\frac{1}{2}\angle B\times\cos\frac{1}{2}\angle C}$$

$$=\frac{\cos\angle\frac{B}{2}\times\cos\angle\frac{C}{2}-\sin\angle\frac{B}{2}\times\sin\angle\frac{C}{2}}{2\times\cos\angle\frac{B}{2}\times\cos\angle\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{B}{2}\tan\angle\frac{C}{2}$$

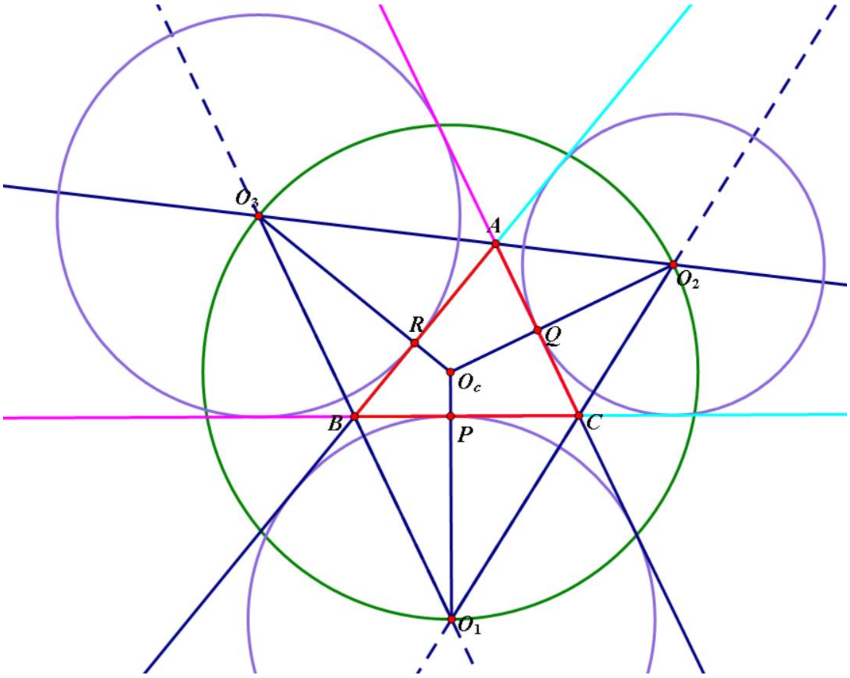
同理可證，研究結果一中畫出的△BWX、△CUV 與△ABC 亦有固定比值

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle CVU}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{A}{2}\tan\angle\frac{B}{2}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle BXW}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{A}{2}\tan\angle\frac{C}{2}$$

四、$\overleftrightarrow{O_1P}$ 、$\overleftrightarrow{O_3R}$ 、$\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$O_c$，且$O_c$為△ $O_1O_2O_3$的外接圓圓心

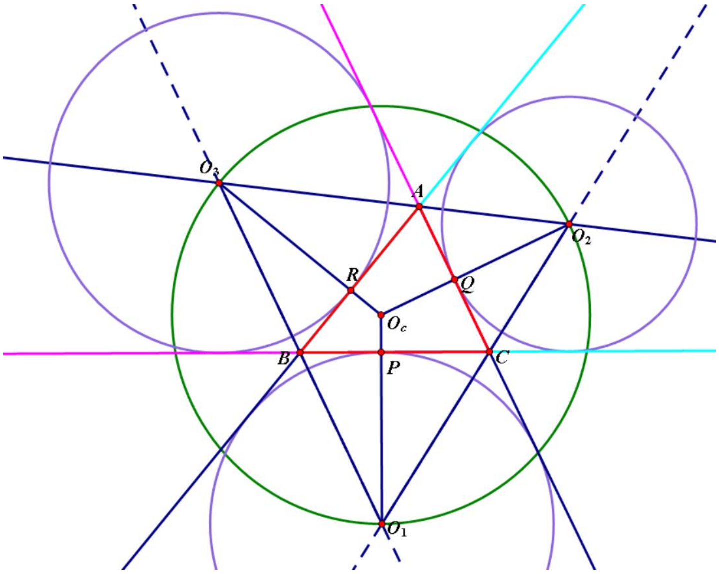
(圖十一: $\overleftrightarrow{O_1P}$ 、$\overleftrightarrow{O_3R}$ 、$\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$O_c$)



