2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010013**

參展科別　數學

作品名稱　**Construction of Brahmagupta *n*-gons by Chebyshev Polynomials**

得獎獎項　四等獎

就讀學校　臺北市立大直高級中學

指導教師　藍邦偉、劉繕榜

作者姓名　藍宇潔

關鍵詞　**Brahmagupta *n*-gons、Cyclic Polygon、Chebyshev Polynomials**

作者簡介

大家好，我是藍宇潔，平時我喜歡運動、閱讀、唱歌及思考。我認為數學是一個充滿邏輯的科目，是個推論的科學。學習數學，逐漸讓我成為一個條理清晰的人。我從國小開始，就開始跟著老師做數學專題。感謝這一路上有許多老師相助，在我迷失方向時，為我點燈，指引我該如何前進，這一路上雖然崎嶇，卻因此造就了現在我堅強和我的作品。我很喜歡一句話：「不經一番寒徹骨，焉得梅花撲鼻香」。我相信努力地做數學研究，終究會看到數學之美。

摘要

Brahmagupta n-gons 是邊長為整數的圓內接多邊形，其對角線長與面積亦為整數，半徑為有理數。而作者發現參考文獻[2,3]建構的完美多邊形其實就是 Brahmagupta n-gons 經過適當伸縮後，使得外接圓半徑為整數時的圓內接多邊形。

參考文獻「建構邊長為整數的圓內接多邊形」[2] 與「建構三種以上相異整數邊長的圓內接多邊形」[3]是我 2020 年的作品，我建構了多類兩種以上相異整數邊長的圓內接多邊形的一般式。因為我的建構方法會使得外接圓半徑很大，故本研究先討論在單位圓上邊長為有理數的圓內接多邊形，再將其適當地伸縮後，即可得邊長為整數的圓內接多邊形。

在 n 倍角公式的研究方法也由棣美弗定理改成使用柴比雪夫多項式做更深層的刻畫，完整的找出多種相異整數邊長且外接圓半徑與所有對角線長均為整數的圓內接多邊形的一般式。

Abstract

Brahmagupta n-gons is a circular inscribed polygon with integer side lengths, and its diagonals and area are also integers, but the circumradius is rational. I found that the "perfect polygon" constructed in my previous project is actually, via proper dilation, the Brahmagupta n-gons with integer circumradius.

The references "Constructing inscribed polygons with integer side lengths" [2] and "Constructing inscribed polygons with more than three different integer side lengths" [3] were my works two years ago. I constructed a general formula for more than two types of cyclic polygons with different integer side lengths. Because my construction algorithm will make the circumradius very large, in this study we discuss the cyclic polygon of a unit circle with rational side lengths, and then appropriately expands it to obtain the inscribed polygon with integer side lengths.

The research method also improved the use of Chebyshev polynomials instead of De Moivre's Theorem to describe the $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ formulas and more completely found the general formula of a variety of different integer side lengths. The radius of the circumscribed circle, the lengths of all diagonals, and the area of the polygon are all integers.

壹、前言

一、研究動機

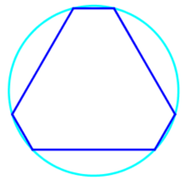

圖 1：圓內接六邊形

此題出處為 Crux Mathematicorum, Vol. 45(6), July 2019[1]，原題是加拿大數學競賽 W.J. Blundon Contest 的題目。如圖 1，圓內接六邊形的邊長分別為$1,3,1,3,1,3$，試求此六邊形的面積。我先前有兩篇研究，第一篇[2]是討論圓內接多邊形有兩種相異整數邊長a,b，並求出$(a,b_{(n-1)})$與$(a_{(2)},b_{(n-2)})$邊長的一般式。第二篇[3]是找出**三種以上**相異整數邊長的圓內接多邊形其邊長的一般式。但我很好奇在我的研究中[2,3]，是否有找到**所有**兩種以上相異邊長的一般式，而且我的方法是可以指定邊數，例如$(a_{(2)},b_{(5)})$，再建構多邊形。我的作品中提出與參考文獻[5,6,8]不同的建構方法。我們利用倍角建構法會導致邊長很大，因此在本研究中，我改成在單位圓上，作出邊長為有理數的圓內接多邊形，其實在[3]中的定理 15 我提出「在複數平面的單位圓$|z|=1$上，存在邊長皆相異且皆為有理數的圓內接n邊形。且其所有對角線長亦為有理數。」的想法，但證明不夠完整。本作品中我沿用此想法並將邊長$a,b,c,d,\ldots$由自然數改為<u>有理數</u>。這樣做出的多邊形可伸縮變為邊長為整數的完美多邊形。此時完美多邊形與伸縮後的 Brahmagupta n-gons 等價，即邊長、外接圓半徑、所有對角線長與面積皆為整數。

二、名詞定義與解釋

(一) $(a_{(h)},b_{(k)},c_{(j)})$：本研究我將$a$、$b$、$c$規定為**有理數**，以符號$(a_{(h)},b_{(k)},c_{(j)})$表示邊長為$h$個$a$、$k$個$b$與$j$個$c$的圓內接$h+k+j$邊形，且$h$、$k$或$j$之值為1時亦可省略。

(二) 拼貼三角形：三邊長為整數且頂角是120°的三角形。例如三邊長為$3,5,7$、$7,8,13$或$5,16,19$或它們的的整數倍，我們簡記為$T_{3,5,7}$、$T_{7,8,13}$或$T_{5,16,19}$[2]。

(三) 多重子集合：在多重集之中，同一個元素可以重複出現多次。

(四) 當邊數$n>3$時，邊長為整數的多邊形稱為 Heron n-gons，其外接圓存在時稱為 Brahmagupta n-gons。其實依定義 Brahmagupta n-gons 做適當伸縮，使其外接圓半徑為整數時，即完美多邊形[3]。我們將本作品要討論的邊長為整數的多邊形其定義列於表 1。

表 1：比較邊長為整數的多邊形定義

多邊形	外接圓半徑	對角線長	面積
Heron 多邊形[5]	不一定圓內接	整數	整數
Brahmagupta 多邊形[5]	有理數	整數	整數
整數多邊形[3]	實數	實數	實數
完美多邊形[3]	整數	整數[3]	整數[3]

三、 研究目的：

(一) 文獻[3]中的完美多邊形是否是所有的完美多邊形？

(二) 討論 Brahmagupta n-gons 的倍角建構。

(三) 以 Chebyshev Polynomials 建構 Brahmagupta n-gons。

四、 文獻回顧

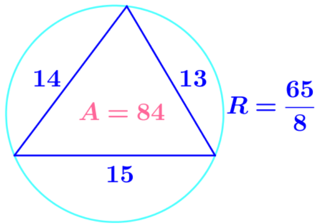

圖 2-1：Heron Triangle

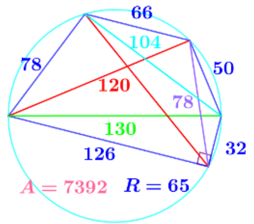

圖 2-2：Robbins Pentagon

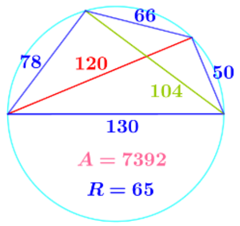

圖 2-3：(130,50,66,78)

有 3 種邊長是整數的圓內接多邊形，第一種是 Heron n-gons，當 $n \geq 3$ 時，其邊長、對角線長與面積皆為整數。第二種是 Robbins Pentagons 或 Robbins Hexagons，即邊長與面積是整數的五邊形或六邊形，且當邊長和是偶數時，它的外接圓半徑亦為整數，否則半徑長是有理數，但是我沒查到 Robbins 教授做出更多邊形的實例，圖 2-2 其實是兩個直角三角形 (50,120,130) 與 (32,126,130) 做出四邊形，其實 (78,104,130) 也是直角三角形，再用 Ptolemy's Theorem 找出剩餘邊長。而在圖 2-3 使用兩個直角三角形 (3,4,5) 與 (5,12,13) 再加上餘弦定理，就建構了一邊為直徑的完美四邊形 (130,50,66,78) ，就是圖 2-2 的上半部份。第三種是 Brahmagupta n-gons，就是有外接圓的 Heron n-gons，其邊長，對角線與面積皆為整數，外接圓半徑為有理數[5]。本作品且與文獻[5,6]最大不同處就是教授們處理時使用多邊形的內角，我用切割多邊形後每個等腰三角形的頂角之半。他們使用 Ptolemy's Theorem，而我沒有使用。

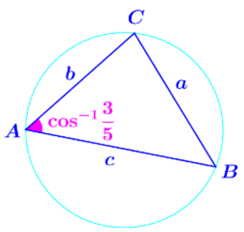

圖 3-1：第 1 族

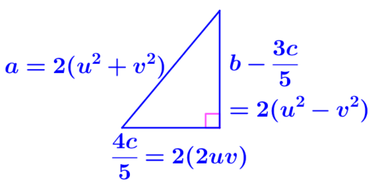

圖 3-2：畢氏定理

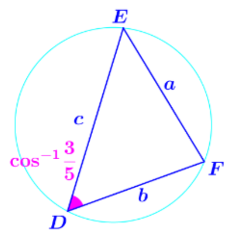

圖 3-3：第 1 族

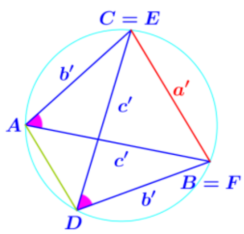

圖 3-4：四邊形(1)

