

# 2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010023

參展科別 數學

作品名稱 全等三角形與四邊形構造的衍伸圖形之性質研究

得獎獎項

就讀學校 新北市立文山國民中學

指導教師 蕭偉智

作者姓名 陳家睿、鍾一玄、顏廷翰

關鍵詞 面積不變量、共點共線、矩陣變換

## 作者簡介



作者合照（左起：鍾一玄、陳家睿、顏廷翰）

我是陳家睿，個性活潑、愛玩。從小因為就讀森林小學，對於各種球類運動都很擅長，一下課就迫不及待的跑去玩，不過我的數學能力還不錯，因此被推薦參加鑑定而進入文山國中數理資優班。在這裡我和同學跟著蕭偉智老師一起研究數學問題，利用放學及午休時間留下來討論，盡力讓研究變得更好，雖然有些辛苦，但我樂在其中，每有會意，便欣然忘食。另外，我對於音樂、體操、各種棋類等才藝都有興趣，我喜歡努力過後所獲得的成就感，期望之後能成為一個多元發展的人。

我是鍾一玄，就讀於文山國中九年級，喜歡學習並研究數學和物理。自小常閱讀有關科學的書籍或參加活動——幼兒園時就對天文很有興趣，國小開始玩魔術方塊，甚至對科學有極大的興趣，假日只要把我帶到科教館就能搞定，常常玩到不願意回家。空閒時，我會打桌球、羽球、撞球。關於數學研究，我到了國中開始接觸較有挑戰的數學，遇到一些費解的題目，而我喜歡花時間解神奇的問題，培養對數學的興趣及能力。在蕭偉智老師的指導下，我、同學家睿與學弟廷翰一起研究一道幾何問題，經過一年多的研究時光，我們發現許多漂亮的幾何性質，得到許多收穫。

我是顏廷翰，主要專長是數學，對程式稍微有研究，曾自學過 Python 程式。國小就讀一般智能資優班，各科學業表現都不錯，在校外的課程接觸較有挑戰的資優數學教材，不同於較為簡單的課本，資優數學需以詳細的思考與策略才能解決問題，這樣的成就感使我對數學產生高度興趣，便一直提升自己的數學能力。另一方面我也超前學習，在國小六年級已經學完國中範圍的數學跟英語，目前在國中老師的指導下，數學自學到高一下學期範圍。對於本研究中用到的數學工具都尚有基礎，因此加入學長團隊一起進行研究，我非常喜歡研究中的挑戰，那種發現與震撼非同凡響，使我沉浸於數學帶來新奇之中。

## 摘要

本研究源於 2016 年數學雜誌 *Crux Mathematicorum* 的三角形定性問題[1]，我們將這個問題由四個方向進行推廣——多邊形邊數、頂點連線方式、等腰三角形角度、全等多邊形的夾角，再創新探討其定量與定性性質。首先，我們將任意全等的三角形與任意四邊形夾角為任意實數下的衍伸圖形之定量與定性性質進行完整刻劃，利用測量師公式分別針對不同連線情形下的兩個衍伸圖形的有向面積之和與有向面積之差進行完整討論，再巧妙利用平移不變性處理行列式級數和而給出面積不變量關係式。第二，透過向量、矩陣運算與純幾何方式探討面積不變量的幾何意義，並給出衍伸圖形之間的全等、相似、透視、對稱、共線、平行、退化等優美的定性性質。最後，我們系統性推廣到平面上任意封閉多邊形，嘗試以較高的觀點切入，透過矩陣變換給出其幾何結構，並且發現許多實質有趣的定性與定量統一結果。

## Abstract

This research is derived from a triangular qualitative question published in 2016 Crux Mathematicorum [1]. Considering the number of sides of the polygons, connection methods, the base angle of the isosceles triangles, and the included angle of two congruent polygons to construct the derived graphics, we generalized not only the original question but also innovatively explored the quantitative and qualitative properties the derived graphics.

For two arbitrary congruent triangles or quadrilaterals with their included angle as a real number, we completely characterized the quantitative and qualitative properties of graphics derived from aforesaid congruent polygons. Firstly, we found out the directed area invariants by the surveyor's area formula. It is worth mentioning that we ingeniously used translation of coordinates in the determinant calculation in order to greatly reduce the computational load for the directed area invariants. Secondly, through vector, matrix, and pure geometry approach, we gave the geometric interpretation of the directed area invariant. In addition, we found out many fascinating properties such as congruence, similarity, perspective, symmetry, collinear, parallel construction, and degeneracy.

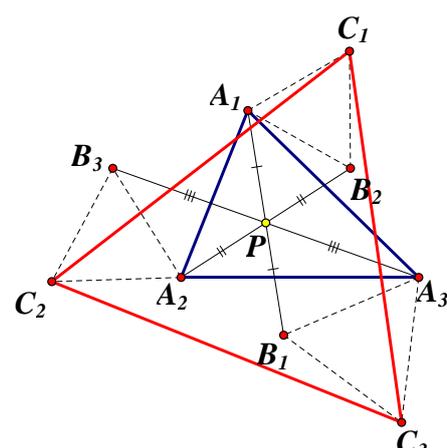
Finally, we systematically investigated the graphics derived from any closed congruent polygons. We showed many geometric properties and structure by transformation matrix and gave general theorems and patterns.

# 壹、前言

## 一、研究動機與文獻探討

Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc 於 2016 年九月提出一個十分有趣的平面三角形幾何問題[1]，如下所示。其中為了本文研究方便，我們更改了原本問題中的點名稱，但並不影響原始問題。

Consider triangle  $A_1A_2A_3$  and let  $P$  be any point in the plane. Let points  $B_1, B_2, B_3$  be reflections of points  $A_1, A_2, A_3$  in  $P$ , respectively. Construct the 3 triangles  $A_1B_2C_1, A_2B_3C_2$  and  $A_3B_1C_3$  outwardly as the given diagram indicates:



Show that  $C_1C_2C_3$  is an equilateral triangle.

圖 1： $\triangle C_1C_2C_3$  為正三角形

此題目漏敘述一個條件，即  $\triangle A_1B_2C_1$ 、 $\triangle A_2B_3C_2$  與  $\triangle A_3B_1C_3$  皆為正三角形。在此條件下，我們可利用向量的概念來處理此問題即可得出證明。

考慮向量  $\overrightarrow{C_3C_2} = \overrightarrow{C_3B_1} + \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2C_2}$  以及  $\overrightarrow{C_3C_1} = \overrightarrow{C_3A_3} + \overrightarrow{A_3B_2} + \overrightarrow{B_2C_1}$ 。比較  $\overrightarrow{C_3B_1}$  與  $\overrightarrow{C_3A_3}$ ，可得兩向量長度  $|\overrightarrow{C_3B_1}| = |\overrightarrow{C_3A_3}|$  且夾角為 60 度；再比較  $\overrightarrow{B_1A_2}$  與  $\overrightarrow{B_2C_1}$ ，因為四邊形  $A_1B_2B_1A_2$  是平行四邊形（對角線互相平分），可得向量  $\overrightarrow{B_1A_2} = \overrightarrow{B_2A_1}$ ，又因為  $\triangle A_1B_2C_1$  是正三角形，所以兩向量長度  $|\overrightarrow{B_1A_2}| = |\overrightarrow{B_2C_1}|$  且夾角為 60 度；同理可得，兩向量長度  $|\overrightarrow{A_2C_2}| = |\overrightarrow{A_3B_2}|$  且夾角為 60 度。因此，兩向量長度  $|\overrightarrow{C_3C_2}| = |\overrightarrow{C_3C_1}|$  且夾角為 60 度，同理可得兩向量  $|\overrightarrow{C_2C_3}| = |\overrightarrow{C_2C_1}|$  且夾角為 60 度，故  $\triangle C_1C_2C_3$  是正三角形。

若將  $\overrightarrow{A_1B_2}$ 、 $\overrightarrow{A_2B_3}$  與  $\overrightarrow{A_3B_1}$  為邊構造的正三角形換個方向，如下圖所示， $\triangle A_1B_2D_1$ 、 $\triangle A_2B_3D_2$  與  $\triangle A_3B_1D_3$  的頂點皆為順時鐘方向的正三角形時，我們仿照上述的向量證明，可得出  $\triangle D_1D_2D_3$  是正三角形。有趣的是，以上性質皆與  $P$  的位置無關。

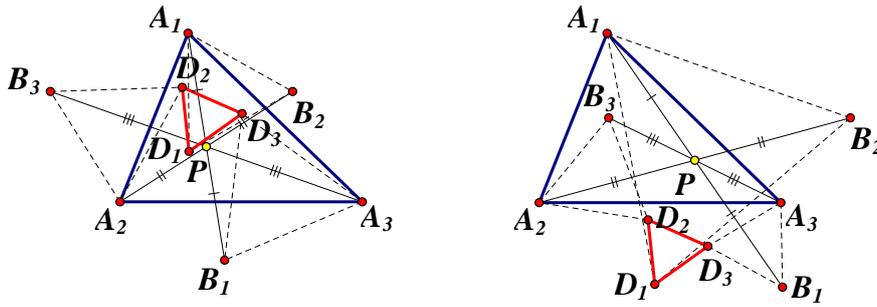
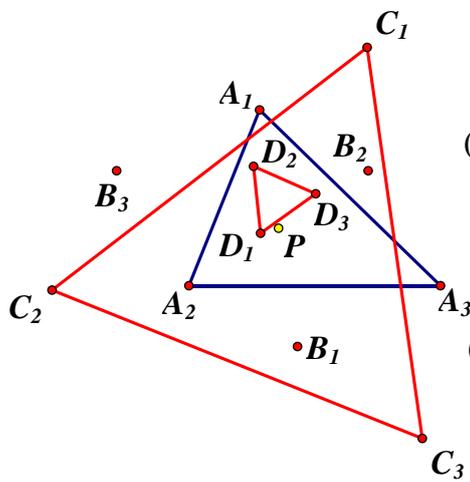


圖 2： $\triangle D_1D_2D_3$  為正三角形

再計算兩個正三角形面積  $\triangle C_1C_2C_3 - \triangle D_1D_2D_3$  以及  $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$ ，可得到

驚喜的不變量： $\frac{\triangle C_1C_2C_3 - \triangle D_1D_2D_3}{\triangle A_1A_2A_3} = 3$ ，以及  $\frac{\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3}{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ （下文有證明此性質）。



$$((\text{Area } \triangle C_1C_2C_3) + (\text{Area } \triangle D_1D_2D_3)) = 45.33 \text{ cm}^2$$

$$(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 45.330 \text{ cm}^2$$

$$((\text{Area } \triangle C_1C_2C_3) - (\text{Area } \triangle D_1D_2D_3)) = 42.772 \text{ cm}^2$$

$$3 \cdot (\text{Area } \triangle A_1A_2A_3) = 42.772 \text{ cm}^2$$

圖 3： $\triangle C_1C_2C_3$  與  $\triangle D_1D_2D_3$  的面積不變量

我們發現的面積不變量是原始題目沒有發現的！尤其是  $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3 =$

$\frac{\sqrt{3}}{4} (A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2)$  十分有趣！它的幾何意義是正  $\triangle C_1C_2C_3$  與正  $\triangle D_1D_2D_3$  的

面積總和為以三邊為邊長構造的三個正三角形面積總和。

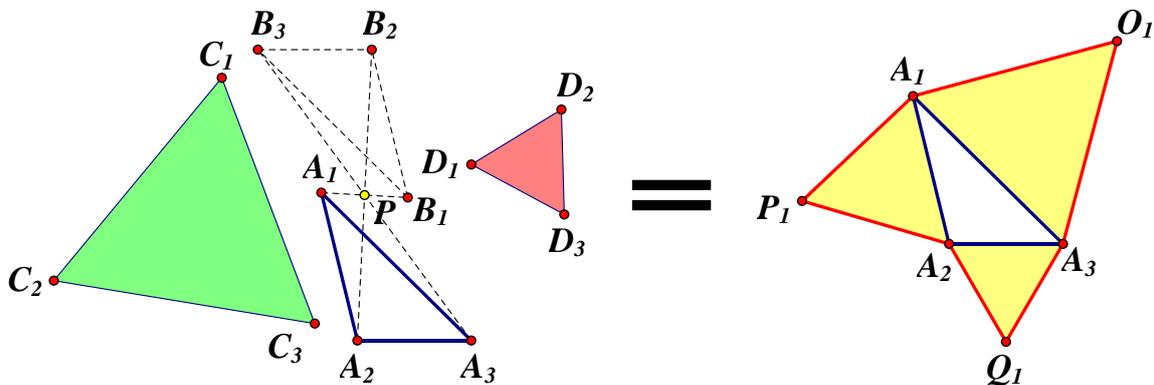


圖 4： $\triangle C_1C_2C_3 + \triangle D_1D_2D_3$  的面積幾何意義

## 二、本研究預計的推廣探究方向

因為點  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  分別是點  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  關於  $P$  點為點對稱中心的對稱點，因此  $\triangle A_1A_2A_3$  與  $\triangle B_1B_2B_3$  為全等形且互為點對稱圖形，所以我們把這個問題看作由兩個全等形構造的衍伸圖形  $\triangle C_1C_2C_3$  與  $\triangle D_1D_2D_3$  的性質。

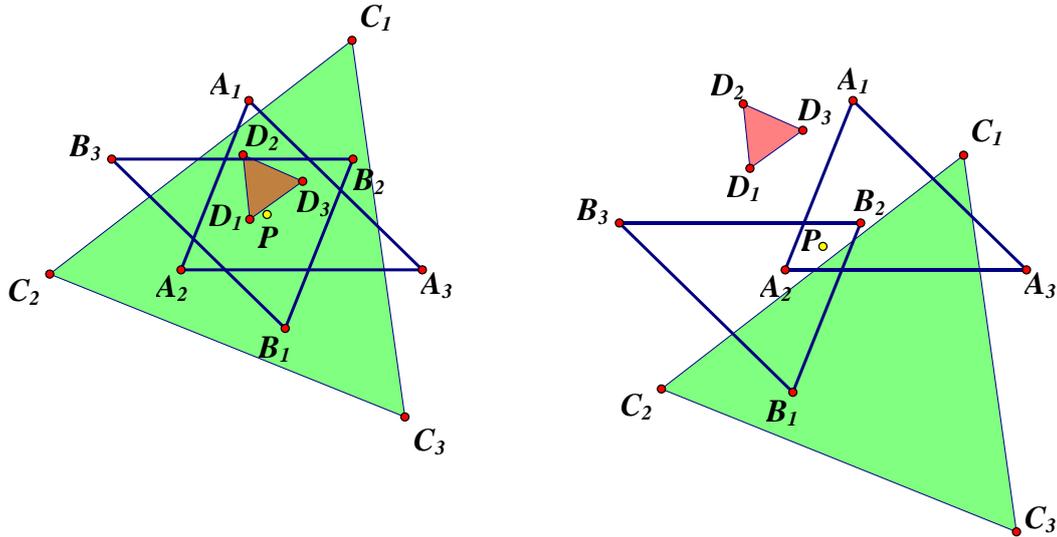


圖 5：全等形構造的衍伸圖形

針對這個有趣的問題，我們發現其發展性很高，本研究主要針對三角形、四邊形的衍伸圖形性質完整刻劃，最後推廣到任意封閉多邊形，本研究有三個一般化推廣探究方向。

第一，給定多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  與原點  $P$ ，構造點  $B_k$  滿足有向角  $\angle A_kPB_k = \varphi$  而得出全等多邊形  $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, n$  且  $0 < \varphi < 2\pi$ 。

第二，不同的頂點連線方式  $\overline{A_kB_{k+m}}$ ，其中  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

第三，以  $\overline{A_kB_{k+m}}$  為底邊且底角為  $\theta$  來逆時鐘構造等腰  $\triangle A_kB_{k+m}C_k$  以及順時鐘構造等腰  $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ 。

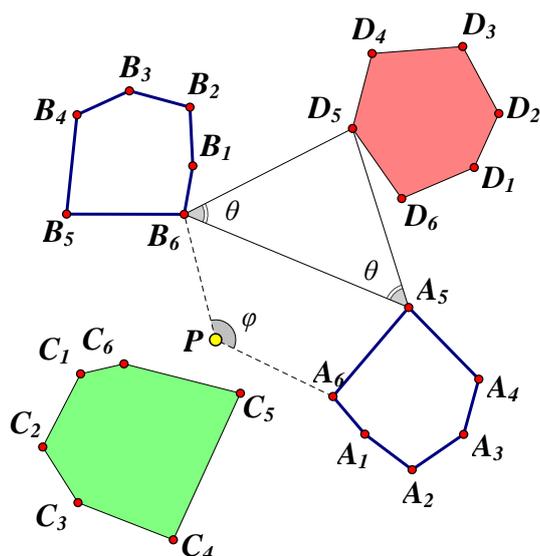


圖 6：兩個全等形構造衍伸圖形，以  $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線為例

平面上以原點  $P$  為旋轉中心，給定多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$ ，並旋轉有向角  $\varphi$  得出多邊形  $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，其中  $0 < \varphi < 2\pi$ 。考慮不同頂點的連線  $\overline{A_k B_{k+m}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$  且  $m = 0, 1, \dots, n-1$ )，並以  $\overline{A_k B_{k+m}}$  為底邊構造底角為  $\theta$  分別逆時鐘與順時鐘構造等腰三角形  $\triangle A_k B_{k+m} C_k$  與  $\triangle A_k B_{k+m} D_k$ ，探討其衍伸的封閉多邊形  $C_1C_2C_3 \dots C_n$  與多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$  的定性性質與定量性質。