由上述研究方法主題證明(三)可知，-在三邊同時做周界中點 P、Q、R，與其所對應的旁切圓 O_1、O_2、O_3，做$\overleftrightarrow{O_1P}$直線, $\overleftrightarrow{O_3R}$直線交於一點$O_c$，畫出圓$O_c$，則點$O_1$、$O_2$、$O_3$共圓於$O_c$

此圖為上圖之簡易版

(圖十二: $\overleftrightarrow{O_1P}$ 、$\overleftrightarrow{O_3R}$ 、$\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$Oc$簡易圖)



證明:

$\because \angle PBO_1=(\frac{180-\angle B}{2})^{\circ}$ 又$\angle BPO_1=90^{\circ}$ $\Rightarrow \angle PO_1B=(\frac{\angle B}{2})^{\circ}$

同理$\angle RBO_3=(\frac{180-\angle B}{2})^{\circ}$ 又$\angle BRO_3=90^{\circ}$ $\Rightarrow \angle RO_3B=(\frac{\angle B}{2})^{\circ}$

做$\overleftrightarrow{O_1P}$直線, $\overleftrightarrow{O_3R}$直線交於一點$O_c{}'$

$\because \triangle O_1O_3O_c{}'$為等腰三角形 $\therefore O_c{}'$在$\overline{O_1O_3}$的中垂線上

同理做$\overleftrightarrow{O_1P}$直線, $\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$O_c{}''$ $\overleftrightarrow{O_2Q}$直線, $\overleftrightarrow{O_3R}$直線交於一點$O_c{}'''$

$\because \triangle O_1O_2O_c{}'$與$\triangle O_2O_3O_c{}''$均為等腰三角形

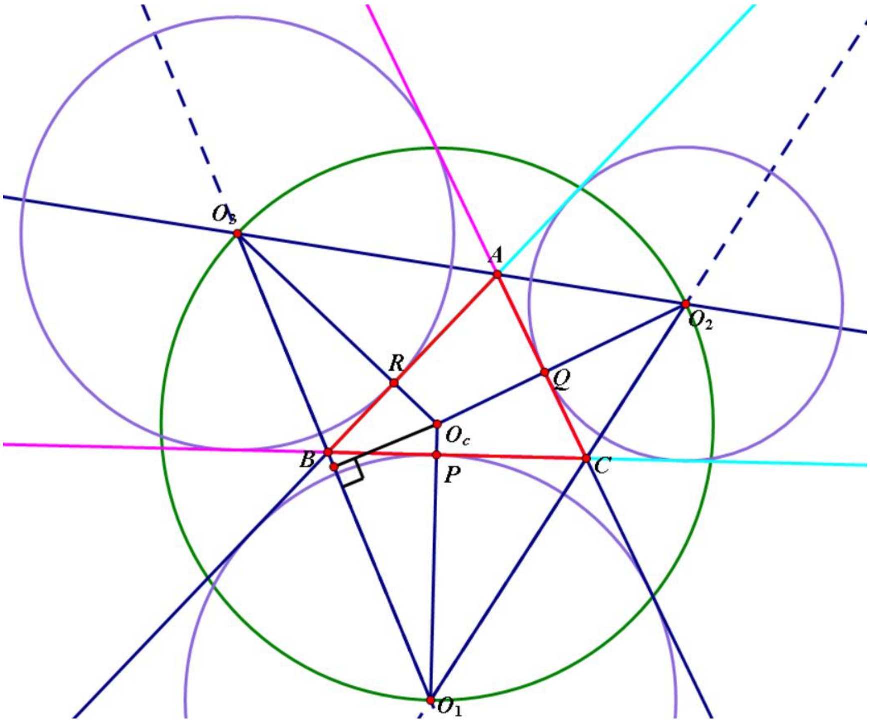
$\therefore O_c''$ 、$O_c{}'''$分別在$\overline{O_1O_2}$與$\overline{O_2O_3}$的中垂線上