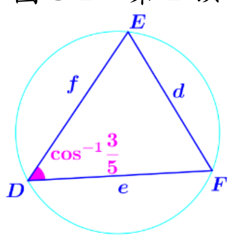

圖 3-5：第 1 族

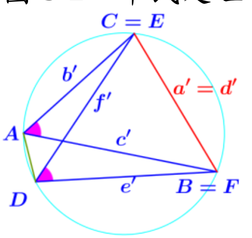

圖 3-6：四邊形(2)

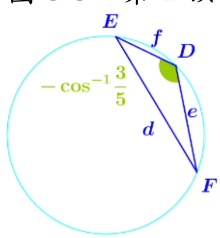

圖 3-7：第 2 族

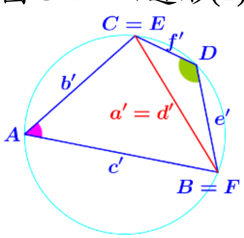

圖 3-8：四邊形(3)

而在 Construction of Brahmagupta n-gons [5]的建構方法有三種，在此介紹其中一種，取兩族對角互補的三角形做適當的伸縮，造成四點共圓。我們看個例子，若 ΔABC 與 ΔDEF 為 Heron

三角形，取 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，如圖 3-1，他先以餘弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-\dfrac{6}{5}bc$ 再配方成 $a^2=(b-\dfrac{3}{5}c)^2+(\dfrac{4}{5}c)^2$，如圖 3-2。再設 $a=\lambda(u^2+v^2)$，$b-\dfrac{3}{5}c=\lambda(u^2-v^2)$，$\dfrac{4}{5}c=\lambda(2uv)$。取 $\lambda=2$，可得 $a=2(u^2+v^2)$，$b=(u+2v)(2u-v)$，$c=5uv$，$2u>v$，u,v 互質，$u,v\in\mathbb{N}$，得到第一族頂角為 $\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ 的三角形。同理再取 $\cos(\pi-\theta)=-\dfrac{3}{5}$，如圖 3-3，以餘弦定理可得 $d^2=e^2+f^2+\dfrac{6}{5}ef$，再配方成 $d^2=(e+\dfrac{3}{5}f)^2+(\dfrac{4}{5}f)^2$，再設 $d=\kappa(r^2+s^2)$，$e+\dfrac{3}{5}f=\kappa(r^2-s^2)$，$\dfrac{4}{5}f=\kappa(2rs)$。取 $\kappa=2$，可得 $d=2(r^2+s^2)$，$e=(r-2s)(2r+s)$，$f=5rs$，$r>2s$，r,s 互質，$r,s\in\mathbb{N}$ 可得第二族頂角為 $\cos^{-1}(-\dfrac{3}{5})$ 的三角形，取共同邊 a,d 的最小公倍數化簡使其等長，得新的邊長為：$a=d=2(u^2+v^2)(r^2+s^2)$，$b=(2u^2-3uv-2v^2)(r^2+s^2)$，$c=5uv(r^2+s^2)$，$e=(2r^2-3rs-2s^2)(u^2+v^2)$，$f=5rs(u^2+v^2)$。再利用 Ptolemy Theorem 找出最後一邊，如圖 3-4。而重複這種手法可得圖 3-9 與圖 3-10。所以我們在網路上找到的 Brahmagupta *n*-gons 多為四邊形、五邊形與六邊形。

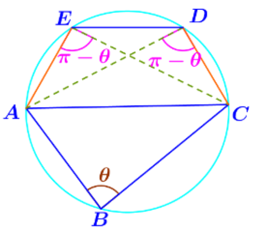

圖 3-9：Pentagon

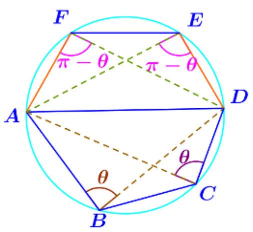

圖 3-10：Hexagon

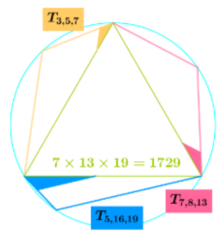

圖 3-11：拼貼三角形

他的建構方法與我們研究[2]初期使用過的拼貼手法構造整數多邊形類似，我用 1 至 3 個拼貼三角形，取最大邊的最小公倍數當做一個正三角形的邊長，拼湊成邊長為整數的圓內接四邊形、五邊形與六邊形。例如要做邊長為整數的圓內接六邊形，就取拼貼三角形 $T_{3,5,7}$、$T_{7,8,13}$ 與 $T_{5,16,19}$，如圖 3-7，分別放大 13×19、7×19 與 7×13 倍，得 $T_{741,1235,1729}$、$T_{931,1064,1729}$ 與 $T_{405,1456,1729}$。再將這三個三角形接在一個邊長為 $[7,13,19]=1729$ 的正三角形外面，如圖 3-11，就可以得邊長為整數的圓內接六邊形 $(741,1235,931,1064,405,1456)$，如圖 3-9。為什麼我當初只考慮做 60° 與 120° 的情形？因為由 Niven 定理 [7] 知，若 $0^\circ\le\theta\le90^\circ$，且 θ 為整數，其餘弦值只有 $\cos0^\circ$、$\cos60^\circ$、$\cos90^\circ$ 為有理數。

在 Generalization of Herons and Brahmagupta Equalities to any Cyclic Polygon [6]這篇中提到，當 $n>4$ 時，Brahmagupta *n*-gons 面積沒有顯函數解(explicit solutions)。

而在 Geometric Constructability of Cyclic Polygons and a limit theorem [8]這篇中提到，當頂

點數$n>4$時，已證明無法給任意邊長，建構 Brahmagupta n-gons。因此我們退而求其次，改成給定邊長的組合情形。例如邊長三同兩同的五邊形，且符號記作$(a_{(3)},b_{(2)})$。

在我的研究中，文獻[2,3]與其他教授的研究中[5,6]最大不同處是他用圓內接多邊形的內角來控制，我用某個等腰三角形頂角的一半控制，如圖 4-1。而且在建構前**我就可以先指定邊長的組合情形**，例如完美七邊形指定其中 6 邊相同的$(a_{(6)},b)$或其中 5 邊相同另外兩邊相異的$(a_{(5)},b,c)$。在文獻[2]中已證明**圓內接整數多邊形的邊長排列順序不影響建構。**

在作者的參考資料[2,3]主要研究有兩個部份：

第一是四邊形的部份，邊長相同是正方形，三同一異是上底與腰等長的等腰梯形，兩兩相同是矩形或鳶形，都很明顯有外接圓。我也找出了邊長相異(a,b,c,d)的充要條件[2]。而邊長為兩同兩異$(a,b_{(2)},c)$，且一組對角為有理數的圓內接四邊形邊長一般式是某個二元二次方程式$ax^2+bxy+cy^2=n$的整數解，即定理 1[2]。

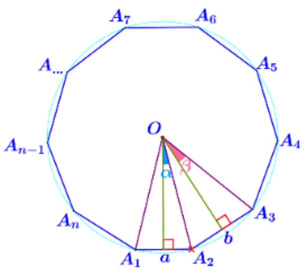

圖 4-1：$(a,b_{(n-1)})$

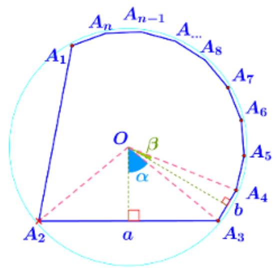

圖 4-2：$(a_{(2)},b_{(n-2)})$

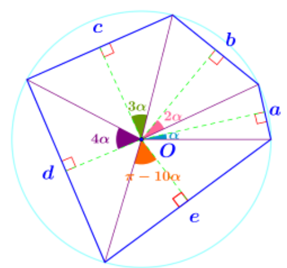

圖 4-3：(a,b,c,d,e)

第二是利用 Binomial Theorem 與 De Moivre's Theorem 導出n倍角公式。設n為大於1的自然數。展開：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$，利用實部相等且虛部相等可得：

$$\cos(n\theta)=\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}\cos^{n-2k+2}\theta\sin^{2k-2}\theta\text{，}\sin(n\theta)=\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta\text{。}$$

利用圓心角、正弦定理、畢氏定理與伸縮在定理 4、5 與 7[2]分別建構出$(a,b_{(n-1)})$、$(a_2,b_{(n-2)})$與$(a_4,b_{(n-4)})$邊長一般式[2]。其中$2pq=x$，$p^2-q^2=y$，$p^2+q^2=z$，$p>q$，$p,q\in$□。

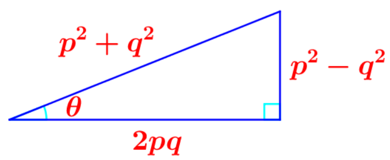

圖 4-4：輔助三角形

1. 完美n邊形$(a,b_{(n-1)})$如圖 4-1 所示，令外接圓半徑為$R=z^{n-1}$，則可得兩組不同整數邊長為：$a=2(C_1^{n-1}xy^{n-2}-C_3^{n-1}x^3y^{n-4}+C_5^{n-1}x^5y^{n-6}-\dots)=2\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n-1}x^{2k-1}y^{n-2k}$，$b=4xz^{n-3}$。
2. 完美n邊形$(a_{(2)},b_{(n-2)})$如圖 4-2 所示，令外接圓半徑為$R=z^{n-2}$，則可得兩組不同整數邊長