一般來說，幾何學中的三角形與四邊形的性質十分豐富，當推廣到  $n$  邊形後，由於邊與角的限制性就變弱很多，自然導致許多在三角形或四邊形的定性性質都會喪失，因此本研究先把焦點放在刻劃三角形與四邊形的衍伸圖形之性質。後續推廣到  $n$  邊形時，我們企圖找尋一些規律，並且設定角度關係，讓結構變強，也給出不少漂亮的性質。

### 三、研究目的

以下的研究目的（一）與（二）為 2022 年 8 月全國科展覽會完成的內容。隨後我們持續進行更一般化的研究，將  $\angle A_k P B_k = \varphi$  推廣到任意實數而有以下研究目的（三）與研究目的（四），我們透過矩陣變化的方法找出本研究衍伸圖形幾何結構，以更高的觀點來處理並且給出完整且漂亮的性質。

（一）當  $\angle A_k P B_k = \varphi = \pi$  構造下的兩個全等  $\triangle A_1A_2A_3$  與  $B_1B_2B_3$ 。

1. 刻劃以  $\overline{A_k B_k}$  為邊，構造正三角形所得出的衍伸圖形  $\triangle C_1C_2C_3$  與  $\triangle D_1D_2D_3$  的

定性與定量性質。其餘兩種情形  $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$  亦同理。

- 刻劃以  $\overline{A_k B_k}$  為邊且底角為  $\theta$  構造等腰三角形所得出的衍伸圖形  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  的定性與定量性質。其餘兩種連線  $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$  亦同理。

(二) 當  $\angle A_k P B_k = \varphi = \pi$  構造下的兩個全等四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  與  $B_1 B_2 B_3 B_4$ 。

- 刻劃以  $\overline{A_k B_k}$  為邊且底角為  $\theta$ ，構造等腰三角形所得出的衍伸圖形四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的定性與定量性質。其餘三種連線亦同理。
- 刻劃探討四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  與  $B_1 B_2 B_3 B_4$  為平行四邊形，其衍伸圖形四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的定性與定量性質。

(三) 分別刻劃當  $\angle A_k P B_k = \varphi = \frac{\pi}{2}$  構造下的兩個全等三角形及四邊形的不同連線與任意等腰（底角為  $\theta$ ）構造的衍伸圖形之定性與定量性質。

(四) 分別刻劃當  $\angle A_k P B_k = \varphi$  為任意實數構造下的兩個全等封閉  $n$  邊形的不同連線與任意等腰（底角為  $\theta$ ）構造的衍伸圖形之定性與定量性質。

## 貳、研究架構

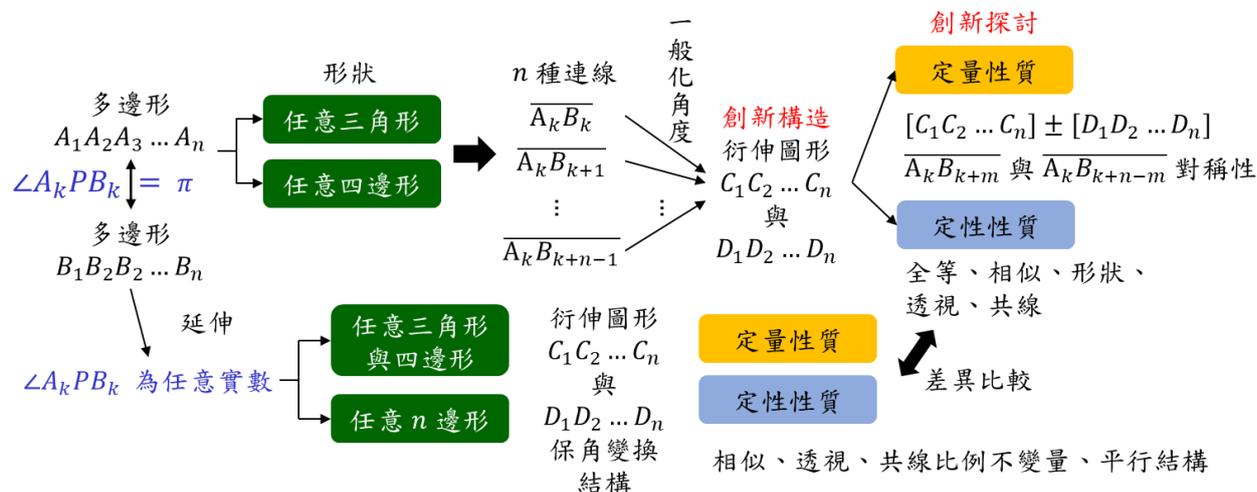


圖 7：研究架構圖。

## 參、研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體、線上計算網站 WolframAlpha

## 肆、預備知識

符號 1. (有向面積) 本文約定平面上封閉凸(凹)多邊形  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$  的有向面積以符號

$[P_1P_2P_3 \dots P_n]$  表示，頂點逆時鐘方向則有向面積為正；順時鐘方向則有向面積為負。此外，本文將多邊形  $P_1P_2P_3 \dots P_n$  簡稱為多邊形  $P$ 。

**預備定理 2. (測量師公式) [2]** 平面上封閉凸（凹）多邊形  $P_1P_2P_3 \dots P_n$  的頂點坐標為

$$P_k(x_k, y_k), \text{ 則其有向面積為 } [P_1P_2P_3 \dots P_n] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$

其中  $x_{n+k} = x_k$ 、 $y_{n+k} = y_k$ 。

**預備性質 3. (平移不變性)**

$$(1) \text{ 行列式的級數和 } \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m+h} \end{vmatrix}。$$

$$(2) \text{ 行列式的級數和 } \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m} \\ y_{k+h} & y_{k+m+h} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m} \end{vmatrix}。$$

其中  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 、 $h = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

**預備性質 4. (矩陣運算性質)** 若為  $r$  實數， $E$ 、 $F$ 、 $G$  為矩陣。

$$(1) E(F + G) = EF + EG ; (E + F)G = EG + FG。$$

$$(2) r(EF) = (rE)F = E(rF)。$$

**預備性質 5. (旋轉變換)** 平面上有一點  $A_k(x_k, y_k)$  關於原點  $(0, 0)$  旋轉有向角  $\varphi$  變換為

點  $B_k(x'_k, y'_k)$ ，則  $\begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ 。顯然，當  $\varphi = \pi$  時， $B_k(-x_k, -y_k)$ ；當

$\varphi = \frac{\pi}{2}$  時， $B_k(-y_k, x_k)$ 。

**預備性質 6. (保角變換)** 對於  $E$  為一個  $2 \times 2$  階的實矩陣， $x$ 、 $y$  為平面上實向量。若

線性變換  $E$  不改變兩向量夾角，即  $\frac{x^T y}{\|x\| \|y\|} = \frac{(Ex)^T (Ey)}{\|Ex\| \|Ey\|}$ ，則稱  $E$  為保角 (angle-

preserving) 變換，該矩陣滿足  $E^T E = E E^T = \lambda I$ 。當  $\lambda = 1$  時， $E$  為保長變換 (length-preserving)。

## 伍、研究過程與結果

平面上有全等的凸（凹）多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  與  $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ，我們約定其頂點坐標  $A_k(x_k, y_k)$  方向為逆時鐘，其中  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

因為我們以多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  與  $B_1B_2B_3 \dots B_n$  的頂點連線作為底邊，構造底角為  $\theta$  的等腰三角形，所以先建構工具，以  $\overline{PQ}$  底邊構造底角為  $\theta$  的等腰  $\triangle PQC$  與  $\triangle PQD$  的  $C$  點與  $D$  點坐標。

**性質 1.** 若點坐標  $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ ，則可得等腰三角形的頂點  $C$  與  $D$  點的坐標

$$C \left( \frac{1}{2}(x_Q + x_P) - \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) + \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right)$$

$$D \left( \frac{1}{2}(x_Q + x_P) + \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) - \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right)$$

**證明：**如圖，令  $\overline{PQ}$  中點為  $M$ ，過  $P$  作鉛垂線，過  $Q$  作水平線，兩線交於  $R$  點。過  $C$  作鉛垂線，過  $M$  作水平線，兩線交於  $N$  點，可得出  $\triangle QPR \sim \triangle CMN$  ( $AA$  相似)。

考慮  $\frac{\overline{CM}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CM}}{2 \times \overline{QM}} = \frac{1}{2} \times \tan \theta$ ，所以  $\overline{MN} = \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P)$ 、 $\overline{CN} = \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P)$ 。

故  $C$  點坐標為

$$C \left( \frac{1}{2}(x_Q + x_P) - \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) + \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right)$$

同理可得  $D$  點坐標為

$$D \left( \frac{1}{2}(x_Q + x_P) + \frac{\tan \theta}{2}(y_Q - y_P), \frac{1}{2}(y_Q + y_P) - \frac{\tan \theta}{2}(x_Q - x_P) \right)$$

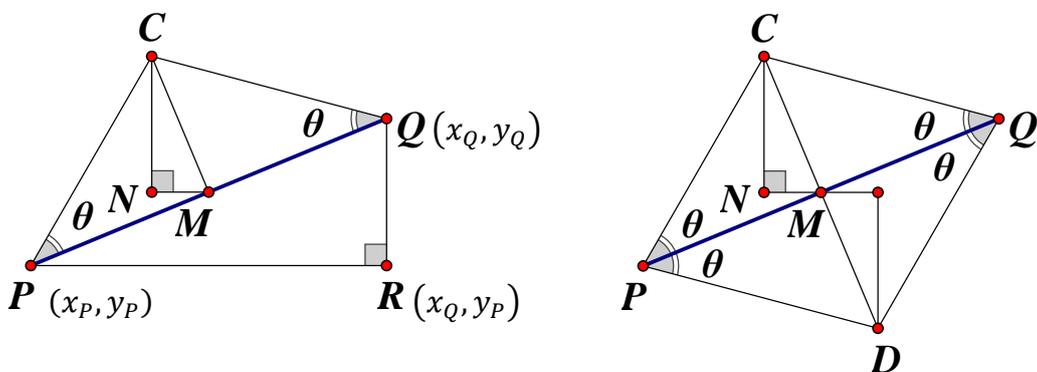


圖 8：等腰三角形的頂點坐標

□

## 一、當 $\varphi = \pi$ 構造下的兩個全等三角形的衍伸圖形性質

(一) 以  $\overline{A_k B_k}$  為底邊且底角  $\theta = \frac{\pi}{3}$  構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的  $\triangle A_1 A_2 A_3$  與  $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以  $\overline{A_k B_k}$  為邊構造正  $\triangle A_k B_k C_k$  (順時鐘方向) 與正  $\triangle A_k B_k D_k$  (逆時鐘方向)。

已知  $A_k(x_k, y_k)$  與  $B_k(-x_k, -y_k)$ ，根據性質 1，當  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時，我們可得出坐標：

$C_k(\sqrt{3}y_k, -\sqrt{3}x_k)$  與  $D_k(-\sqrt{3}y_k, \sqrt{3}x_k)$ 。

以  $\overline{A_k B_k}$  為底邊構造正  $\triangle A_k B_k C_k$  與  $\triangle A_k B_k D_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質 2. (1)  $\triangle C_1 C_2 C_3 \cong \triangle D_1 D_2 D_3$  且  $\triangle C_1 C_2 C_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3$ 。

(2) 面積不變量  $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 6$ 。

證明：因為  $C_k(\sqrt{3}y_k, -\sqrt{3}x_k)$ ，所以

$$\overline{C_1 C_2} = \sqrt{(\sqrt{3}(y_1 - y_2))^2 + (-\sqrt{3}(x_1 - x_2))^2} = \sqrt{3} \times \overline{A_1 A_2}$$

同理可得  $\overline{C_2 C_3} = \sqrt{3} \times \overline{A_2 A_3}$  與  $\overline{C_3 C_1} = \sqrt{3} \times \overline{A_3 A_1}$ 。同樣的方法也可得出  $\overline{D_1 D_2} = \sqrt{3} \times \overline{A_1 A_2}$ 、 $\overline{D_2 D_3} = \sqrt{3} \times \overline{A_2 A_3}$  與  $\overline{D_3 D_1} = \sqrt{3} \times \overline{A_3 A_1}$ ，所以  $\triangle C_1 C_2 C_3 \cong \triangle D_1 D_2 D_3$  (SSS 全等) 且  $\triangle C_1 C_2 C_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3$ 。

透過全等與相似則可得出  $\triangle C_1 C_2 C_3 = \triangle D_1 D_2 D_3 = 3 \triangle A_1 A_2 A_3$ ，故有向面積不變量

$$\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0 \text{ 且 } \frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 6$$

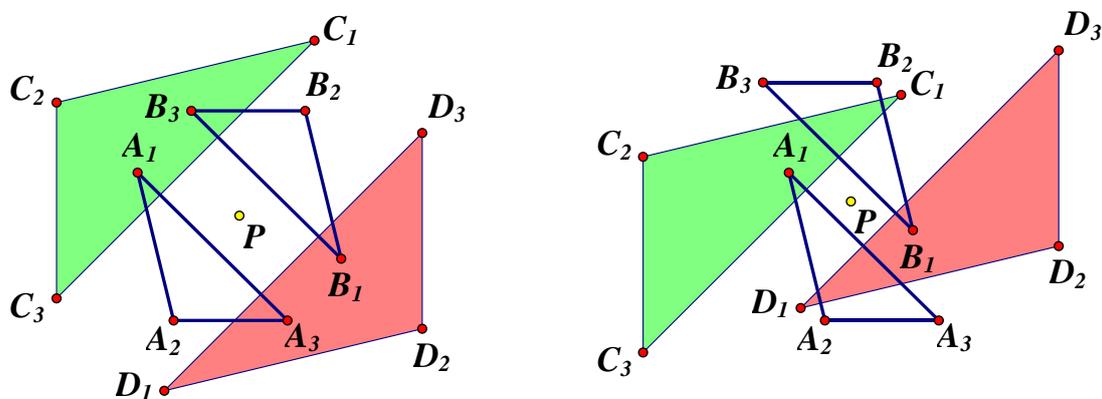


圖 9：以  $\overline{A_k B_k}$  為邊構造的衍伸圖形

□

(二) 以  $\overline{A_k B_{k+1}}$  為底邊且底角  $\theta = \frac{\pi}{3}$  構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的  $\triangle A_1 A_2 A_3$  與  $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以  $\overline{A_k B_{k+1}}$  為邊構造正  $\triangle A_k B_{k+1} C_k$  (順時鐘方向) 與正  $\triangle A_k B_{k+1} D_k$  (逆時鐘方向)。

已知  $A_k(x_k, y_k)$  與  $B_{k+1}(-x_{k+1}, -y_{k+1})$ ，根據性質 1，當  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時，可得出坐標：

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+1} - x_k) \right).$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+1} - x_k) \right).$$

以  $\overline{A_k B_{k+1}}$  為底邊構造正  $\triangle A_k B_{k+1} C_k$  與  $\triangle A_k B_{k+1} D_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質 3. (1)  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  恆為正三角形。

(2) 面積  $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 3$ 。

證明：因為  $C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+1}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_k - x_{k+1}) \right)$ ，所以

$$\overline{C_k C_{k+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( (x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}) - \sqrt{3}(-y_k + y_{k+2}) \right)^2 + \left( (y_k - 2y_{k+1} + y_{k+2}) + \sqrt{3}(-x_k + x_{k+2}) \right)^2}$$

利用平方差計算  $\overline{C_1 C_2}^2 - \overline{C_2 C_3}^2$

$$= \frac{1}{4} \left( \left( 3(-x_2 + x_3) - \sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) \right) \left( (2x_1 - x_2 - x_3) - \sqrt{3}(-y_2 + y_3) \right) + \right.$$

$$\left. \left( 3(-y_2 + y_3) + \sqrt{3}(-2x_1 + x_2 + x_3) \right) \left( (2y_1 - y_2 - y_3) + \sqrt{3}(-x_2 + x_3) \right) \right).$$

$$= \frac{1}{4} \left( \left( 3(-x_2 + x_3) - \sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) \right) \left( (2x_1 - x_2 - x_3) - \sqrt{3}(-y_2 + y_3) \right) + \right.$$

$$\left. \left( \sqrt{3}(-y_2 + y_3) - (2x_1 - x_2 - x_3) \right) \left( -\sqrt{3}(-2y_1 + y_2 + y_3) + 3(-x_2 + x_3) \right) \right).$$

$$= 0$$

所以  $\overline{C_1 C_2} = \overline{C_2 C_3}$ ，同理可得  $\overline{C_2 C_3} = \overline{C_3 C_1}$ 。對於對稱構造的  $D_k$  點，同樣方法也可以得