又$\triangle O_1O_2O_3$三邊的中垂線同點於外心O_c $\therefore$直線$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_2Q}$、$\overleftrightarrow{O_3R}$共點於$O_c$

即三個旁心圓的圓心與周界中點連線共點於O_c，且$\overline{O_1O_c}$=$\overline{O_2O_c}$=$\overline{O_3O_c}$

五、旁切圓半徑與圓O_c半徑有相關性

(圖十三: 旁切圓半徑與圓Oc半徑有相關性)



證明:

設$\overline{PO_1}$=r_1 $\overline{BO_1}$=x $\overline{RO_3}$=r_3 $\overline{BO_3}$=y $\overline{QO_2}$=r_2 $\overline{O_cO_1}$= $\overline{O_cO_2}$= $\overline{O_cO_3}$=r

$\triangle BPO_1$中 $\cos\angle\frac{B}{2}=\frac{r_1}{x}$ $\Rightarrow$x=$r_1\sec\angle\frac{B}{2}$

$\triangle BRO_3$中 $\cos\angle\frac{B}{2}=\frac{r_3}{y}$ $\Rightarrow$y=$r_3\sec\angle\frac{B}{2}$

x+y=(r_1+r_3) $\sec\angle\frac{B}{2}$ $\Rightarrow\frac{x+y}{2}=\frac{r_1+r_3}{2}\sec\angle\frac{B}{2}$=r$\cos\angle\frac{B}{2}$

r=$\frac{r_1+r_3}{2}sec^2\angle\frac{B}{2}$

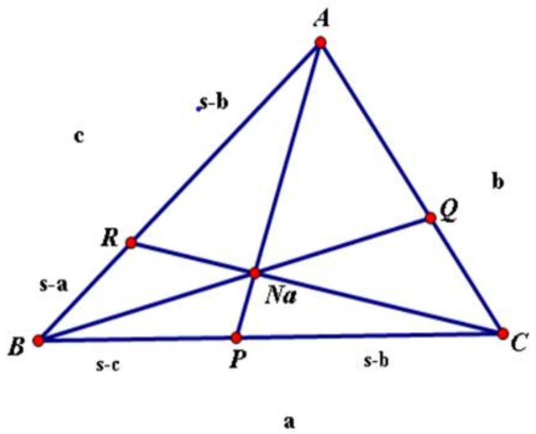
同理可證

r=$\frac{r_1+r_3}{2}sec^2\angle\frac{B}{2}$ =$\frac{r_1+r_2}{2}sec^2\angle\frac{C}{2}$=$\frac{r_2+r_3}{2}sec^2\angle\frac{A}{2}$

六、點 Na、G、I 共線，且$\overline{GNa}=2\overline{GI}$

(Na:納格爾點 G:三角形的重心 I:三角形內心)

(圖十四: $\overrightarrow{ANa}=\frac{a}{s}\times\overrightarrow{AP}$證明)



1.由孟氏定理得知

$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CP}}\times\frac{\overline{PNa}}{\overline{NaA}}=1$

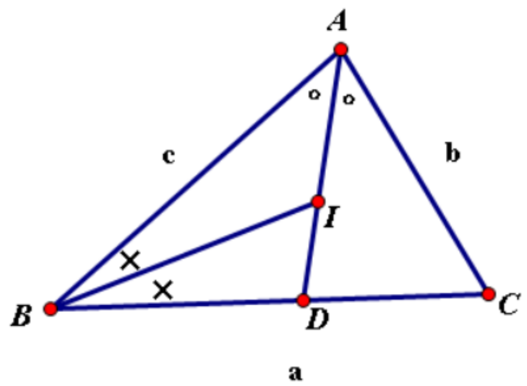
證明:

$\Rightarrow\frac{s-b}{s-a}\times\frac{a}{s-b}\times\frac{\overline{PNa}}{\overline{NaA}}=1$

$\Rightarrow\frac{\overline{PNa}}{\overline{NaA}}=\frac{s-a}{a}\Rightarrow\frac{\overline{ANa}}{\overline{AP}}=\frac{a}{s}$