為：$a=2(C_0^{n-2}y^{n-2}-C_2^{n-2}x^2y^{n-4}+C_4^{n-2}x^4y^{n-6}-...)=2\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}(-1)^{k-1}C_{2k}^{n-1}x^{2k}y^{n-2k-2}$，$b=4xyz^{n-4}$。

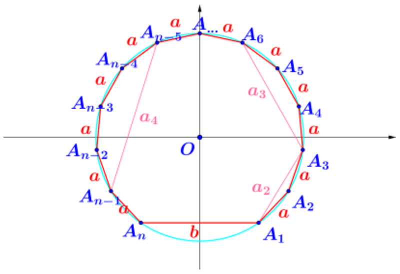

圖 5-1：$(a_{(n-1)},b)$

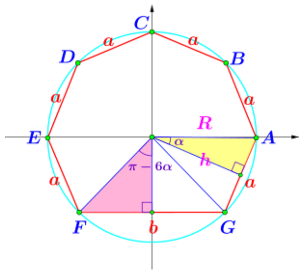

圖 5-2：$(a_{(6)},b)$

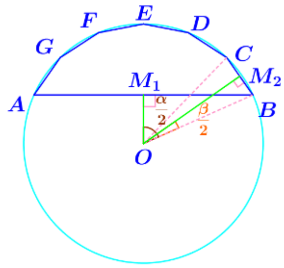

圖 5-3：$(a_{(6)},b)$

而在[3]中更延伸到 3 種以上相異整數邊長的圓內接多邊形邊長的一般式。作者用 n 倍角建構法，處理最少邊數為1或2的完美多邊形一般式，即：$(a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n)$，其中 a_1 對應的圓心角是 2α，a_2 對應的圓心角是 4α，…，a_{n-1} 對應的圓心角是 $2(n-1)\alpha$，a_n 對應的對角是 $2\pi-n(n-1)\alpha$，其中 $0<\dfrac{2\alpha}{n(n-1)}<\pi$，$n\in\mathbb{N}$。同理可建構完美多邊形 $(a_{1(h)},a_{2(k)},...,a_{m(2)})$，即定理 10[3]。其中 $h\geq 2$，$k\geq 2$，$h,k\in\mathbb{N}$。若 $p(i)$ 表正整數 i 的分割數，在定理 11 [3]我也證明了完美 n 邊形 $(a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n)$ 可拆成至多 $\prod_{i=1}^{n-1}p(i)$ 種完美多邊形，且其一般式相同。定理 12[3] 證明了其所有對角線長(圖 4-2) 皆為整數。定理 13[3]證明了完美多邊形的面積(圖 4-3)皆為整數。定理 14[3]存在完美多邊形 $(a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},2R)$ 與定理 15[3] 在複數平面的單位圓上，存在邊長皆相異且皆為有理數的圓內接 n 邊形，但上述部分證明不夠完整。

如果建構邊數較多的完美多邊形邊長會很大，我使用半圓建構法。就是分別在兩個半圓上分別建構完美多邊形，再取兩個半徑的最小公倍數分別伸縮，將其組合起來。定理 15 是以 1 的 n 次方根討論單位圓上邊長為有理數的圓內接多邊形。而且我發現一件很特別的事，我的刻畫方式可以做出完美多邊形其頂點都在某條直徑的同側，如圖 5-3，而文獻探討[5,6]中 $n>3$ 的 Brahmagupta n-gons 沒看到這種情形。

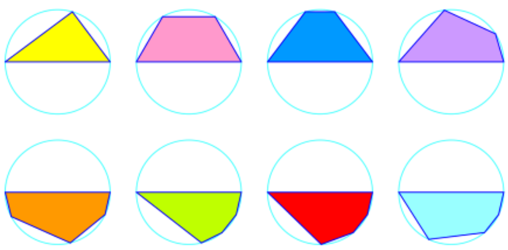

圖 5-4：半圓建構法

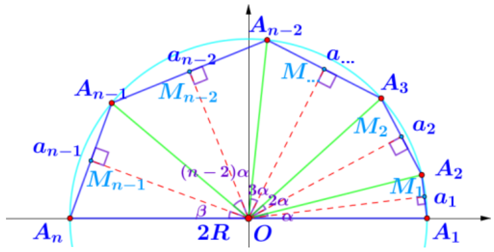

圖 5-5：定理 14$(a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},2R)$的建構

值得一提的是最近在搜文獻時，看到一篇義大利的論文[6]是刊於 2021 年 1 月。而我的作品[2]是 2020 年 7 月獲丘成桐數學獎佳作，且作品[3]是 2020 年 11 月報名臺灣國際科展 TISF2021，時程較早。此處的一般式並非唯一，其實有無限多種。以完美五邊形 $(a_{(2)},b_{(2)},c)$ 為

例，我以兩種不同角度建構比較：為了突顯結構，設 $x=2pq$，$y=p^2-q^2$，$z=p^2+q^2$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$ 。

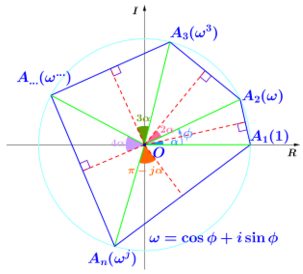

圖 5-6：複數平面上單位圓

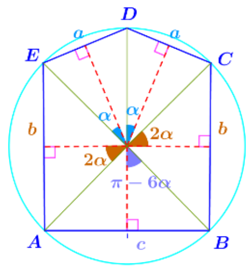

圖 5-7：$(a_{(2)},b_{(2)},c)$

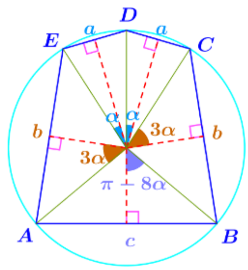

圖 5-8：$(a_{(2)},b_{(2)},c)$

我取 a 、b 與 c 對應的圓心角分別為 2α 、4α 與 $2\pi-12\alpha$，其中 $0<\alpha=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{6}$，如圖 5-7，且 $a=2R\sin\alpha=2R(\dfrac{y}{z})$，$b=2R\sin 2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha=4R(\dfrac{y}{z})(\dfrac{x}{z})$，

$c=2R\sin(\pi-6\alpha)=2R\sin 6\alpha=2R(C_1^6(\dfrac{x}{z})^5(\dfrac{y}{z})-C_3^6(\dfrac{x}{z})^3(\dfrac{y}{z})^3+C_5^6(\dfrac{x}{z})(\dfrac{y}{z})^5)$，設 $R=z^6$，得

$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=12x^5y-40x^3y^3+12xy^5$。取 $p=3$、$q=2$，$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$。

如圖 5-8，我取 a 、b 與 c 的對角分別為 2α 、6α 與 $2\pi-16\alpha$，其中 $0<\alpha=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{8}$，且

$a=2R\sin\alpha=2R(\dfrac{y}{z})$，$b=2R\sin 3\alpha=2R(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)=2R(3(\dfrac{x}{z})^2(\dfrac{y}{z})-(\dfrac{y}{z})^3)$，

$c=2R\sin(\pi-8\alpha)=2R\sin 8\alpha=2R(C_1^8(\dfrac{x}{z})^7(\dfrac{y}{z})-C_3^8(\dfrac{x}{z})^5(\dfrac{y}{z})^3+C_5^8(\dfrac{x}{z})^3(\dfrac{y}{z})^5-C_7^8(\dfrac{y}{z})^7)$，設 $R=z^8$，得 $a=2yz^7$，$b=6x^2yz^5-2y^3z^5$，$c=16x^7y-112x^5y^3+112x^3y^5-16y^7$。取 $p=4$、$q=3$，$\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$。

表 2 是部份相異兩種以上邊長的完美 n 邊形邊長的一般式[2,3]，表 3 是可以利用半圓建構法，其中一邊邊長為直徑的完美 n 邊形的一般式。我在角度的選取盡量都是取最小的，因此對應的邊長也是較短的。但建構出來的多邊形的邊長，我不會約去公因數，因為會導致半徑不是整數。表 2 與表 3 中 $x=2pq$，$y=p^2-q^2$，$z=p^2+q^2$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$ 。

表 2：完美四邊形、五邊形、六邊形與七邊形的一般式

完美四邊形
$(a_{(3)},b)$：$R=z^3$，$a=2yz^2$，$b=8xy^2-4y^3$
$(a_{(2)},b,c)$：$R=z^4$，$a=2yz^3$，$b=4xyz^2$，$c=8x^3y-8xy^3$
(a,b,c,d)：$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=6x^2yz^3-8y^3z^3$，$d=12x^5y-40x^3y^3+2xy^5$
完美五邊形