出  $\overline{D_1 D_2} = \overline{D_2 D_3} = \overline{D_3 D_1}$ 。因此  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  恆為正三角形

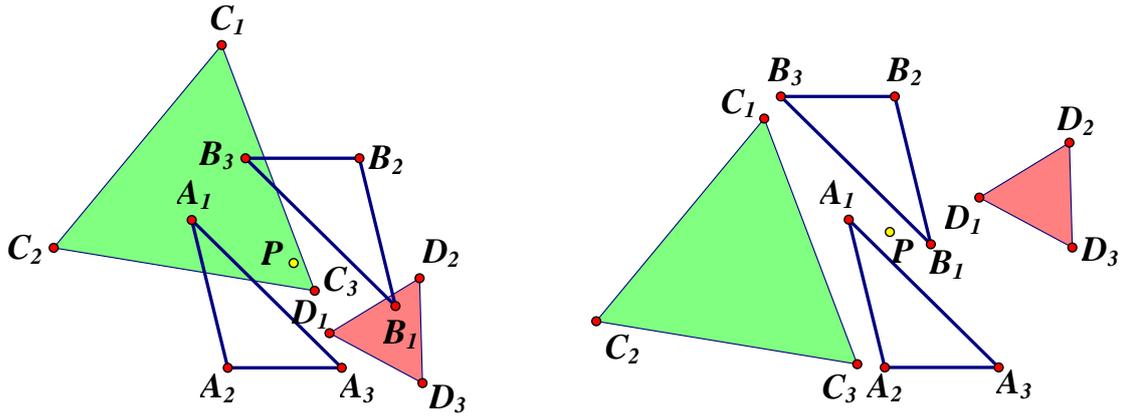


圖 10：以  $\overline{A_k B_{k+1}}$  為邊構造的衍伸圖形（必為正三角形）

接下來討論面積，因為頂點  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  恆為順時鐘方向，考慮有向面積可得

有向面積  $[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]$

$$= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \left( \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \sqrt{3}(y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \sqrt{3}(y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \sqrt{3}(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \sqrt{3}(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \sqrt{3}(y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \sqrt{3}(y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \sqrt{3}(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \sqrt{3}(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right).$$

利用行列式基本運算性質進行拆解可得

$[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 \left( \begin{vmatrix} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right).$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 (2x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+2} + 2y_{k+1}^2 - 2y_k y_{k+2}).$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2) \quad (\text{因為 } \sum_{k=1}^3 x_{k+1}^2 = \sum_{k=1}^3 x_{k+2}^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_1}^2 + \overline{A_3 A_2}^2).$$

利用相同方式我們可得出面積  $[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3] = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} = 3[A_1 A_2 A_3]$

□

(三) 以  $\overline{A_k B_{k+2}}$  為底邊且底角  $\theta = \frac{\pi}{3}$  構造的衍伸圖形

對於任意點對稱的  $\triangle A_1 A_2 A_3$  與  $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以  $\overline{A_k B_{k+2}}$  為邊構造正  $\triangle A_k B_{k+2} C_k$

(順時鐘方向) 與正  $\triangle A_k B_{k+2} D_k$  (逆時鐘方向)。

已知  $A_k(x_k, y_k)$  與  $B_{k+2}(-x_{k+2}, -y_{k+2})$ ，根據性質 1，當  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時，可得出坐標：

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+2} - x_k) \right).$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_{k+2} - x_k) \right).$$

以  $\overline{A_k B_{k+2}}$  為底邊構造正  $\triangle A_k B_{k+2} C_k$  與  $\triangle A_k B_{k+2} D_k$ ， $k = 1, 2, 3$ 。

性質 4. (1)  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  恆為正三角形。

(2) 面積  $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 3$ 。

證明：因為以  $\overline{A_k B_{k+2}}$  為邊構造的衍伸形為  $x_k$  與  $x_{k+2}$  的組合 ( $y_k$  與  $y_{k+2}$  的組合)，

當  $k = 1, 2, 3$  時，根據預備性質 3 可得  $x_k$  與  $x_{k+2}$  的組合運算等同  $x_{k+1}$  與  $x_{k+3}$

( $x_{k+3} = x_k$ ) 的組合運算，此時結果就與性質 3 相同。注意到，因為性質 3 是  $x_k$  與  $x_{k+1}$  的組合運算，這裡的性質 4 是  $x_{k+1}$  與  $x_k$  的組合運算，兩者方向相反，所以在有向面積下，反而有向面積  $[C_1 C_2 C_3]$  為負且  $[D_1 D_2 D_3]$  為正，如下圖所示。

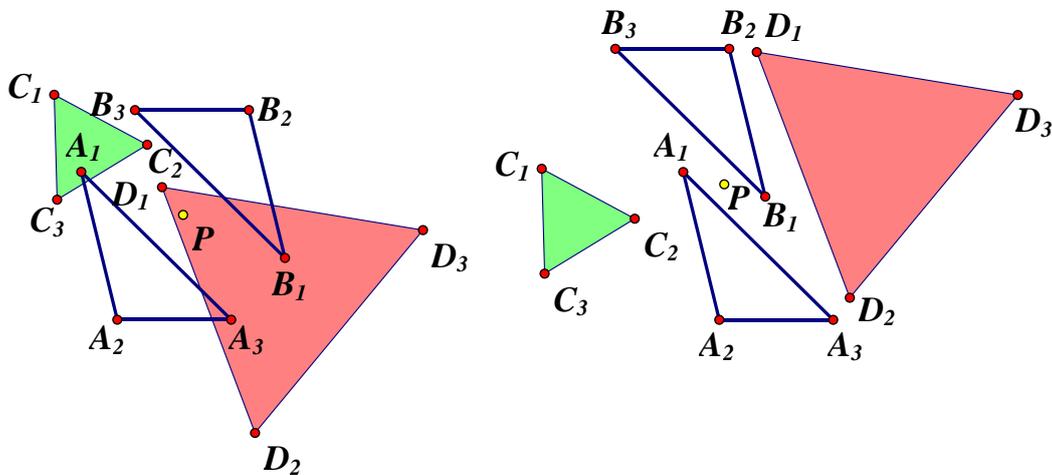


圖 11：以  $\overline{A_k B_{k+2}}$  為邊構造的衍伸圖形（必為正三角形）

□

【幾何意義】在性質 3 與性質 4 中，我們發現的結果十分有趣！

$$\triangle C_1 C_2 C_3 + \triangle D_1 D_2 D_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2)$$

它的幾何意義是「正  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與正  $\triangle D_1 D_2 D_3$  的面積總和等於『以三邊為邊長構造的三個正三角形面積總和』」（這裡的  $\triangle C_1 C_2 C_3$ 、 $\triangle D_1 D_2 D_3$  不是有向面積）。

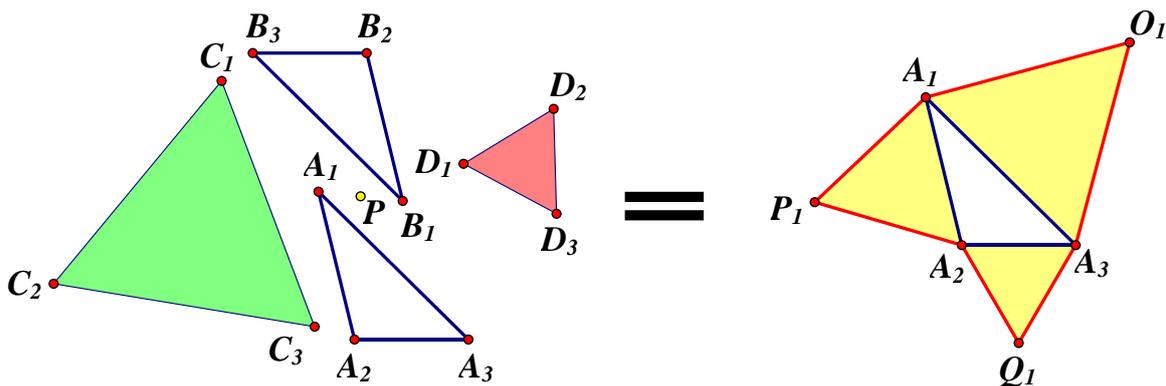


圖 12： $\theta = \frac{\pi}{3}$  時， $\overline{A_k B_{k+1}}$  與  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線的衍伸圖形的面積幾何意義

(四) 一般化：分別以  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$  為底邊且底角  $\theta$  構造的衍伸圖形

我們將探討角度一般化的情形。對於任意點對稱的  $\triangle A_1 A_2 A_3$  與  $\triangle B_1 B_2 B_3$ ，以  $\overline{A_k B_{k+m}}$  為底邊且底角為  $\theta$  來構造等腰  $\triangle A_k B_{k+m} C_k$ （順時鐘方向）與  $\triangle A_k B_{k+m} D_k$ （逆時鐘方向），其中  $k = 1, 2, 3$  且  $m = 0, 1, 2$ 。

已知  $A_k(x_k, y_k)$  與  $B_{k+m}(-x_{k+m}, -y_{k+m})$ ，根據性質 1，我們有坐標：

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

**定理 5.** (1) 當  $m = 0$  時， $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 2 \tan^2 \theta$ 。

(2) 當  $m = 1$  時， $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\tan \theta}{4}$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$ 。

(3) 當  $m = 2$  時， $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\tan \theta}{4}$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}$ 。

**證明：**

1. 當  $m = 0$  時， $C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)$ 、 $D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$ ，所以可得  $\triangle$

$C_1 C_2 C_3 \cong \triangle D_1 D_2 D_3$  且  $\triangle C_1 C_2 C_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3$ ，縮放比率為  $\tan \theta$ ，因此我們可以得出

$$[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3] = 2 \tan^2 \theta \times [A_1 A_2 A_3] \text{ 且 } [C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3] = 0。$$

2. 因為  $k = 1, 2, 3$ ，所以  $m = 1$  與  $m = 2$  根據預備性質 3 可發現對稱輪轉，我們只需

要證明其中一個即可。以下證明  $m = 1$  的情形。

先討論有向面積  $[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \left( \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| - \right. \\
&\quad \left. \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^3 \left( \left| \begin{array}{cc} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^3 (2x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+2} + 2y_{k+1}^2 - 2y_k y_{k+2}). \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^3 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2). \\
&= \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_1}^2 + \overline{A_3 A_2}^2).
\end{aligned}$$

再討論  $[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]$  的面積

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \left( \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| + \right. \\
&\quad \left. \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 2 \left( \left| \begin{array}{cc} x_k - x_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & y_{k+1} - y_{k+2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+1}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \left( 3 \times \left| \begin{array}{cc} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{array} \right| - \tan^2 \theta \times \left| \begin{array}{cc} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{array} \right| \right). \\
&= \frac{1}{4} \times (6 \Delta A_1 A_2 A_3 - \tan^2 \theta (-2 \Delta A_1 A_2 A_3)) = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2} \times \Delta A_1 A_2 A_3.
\end{aligned}$$

□

**【幾何意義】** 在定理 5，我們同樣給出以下有向面積不變量的幾何意義。

$$\left| \frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_1}^2} \right| = \frac{\tan \theta}{4} (\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + \overline{A_3 A_1}^2)$$

當  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  的頂點方向相反時（一個順時鐘方向，另一個逆時鐘方向），則  $\triangle C_1 C_2 C_3$  與  $\triangle D_1 D_2 D_3$  的面積總和等於「以三邊為底邊構造的三個底角為  $\theta$  的等腰三角形面積總和」。

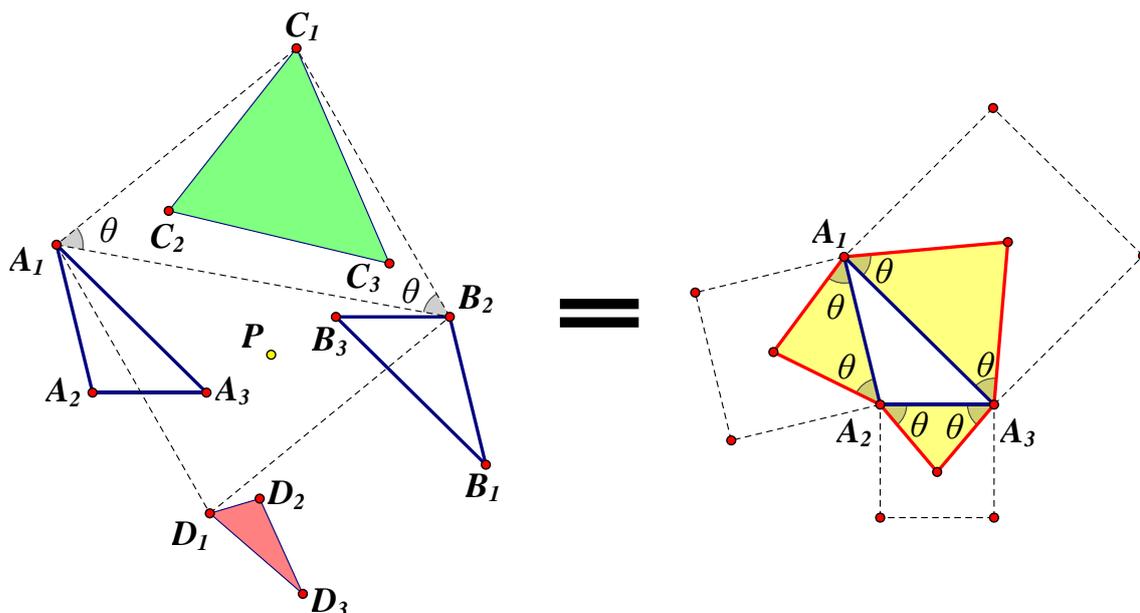


圖 13：一般化角度  $\theta$  時， $\overline{A_k B_{k+1}}$  與  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線的衍伸圖形的面積幾何意義

□

## 二、當 $\varphi = \pi$ 構造下的兩個全等四邊形的衍伸圖形性質

(一) 分別以  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$  為底邊且底角  $\theta$  構造的衍伸圖形

我們接續推廣四邊形一般化的情形。對於任意點對稱的凸(凹)四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  與  $B_1 B_2 B_3 B_4$ ，以  $\overline{A_k B_{k+m}}$  為底邊且底角為  $\theta$  來構造等腰  $\triangle A_k B_{k+m} C_k$  (順時鐘方向) 與  $\triangle A_k B_{k+m} D_k$  (逆時鐘方向)，其中  $k = 1, 2, 3$  且  $m = 0, 1, 2$ 。根據性質 1，我們有坐標：

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+m}) \right).$$

**定理 6.** 當  $m = 0$  ( $\overline{A_k B_k}$  連線) 時

- (1) 全等與相似：四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4 \cong$  四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4 \sim$  四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$ 。
- (2) 有向面積不變量  $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 0$  且  $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 2 \tan^2 \theta$ 。
- (3)  $P$  點為兩組對應的四邊形的透視中心。

**證明：**在四邊形  $\overline{A_k B_k}$  連線的情況下，可得出  $C_k(\tan \theta \times y_k, -\tan \theta \times x_k)$ 、

$D_k(-\tan \theta \times y_k, \tan \theta \times x_k)$ ，即可證明全等及相似。又  $C_k$  點與  $D_k$  點對稱於  $P(0,0)$ ，

因此  $P$  為四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_3D_4D_1D_2$  的透視中心，也是四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  與四邊形  $B_1B_2B_3B_4$  的透視中心，如下圖所示。

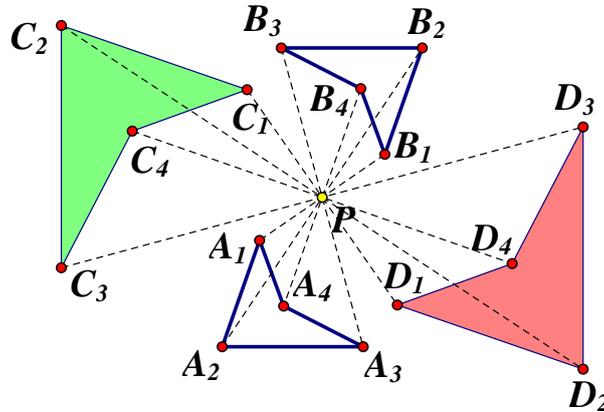


圖 14： $P$  點為透視中心且相似

□

定理 7. (1) 當  $m = 1$  ( $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線) 時

$$\frac{[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = \frac{\tan \theta}{4} \quad \text{且} \quad \frac{[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta .$$

(2) 當  $m = 3$  ( $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線) 時

$$\frac{[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_1^2 + A_4A_2^2} = -\frac{\tan \theta}{4} \quad \text{且} \quad \frac{[C_1C_2C_3C_4] + [D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2 \theta .$$

證明：在四邊形下，因為  $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線與  $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線是對稱可輪換，所以我們僅須證明  $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線情形即可。