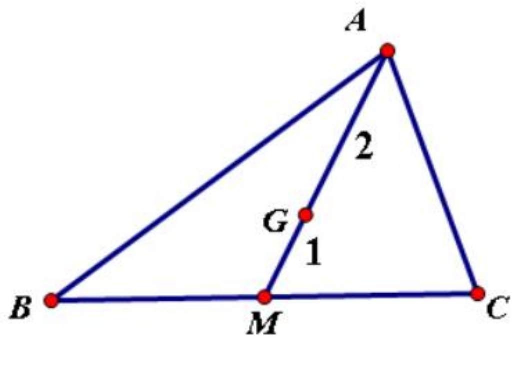
$\Rightarrow\overrightarrow{ANa}=\frac{a}{s}\times\overrightarrow{AP}$

(圖十五:內心性質)



2.由內心性質可知:

$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\times\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\times\overrightarrow{AC}$

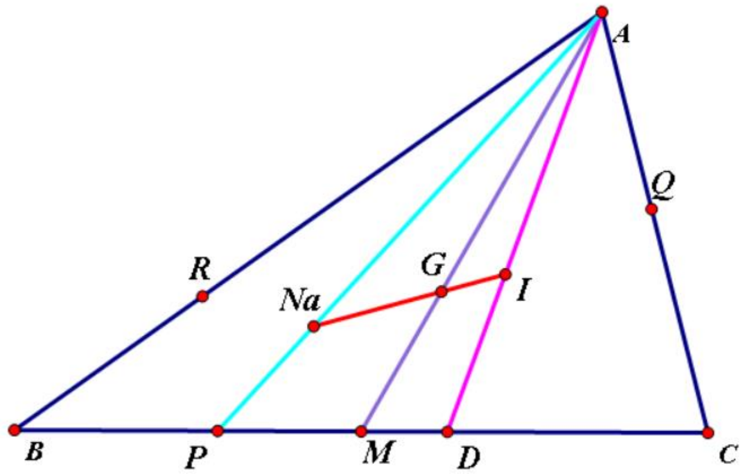


(圖十六:重心性質)

3.由重心性質可知:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

(圖十七: 點Na、G、I 共線)



$\because$ s=$\frac{1}{2}$(a+b+c) ⇒a+b+c=2s

由 2.可知$\overrightarrow{AI}$=$\frac{b}{2s}\times\overrightarrow{AB}$+$\frac{c}{2s}\times\overrightarrow{AC}$ ⇒$2\overrightarrow{AI}$=$\frac{b}{s}\times\overrightarrow{AB}$+$\frac{c}{s}\times\overrightarrow{AC}$-------(*)

由 P 為 B、C 得內分點且$\overline{BP}$: $\overline{CP}=s-c{:}\,s-b$

則$\overrightarrow{AP}$=$\frac{s-b}{a}\times\overrightarrow{AB}$+$\frac{s-c}{a}\times\overrightarrow{AC}$ 又 $\overrightarrow{ANa}$=$\frac{a}{s}\times\overrightarrow{AP}$

⇒ $\overrightarrow{ANa}$=$\frac{s-b}{s}\times\overrightarrow{AB}$+$\frac{s-c}{s}\times\overrightarrow{AC}$=(1-$\frac{b}{s}$)$\overrightarrow{AB}$+(1-$\frac{c}{s}$)$\overrightarrow{AC}$--------(**)

由(*)(**)相加得: $2\overrightarrow{AI}$+$\overrightarrow{ANa}$=$\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{AC}$

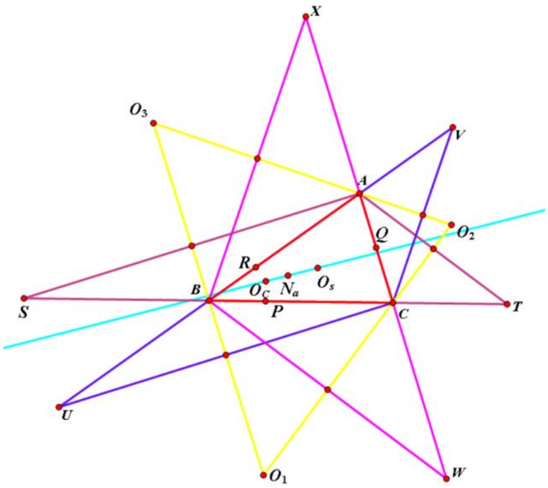
再由 3.得知: $\overrightarrow{AG}$=$\frac{1}{3}$($\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{AC}$)=$\frac{1}{3}$($2\overrightarrow{AI}$+$\overrightarrow{ANa}$)= $\frac{2}{3}\times\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\times\overrightarrow{ANa}$