$(a_{(4)},b)$：$R=z^4$，$a=2yz^3$，$b=8x^3y-8xy^3$
$(a_{(3)},b_{(2)})$：$R=z^3$，$a=4xyz$，$b=2x^3y-6xy^2$
$(a_{(2)},b_{(2)},c)$：$R=z^6$，$a=2yz^4$，$b=4xyz^3$，$c=10x^4y-20x^2y^3+2y^5$
$(a_{(3)},b,c)$：$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=12x^5y-40x^3y^3+2xy^5$
$(a_{(2)},b,c,d)$：$R=z^7$，$a=2yz^6$，$b=4xyz^5$，$c=6xy^2z^3-2y^3z^3$， $d=2(C_1^7x^6y-C_3^7x^4y^3+C_5^7x^2y^5-C_7^7y^7)$
(a,b,c,d,e)：$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$，$d=8xyz^6-8xy^3z^6$， $e=2(C_1^{10}x^9y-C_3^{10}x^7y^3-C_5^{10}x^5y^5+C_7^{10}x^3y^7+C_9^{10}xy^9)$
完美六邊形
$(a_{(5)},b)$：$R=z^5$，$a=2yz^4$，$b=10x^4y-20x^2y^3+2y^5$
$(a_{(4)},b_{(2)})$：$R=z^2$，$a=2yz$，$b=2x^2-2y^2$
$(a_{(2)},b_{(2)},c_{(2)})$：$R=z^3$，$a=2yz^2$，$b=4xyz$，$c=2x^3-6xy^2$
$(a_{(3)},b_{(2)},c)$：$R=z^7$，$a=2yz^6$，$b=4xyz^5$，$c=2(C_1^7x^6y-C_3^7x^4y^3+C_5^7x^2y^5-C_7^7y^7)$
$(a_{(4)},b,c)$：$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=2(C_1^6x^5y-C_3^6x^3y^3+C_5^6xy^5)$
$(a_{(3)},b,c,d)$：$R=z^8$，$a=2yz^7$，$b=4xyz^6$，$c=6x^2yz^5-2y^3z^5$， $d=2(C_1^8x^7y-C_3^8x^5y^3+C_5^8x^3y^5-C_7^8xy^7)$
$(a_{(2)},b_{(2)},c,d)$：$R=z^9$，$a=2yz^8$，$b=4xyz^7$，$c=6x^2yz^6-2y^3z^6$， $d=2(C_1^9x^8y-C_3^9x^6y^3+C_5^9x^4y^5-C_7^9x^2y^7+C_9^9y^9)$
$(a_{(2)},b,c,d,e)$：$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$，$d=8x^3yz^6-8xy^3z^6$， $e=2(C_1^{10}x^9y-C_3^{10}x^7y^3+C_5^{10}x^5y^5-C_7^{10}x^3y^7+C_9^{10}xy^9)$
(a,b,c,d,e,f)：$R=z^{15}$，$a=2yz^{14}$，$b=4xyz^{13}$，$c=6x^2yz^{12}-2y^3z^{12}$， $d=8x^3yz^{11}-8xy^3z^{11}$，$e=10x^4yz^{10}-20x^2y^3z^{10}+2y^5z^{10}$， $f=2(C_1^{15}x^{14}y-C_3^{15}x^{12}y^3+C_5^{15}x^{10}y^5-C_7^{15}x^8y^7+C_9^{15}x^6y^9-C_{11}^{15}x^4y^{11}+C_{13}^{15}x^2y^{13}-C_{15}^{15}y^{15})$

表 3：其中一邊邊長為直徑的完美四邊形、五邊形與六邊形的一般式

完美四邊形
$(a_{(3)},2R)$：$R=2z^2$，$a=2y$
$(a,b,c,2R)$：$R=z^3$，$a=2yz^2$，$b=4xyz$，$c=2x^3-6xy^2$
完美五邊形
$(a,b,c,d,2R)$：$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=6x^2yz^3-2y^3z^3$， $d=2x^6-30x^4y^2+30x^2y^4-2y^6$
$(a_{(2)},b,c,2R)$：$R=z^4$，$a=2yz^3$，$b=4xyz^2$，$c=2x^4-12x^2y^2+2y^4$
$(a_{(3)},b,2R)$：$R=z^3$，$a=2yz^2$，$b=2x^3-6xy^2$
完美六邊形
$(a,b,c,d,e,2R)$：$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$，$d=8x^3yz^6-8xy^3z^6$， $e=2x^{10}-90x^8y^2+420x^6y^4-420x^4y^6+90x^2y^8-2y^{10}$
$(a_{(3)},b,c,2R)$：$R=z^6$，$a=2yz^3$，$b=4xyz^2$，$c=2x^5-20x^3y^2+10xy^4$
$(a_{(2)},b_{(2)},c,2R)$：$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=2x^6-30x^4y^2+30x^2y^4-2y^6$

貳、研究方法或過程

一、單位圓上所有的有理數點

單位圓 $x^2+y^2=1$ 上很明顯有 4 個有理數點，$(1,0)$、$(0,1)$、$(-1,0)$ 與 $(0,-1)$。設 m 為有理數，且通過 $(-1,0)$ 的直線 L 之斜率為 m，即 $L:y=m(x+1)$。我們想找 L 與單位圓的另一個交點。將 L 代入單位圓中得：$x^2+m^2(x+1)^2=1$

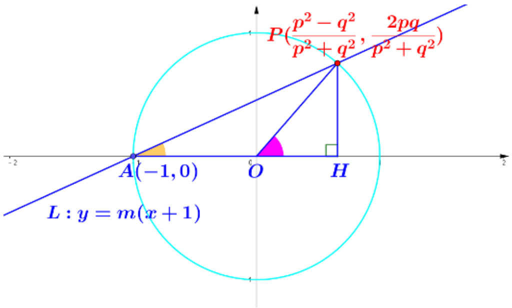

圖 6：單位圓上的有理數點

$\Rightarrow (m^2+1)x^2+2m^2x+(m^2-1)=0 \Rightarrow (x+1)\big((m^2+1)x+(m^2-1)\big)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{m^2-1}{m^2+1},-1$，取

$x=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$ 代入 L 得 $y=\dfrac{2m}{1+m^2}$，即交點為 $P(\dfrac{1-m^2}{1+m^2},\dfrac{2m}{1+m^2})$。設 $m=\dfrac{q}{p}$，$p\neq 0$，$p>q$，

$p,q\in\square$，得 $x=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=\dfrac{1-(\frac{q}{p})^2}{1+(\frac{q}{p})^2}=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$y=\dfrac{2\frac{q}{p}}{1+(\frac{q}{p})^2}=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$。得 $P(\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\dfrac{2pq}{p^2+q^2})$，

原來的畢氏三元數有要求 p、q 一奇一偶，但我們要造成 θ 的鄰邊為較長的股，故考慮當 p、q 為一奇數一偶數或兩偶數時，p^2-q^2 為奇數 (對邊)，$2pq$ 為偶數(鄰邊)；當 p、q 為兩奇數時，設 $h,k\in\square$，p^2-q^2 與 $2pq$ 的公因數為 2，$p^2-q^2=2(\dfrac{p^2-q^2}{2})$，$2pq=2(\dfrac{2pq}{2})$，則 $\dfrac{p^2-q^2}{2}=2h$ 為偶數(對邊)，$\dfrac{2pq}{2}=2k+1$ 為奇數(鄰邊)。故此種表示方式已代表單位圓上的所有有理數點。也就是說我在作品[2,3]找到的一般式是所有的一般式。而控制 p、q 的奇偶性，可以造成鄰邊大於對邊的情形，如表 4，我們用單位圓與斜率為 $m=\tan\alpha$ 且通過 $(-1,0)$ 的直線找出與單位圓的另一交點 $P(\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\dfrac{2pq}{p^2+q^2})$，以畢氏三元數的觀點來說就是斜邊為 p^2+q^2、鄰邊為 p^2-q^2 而對邊為 $2pq$，所以對邊為偶數，若要造成對邊為奇數鄰邊為偶數，可以取 p 與 q 皆為奇數，約掉公因數 2 後可造成對邊為偶數，鄰邊為奇數。

表 4：p 與 q 的奇偶性

p	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5
q	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
$2pq$	4	6	12	8	16	24	10	20	30	40
p^2-q^2	3	8	5	15	12	7	24	29	34	9
p^2+q^2	5	10	13	17	20	25	26	21	16	41

二、 以柴比雪夫多項式處理 Brahmagupta *n*-gons

在處理$\cos n\theta$和$\sin n\theta$時，還有另外一種處理方式：柴比雪夫多項式，在此我們探討第一型柴比雪夫多項式與第二型柴比雪夫多項式與其性質。設n是非負整數，$x\in[-1,1]$，$\theta\in[0,\pi]$， $\cos\theta=x$ ，$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ ，即 $\theta=\cos^{-1}x$ 。其中第一型柴比雪夫多項式是$\cos(n\theta)=T_n(x)$，第二型柴比雪夫多項式是$\sin(n+1)\theta=\sin\theta\cdot U_n(x)$中的$U_n(x)$。

在之前的研究[2,3]我處理n倍角的問題時，我使用 Binomial Theorem 與 De Moivre's Theorem，展開$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$，設$n_1=\left\lfloor\dfrac{n+1}{2}\right\rfloor$，$n_2=\left\lfloor\dfrac{n+2}{2}\right\rfloor$，利用實部相等且虛部相等得：

$$\cos(n\theta)=\sum_{k=1}^{n_2}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}\cos^{n-2k+2}\theta\sin^{2k-2}\theta \text{，} \sin(n\theta)=\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta \text{。}$$

其中實部$\cos(n\theta)=\sum_{k=1}^{n_2}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}\cos^{n-2k+2}\theta\sin^{2k-2}\theta=\sum_{k=1}^{n_2}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}\cos^{n-2k+2}\theta(\sin^2\theta)^{k-1}$