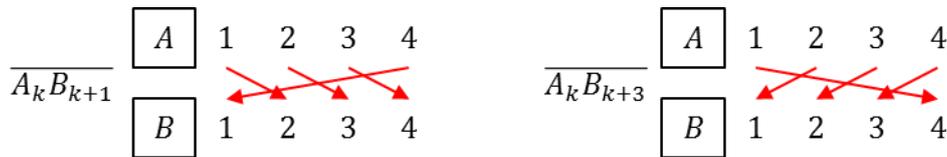


圖 15： $\overline{A_k B_{k+1}}$  與  $\overline{A_k B_{k+3}}$  的對稱輪換。

先討論有向面積  $[C_1C_2C_3C_4] - [D_1D_2D_3D_4]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left( \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} - \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ & = \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^4 \left( \begin{vmatrix} y_k + y_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ -(x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & y_{k+1} + y_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & -(x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) . \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \sum_{k=1}^4 ((x_k - x_{k+2})^2 + (y_k - y_{k+2})^2).$$

$$= \frac{\tan \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2 + \overline{A_3 A_1}^2 + \overline{A_4 A_2}^2).$$

再討論有向面積  $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left( \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} + \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} - \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} - \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & x_{k+1} - x_{k+2} - \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ y_k - y_{k+1} + \tan \theta (x_k + x_{k+1}) & y_{k+1} - y_{k+2} + \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 2 \left( \begin{vmatrix} x_k - x_{k+1} & x_{k+1} - x_{k+2} \\ y_k - y_{k+1} & y_{k+1} - y_{k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+1}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+2}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+1}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+2}) \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \left( 2 \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} - 2 \tan^2 \theta \times \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times (4 \times [A_1 A_2 A_3 A_4] - \tan^2 \theta (-4 \times [A_1 A_2 A_3 A_4])) = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4]. \end{aligned}$$

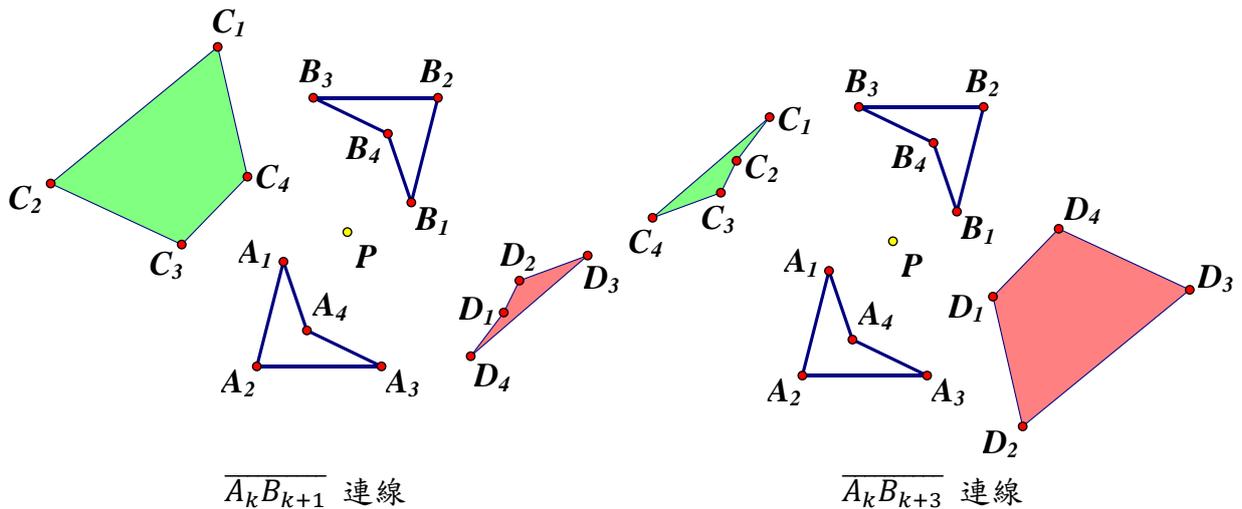


圖 16 :  $[C_1 C_2 C_3 C_4] \pm [D_1 D_2 D_3 D_4]$  面積不變量

□

### 【幾何意義】

當四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的頂點方向相反時（一個順時鐘方向，另一個逆時鐘方向），則四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的面積總和等於「分別以四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  的對角線作為一菱形的對角線且其所平分的內角為  $2\theta$  的菱形面積總和」。

如下圖，四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4 +$  四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4 =$  菱形  $A_1 E_2 A_3 E_4 +$  菱形  $F_1 A_2 F_3 A_4$ 。

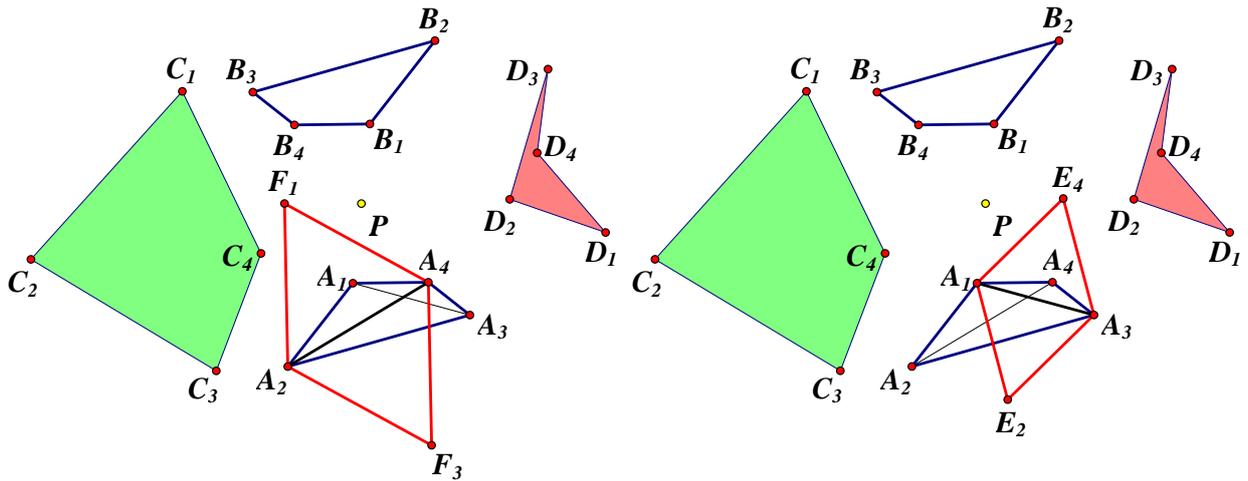


圖 17：四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  + 四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  的面積幾何意義

接下來討論  $\overline{A_k B_{k+2}}$ 。結果很有趣！此時四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  恆全等且為點對稱圖形，點  $C_k$  點與  $D_{k+2}$  對稱於  $P$  點（也是點  $A_k$  與  $B_k$  的對稱中心）。

值得一提的是，對於任意角度  $\theta$ ，四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  有向面積恆等於四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  有向面積，也就是說四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  有向面積恆為定值，不受角度  $\theta$  影響，這一點與前面發現的結果非常不一樣！

**定理 8.** 當  $m = 2$  ( $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線) 時

- (1)  $P$  點為兩組對應的四邊形的透視中心。
- (2) 有向面積  $[C_1C_2C_3C_4] = [D_1D_2D_3D_4] = [A_1A_2A_3A_4]$ 。

**證明：**考慮點  $C_k$  與  $D_{k+2}$  坐標：

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - x_{k+2}) - \frac{\tan \theta}{2}(-y_k - y_{k+2}), \frac{1}{2}(y_k - y_{k+2}) + \frac{\tan \theta}{2}(-x_k - x_{k+2}) \right).$$

$$D_{k+2} \left( \frac{1}{2}(x_{k+2} - x_{k+4}) + \frac{\tan \theta}{2}(-y_{k+2} - y_{k+4}), \frac{1}{2}(y_{k+2} - y_{k+4}) - \frac{\tan \theta}{2}(-x_{k+2} - x_{k+4}) \right).$$

注意到， $x_{k+4} = x_k$ 、 $y_{k+4} = y_k$ ，所以  $C_k$  點與  $D_{k+2}$  點對稱於  $P(0,0)$ ，因此  $P$  為四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_3D_4D_1D_2$  的透視中心，也是四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  與四邊形  $B_1B_2B_3B_4$  的透視中心，如下圖所示。

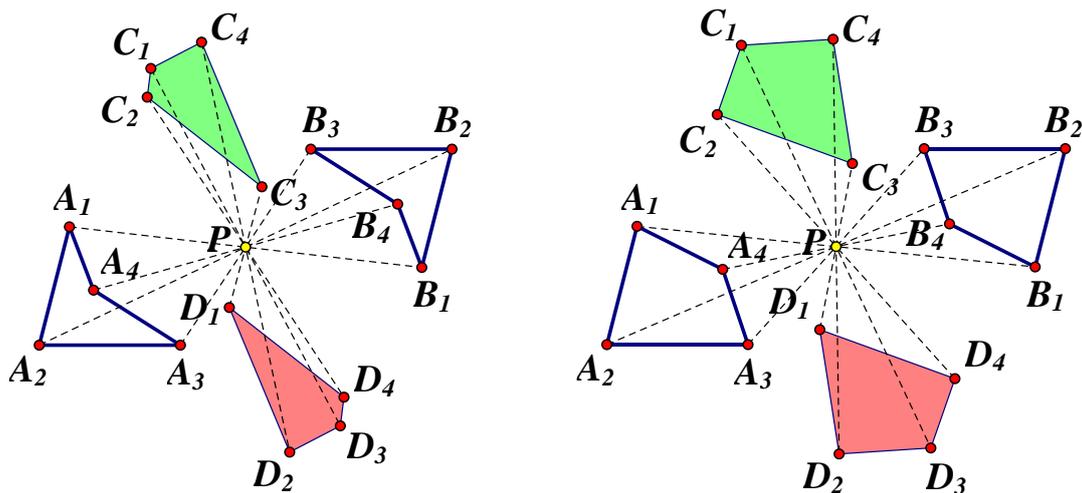


圖 18：P 點為透視中心

我們繼續討論有向面積

$$[C_1C_2C_3C_4] = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} + \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & x_{k+1} - x_{k+3} + \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ y_k - y_{k+2} - \tan \theta (x_k + x_{k+2}) & y_{k+1} - y_{k+3} - \tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix}$$

注意到， $\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+2}) & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix} = 0$

$$\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} \tan \theta (y_k + y_{k+2}) & x_{k+1} - x_{k+3} \\ -\tan \theta (x_k + x_{k+2}) & y_{k+1} - y_{k+3} \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_{k+1} - x_{k+3} & \tan \theta (y_{k+2} + y_{k+4}) \\ y_{k+1} - y_{k+3} & -\tan \theta (x_{k+2} + x_{k+4}) \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} & \tan \theta (y_{k+1} + y_{k+3}) \\ y_k - y_{k+2} & -\tan \theta (x_{k+1} + x_{k+3}) \end{vmatrix}.$$

因此  $[C_1C_2C_3C_4] = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} x_k - x_{k+2} & x_{k+1} - x_{k+3} \\ y_k - y_{k+2} & y_{k+1} - y_{k+3} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \left( 4 \times \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \right) = [A_1A_2A_3A_4].$$

同理可得  $[D_1D_2D_3D_4] = [A_1A_2A_3A_4]$

有趣的是，四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  ( $D_1D_2D_3D_4$ ) 有向面積恆為定值，不受角度  $\theta$  的影響。

□

(二) 特殊化：四邊形的衍伸圖形為正方形

我們好奇衍伸圖形四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  何時為特殊四邊形呢？

**性質 9.**  $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線 ( $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線)

若四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  為平行四邊形且  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ，則四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$

恆為正方形。

證明：

因為四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  為平行四邊形，令坐標  $A_1(x_1, y_1)$ 、 $A_2(x_2, y_2)$  和  $A_3(x_3, y_3)$ ，則  $A_4(x_3 + x_1 - x_2, y_3 + y_1 - y_2)$ 。當  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ，以下只須討論  $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線即可 ( $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線為對稱可輪換)。由性質 1 可得出四點坐標：

$$C_1\left(\frac{x_1-x_2}{2} + \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}\right), C_2\left(\frac{x_2-x_3}{2} + \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2-y_3}{2} - \frac{x_2+x_3}{2}\right),$$

$$C_3\left(\frac{-x_1+x_2}{2} + \frac{y_1-y_2+2y_3}{2}, \frac{-y_1+y_2}{2} - \frac{x_1-x_2+2x_3}{2}\right), C_4\left(\frac{-x_2+x_3}{2} + \frac{2y_1-y_2+y_3}{2}, \frac{-y_2+y_3}{2} - \frac{2x_1-x_2+x_3}{2}\right).$$

1. 考慮  $\overline{C_1 C_2}^2 - \overline{C_2 C_3}^2$

$$= \frac{1}{4} \left( ((-x_1 + 2x_2 - x_3) + (-y_1 + y_3))^2 + ((-y_1 + 2y_2 - y_3) + (x_1 - x_3))^2 - \right.$$

$$\left. ((-x_1 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3))^2 - ((-y_1 + y_3) + (-x_1 + 2x_2 - x_3))^2 \right) = 0.$$

再考慮斜率  $\overline{C_1 C_2} = \frac{-y_1+2y_2-y_3+x_1-x_3}{-x_1+2x_2-x_3-y_1+y_3}$ 、斜率  $\overline{C_2 C_3} = \frac{-x_1+2x_2-x_3-y_1+y_3}{y_1-2y_2+y_3-x_1+x_3}$ ，相乘等於  $-1$ ，即

$$\overline{C_1 C_2} \perp \overline{C_2 C_3}.$$

2. 同理，當  $A_1$  點坐標由另外三點表示時，可得  $\overline{C_2 C_3} = \overline{C_3 C_4}$  且  $\overline{C_2 C_3} \perp \overline{C_3 C_4}$ ；當  $A_2$  點坐標由另外三點表示時，可得  $\overline{C_3 C_4} = \overline{C_4 C_1}$  且  $\overline{C_3 C_4} \perp \overline{C_4 C_1}$ ；當  $A_3$  點坐標由另外三點表示時，可得  $\overline{C_4 C_1} = \overline{C_1 C_2}$  且  $\overline{C_4 C_1} \perp \overline{C_1 C_2}$ 。

3. 對於四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  亦可用相同方法得出其為正方形。

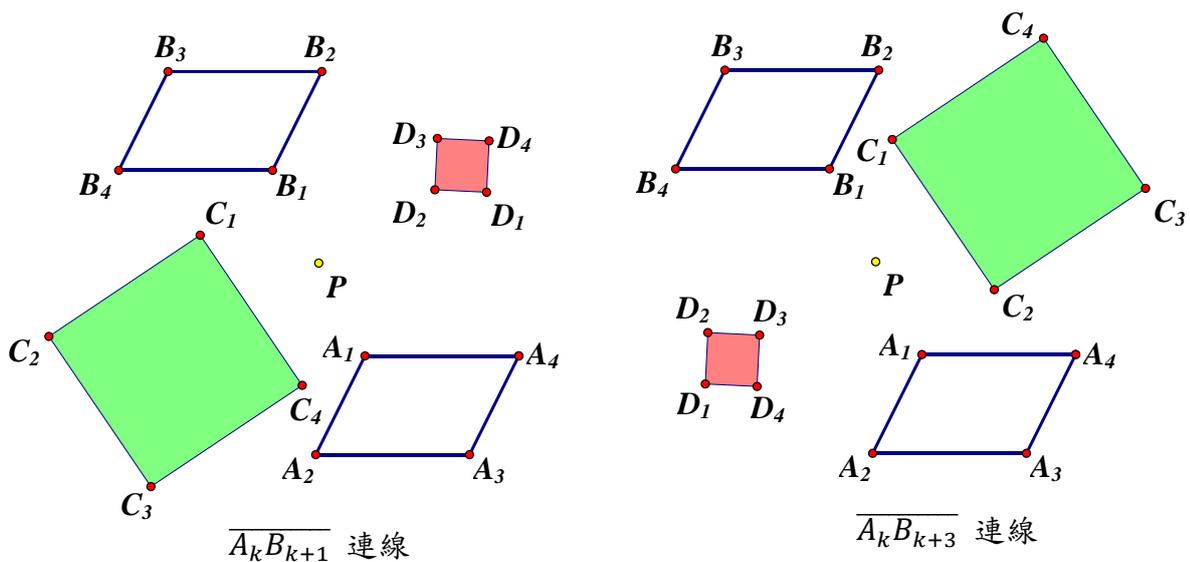


圖 19：四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  恆為正方形



我們將旋轉  $\pi$  下的衍伸三角形與四邊形的定量與定性性質整理，如下表。

表 1：旋轉  $\pi$  下的衍伸三角形之性質 ( $k = 1, 2, 3$ )

連線方式	有向面積 (定量性質)	形狀 (定性性質)
$\overline{A_k B_k}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 0.$ (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = 2 \tan^2 \theta.$	當 $\theta$ 為任意角度時，恆有 (1) $\triangle C_1 C_2 C_3 \cong \triangle D_1 D_2 D_3.$ (2) $\triangle C_1 C_2 C_3 \sim \triangle A_1 A_2 A_3.$
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = \frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：以 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 的各邊為底邊作底角為 $\theta$ 的等腰三角形的面積總和) (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{A[\triangle A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}.$	當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時， $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。
$\overline{A_k B_{k+2}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3] - [D_1 D_2 D_3]}{A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + A_3 A_1^2} = -\frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：如同 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 連線) (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3] + [D_1 D_2 D_3]}{[A_1 A_2 A_3]} = \frac{3 + \tan^2 \theta}{2}.$	當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時， $\triangle C_1 C_2 C_3$ 與 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 恆為正三角形。