由共線性質可知:點 Na、G、I 共線且$\overline{GNa}$=2$\overline{GI}$

七、O_c、Na、O_s共線

(Oc:三個旁切圓圓心共圓的圓心 Na:納格爾點 Os:三角形三個周界中點的外接圓圓心)

(圖十八: Oc、Na、Os共線)

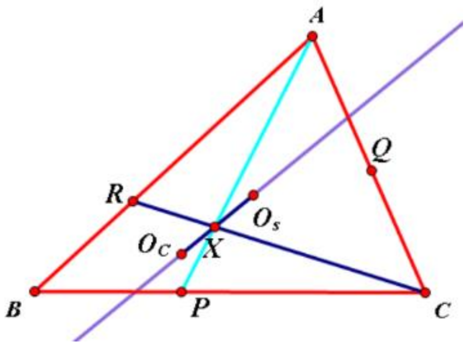


此證明我們尚未探討出來，目前我們有三個方向想來證明此結果:

1. 與點Na、G、I 共線的證明可能有相關 2.和反演點有相關 3.利用孟氏定理共線性質

而第三個方向也是我們主要探討的方向，想法如下:

(圖十九:探討Oc、Na、Os共線))



Os、Oc 兩點連線 交 AP 線段於一點 X 證明 X 點為納格爾點，即證明 X 點位於 CR 線段上

利用孟氏定理: 假設 X 點會位於 CR 線段上，若證明出 $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{PX}}{\overline{XA}}$=1

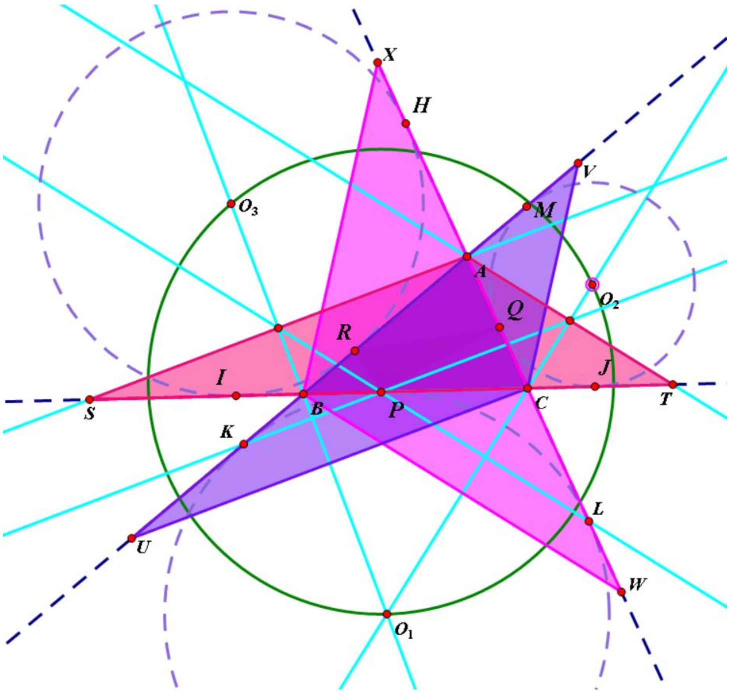
由孟氏定理可知 R、X、C 三點共線

$\frac{\overline{s-b}}{\overline{s-a}} \times \frac{\bar{a}}{\overline{s-b}} \times \frac{\overline{PX}}{\overline{XA}}$=1 $\Rightarrow$證明 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{s-a}}{\bar{a}}$

肆、結果與討論

一、點 P 為△ABC 中$\overline{BC}$邊上的周界中點、點 Q 為△ABC 中$\overline{AC}$邊上的周界中點、點 R 為△ABC 中$\overline{AB}$邊上的周界中點