$=\sum_{k=1}^{n_2}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}\cos^{n-2k+2}\theta(1-\cos^2\theta)^{k-1}\Rightarrow T_n(x)=\sum_{k=1}^{n_2}(-1)^{k-1}C_{2k-2}^{n}x^{n-2k+2}(1-x^2)^{k-1}$ 為x的多項式。

虛部$\sin(n\theta)=\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-1}\theta=\sin\theta\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta\sin^{2k-2}\theta$

$=\sin\theta\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta(1-\cos^2\theta)^{k-1}=\sin\theta\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta(\sin^2\theta)^{k-1}$

$\Rightarrow\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}\cos^{n-2k+1}\theta(1-\cos^2\theta)^{k-1}\Rightarrow U_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n_1}(-1)^{k-1}C_{2k-1}^{n}x^{n-2k+1}(1-x^2)^{k-1}$

為x的多項式。

(一) 第一型柴比雪夫多項式與其性質：

第一型柴比雪夫多項式是在處理$\cos n\theta$的問題。我們要以x表示$\cos n\theta$的展開式。設$T_n(x)=\cos(n\theta)=\cos(n\cos^{-1}x)$。由和差化積公式可得：

$\cos(n\theta)+\cos(n-2)\theta=2\cos(n-1)\theta\cos\theta\Rightarrow T_n(x)+T_{n-2}(x)=2xT_{n-1}(x)$；

故定義：$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$，$n\ge 2$，$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$。為了後續研究方便我計算$T_0(x)$至$T_9(x)$並列於表 5。

表 5：第一型柴比雪夫多項式

$T_n(x)$	$\cos n\theta$
$T_0(x)=1$	1

$T_1(x)=x$	$\cos\theta=1\times\cos\theta$
$T_2(x)=2x^2-1$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$	$\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$\cos 7\theta=64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^3\theta-7\cos\theta$
$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$	$\cos 8\theta=128\cos^8\theta-256\cos^6\theta+160\cos^4\theta$ $-32\cos^2\theta+1$

而且我也觀察到$T_n(x)$的領導係數是2^{n-1}，且$T_n(x)$的係數和為1，即$T_n(1)=1$，且$T_n(x)$共有$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1$項，其係數正負交錯。且當$n$為奇數時，$f(x)=T_n(x)$為奇函數，當$n$為偶數時，$f(x)=T_n(x)$為偶函數。這2個性質可以讓我們更容易推導出方程式的根。$T_1(x)=x=0$，其根為$\cos\frac{\pi}{2}$；$T_2(x)=2x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，即其根為$\cos\frac{\pi}{4}$與$\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}$；$T_3(x)=4x^3-3x=0\Rightarrow x(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})=0$，即其根為$\cos\frac{\pi}{6}$、$\cos\frac{3\pi}{6}$與$\cos(-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}$；$T_4(x)=8x^4-8x^2+1=0$依一次因式檢驗定理無有理根，故依前述規則猜測$\cos\frac{\pi}{8}$為其根，故嘗試因式定理得：$T_4(\cos\frac{\pi}{8})=8\cos^4\frac{\pi}{8}-8\cos^2\frac{\pi}{8}+1=8(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2})^2-8\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+1=0$，再代入$T_4(\cos\frac{3\pi}{8})=8\cos^4\frac{3\pi}{8}-8\cos^2\frac{3\pi}{8}+1=8(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2})^2-8\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+1=0$，因為$f(x)=T_4(x)$為偶函數，其圖形對稱$y$軸，故$T_4(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{8}$、$\cos\frac{3\pi}{8}$、$-\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{5\pi}{8}$與$-\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{7\pi}{8}$； $T_5(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{10}$、$\cos\frac{3\pi}{10}$、$\cos\frac{5\pi}{10}$、$-\cos\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{7\pi}{10}$與$-\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{9\pi}{10}$；同理$T_6(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{12}$、$\cos\frac{3\pi}{12}$、$\cos\frac{5\pi}{12}$、$\cos\frac{7\pi}{12}$、$\cos\frac{9\pi}{12}$與$\cos\frac{11\pi}{12}$；$T_7(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{14}$、$\cos\frac{3\pi}{14}$、$\cos\frac{5\pi}{14}$、$\cos\frac{7\pi}{14}$、$\cos\frac{9\pi}{14}$、$\cos\frac{11\pi}{14}$與$\cos\frac{13\pi}{14}$；以此類推。故當$n\ge 1$時，$T_n(x)=0$會有$n$個相異實根，且其根為$\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$，$1\le k\le n$；換個角度說，$\cos(n\theta)=0=\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2})$，$k\in\mathbb{Z}$。故$\theta=\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$，$k=1,2,..,n$。故可以$T_n(x)$

將表示成：$T_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})\right)$。圖 7-1 至 7-6 為 $T_2(x)$ 至 $T_7(x)$ 之圖形。

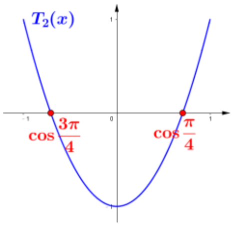

圖 7-1： $y=T_2(x)$

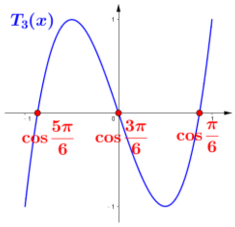

圖 7-2： $y=T_3(x)$

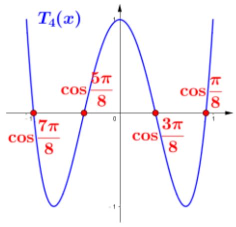

圖 7-3： $y=T_4(x)$

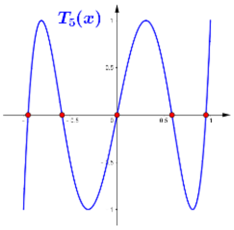

圖 7-4： $y=T_5(x)$

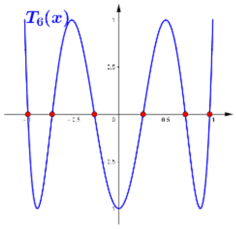

圖 7-5： $y=T_6(x)$

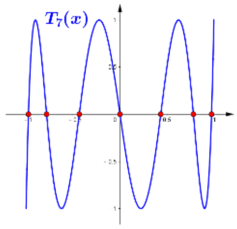

圖 7-6： $y=T_7(x)$

(二) 第二型柴比雪夫多項式與其性質

第二型柴比雪夫多項式是處理 $\sin n\theta$，n 是非負整數。設 $x=\cos\theta$，$x\in[-1,1]$，$\theta\in[0,\pi]$，即 $\theta=\cos^{-1}x$，$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$。令 $U_n(x)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$。故

$$U_{n+1}(x)+U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n+2)\theta+\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin(n+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2xU_n(x)$$

$\Rightarrow U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$。

故定義：$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$，$n\ge 1$，$U_0(x)=1$，$U_1(x)=2x$。為了後續研究方便我計算 $U_0(x)$ 至 $U_8(x)$ 並列於表 6。

表 6：第二型柴比雪夫多項式

$U_n(x)$	$\sin(n+1)\theta$
$U_0(x)=1$	$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$
$U_1(x)=2x$	$\sin 2\theta=2x\sqrt{1-x^2}$
$U_2(x)=4x^2-1$	$\sin 3\theta=(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$
$U_3(x)=8x^3-4x$	$\sin 4\theta=(8x^3-4x)\sqrt{1-x^2}$
$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$	$\sin 5\theta=(16x^4-12x^2+1)\sqrt{1-x^2}$
$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$	$\sin 6\theta=(32x^5-32x^3+6x)\sqrt{1-x^2}$
$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1$	$\sin 7\theta=(64x^6-80x^4+24x^2-1)\sqrt{1-x^2}$
$U_7(x)=128x^7-192x^5+80x^3-8x$	$\sin 8\theta=(128x^7-192x^5-32x^3-8x)\ \sqrt{1-x^2}$
$U_8(x)=256x^8-448x^6+16x^4-40x^2+1$	$\sin 9\theta=(256x^8-448x^6+16x^4-40x^2+1)\ \sqrt{1-x^2}$

而且我也觀察到$U_n(x)$的領導係數是2^n，且$U_n(x)$的係數和為$n+1$，即$U_n(1)=n+1$，且$U_n(x)$共有$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1$項，其係數正負交錯。當$n$為奇數時，$f(x)=U_n(x)$為奇函數，當$n$為偶數時，$f(x)=U_n(x)$為偶函數。$U_1(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$，其根為$\cos\frac{\pi}{2}$；$U_2(x)=4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$，即其根為$\cos\frac{\pi}{3}$與$-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}$；$U_3(x)=8x^3-4x=0 \Rightarrow 4x(2x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，即其根為$\cos\frac{\pi}{4}$、$\cos\frac{2\pi}{4}$與$-\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}$；$U_4(x)=16x^4-12x^2+1=0$依一次因式檢驗定理無有理根，再依前述規則猜測$\cos\frac{\pi}{5}$為其根，故由因式定理知：

$U_4(\cos\frac{\pi}{5})=16\cos^4\frac{\pi}{5}-12\cos^2\frac{\pi}{5}+1=16(\frac{\sqrt{5}+1}{4})^4-12(\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2+1=0$，再試