表 2：旋轉  $\pi$  下的衍伸四邊形之性質 ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

連線方式	有向面積 (定量性質)	形狀 (定性性質)
$\overline{A_k B_k}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 0.$ (2) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]}{[A_1 A_2 A_3 A_4]} = 2 \tan^2 \theta.$	當 $\theta$ 為任意角度時，恆有 (1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 \cong$ 四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4.$ (2) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4 \sim$ 四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4.$ (3) $P$ 點為兩組對應的四邊形的透視中心。 (4) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 的對角線交點 $S$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的對角線交點 $T$ 與旋轉中心 $P$ 三點共線且有向線段比 $\overline{PS} : \overline{PT} = 1 : -1.$
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $\frac{[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]}{A_1 A_3^2 + A_2 A_4^2 + A_3 A_1^2 + A_4 A_2^2} = \frac{\tan \theta}{4}.$ (幾何意義：分別以四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的	當四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形且 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，恆有四邊

對角線作為一菱形的對角線且其所平分的內角為  $2\theta$ ，此兩菱形的兩個面積總和) 形  $C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  恆為正方形。

$$(2) \frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2\theta.$$

$\overline{A_kB_{k+2}}$

$$(1) \frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 0.$$

$$(2) \frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 2.$$

當  $\theta$  為任意角度時，恆有

(1) 四邊形  $C_1C_2C_3C_4 \cong$  四邊形  $D_1D_2D_3D_4$ 。

(2)  $P$  點為兩組對應的四邊形的透視中心。

(3) 四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  的對角線交點  $S$  與  $D_1D_2D_3D_4$  的對角線交點  $T$  與旋轉中心  $P$  三點共線且有向線段比  $\overline{PS}:\overline{PT} = 1:-1$ 。

$\overline{A_kB_{k+3}}$

$$(1) \frac{[C_1C_2C_3C_4]-[D_1D_2D_3D_4]}{A_1A_3^2+A_2A_4^2+A_3A_1^2+A_4A_2^2} = -\frac{\tan\theta}{4}.$$

(幾何意義：如同  $\overline{A_kB_{k+1}}$  連線)

$$(2) \frac{[C_1C_2C_3C_4]+[D_1D_2D_3D_4]}{[A_1A_2A_3A_4]} = 1 + \tan^2\theta.$$

當四邊形  $A_1A_2A_3A_4$  為平行四邊形且  $\theta = \frac{\pi}{4}$  時，恆有四邊形

$C_1C_2C_3C_4$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  恆為正方形。

### 三、當 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 構造下的兩個全等三角形及四邊形的衍伸圖形性質

考慮封閉多邊形  $A$ ，我們約定其頂點坐標  $A_k(x_k, y_k)$  方向為逆時鐘，其全等的多邊形  $B$ ，其頂點為  $B_k$ ，滿足有向角  $\angle A_kPB_k = \varphi = \frac{\pi}{2}$ 。不失一般性，假設  $P(0,0)$ ，可得坐標  $B_k(-y_k, x_k)$ 。再以  $\overline{A_kB_{k+m}}$  為底邊且底角為  $\theta$ ，順時鐘方向構造等腰  $\triangle A_kB_{k+m}C_k$  與逆時鐘方向構造  $\triangle A_kB_{k+m}D_k$ 。根據性質 1，我們得出有以下  $C_k$  與  $D_k$  的坐標。

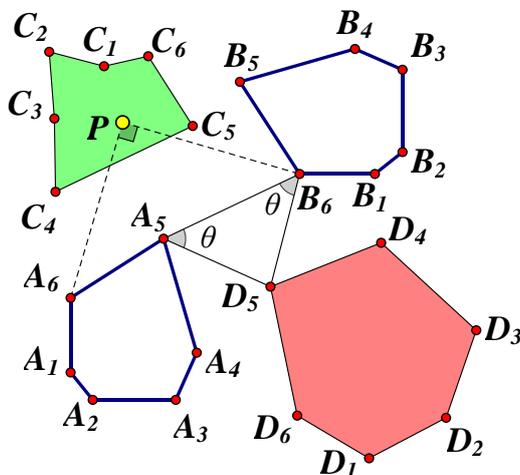


圖 20： $\varphi = \frac{\pi}{2}$  下的衍伸圖形

$$C_k \left( \frac{1}{2}(x_k - y_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(y_k - x_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k + x_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(x_k + y_{k+m}) \right).$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(x_k - y_{k+m}) - \frac{\tan \theta}{2}(y_k - x_{k+m}), \frac{1}{2}(y_k + x_{k+m}) + \frac{\tan \theta}{2}(x_k + y_{k+m}) \right).$$

利用測量師有向面積公式同樣可以給出封閉多邊形的衍伸圖形的定量結果。

**定理 10.** 對於任意封閉多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  與旋轉  $\frac{\pi}{2}$  的多邊形  $B_1B_2B_3 \dots B_n$ ,  $\overline{A_kB_{k+m}}$

連線的衍伸圖形之有向面積

$$(1) [C_1C_2C_3 \dots C_n] - [D_1D_2D_3 \dots D_n] = \frac{\tan \theta}{2} \sum_{k=1}^n \left( \begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+m} \\ y_{k+1} & y_{k+m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m+1} \\ y_k & y_{k+m+1} \end{vmatrix} \right).$$

$$(2) [C_1C_2C_3 \dots C_n] + [D_1D_2D_3 \dots D_n] = (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3 \dots A_n] + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (1 - \tan^2 \theta) (x_k x_{k+m+1} - x_{k+1} x_{k+m} + y_k y_{k+m+1} - y_{k+1} y_{k+m}).$$

**證明：**如前方式利用測量師有向面積公式證明，此處省略過其過程。

□

我們關心的是封閉多邊形  $A$  與多邊形  $B$  是三角形與四邊形時的定性性質。根據頂點坐標與定理 10 可給出下表的豐富性質。有趣的是，旋轉  $\frac{\pi}{2}$  下的衍伸圖形（表 3 與表 4）與旋轉  $\pi$  下的衍伸圖形（表 1 與表 2）性質不同，我們用灰網底標註獨有定性性質。

表 3：旋轉  $\frac{\pi}{2}$  下的衍伸三角形之性質 ( $k = 1, 2, 3$ )

連線方式	有向面積（定量性質）	形狀（定性性質）
$\overline{A_kB_k}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = -2 \tan \theta [A_1A_2A_3]$ . (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ (3) $= (1 + \tan^2 \theta) [A_1A_2A_3]$ .	$\triangle C_1C_2C_3$ 、 $\triangle D_1D_2D_3$ 、 $\triangle A_1A_2A_3$ 三者恆相似。
$\overline{A_kB_{k+1}}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = \tan \theta [A_1A_2A_3]$ . (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3] +$ $\frac{\tan^2 \theta - 1}{8} \times (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_1}^2)$ .	若 $\triangle A_1A_2A_3$ 為直角三角形 ( $\angle A_2 = 90^\circ$ ) 時，則恆有 $\overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2}$ 。
$\overline{A_kB_{k+2}}$	(1) $[C_1C_2C_3] - [D_1D_2D_3] = \tan \theta [A_1A_2A_3]$ . (2) $[C_1C_2C_3] + [D_1D_2D_3]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1A_2A_3] +$ $\frac{1 - \tan^2 \theta}{8} \times (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_1}^2)$ .	若 $\triangle A_1A_2A_3$ 為直角三角形 ( $\angle A_2 = 90^\circ$ ) 時，則恆有 $\overline{C_2C_3} = \overline{D_2D_3}$ 。

表 4：旋轉  $\frac{\pi}{2}$  下的衍伸四邊形之性質 ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

連線方式	有向面積 (定量性質)	形狀 (定性性質)
$\overline{A_k B_k}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= -2 \tan \theta [A_1 A_2 A_3 A_4]$ . (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) [A_1 A_2 A_3 A_4]$ .	(1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 、 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 、 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 三者恆相似。 (2) $P$ 點為四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的透視中心。 (3) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 的對角線交點 $S$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的對角線交點 $T$ 與旋轉中心 $P$ 三點共線且有向線段比 $\overline{PS} : \overline{PT} = (1 - \tan \theta) : (1 + \tan \theta)$ ，其比值可以寫成 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 。
$\overline{A_k B_{k+1}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4] = 0$ . (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4] +$ $\frac{\tan^2 \theta - 1}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2)$ .	(1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 不全等但恆面積相等。 (2) 對於任意角 $\theta$ ，當四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形時，恆有四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 恆為平行邊形。
$\overline{A_k B_{k+2}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= 2 \tan \theta [A_1 A_2 A_3 A_4]$ . (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_2 A_3 A_4]$ .	四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 的對角線交點 $S$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 的對角線交點 $T$ 與旋轉中心 $P$ 三點共線且有向線段比 $\overline{PS} : \overline{PT} = (1 - \tan \theta) : (1 + \tan \theta)$ ，其比值可以寫成 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 。
$\overline{A_k B_{k+3}}$	(1) $[C_1 C_2 C_3 C_4] - [D_1 D_2 D_3 D_4] = 0$ (2) $[C_1 C_2 C_3 C_4] + [D_1 D_2 D_3 D_4]$ $= (1 + \tan^2 \theta) \times [A_1 A_3 A_2 A_4] +$ $\frac{1 - \tan^2 \theta}{4} \times (\overline{A_1 A_3}^2 + \overline{A_2 A_4}^2)$ .	(1) 四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與四邊形 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 不全等但恆面積相等 (2) 四邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 為平行四邊形且 $\theta$ 為任意角時，恆有四邊形 $C_1 C_2 C_3 C_4$ 與 $D_1 D_2 D_3 D_4$ 恆為平行邊形。

我們特別提出來討論的是四邊形  $\overline{A_k B_k}$  與  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線下，其衍伸圖形四邊形  $C$  的對角線交點  $S$  與四邊形  $D$  的對角線交點  $T$  與旋轉中心  $P$  三點共線。尤其在  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線下的此性質不是直觀就可以發現，因此十分有趣特殊。

**性質 11.**  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，對於任意全等封閉四邊形構造的衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  的對角線交點  $S$  與  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的對角線交點  $T$  與旋轉中心  $P$ ，則  $S$ 、 $P$ 、 $T$  點共線且有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 。

**證明：**在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，性質 11 是容易的，我們可以知道  $C_k$  與  $D_k$  的坐標

$$C_k \left( \frac{1}{2}(1 - \tan \theta)(x_k - y_k), \frac{1}{2}(1 - \tan \theta)(y_k + x_k) \right)$$

$$D_k \left( \frac{1}{2}(1 + \tan \theta)(x_k - y_k), \frac{1}{2}(1 + \tan \theta)(y_k + x_k) \right)$$

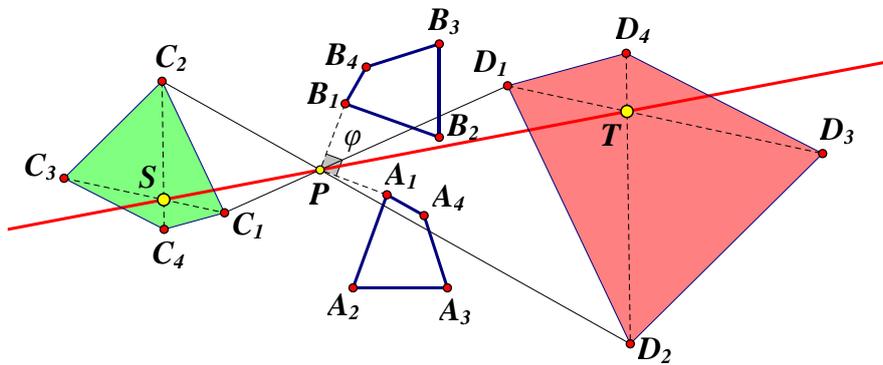


圖 21： $\overline{A_k B_k}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

即可得向量  $\overline{PC_k} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \times \overline{PD_k}$ ，所以衍伸圖形  $C$  與  $D$  透視且相似，即可得三點的有向

線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 。

□

然而，在定理 7 中可以知道當  $\varphi = \pi$  時， $\overline{A_k B_{k+1}}$  連線與  $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線的衍伸圖形  $C$  和  $D$  可以輪換，但是這個性質在  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  時卻不成立，如下圖所示，因此無法透過性質 11 直接推論出  $\overline{A_k B_{k+2}}$  的衍伸圖形對角線交點性質也是成立，我們必須另尋證明方式。

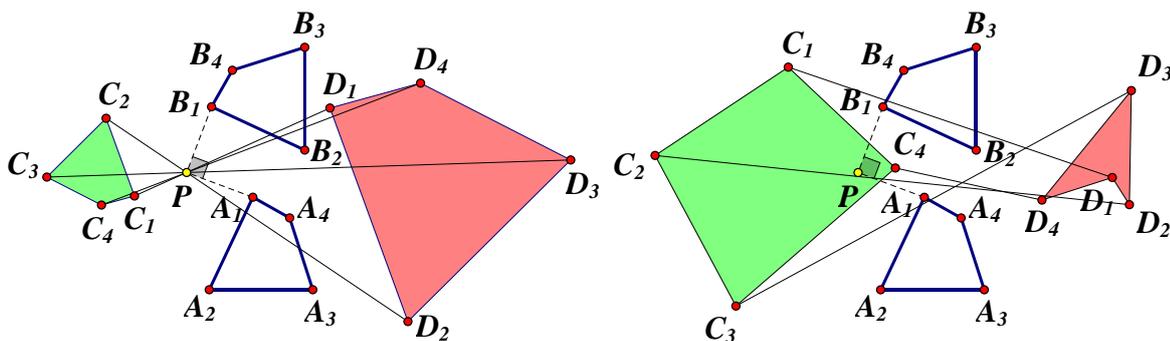


圖 22：衍伸圖形的對角線交點性質

以下的證明方式不採用解析幾何求出  $S$ 、 $T$ 、 $P$  的坐標，再證明共線及三點比例常數，複雜的計算會喪失了構圖上的幾何意義。我們利用四邊形  $C$  與四邊形  $D$  的頂點坐標，再巧妙透過向量與相似四邊形來進行證明而展現幾何的優美。

**性質 12.**  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線下，當  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，對於任意全等封閉四邊形構造的衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  的對角線交點  $S$  與  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的對角線交點  $T$  與旋轉中心  $P$ ，則  $S$ 、 $P$ 、 $T$  點共線且有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 。

證明：

1. 考慮  $C_k$ 、 $C_{k+2}$ 、 $D_k$ 、 $D_{k+2}$  坐標，可再得出兩對角線向量

$$\overline{C_1 C_3} = \frac{1}{2}(1 + \tan \theta)((x_3 - x_1) + (y_3 - y_1), (x_1 - x_3) + (y_3 - y_1))$$

$$\overline{D_1 D_3} = \frac{1}{2}(1 - \tan \theta)((x_3 - x_1) + (y_3 - y_1), (x_1 - x_3) + (y_3 - y_1))$$

所以  $\overline{C_1 C_3} \parallel \overline{D_1 D_3}$  且  $\overline{C_1 C_3} : \overline{D_1 D_3} = (1 + \tan \theta) : (1 - \tan \theta)$ ，同理可得  $\overline{C_2 C_4} \parallel \overline{D_2 D_4}$  且  $\overline{C_2 C_4} : \overline{D_2 D_4} = (1 + \tan \theta) : (1 - \tan \theta)$ 。

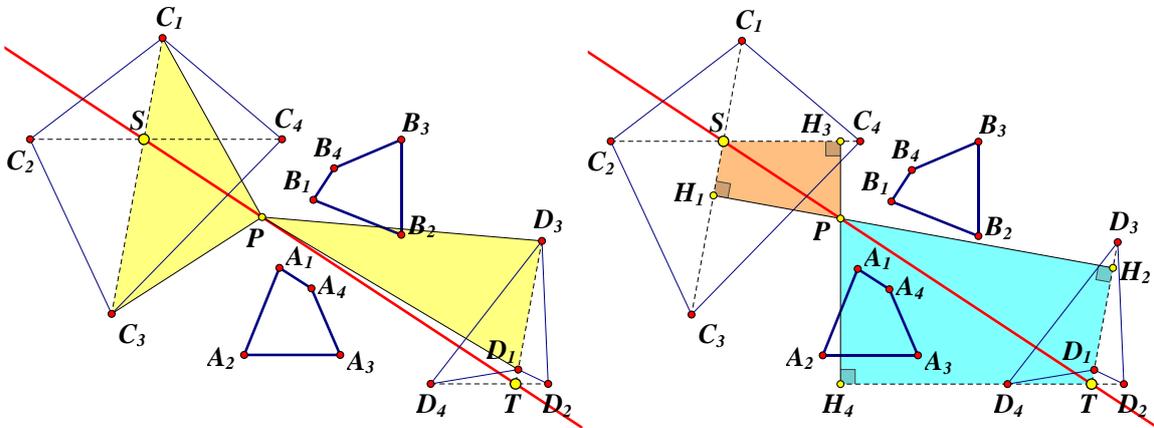


圖 23： $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

2. 再考慮有向面積

$$[PC_1 C_3] = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(x_1 - y_3) + \frac{\tan \theta}{2}(y_1 - x_3) & \frac{1}{2}(x_3 - y_1) + \frac{\tan \theta}{2}(y_3 - x_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(y_1 + x_3) - \frac{\tan \theta}{2}(x_1 + y_3) & \frac{1}{2}(y_3 + x_1) - \frac{\tan \theta}{2}(x_3 + y_1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$[PD_1D_3] = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 - y_3) - \frac{\tan \theta}{2}(y_1 - x_3) & \frac{1}{2}(x_3 - y_1) - \frac{\tan \theta}{2}(y_3 - x_1) & 0 \\ \frac{1}{2}(y_1 + x_3) + \frac{\tan \theta}{2}(x_1 + y_3) & \frac{1}{2}(y_3 + x_1) + \frac{\tan \theta}{2}(x_3 + y_1) & 0 \end{vmatrix}$$