(圖八:三角形三邊周界中點)

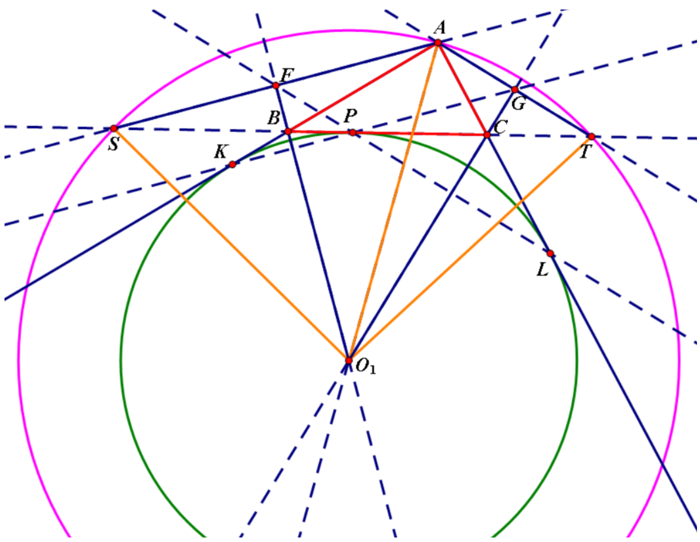


二、ΔAST 外接圓圓心為點$\boldsymbol{O_1}$且與ΔABC 中$\overline{BC}$邊上旁切圓圓心相同

ΔCVU 外接圓圓心與ΔABC 中$\overline{AC}$邊上旁切圓圓心相同

ΔBWX 外接圓圓心與ΔABC 中$\overline{AB}$邊上旁切圓圓心相同

(圖九: △AST 外接圓與△ABC 旁切圓共圓心)

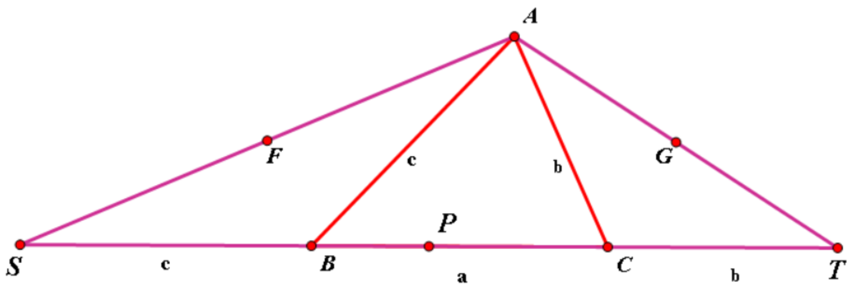


三、△ABC 與△AST 有固定比值 $\frac{\triangle ABC}{\triangle AST}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{B}{2}\tan\angle\frac{C}{2}$

△ABC 與△CVU 有固定比值 $\frac{\triangle ABC}{\triangle CVU}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{A}{2}\tan\angle\frac{B}{2}$

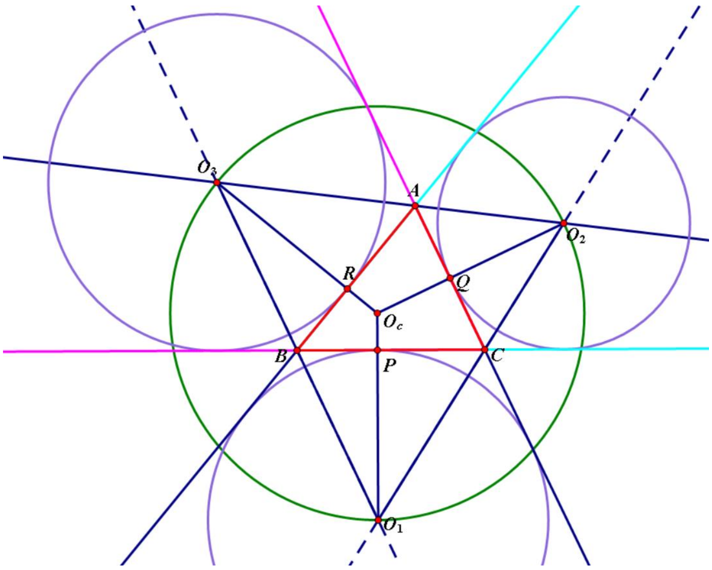
△ABC 與△BWX 有固定比值 $\frac{\triangle ABC}{\triangle BXW}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\angle\frac{A}{2}\tan\angle\frac{C}{2}$