$U_4(\cos\frac{2\pi}{5})=16\cos^4\frac{2\pi}{5}-12\cos^2\frac{2\pi}{5}+1=16(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^4-12(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2+1=0$，因為$f(x)=U_4(x)$為偶函數其圖形對稱$y$軸，故$U_4(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{5}$、$\cos\frac{2\pi}{5}$、$-\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}$與$-\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$；同理$U_5(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{6}$、$\cos\frac{2\pi}{6}$、$\cos\frac{3\pi}{6}$、$\cos\frac{4\pi}{6}$與$\cos\frac{5\pi}{6}$；$U_6(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{7}$、$\cos\frac{2\pi}{7}$、$\cos\frac{3\pi}{7}$、$\cos\frac{4\pi}{7}$、$\cos\frac{5\pi}{7}$與$\cos\frac{6\pi}{7}$；$U_7(x)=0$之根為$\cos\frac{\pi}{8}$、$\cos\frac{2\pi}{8}$、$\cos\frac{3\pi}{8}$、$\cos\frac{4\pi}{8}$、$\cos\frac{5\pi}{8}$、$\cos\frac{6\pi}{8}$與$\cos\frac{7\pi}{8}$；以此類推。故當$n\ge 1$時，$U_n(x)=0$會有$n$個相異實根，且其根為$\cos(\frac{k\pi}{n+1})$，$1\le k\le n$。如圖 8-1 到 8-6 為$U_2(x)$至$U_7(x)$之圖形。其實換個角度看，$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=0 \Rightarrow \sin(n+1)\theta=0=\sin(k\pi)$，$k\in\mathbb{Z}$。$\theta=\frac{k\pi}{n+1}$，$k=1,2,...,n$。即$x=\cos\theta=\cos\frac{k\pi}{n+1}$。其實$U_n(x)$也可以表成$U_n(x)=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$。

我也發現在學習和差化積與積化和差的過程中，常常解到一連串無理數的和或積，而得到的答案是漂亮的有理數，原來是 Vieta's formula 配上 Chebyshev Polynomials，例如

$U_4(x)=16x^4-12x^2+1=0$之根為$\cos\frac{\pi}{5}$、$\cos\frac{2\pi}{5}$、$\cos\frac{3\pi}{5}$與$\cos\frac{4\pi}{5}$，故由 Vieta's formula 知：

$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$或$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{16}$。

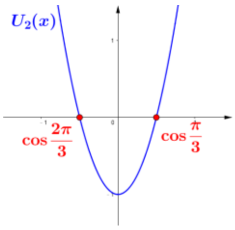

圖 8-1： $y=U_2(x)$

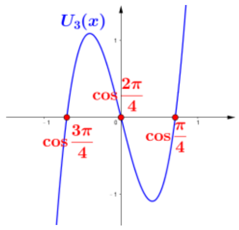

圖 8-2： $y=U_3(x)$

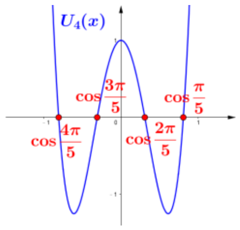

圖 8-3： $y=U_4(x)$

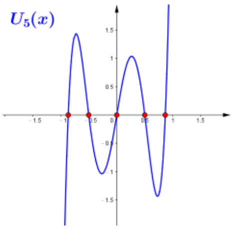

圖 8-4： $y=U_5(x)$

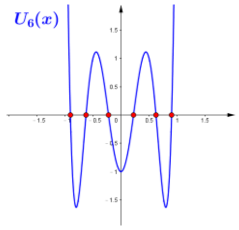

圖 8-5： $y=U_6(x)$

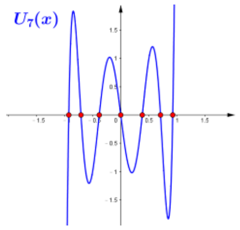

圖 8-6： $y=U_7(x)$

故當 $x\in$□ ，$\sqrt{1-x^2}\in$□ ，且 $0<x<1$，皆合於所求。即取 $p,q\in$□ ，$p>q$，

$x=\cos\theta=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$\sqrt{1-x^2}=\sin\theta=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，得單位圓上所有有理數點 $(\dfrac{2pq}{p^2+q^2},\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2})$。

參、 研究結果與討論

一、Brahmagupta *n*-gons 的倍角建構：

由前作[2,3]延伸的**倍角建構法**來構造 **Brahmagupta *n*-gons** 時，我先考慮單位圓上邊長為有理數的圓內接多邊形，此時其對角線長與面積長亦為有理數。當然伸縮後，邊長、外接圓半徑、面積與對角線長可變為整數，可得 **Brahmagupta *n*-gons** 與完美多邊形。

定理 1
若 $\sin\alpha,\cos\alpha\in$□ ，則倍角建構法建夠的多邊形其所有邊長、外接圓半徑、對角線長與多邊形面積皆為有理數。伸縮後即 Brahmagupta *n*-gons。

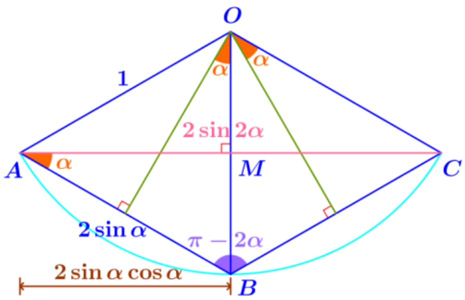

圖 9-1：$(a_{(2)},b)$

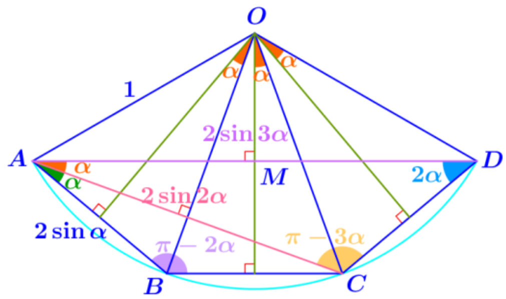

圖 9-2：$(a_{(3)},b)$

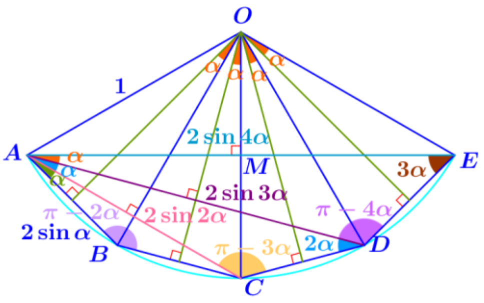

圖 9-3：$(a_{(4)},b)$

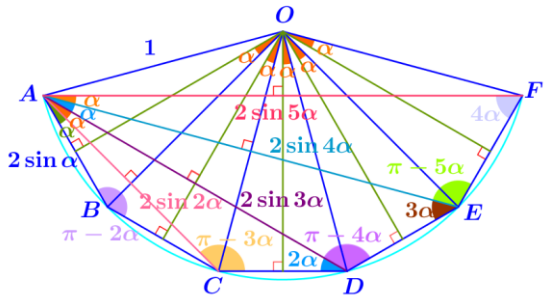

圖 9-4：$(a_{(5)},b)$

證明：

1. 當 $n=1$ 時，$\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 為有理數。

2. 設 $n=k$ 時，$\sin k\alpha$ 與 $\cos k\alpha$ 為有理數。

3. 當 $n=k+1$ 時，$\sin((k+1)\alpha)=\sin(k\alpha+\alpha)=\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha$ 為有理數。

4. 故依數學歸納法知，原式成立，即 $\sin n\alpha$ 與 $\cos n\alpha$ 為有理數。

所以單位圓上，邊長都是 $2\sin n\alpha$ 的型式故皆為有理數。因為對角線長也是某邊的邊長，即 $2\sin n\alpha$，所以同時也證明了所有的對角線長是有理數。多邊形的面積有兩種情形：

(1) 某直徑的兩側都有頂點，所求即 n 個等腰三角形的面積和：

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\times 1^2\sin(2\theta_k)=\sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k\cos\theta_k)$ 也是有理數。

(2) 所有頂點在某直徑的同一側，所求即 n 個等腰三角形的面積和再減去一個大的等腰三角形：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\times 1^2\sin(2\theta_k)-\frac{1}{2}\times 1^2\sin(2\sum_{k=1}^{n}\theta_k)=\sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k\cos\theta_k)-\sin(\sum_{k=1}^{n}\theta_k)$ 也是有理數。

故伸縮後得邊長、對角線長、外接圓半徑與面積都是整數的完美多邊形，當然也是 Brahmagupta *n*-gons。

其實很明顯用倍角建夠法一直取下去，只要 α 角度夠小且 $\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 都是有理數，我可以做出邊長皆為有理數，且外接圓半徑為 1 的 n 邊形 $(a_{(n-1)},b)$。

圖 9-1 到圖 9-4 我們將倍角建構法，從幾何的概念出發，來建構 Brahmagupta *n*-gons。設 a、b、c、d 與 e 的對角分別為 2α、4α、6α、8α 與 10α，即 $a=2\sin\alpha$、$b=2\sin 2\alpha$、$c=2\sin 3\alpha$、$d=2\sin 4\alpha$ 與 $e=2\sin 5\alpha$。而且可以明顯看出，圖 7-3 與 7-4 中，都有很多個 Brahmagupta *n*-gons，說明如下：