可得  $[PC_1C_3] = [PD_1D_3]$ ，同理可得  $[PC_2C_4] = [PD_2D_4]$ ，因此  $P$  點到  $\overline{C_1C_3}$  的有向距離與  $P$  到  $\overline{D_1D_3}$  的有向距離比為  $\overline{PH_1}:\overline{PH_2} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$ 。注意到又因為  $\overline{C_1C_3} \parallel \overline{D_1D_3}$ ，所以  $H_1、P、H_2$  三點共線，同理  $H_3、P、H_4$  三點共線且其有向距離比為  $\overline{PH_3}:\overline{PH_4} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$ 。

3. 最後討論四邊形  $PH_1SH_3$  與四邊形  $PH_2TH_4$ ，因為其四個對應角相等且兩組對應鄰邊成比例  $\overline{PH_1}:\overline{PH_2} = \overline{PH_3}:\overline{PH_4}$ ，因此  $S、P、T$  點共線且有向線段比如下：

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \theta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \theta} = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

□

#### 四、當角度 $\varphi$ 為任意實數構造下的兩個全等封閉 $n$ 邊形的性質

一般化推廣到有向角  $\varphi$  為任意實數，即平面上以  $P$  點（原點）為旋轉中心，將多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  並旋轉有向角  $\varphi$  得出多邊形  $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 。依設定再構造以  $\overline{A_kB_{k+m}}$  為底邊且底角為  $\theta$  的腰三角形  $\triangle A_kB_{k+m}C_k$  與  $\triangle A_kB_{k+m}D_k$  而得出行伸多邊形  $C_1C_2C_3 \dots C_n$  與多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$ 。由預備性質 4 的旋轉矩陣得出兩個多邊形  $A$  與  $B$  的頂點坐標  $A_k(x_k, y_k)$  與  $B_k(x'_k, y'_k)$ ，其中  $\begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ ，再由性質 1 給出  $\overline{A_kB_{k+m}}$  連線下的  $C_k$  與  $D_k$  坐標：

$$C_k \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\tan \theta}{2} \\ \frac{\tan \theta}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+m} \\ y_{k+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ -y_k \end{bmatrix} \right), \right. \\ \left. D_k \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\tan \theta}{2} \\ -\frac{\tan \theta}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+m} \\ y_{k+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ -y_k \end{bmatrix} \right), \right)$$

式 (1)

(一) 四邊形的衍伸圖形的對角線交點的比例不變量

在許多幾何研究中，往往從三角形推廣到四邊形會減少許多定性性質，尤其是形狀或是邊角關係，然而我們研究中的衍伸四邊形即使此旋轉角度  $\varphi$  為任意實數情形下仍保留了四邊形  $C_1C_2C_3C_4$  的對角線交點  $S$  與四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  的對角線交點  $T$  與旋轉中心  $P$  三點共線性質，甚至我們推廣到封閉  $n$  邊形也有相同的對角線交點的比例不變量性質。

以下利用旋轉變換矩陣、三角函數以及純幾何的技巧建立此性質的一般化的理論。

**定理 13.**  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於任意全等封閉四邊形構造的衍伸圖形之對角線交點  $S$  與  $T$  與旋轉中心  $P$  共線且有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos(\frac{\varphi+\theta}{2})}{\cos(\frac{\varphi-\theta}{2})}$ 。

**證明：**

1. 在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，根據式 (1) 我們可以給出旋轉任意實數  $\varphi$  的  $\overline{PC_k}$  與  $\overline{PD_k}$  向量

$$\overline{PC_k} = \frac{1}{2} \left( [1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, [\tan \theta \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \right)$$

$$\overline{PD_k} = \frac{1}{2} \left( [1 \quad \tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, [-\tan \theta \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \right)$$

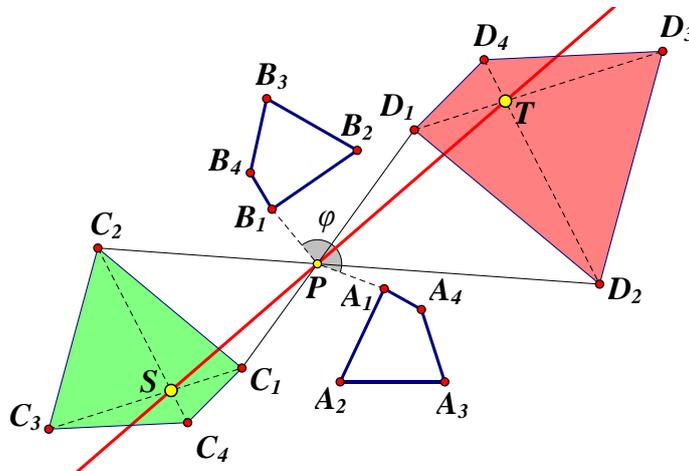


圖 24：一般化  $\overline{A_k B_k}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

2. 考慮  $\overline{PC_k}$  與  $\overline{PD_k}$  的第一個分量的係數  $[1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$  與

$[1 \quad \tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$  的比值。

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varphi + 1 - \tan \theta \sin \varphi}{\cos \varphi + 1 + \tan \theta \sin \varphi} &= \frac{\cos \varphi \cos \theta + \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi}{\cos \varphi \cos \theta + \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi} \\ &= \frac{\cos(\varphi + \theta) + \cos \theta}{\cos(\varphi - \theta) + \cos \theta} \quad (\text{和角公式}) \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)} \quad (\text{和差化積公式})$$

$$= \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}$$

同理討論  $[1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$  與  $[1 \quad \tan \theta] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$  的比值，化簡可得

$$\frac{-\sin \varphi - \tan \theta \cos \varphi + \tan \theta}{-\sin \varphi + \tan \theta \cos \varphi - \tan \theta} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}. \quad \text{再考慮 } \overline{PC_k} \text{ 與 } \overline{PD_k} \text{ 的第二個分量的係數的兩個比值}$$

$$\text{可得出 } \frac{\sin \varphi + \tan \theta \cos \varphi - \tan \theta}{\sin \varphi - \tan \theta \cos \varphi + \tan \theta} = \frac{\cos \varphi + 1 - \tan \theta \sin \varphi}{\cos \varphi + 1 + \tan \theta \sin \varphi} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}.$$

3. 根據以上結果，我們可以將  $\overline{PC_k}$  與  $\overline{PD_k}$  寫成

$$\overline{PC_k} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)} \times \frac{1}{2} (mx_k + ny_k, -nx_k + my_k), \quad \overline{PD_k} = \frac{1}{2} (mx_k + ny_k, -nx_k + my_k)$$

$$\text{其中 } m = [1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad n = [1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$$

即可得向量  $\overline{PC_k} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)} \times \overline{PD_k}$ ，再得出衍伸圖形  $C$  和  $D$  透視且相似，即可得兩個

對角線交點與原點，三點的有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}$ 。

□

在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，給定任意的實數  $\theta$  與  $\varphi$ ，衍伸四邊形  $C$  與  $D$  的對角線交點分別為  $S$  與  $T$  點與旋轉中心  $P$  點共線且有向線段比為優美的比值  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}$ ，這個不變量與兩個原始圖形四邊形  $A$  與  $B$  的形狀無關。

我們繼續討論難度更高的  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線，因為此時的衍伸四邊形  $C$  與  $D$  沒有相似，也沒有透視，我們透過向量、矩陣運算、三角函數和差角與和差化積公式巧妙化簡而得出與  $\overline{A_k B_k}$  連線一致的結果  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}$ ，這是本研究的一個亮點。

**定理 14.**  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於任意全等封閉四邊形構造的衍伸圖形之對角線交點  $S$  與  $T$  與旋轉中心  $P$  共線且有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} + \theta \right)}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \theta \right)}$ 。

證明：

1. 因為在  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線下的衍伸圖形  $C$  和  $D$  並不會透視於  $P$  點，所以我們先證明對角線向量  $\overline{C_1 C_3}$  與  $\overline{D_1 D_3}$  相互平行

$$\overline{C_1 C_3} = \frac{1}{2} \left( [1 \quad -\tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix}, [\tan \theta \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\overline{D_1 D_3} = \frac{1}{2} \left( [1 \quad \tan \theta] \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix}, [-\tan \theta \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix} \right)$$

考慮  $\frac{\cos \varphi - 1 - \tan \theta \sin \varphi}{\cos \varphi - 1 + \tan \theta \sin \varphi} = \frac{-\sin \varphi - \tan \theta \cos \varphi - \tan \theta}{-\sin \varphi + \tan \theta \cos \varphi + \tan \theta} = \frac{\sin(\frac{\varphi}{2} + \theta)}{\sin(\frac{\varphi}{2} - \theta)}$ ，所以  $\overline{C_1 C_3} \parallel \overline{D_1 D_3}$  且

$$\overline{C_1 C_3} : \overline{D_1 D_3} = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) : \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)，同理可得 \overline{C_2 C_4} \parallel \overline{D_2 D_4} 且 \overline{C_2 C_4} : \overline{D_2 D_4} =$$

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) : \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)。$$

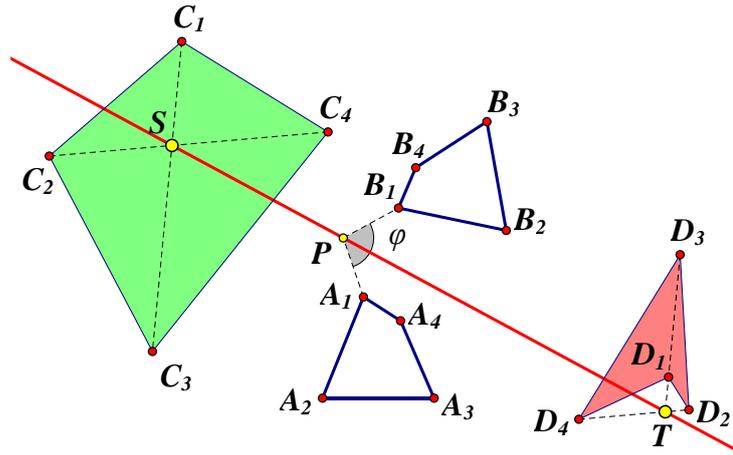


圖 25：一般化  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

2. 再考慮三角形的有向面積  $[PC_1 C_3]$  與  $[PD_1 D_3]$ ，以及有向面積  $[PC_2 C_4]$  與  $[PD_2 D_4]$  利用測量師公式計算有向面積再進行化簡可得出  $[PC_1 C_3] : [PD_1 D_3] = [PC_2 C_4] : [PD_2 D_4] = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) : \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)$ ，又  $\overline{C_1 C_3} : \overline{D_1 D_3} = \overline{C_2 C_4} : \overline{D_2 D_4} = \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) : \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)$ 。利用性質 12 的方法可給出四邊形  $PH_1 SH_2$  與四邊形  $PH_3 TH_4$  相似，因此  $S$ 、 $P$ 、 $T$  點共線且有向線段比如下：

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right) / \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right) / \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)}$$

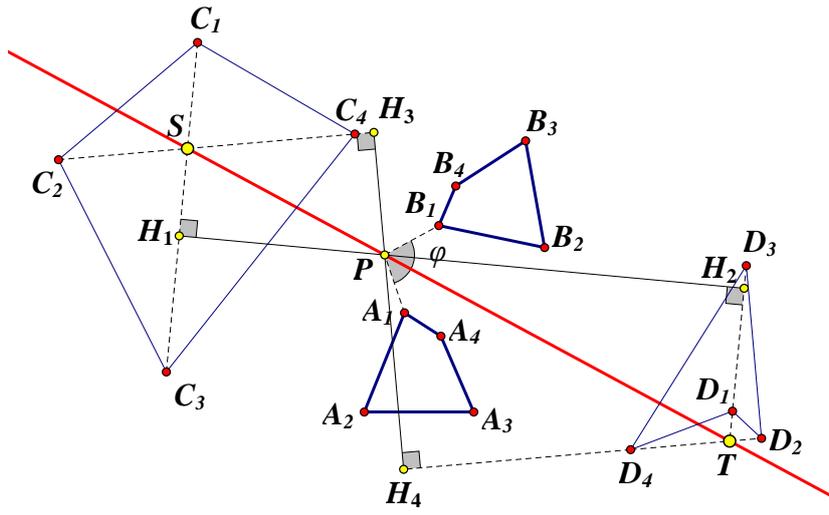


圖 26：一般化  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質之方法

□

(二) 多邊形的衍伸圖形的對角線交點的比例不變量

我們將對角線交點與旋轉中心  $P$  點的共線及其比例不變量推廣到多邊形。

**推論 15.**  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於任意全等封閉  $n$  邊形構造的衍伸圖形之任意兩條相異對角線  $\overrightarrow{C_k C_{k+a}}$  與  $\overrightarrow{C_h C_{h+b}}$  的交點  $S$ 、 $\overrightarrow{D_k D_{k+a}}$  與  $\overrightarrow{D_h D_{h+b}}$  的交點  $T$  與旋轉中心  $P$  共線且有向線段比  $\frac{PS}{PT} = \frac{\cos(\frac{\varphi+\theta}{2})}{\cos(\frac{\varphi-\theta}{2})}$ 。

**證明：**與定理 13 方法相同，在此省略。

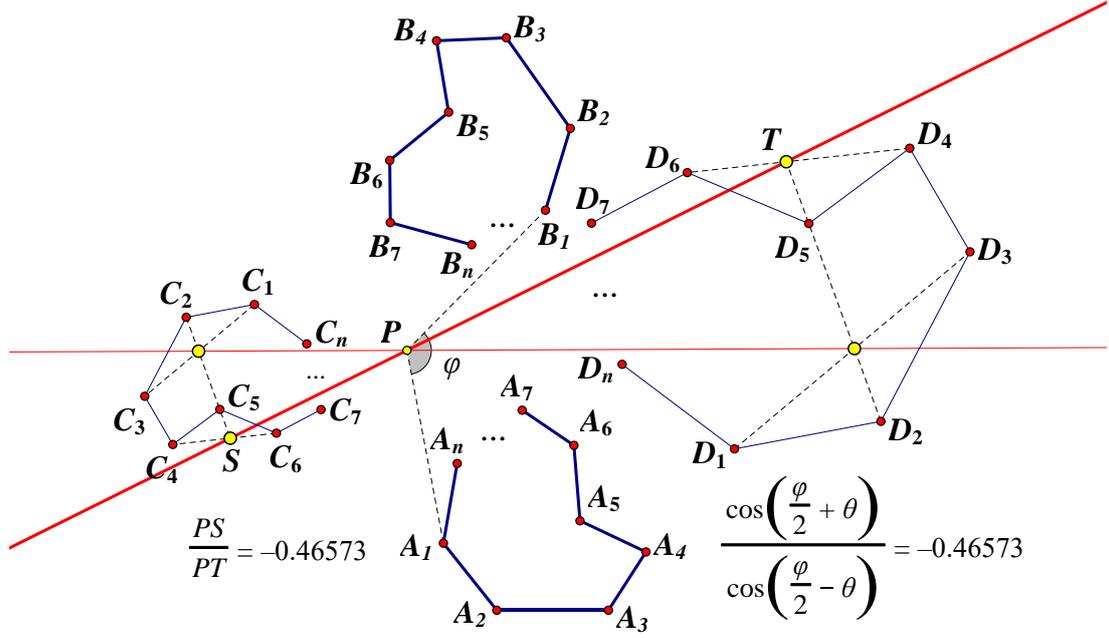


圖 27： $n$  邊形  $\overline{A_k B_k}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

□

注意到，將定理 14 進行推廣時，我們可以發現  $\overline{A_k B_{k+r}}$  連線下的衍伸圖形  $C$  中，必須使得對角線  $\overline{C_k C_{k+r}}$  與  $\overline{C_{k+r} C_{(k+r)+r}}$  為同一條，因此  $(k+r)+r$  必須同餘  $k$ ，可得出此時的多邊形邊數為  $2r$  邊形，也就是說偶邊形才会有推論 16 的共線現象。