(圖十: △ABC 與△AST 的面積有固定比值)



四、$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_3R}$、$\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$O_c$，且$O_c$為 O_1、O_2、O_3所作圓的圓心

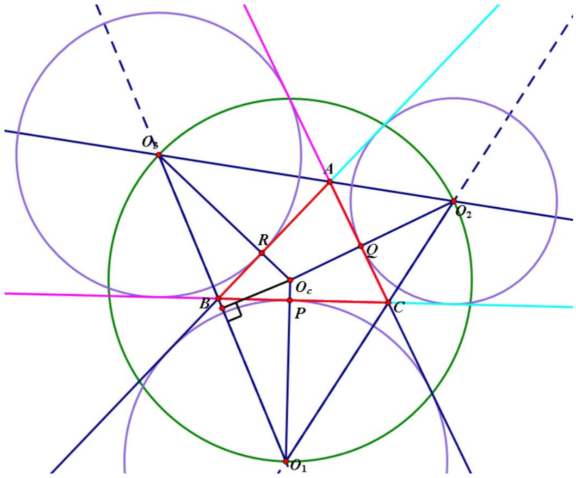
(圖十二: $\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_3R}$、$\overleftrightarrow{O_2Q}$直線交於一點$Oc$簡易圖)



五、旁切圓半徑與圓O_c半徑(r)有相關性

r=$\frac{r_1+r_3}{2}sec^2\angle\frac{B}{2}$ =$\frac{r_1+r_2}{2}sec^2\angle\frac{C}{2}$=$\frac{r_2+r_3}{2}sec^2\angle\frac{A}{2}$

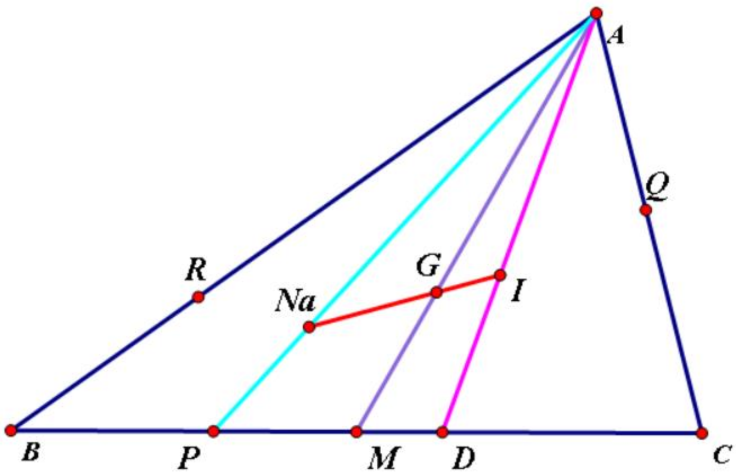
(圖十三: 旁切圓半徑與圓Oc半徑有相關性)



六、點 Na、G、I 共線，且$\overline{GNa}$=2$\overline{GI}$

(Na:納格爾點 G:三角形的重心 I:三角形內心)

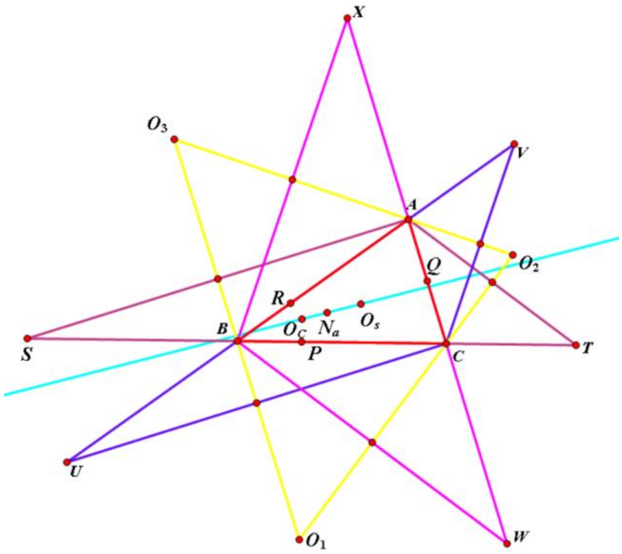
(圖十七: 點Na、G、I 共線)