如圖 9-1，單位圓中，設等腰三角形 ΔAOB 與 ΔBOC 中，$\angle AOB=\angle BOC=2\alpha$，故 $\overline{AB}=\overline{BC}=2\sin\alpha=a$，又 $\angle BAC=\alpha$，故 $\overline{AC}=2\overline{AM}=2(2\sin\alpha\cos\alpha)=2\sin 2\alpha=b$。

如圖 9-2，單位圓中，設等腰三角形 ΔOAB、ΔBOC 與 ΔCOD 中，$\angle AOB=\angle BOC$ $=\angle COD=2\alpha$，故 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2\sin\alpha=a$，又 $\angle ACB=\alpha$，$\angle ADC=2\alpha$，故 $\overline{AC}=\overline{BD}=2\sin 2\alpha=b$，$\overline{AD}=2\sin 3\alpha=c$。

如圖 9-3，單位圓中，設等腰三角形 ΔOAB、ΔBOC、ΔCOD 與 ΔDOE 中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=2\alpha$，故 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=2\sin\alpha=a$，又 $\angle ACB=\alpha$，$\angle ADC=2\alpha$，$\angle AEC=3\alpha$，故 $\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CE}=2\sin 2\alpha=b$，$\overline{AD}=\overline{BE}=2\sin 3\alpha=c$，$\overline{AE}=2\sin 4\alpha=d$。

如圖 9-4，單位圓中，設等腰三角形ΔOAB、ΔBOC、ΔCOD、ΔDOE與ΔEOF中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=2\alpha$，故$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=2\sin\alpha$ $=a$，又$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADC=2\alpha$，$\angle AEC=3\alpha$，$\angle AFE=4\alpha$，故$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{DF}$ $=2\sin 2\alpha=b$，$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=2\sin 3\alpha=c$，$\overline{AE}=\overline{BF}=2\sin 4\alpha=d$，$\overline{AF}=2\sin 5\alpha=e$。

所以1個b可以換2個a。1個c可以換1個a與1個b或換3個a。1個d可以換1個a與1個c、2個b、1個b與2個a或換4個a。1個e可以換1個a與1個d、1個b與1個c、1個b與3個a、1個c與2個a、2個b與1個a、或換5個a。

(一) 柴比雪夫多項式的幾何意義

如圖 10，單位圓中等腰三角形ΔOAB、ΔBOC、ΔCOD、ΔDOE、ΔEOF與ΔFOG中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$ $=\angle EOF=\angle FOG=2\alpha$，故$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ $=\overline{DE}=\overline{EF}=2\sin\alpha$，又$\angle ACB=\alpha$、

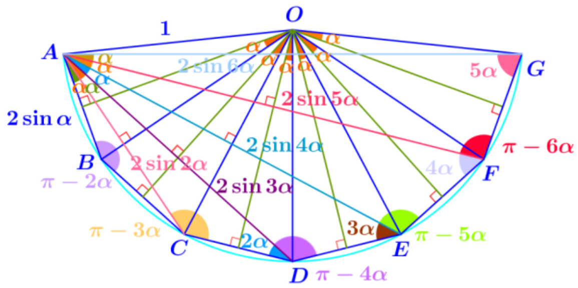

圖 10：(a,b,c,d,e,f)

$\angle ADC=2\alpha$、$\angle AEC=3\alpha$、$\angle AFE=4\alpha$、$\angle AGF=5\alpha$，故$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{EG}$ $=2\sin 2\alpha$，$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DG}=2\sin 3\alpha$，$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=2\sin 4\alpha$，$\overline{AF}=\overline{BG}=2\sin 5\alpha$，$\overline{AG}=2\sin 6\alpha$。可得：$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=U_1(x)$，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=U_2(x)$，$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}=U_3(x)$，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha}=U_4(x)$，$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha}=U_5(x)$，...。當$x=\cos\alpha$與$\sqrt{1-x^2}=\sin\theta$皆為有理數時，$U_1(x)$、$U_2(x)$、$U_3(x)$、$U_4(x)$、...，皆為有理數；也就是說我可以取$a$、$aU_1(x)$、$aU_2(x)$、$aU_3(x)$、...、$aU_{p-1}(x)$與$aU_p(x)$做單位圓中邊長為有理數的圓內接多邊形的邊長。

(二) 以柴比雪夫多項式討論$(a_{(n-1)},b)$：

n為大於1的自然數，我們將邊數分為奇數與偶數討論。

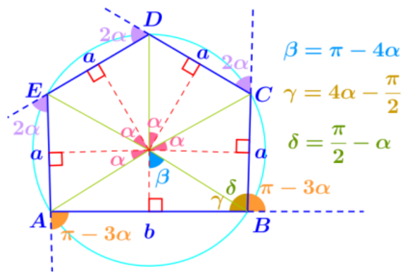

圖 11-1：$(a_{(4)},b)$

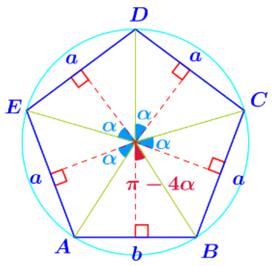

圖 11-2：$(a_{(4)},b)$

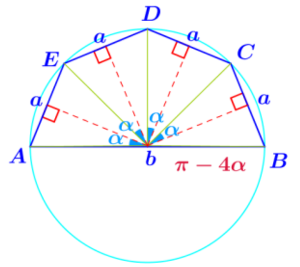

圖 11-3：$(a_{(4)},b)$

1. 邊數為奇數：

以五邊形$(a_{(4)},b)$為例如圖 11-1 所示，設a與b對應的圓心角分別為2α與$2\pi-8\alpha$，其中

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$。因為$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{O}$。考慮在複數平面

上，其中：$\overrightarrow{AB}=be^{i\cdot 0}=b+0i$，

$\overrightarrow{BC}=ae^{i(\pi-3\alpha)}=a[\cos(\pi-3\alpha)+i\sin(\pi-3\alpha)]=a(-\cos3\alpha+i\sin3\alpha)$，

$\overrightarrow{CD}=ae^{i(\pi-\alpha)}=a[\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)]=a(-\cos\alpha+i\sin\alpha)$，

$\overrightarrow{DE}=ae^{i(\pi+\alpha)}=a[\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)]=a(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$，

$\overrightarrow{EA}=ae^{i(\pi+3\alpha)}=a[\cos(\pi+3\alpha)+i\sin(\pi+3\alpha)]=a(-\cos3\alpha-i\sin3\alpha)$。

將實部與虛部整理得：

$$\begin{cases}b+a(-\cos3\alpha-\cos\alpha-\cos\alpha-\cos3\alpha)=0\\ a(\sin3\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin3\alpha)=0\end{cases}$$

由實部得：$\dfrac{b}{a}=2(\cos3\alpha+\cos\alpha)$，左右同乘$\sin\alpha$得：

$\dfrac{b}{a}\sin\alpha=2\cos3\alpha\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin4\alpha-\sin2\alpha)+\sin2\alpha=\sin4\alpha$，又

$\Rightarrow b=2\sin4\alpha=2U_3(x)\sin\alpha$，取滿足$x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$，可得所有解。

例如取$\alpha=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$，此時$\dfrac{b}{a}=U_3(x)=U_3(\frac{4}{5})=8(\frac{4}{5})^3-4(\frac{4}{5})=\dfrac{128}{125}$，伸縮後可得圖 11-2。取

$\alpha=\cos^{-1}\dfrac{12}{13}$，此時$\dfrac{b}{a}=U_3(x)=U_3(\frac{12}{13})=8(\frac{12}{13})^3-4(\frac{12}{13})=\dfrac{5712}{2197}$，伸縮後可得圖 11-3。

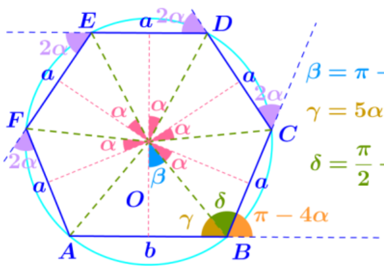

圖 11-4：$(a_{(5)},b)$

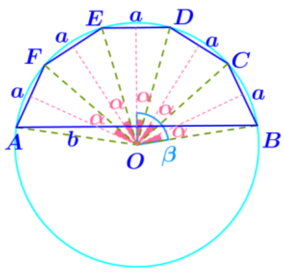

圖 11-5：$(a_{(5)},b)$

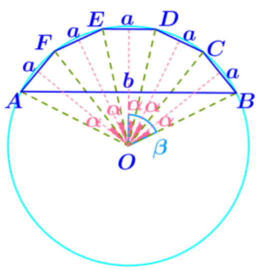

圖 11-6：$(a_{(5)},b)$

2. 邊數為偶數：

以六邊形$(a_{(5)},b)$為例如圖 11-4 所示。設a與b對應的圓心角分別為2α與$2\pi-10\alpha$，其中

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{5}$，$a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$。因為$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{O}$。考慮在複數

平面上，其中：$\overrightarrow{AB}=be^{i\cdot 0}=b+0i$，

$\overrightarrow{BC}=ae^{i(\pi-4\alpha)}=a[\cos(\pi-4\alpha)+i\sin(\pi-4\alpha)]=a(-\cos4\alpha+i\sin4\alpha)$，