**推論 16.**  $\overline{A_k B_{k+r}}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於任意全等封閉  $2r$  邊形（偶邊形）構造的衍伸圖形之任意兩條相異對角線  $\overline{C_k C_{k+r}}$  與  $\overline{C_h C_{h+r}}$  的交點  $S$ 、 $\overline{D_k D_{k+r}}$  與  $\overline{D_h D_{h+r}}$  的交點  $T$  與旋轉中心  $P$  共線且有向線段比  $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\cos(\frac{\varphi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\varphi}{2} - \theta)}$ 。

**證明：**與定理 14 方法相同，在此省略。

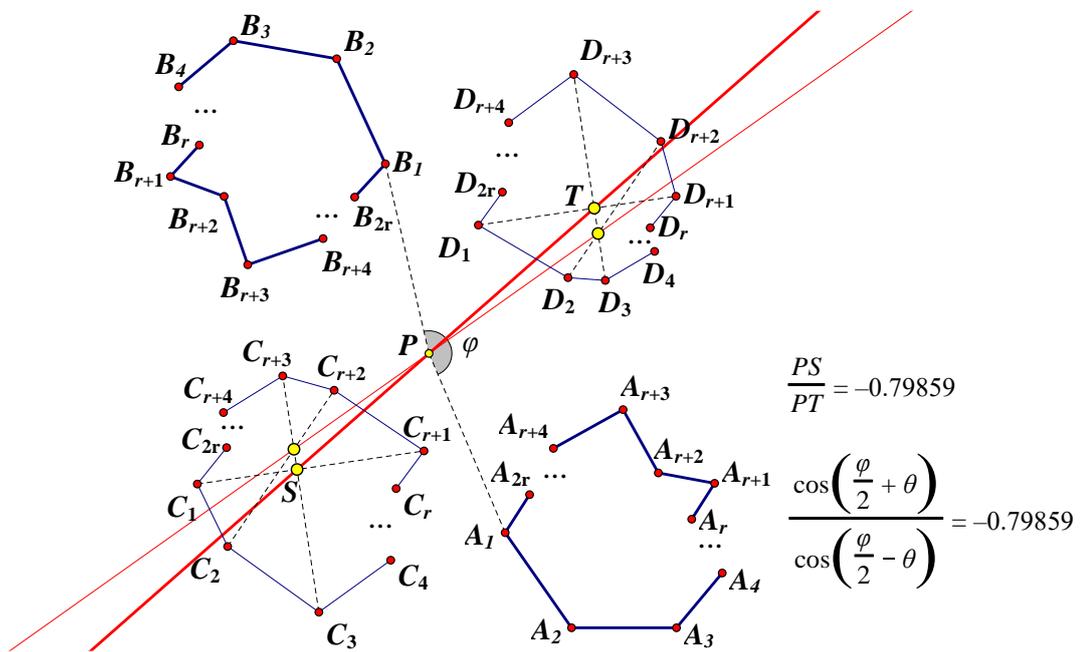


圖 28： $2r$  邊形  $\overline{A_k B_{k+r}}$  連線的衍伸圖形對角線交點性質

□

多邊形中，符合推論 15 或推論 16 的對角線交點與旋轉中心  $P$  點的共線及其比例不變量的有多少組呢？

推論 15 的任意  $n$  邊形的  $\overline{A_k B_k}$  連線條件下，因為  $n$  邊形共有  $\frac{n(n-3)}{2}$  對角線，所以符合共線比例的交點共有  $C_2^{\frac{n(n-3)}{2}} = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}$  組，其中  $n \geq 4$ 。

推論 16 的任意  $2r$  邊形的  $\overline{A_k B_{k+r}}$  連線條件下，此時對角線  $\overline{C_k C_{k+r}}$  共有  $r$  條，所以符合共線比例的交點共有  $C_2^r = \frac{r(r+1)}{2}$  組，其中  $r \geq 2$ 。

(三)  $\overline{A_k B_k}$  連線下，多邊形的衍伸圖形相似、透視與面積不變量性質

**定理 17.** 在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於兩全等封閉  $n$  邊形構造的衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 \dots D_3$  與  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  相似於原多邊形  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  且兩者彼此透視。

**證明：**

4. 在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，根據式 (1)，將  $C_k$  與  $D_k$  坐標的矩陣進行化簡， $C_k(x_{C_k}, y_{C_k})$ 、 $D_k(x_{D_k}, y_{D_k})$  以及  $A_k(x_k, y_k)$ ，其中

$$[x_{C_k} \quad y_{C_k}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta & -\sin \varphi - \cos \varphi \tan \theta + \tan \theta \\ \sin \varphi + \cos \varphi \tan \theta - \tan \theta & \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$[x_{D_k} \quad y_{D_k}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 + \sin \varphi \tan \theta & -\sin \varphi + \cos \varphi \tan \theta - \tan \theta \\ \sin \varphi - \cos \varphi \tan \theta + \tan \theta & \cos \varphi + 1 + \sin \varphi \tan \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

再令其變換矩陣  $E = \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta & -\sin \varphi - \cos \varphi \tan \theta + \tan \theta \\ \sin \varphi + \cos \varphi \tan \theta - \tan \theta & \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta \end{bmatrix}$ ，考慮

$$EE^T = E^T E = \frac{4 \cos^2(\frac{\varphi+\theta}{2})}{\cos^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

，根據預備性質 7，變換矩陣  $E$  為保角變換，因此衍伸

圖形  $C$  與原多邊形  $A$  必相似，同理衍伸圖形  $D$  與  $A$  相似。

5. 繼續討論衍伸圖形  $C$  與 衍伸圖形  $D$  的透視，考慮有向角度  $\angle A_k P C_k$  與  $\angle A_k P D_k$ ，若  $\angle A_k P C_k - \angle A_k P D_k = \pi$  或  $0$ ，若且唯若衍伸圖形  $C$  與 衍伸圖形  $D$  為透視關係。注意

$$\text{到，矩陣 } E = \begin{bmatrix} \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta & -\sin \varphi - \cos \varphi \tan \theta + \tan \theta \\ \sin \varphi + \cos \varphi \tan \theta - \tan \theta & \cos \varphi + 1 - \sin \varphi \tan \theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cos(\frac{\varphi+\theta}{2}) \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \theta} & \frac{-2 \cos(\frac{\varphi+\theta}{2}) \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \theta} \\ \frac{2 \cos(\frac{\varphi+\theta}{2}) \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \theta} & \frac{2 \cos(\frac{\varphi+\theta}{2}) \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \theta} \end{bmatrix} = \frac{2 \cos(\frac{\varphi+\theta}{2})}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

，用相同方法化簡  $D_k$  點坐標

的變換矩陣，因此我們可以將兩點的坐標形式寫成下式

$$[x_{C_k} \quad y_{C_k}] = \frac{\cos(\frac{\varphi+\theta}{2})}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, [x_{D_k} \quad y_{D_k}] = \frac{\cos(\frac{\varphi-\theta}{2})}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

於是得出點  $C_k$  與  $D_k$  為點  $A_k$  旋轉  $\frac{\varphi}{2}$  後再進行縮放，所以多邊形  $C_1 C_2 C_3 \dots D_n$  與

$D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  彼此透視。

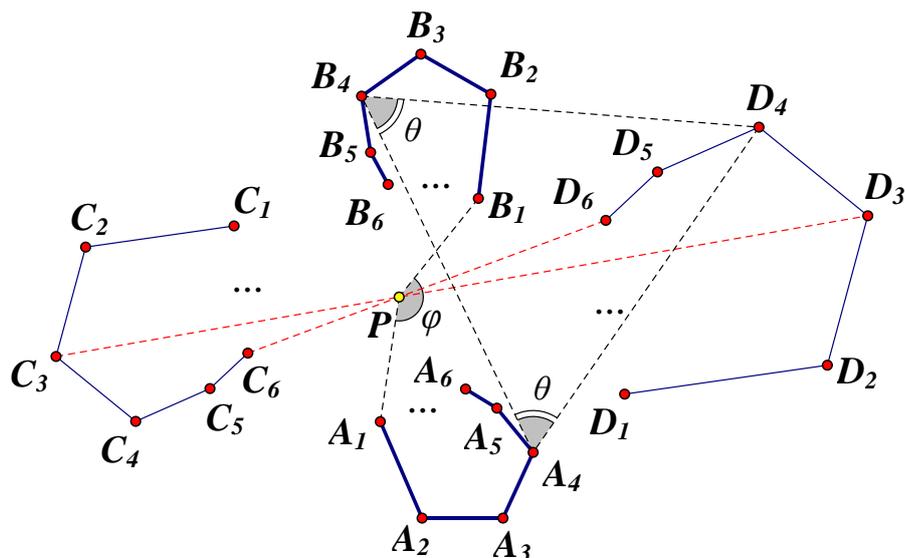


圖 29：一般化  $n$  邊形的  $\overline{A_k B_k}$  衍伸圖形相似且透視

□

透過以上定理，我們可以給出在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，兩個衍伸圖形的有向面積和與有向面積差的一般式。

**推論 18.** 在  $\overline{A_k B_k}$  連線下，當  $\varphi$  為任意實數，對於兩全等封閉  $n$  邊形構造的衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 \dots D_3$  與  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  有向面積不變量。

$$(1) \frac{[C_1 C_2 C_3 \dots C_n] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_n]}{[A_1 A_2 A_3 \dots A_n]} = -2 \sin \varphi \tan \theta. \quad (2) \frac{[C_1 C_2 C_3 \dots C_n] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_n]}{[A_1 A_2 A_3 \dots A_n]} = \frac{\cos \varphi \cos 2\theta + 1}{\cos^2 \theta}.$$

**證明：**多邊形  $C_1 C_2 C_3 \dots D_n$  與  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  皆為原多邊形  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  的保角變換，因

$$\text{此有向面積差 } [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] - [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] = \left( \left( \frac{\cos(\frac{\varphi}{2} + \theta)}{\cos \theta} \right)^2 - \left( \frac{\cos(\frac{\varphi}{2} - \theta)}{\cos \theta} \right)^2 \right) \times$$

$$[A_1 A_2 A_3 \dots A_n] = -2 \sin \varphi \tan \theta \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_n]; \quad [C_1 C_2 C_3 \dots C_n] + [D_1 D_2 D_3 \dots D_n] =$$

$$\left( \left( \frac{\cos(\frac{\varphi}{2} + \theta)}{\cos \theta} \right)^2 + \left( \frac{\cos(\frac{\varphi}{2} - \theta)}{\cos \theta} \right)^2 \right) \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_n] = \frac{\cos \varphi \cos 2\theta + 1}{\cos^2 \theta} \times [A_1 A_2 A_3 \dots A_n].$$

□

#### (四) 有向角 $\angle A_k P B_k = \varphi$ 與底角 $\theta$ 的雙變數的交互情形

我們接下來討論兩個變數，旋轉角度有向角  $\angle A_k P B_k = \varphi$  與等腰三角形底角  $\theta$  對於衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  與  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  的影響。

我們發現當  $\varphi = 2\theta$  時，將式 (1) 利用二倍角公式進行化簡，可給出有趣的結果，此時  $D_k(x_{D_k}, y_{D_k})$  坐標可以簡化如下，不過此時  $C_k$  點坐標並沒有特殊性，就不做討論。

$$\begin{bmatrix} x_{D_k} \\ y_{D_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k + x_{k+m} \\ y_k + y_{k+m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k + x_{k+m} \\ y_k + y_{k+m} \end{bmatrix}$$

上述變換可視為將原多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  的頂點  $A_k(x_k, y_k)$  分別平移向量  $(x_{k+m}, y_{k+m})$  構造新的多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  其頂點為  $A'_k(x_k + x_{k+m}, y_k + y_{k+m})$ ，多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$  為多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  旋轉  $\theta$ ，再進行縮放  $\frac{1}{2 \cos \theta}$  而得出的圖形。

**性質 19.** 當  $\varphi = 2\theta$  時

- (1) 三角形  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線，衍伸圖形  $\triangle D_1 D_2 D_3$  必相似於  $\triangle A_1 A_2 A_3$ 。
- (2) 四邊形  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線下，衍伸圖形四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  分別為相似於四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ，恆為平行四邊形，退化為線段，恆為平行四邊形。
- (3) 多邊形時，僅有四邊形時，衍伸圖形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  為平行四邊形，其餘偶邊形皆不可能出現平行偶邊形。對於  $n = 4t$  且  $t \geq 2$ ，衍伸圖形  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  的對角線有平行結構。

**證明：**

1. 當  $\varphi = 2\theta$ ，因為  $\begin{bmatrix} x_{D_k} \\ y_{D_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k + x_{k+m} \\ y_k + y_{k+m} \end{bmatrix}$ ，令多邊形  $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$  其頂點為  $A'_k(x_k + x_{k+m}, y_k + y_{k+m})$ ，以下進行分組討論。
2. 先考慮三角形的情形， $A'_1(x_1 + x_{1+m}, y_1 + y_{1+m})$ 、 $A'_2(x_2 + x_{2+m}, y_2 + y_{2+m})$ 、 $A'_3(x_3 + x_{3+m}, y_3 + y_{3+m})$ 。當  $m = 0$  時， $\triangle A'_1 A'_2 A'_3$  為  $\triangle A_1 A_2 A_3$  的 2 倍縮放圖，再逆時鐘旋轉  $\theta$ ，並縮放  $\frac{1}{2 \cos \theta}$ ，可得  $\triangle D_1 D_2 D_3$  必相似於  $\triangle A_1 A_2 A_3$ ；當  $m = 1$  時，可得向量  $\overline{A'_k A'_{k+1}} \parallel \overline{A_k A_{k+2}}$  且  $\|\overline{A'_k A'_{k+1}}\| = \|\overline{A_k A_{k+2}}\|$ ，所以  $\triangle A'_1 A'_2 A'_3 \cong \triangle A_1 A_2 A_3$ ，同理可得  $\triangle D_1 D_2 D_3$  必相似於  $\triangle A_1 A_2 A_3$ ；當  $m = 2$  時，可得向量  $\overline{A'_k A'_{k+1}} \parallel \overline{A_{k+2} A_{k+3}}$  且  $\|\overline{A'_k A'_{k+1}}\| = \|\overline{A_{k+2} A_{k+3}}\|$ ，同理可得  $\triangle D_1 D_2 D_3$  必相似於  $\triangle A_1 A_2 A_3$ 。
3. 四邊形時，當  $m = 0$  時，四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  恆相似於四邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ；當  $m = 1$  時，可得向量  $\overline{A'_k A'_{k+1}} \parallel \overline{A_k A_{k+2}}$  且  $\|\overline{A'_k A'_{k+1}}\| = \|\overline{A_k A_{k+2}}\|$ ，即四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  恆為

平行四邊形；當  $m = 2$  時，可得  $A'_k$  點與  $A'_{k+2}$  點重合，所以  $D_k$  點與  $D_{k+2}$  點，即四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  退化為一線段；當  $m = 3$  時，可得向量  $\overrightarrow{A'_kA'_{k+1}} \parallel \overrightarrow{A_{k+2}A_k}$  且  $\|\overrightarrow{A'_kA'_{k+1}}\| = \|\overrightarrow{A_{k+2}A_k}\|$ ，即四邊形  $D_1D_2D_3D_4$  恆為平行四邊形。

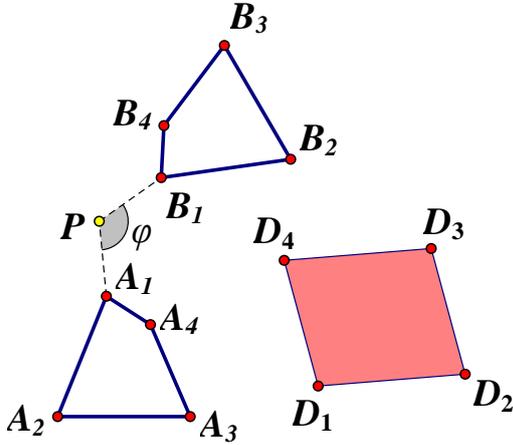


圖 30：四邊形  $\overline{A_kB_{k+1}}$  連線

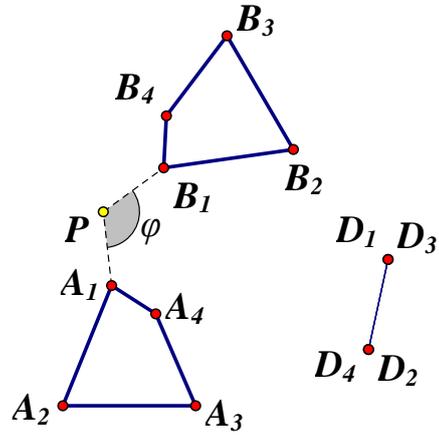


圖 31：四邊形  $\overline{A_kB_{k+2}}$  連線

4. 一般化，當  $m = 0$  時，同理多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  為多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  的 2 倍縮放圖，再進行保角變換得出多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$ ，所以多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$  相似於多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 。討論  $m$  的其他取值情形 ( $m = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ )，因為向量  $\overrightarrow{A'_kA'_{k+m}} \parallel \overrightarrow{A_kA_{k+2m}}$  且  $\|\overrightarrow{A'_kA'_{k+m}}\| = \|\overrightarrow{A_kA_{k+2m}}\|$  (也就是  $\overrightarrow{D_kD_{k+m}} \parallel \overrightarrow{D_{k+m}D_{k+2m}}$  且  $\|\overrightarrow{D_kD_{k+m}}\| = \|\overrightarrow{D_{k+m}D_{k+2m}}\|$ )，即多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  的各邊與多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  的對角線  $\overline{A_kA_{k+2m}}$  平行。注意到，多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$  要出現對邊或對角線平行的結構，即  $\overrightarrow{A'_kA'_{k+m}} \parallel \overrightarrow{A'_{k+m}A'_{k+2m}}$ ，則多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  須為偶邊形，且原多邊形的對角線  $\overline{A_kA_{k+2m}}$  與  $\overline{A_{k+2m}A_{(k+2m)+2m}}$  為相同線段，例如： $n = 4, m = 1$  時， $\overline{A_kA_{k+2}} = \overline{A_{k+2}A_{k+4}} = \overline{A_{k+2}A_k}$ 。考慮  $k$  同餘  $k + 4m \pmod{n}$ ，可得出  $n$  整除  $4m$ ，然而  $2m \neq n$ ，否則  $\overline{A_kA_{k+2m}} = \overline{A_kA_k} = \vec{0}$  不合。