七、O_c、Na、O_s共線

(Oc:三個旁切圓圓心共圓的圓心 Na:納格爾點 Os:三角形三個周界中點的外接圓圓心)

(圖十八: Oc、Na、Os共線)



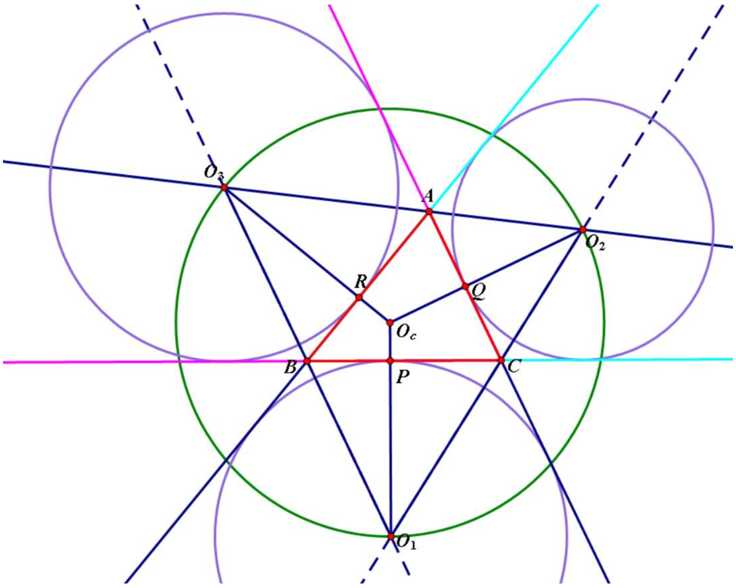
此證明我們尚未探討出來，目前我們有三個方向想來證明此結果:

2. 與點Na、G、I 共線的證明可能有相關 2.和反演點有相關 3.利用孟氏定理共線性質

而第三個想法也是我們主要探討的方向

八、$\triangle O_1O_2O_3$與$\triangle O_2$AC,$\triangle O_1$BC,$\triangle O_3$AB 為相似三角形

(圖十九:$\triangle O_1O_2O_3$與$\triangle O_2$AC,$\triangle O_1$BC,$\triangle O_3$AB 為相似三角形)



證明:

設$\angle AO_2Q=\angle AO_3R=x$　$\angle BO_3R=\angle PO_1B=z$　$\angle CO_2Q=\angle CO_1P=y$

則$\angle O_2AQ=90^\circ-x$　$\angle BO_1C=y+z$

$2x+2y+2z=180 \Rightarrow x+y+z=90 \Rightarrow y+z=90^\circ-x$

故$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle O_2$AC 為相似三角形(AA)

同理可證$\triangle O_1$BC、$\triangle O_3$AB 與$\triangle O_1O_2O_3$亦為相似三角形

伍、參考資料及其他

維基百科(2021 年 8 月 30 日)。 塞瓦定理。https://reurl.cc/O42rvv

維基百科(2021 年 8 月 30 日)。孟氏定理。https://reurl.cc/MNYjyL

丁遵標(2003)。周界中點三角形中三個有趣的性質。數學傳播。27 卷 4 期。 P89~94。

黃家禮(編著) (2009)。幾何明珠。九章出版社。

【評語】010033

本作品探討三角形的旁切圓以及周界中點等幾何關係，涉及共線、共圓心等性質。作者使用了大量的引理，最終獲得的成果雖不多，證明也不難懂，但明顯耗費了大量時間去做觀察，才得以提出猜測。作品深具原創性。

作者詳實陳述了一些好的結果。建議多著墨於它們彼此的關聯性。也建議多闡述問題的趣味性。