5. 繼續討論多邊形  $D_1D_2D_3 \dots D_n$  為平行多邊形的情形，即  $m = 1$  或  $m = n - 1$ ，依據前述規則可得出充要條件即為  $(n, m) = (4, 1), (4, 3)$ ，換句話說只有原多邊形為四邊形時，衍伸多邊形才為平行多邊形。其餘的偶邊形  $n = 8, 12, 16, \dots$  的衍伸圖形

$D_1D_2D_3 \dots D_n$  的對角線有平行結構，即四邊形  $D_kD_{k+m}D_{k+2m}D_{k+3m}$  為平行四邊形；另外  $n = 6, 10, 14, \dots$  的對角線則沒有平行結構。

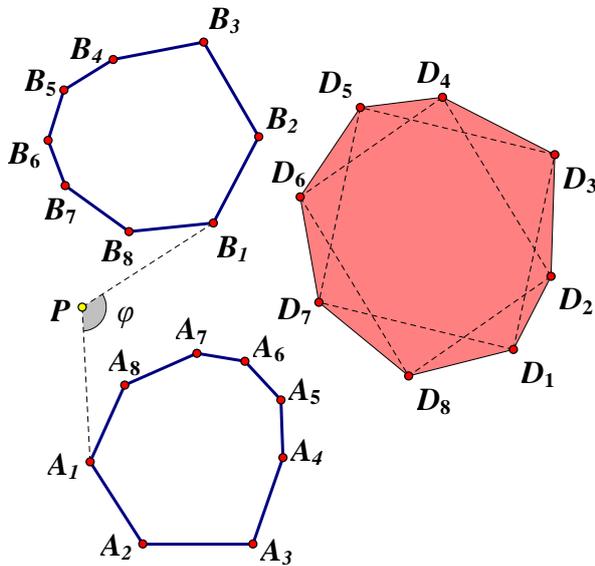


圖 32：八邊形  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線，四邊形  $D_1D_3D_5D_7$  與  $D_2D_4D_6D_8$  為平行四邊形

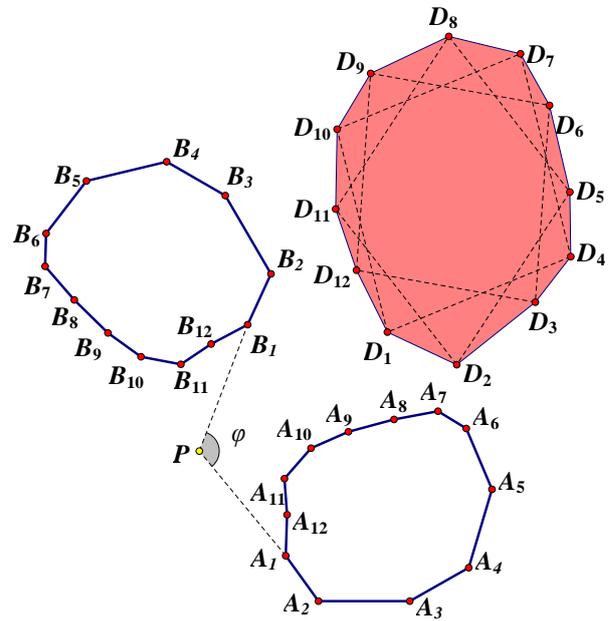


圖 33：十二邊形  $\overline{A_k B_{k+9}}$  連線，四邊形  $D_1D_{10}D_7D_4$ 、 $D_2D_{11}D_8D_5$  與  $D_3D_{12}D_9D_6$  為平行四邊形

□

我們再設定另外一種關係  $\varphi = \pi - 2\theta$  時，同樣將式 (1) 利用二倍角公式進行化簡，可給出有趣的結果，此時  $C_k(x_{C_k}, y_{C_k})$  坐標可以簡化如下，不過此時  $D_k$  點坐標並沒有特殊性，就不做討論。

$$\begin{bmatrix} x_{C_k} \\ y_{C_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - x_{k+m} \\ y_k - y_{k+m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cos(-\theta)} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - x_{k+m} \\ y_k - y_{k+m} \end{bmatrix}$$

上述變換可視為將原多邊形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  的頂點  $A_k(x_k, y_k)$  分別平移向量  $(-x_{k+m}, -y_{k+m})$  構造新的多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  其頂點為  $A'_k(x_k - x_{k+m}, y_k - y_{k+m})$ ，多邊形  $C_1C_2C_3 \dots C_n$  為多邊形  $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$  旋轉  $-\theta$ ，再進行縮放  $\frac{1}{2 \cos(-\theta)}$  而得出的圖形。

**性質 20.** 當  $\varphi = \pi - 2\theta$  時

- (1) 對於任意  $n$  邊形，當  $m = 0$ ，衍伸圖形  $C_1C_2C_3 \dots C_n$  退化一點與  $P$  重合。
- (2) 對於任意偶邊形，當  $2m = n$ ，衍伸圖形  $C_1C_2C_3 \dots C_n$  為平行偶邊形。

證明：

1. 當  $\varphi = \pi - 2\theta$ ，因為  $\begin{bmatrix} x_{C_k} \\ y_{C_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cos(-\theta)} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - x_{k+m} \\ y_k - y_{k+m} \end{bmatrix}$ ，令多邊形

$A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$  其頂點為  $A'_k(x_k - x_{k+m}, y_k - y_{k+m})$ ，以下進行分組討論。

2. 原多邊形  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  為三角形時，僅  $m = 0$  使得  $\triangle C_1 C_2 C_3$  退化與  $P$  重合。四邊形時， $m = 0$  使得四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  退化與  $P$  重合退化，當  $m = 2$  時，可得

$\overline{A'_k A'_{k+1}} \parallel \overline{A'_{k+2} A'_{k+3}}$  且  $\|\overline{A'_k A'_{k+1}}\| = \|\overline{A'_{k+2} A'_{k+3}}\|$ ，即四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  恆為平行四邊形，其餘  $m = 1$  或  $3$  皆無定性幾何圖案。

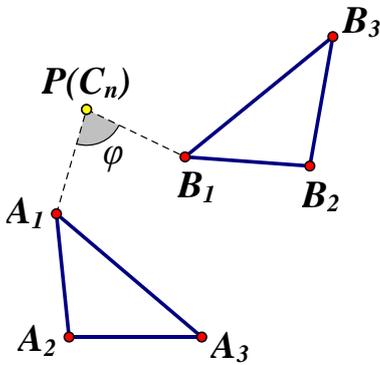


圖 34：三角形  $\overline{A_k B_k}$  連線

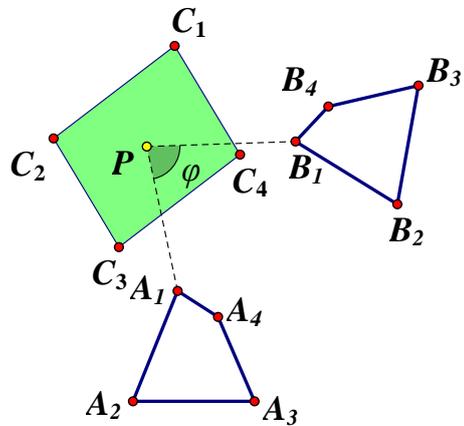


圖 35：四邊形  $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線

3. 對於任意  $n$  邊形，當  $m = 0$ ，顯然  $\begin{bmatrix} x_{C_k} \\ y_{C_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  即退化為原點  $P$ 。討論  $m$  的其他取值情形 ( $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$ )，由於  $A'_k(x_k - x_{k+m}, y_k - y_{k+m})$  與性質 19 的結構不相同，我們考慮  $A'_k(x_k - x_{k+m}, y_k - y_{k+m})$  以及  $A'_{k+h}(x_{k+h} - x_{k+m+h}, y_{k+h} - y_{k+m+h})$ ，

$\overline{A'_k A'_{k+h}} = (x_{k+h} - x_{k+m+h} - x_k + x_{k+m}, y_{k+h} - y_{k+m+h} - y_k + y_{k+m})$ ，因為要有另一個

與其平行的向量  $\overline{A'_{k+i} A'_{k+h+i}} = (x_{k+h+i} - x_{k+m+h+i} - x_{k+i} + x_{k+m+i}, y_{k+h+i} -$

$y_{k+m+h+i} - y_{k+i} + y_{k+m+i})$ ，可得其充要條件為  $i = m$  且  $2m = n$ ，此時  $\overline{A'_k A'_{k+h}} \parallel$

$\overline{A'_{k+m} A'_{k+m+h}}$  且  $\|\overline{A'_k A'_{k+h}}\| = \|\overline{A'_{k+m} A'_{k+m+h}}\|$  (也就是  $\overline{C_k C_{k+h}} \parallel \overline{C_{k+m} C_{k+m+h}}$  且

$\|\overline{C_k C_{k+h}}\| = \|\overline{C_{k+m} C_{k+m+h}}\|$ ), 因此多邊形  $C_k C_{k+h} C_{k+2h} \dots$  為平行多邊形, 其中  $h = 1, 2, 3, \dots, m-1$  且  $2m = n$  ( $m$  為定值)。

4. 特別的是, 性質 19 的  $\varphi = 2\theta$  設定下, 原多邊形為四邊形時, 衍伸多邊形  $D$  才為平行多邊形, 但是性質 20 的  $\varphi = \pi - 2\theta$  設定下,  $2m = n$  使得原多邊形為所有偶邊形其衍伸多邊形  $C$  皆為平行多邊形, 並且對角線也存在平行結構。

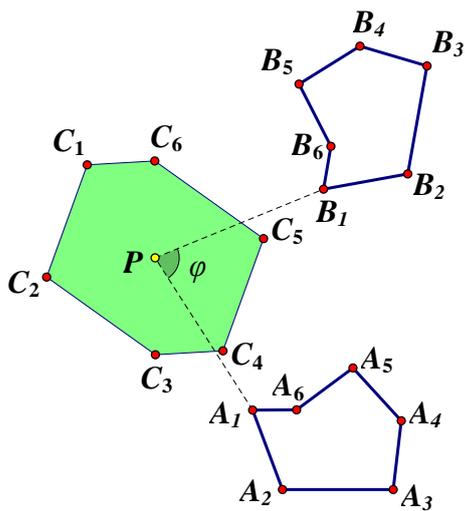


圖 36: 六邊形  $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線

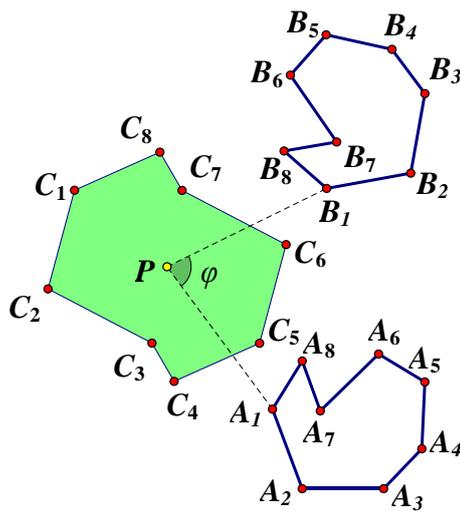


圖 37: 八邊形  $\overline{A_k B_{k+4}}$  連線

□

## 陸、 結論

### 一、 $\varphi = \pi$ 構造下的兩個全等三角形的衍伸圖形性質

原三邊形旋轉角  $\varphi$  為  $\pi$  時, 以  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線進行分類, 分別給出其衍伸圖形  $\triangle C_1 C_2 C_3$  和  $\triangle D_1 D_2 D_3$  的定性性質與幾何意義 (見表 1), 也給出  $\triangle C_1 C_2 C_3$  和  $\triangle D_1 D_2 D_3$  有向面積和與有向面積差的一般式, 其中一般式只與底角  $\theta$  有關, 並不受對稱點  $P$  位置影響。

### 二、 $\varphi = \pi$ 構造下的兩個全等四邊形的衍伸圖形性質

原四邊形旋轉角  $\varphi$  為  $\pi$  時, 以連線  $\overline{A_k B_k}$ 、 $\overline{A_k B_{k+1}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+2}}$ 、 $\overline{A_k B_{k+3}}$  進行分類, 分別給出其衍伸圖形四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與  $D_1 D_2 D_3 D_4$  的定性性質、幾何意義與有向面積和與有向面積差的一般式 (見表 2)。值得一提的是, 我們發現  $\overline{A_k B_{k+1}}$  與  $\overline{A_k B_{k+3}}$  連線的衍

伸圖形有對稱性，其中原四邊形為平行四邊形且  $\theta$  為 45 度時，其衍伸圖形恆為正方形。

### 三、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 構造下的兩個全等三角形及四邊形的衍伸圖形性質

延伸旋轉角  $\varphi$  為  $\frac{\pi}{2}$  的兩個全等形構造的衍伸圖形性質，我們同樣給出有向面積和與差的一般式。在定性性質部分，當  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  下， $\overline{A_k B_k}$  連線所構造的衍伸四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  會彼此透視，與  $\varphi = \pi$  的情形相同。然而，有趣的是當  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  下， $\overline{A_k B_{k+2}}$  連線所構造的衍伸圖形四邊形  $C_1 C_2 C_3 C_4$  與四邊形  $D_1 D_2 D_3 D_4$  不會彼此透視（ $\varphi = \pi$  時，兩者會透視）。因此，當  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  下，兩個衍伸圖形的對角線交點  $S$  與  $T$  與旋轉中心  $P$  三點共線就顯得特殊，其有向比例常數  $\overline{PS}:\overline{PT} = (1 - \tan \theta):(1 + \tan \theta)$  非常漂亮。

### 四、 $\varphi$ 為任意實數構造下的兩個封閉 $n$ 邊形的衍伸圖形性質

我們繼續將前述的對角線交點共線性質推廣到  $\varphi$  為任意實數，驚喜的是，我們發現衍伸四邊形對角線的有向線段比  $\overline{PS}:\overline{PT} = \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \theta\right):\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right)$ 。對於任意全等封閉  $n$  邊形構造的衍伸圖形之任意兩條相異對角線，我們也給出同樣的共線比例不變量。

最後將兩個角度參數  $\varphi$  與  $\theta$  進行整合。考慮  $\varphi$  等於  $2\theta$  時，衍伸圖形  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  具有定性的幾何意義，我們發現僅有四邊形時，衍伸圖形  $D_1 D_2 D_3 \dots D_n$  為平行多邊形，其餘偶邊形的衍伸圖形皆不可能為平行多邊形。若考慮對角線形成的平行四邊形結構，我們給出八邊形、十二邊形、十六邊形等的衍伸圖形  $D_1 D_2 D_3 \dots D_{4h}$  的對角線有平行結構，其餘偶邊形的對角線沒有平行結構。再考慮  $\varphi$  等於  $\pi - 2\theta$  時，衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  具有定性的幾何意義，我們給出重要發現，對於原多邊形為任意偶邊形，當  $2m = n$ ，其  $\overline{A_k B_{k+m}}$  連線的衍伸圖形  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  必為平行偶邊形。

## 柒、 參考文獻

- [1] Dao Thanh Oai and Leonard Giugiuc (2016). Problem 4167. *Crux Mathematicorum*, vol.42, no.7, p.314.
- [2] Bart Braden (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, vol.17, no.4, pp.326-337. DOI: 10.1080/07468342.1986.11972974

## 【評語】 010023

本作品證明將三角形的三頂點對某固定點  $P$  做鏡射 ( $\phi=\pi$ ) 再旋轉 60 度 ( $\theta=60$ )，得到的三點會形成一正三角形，並證明這三角形的面積為不變量，不受  $P$  點位置影響。作者並嘗試將此結果推到四邊形、 $n$  邊形等等，試圖做出這個不變量對於任意  $\phi$ ，任意  $\theta$  均會存在，並求出此數字。作者做了許多推廣與有系統的研究，不過也許是題目本身的限制，並沒有太令人驚喜的結果。作品說明書也寫得很清楚，是值得嘉許的部分。