$\overrightarrow{CD}=ae^{i(\pi-2\alpha)}=a[\cos(\pi-2\alpha)+i\sin(\pi-2\alpha)]=a(-\cos2\alpha+i\sin2\alpha)$，$\overrightarrow{DE}=ae^{i\pi}=-a$，

$\overrightarrow{EF}=ae^{i(\pi+2\alpha)}=a[\cos(\pi+2\alpha)+i\sin(\pi+2\alpha)]=a(-\cos2\alpha-i\sin2\alpha)$，

$\overrightarrow{FA}=ae^{i(\pi+4\alpha)}=a[\cos(\pi+4\alpha)+i\sin(\pi+4\alpha)]=a(-\cos4\alpha-i\sin4\alpha)$。

將實部與虛部整理得 $\begin{cases} b+a(-2\cos4\alpha-2\cos2\alpha-1)=0 \\ a(\sin4\alpha+\sin2\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha)=0 \end{cases}$

由實部得：$\dfrac{b}{a}=2\cos4\alpha+2\cos2\alpha+1$，左右同乘 $\sin\alpha$ 得：

$$\frac{b}{a}\sin\alpha=2\cos4\alpha\sin\alpha+2\cos2\alpha\sin\alpha+\sin\alpha=(\sin5\alpha-\sin3\alpha)+(\sin3\alpha-\sin\alpha)+\sin\alpha=\sin5\alpha$$

$\Rightarrow b=2\sin5\alpha=2U_4(x)\sin\alpha$，取滿足 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$，可得所有解。

例如：取 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{24}{25}$，此時 $\dfrac{b}{a}=U_4(x)=U_4(\dfrac{24}{25})=16(\dfrac{24}{25})^4-12(\dfrac{24}{25})^2+1=\dfrac{1379041}{390625}$，伸縮後可得圖 11-5。取 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{40}{41}$，此時 $\dfrac{b}{a}=U_4(x)=U_4(\dfrac{40}{41})=16(\dfrac{40}{41})^4-12(\dfrac{40}{41})^2+1=\dfrac{11510561}{2825761}$，伸縮後可得圖 11-6。因此我們得到定理 2。

定理 2：

若 $x=\cos\alpha$ 與 $\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ 為有理數，且 $n>3, n\in\mathbb{N}$，a 對應的圓心角為 2α，則 $(a_{(n-1)},b)$ 的一般式為 $a=2U_0(x)\sin\alpha$、$b=2U_{n-2}(x)\ \sin\alpha$。

Pf：

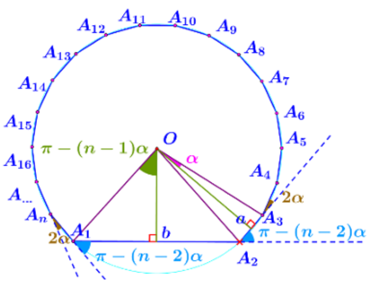

圖 12-1：$(a_{(n-1)},b)$

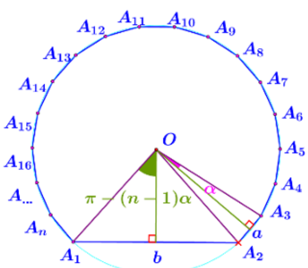

圖 12-2：$(a_{(n-1)},b)$

我先考慮用代數證明，如圖 12-1，$a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$，考慮在複數平面上：

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\overrightarrow{O}$ ，其中：$\overrightarrow{A_1A_2}=be^{i\cdot 0}=b+0i$ ，

$\overrightarrow{A_2A_3}=ae^{i(\pi-(n-2)\alpha)}=a[\cos(\pi-(n-2)\alpha)+i\sin(\pi-(n-2)\alpha)]=a[-\cos(n-2)\alpha+i\sin(n-2)\alpha]$ ，

$\overrightarrow{A_3A_4}=ae^{i(\pi-(n-4)\alpha)}=a[\cos(\pi-(n-4)\alpha)+i\sin(\pi-(n-4)\alpha)]=a[-\cos(n-4)\alpha+i\sin(n-4)\alpha]$ ，

. . . ，

$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=ae^{i(\pi+(n-4)\alpha)}=a[\cos(\pi+(n-4)\alpha)+i\sin(\pi+(n-4)\alpha)]=a[-\cos(n-4)\alpha-i\sin(n-4)\alpha]$ ，

$\overrightarrow{A_nA_1}=ae^{i(\pi+(n-2)\alpha)}=a[\cos(\pi+(n-2)\alpha)+i\sin(\pi+(n-2)\alpha)]=a[-\cos(n-2)\alpha-i\sin(n-2)\alpha]$ 。

①n 為奇數：

將實部與虛部整理得：

$$\begin{cases} b+2a(-\cos(n-2)\alpha-\cos(n-4)\alpha-...-\cos 2\alpha)=0 \\ a(\sin(n-1)\alpha+\sin(n-3)\alpha+...+\sin\alpha-\sin\alpha-...-\sin(n-3)\alpha-\sin(n-1)\alpha)=0 \end{cases},$$

考慮實部得：$\dfrac{b}{2a}=\cos(n-2)\alpha+\cos(n-4)\alpha+...+\cos\alpha$ ，考慮：

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha\frac{b}{2a}&=2\cos(n-2)\alpha\sin\alpha+2\cos(n-4)\alpha\sin\alpha+...+2\sin\alpha\cos\alpha \\ &=[\sin(n-1)\alpha-\sin(n-3)\alpha]+[\sin(n-3)\alpha-\sin(n-5)\alpha]+...+[\sin 4\alpha-\sin 2\alpha]+\sin 2\alpha \\ &=\sin(n-1)\alpha\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}=U_{n-2}(x)\Rightarrow b=2U_{n-2}(x)\ \sin\alpha \end{aligned}$$

②n 為偶數：

將實部與虛部整理得：

$$\begin{cases} b+a(-2\cos(n-2)\alpha-2\cos(n-4)\alpha-...-2\cos 2\alpha-1)=0 \\ a(\sin(n-1)\alpha+\sin(n-3)\alpha+...+\sin\alpha-\sin\alpha-...-\sin(n-3)\alpha-\sin(n-1)\alpha)=0 \end{cases}$$

$\dfrac{b}{a}=2\cos(n-2)\alpha+2\cos(n-4)\alpha+...+2\cos 2\alpha+1$ ，考慮：

$$\begin{aligned} \Rightarrow\sin\alpha\frac{b}{2a}&=2\cos(n-2)\alpha\sin\alpha+2\cos(n-4)\alpha\sin\alpha+...+2\cos 2\alpha\sin\alpha+\sin\alpha \\ &=[\sin(n-1)\alpha-\sin(n-3)\alpha]+[\sin(n-3)\alpha-\sin(n-5)\alpha]+...+[\sin 3\alpha-\sin\alpha]+\sin\alpha \\ &=\sin(n-1)\alpha\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}=U_{n-2}(x)\Rightarrow b=2U_{n-2}(x)\ \sin\alpha \end{aligned}$$

取滿足 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ，$y=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ，$p>q$ ，$p,q\in\mathbb{N}$ ，此時可得所有解。

再考慮用幾何證明。如圖 12-2，設 a 與 b 對應的圓角分別為 2α 與 $2\pi-2(n-1)\alpha$ 如圖所示，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n-1}$ 。因為 $a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$ ，$b=2\sin\left(\pi-(n-1)\alpha\right)=2\sin(n-1)\alpha$ ，故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}=U_{n-2}(x)\Rightarrow b=2U_{n-2}(x)\sin\alpha$ 。即當 $\sin\alpha$ 為有理數時，若 x 為有理數，則 $U_{n-2}(x)$ 亦為有理數，故 $\sin(n-1)\alpha$ 為有理數。我們取 $n=7$ 與 $n=6$ 驗證。

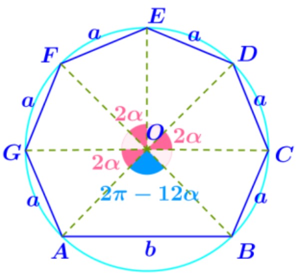

圖 12-3：$(a_{(6)},b)$

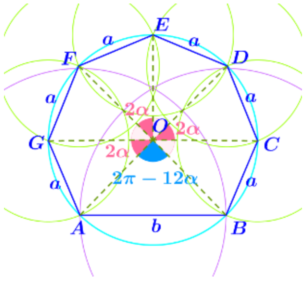

圖 12-4：$(a_{(6)},b)$

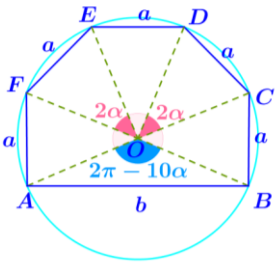

圖 12-5：$(a_{(5)},b)$

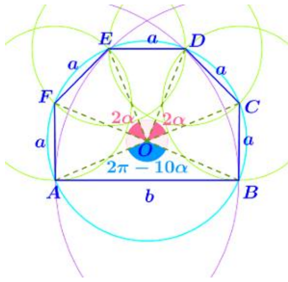

圖 12-6：$(a_{(5)},b)$

當 $n=7$ 時，考慮 $(a_{(6)},b)$。由定理 1 得：$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin(7-1)\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha}=U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$ 。

取 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ ，在單位圓上任取一點 E ，以 O 為中心，逆時針旋轉 2α 、4α 與 6α 得 F 、G 、A 三點。以 O 為中心，順時針旋轉 2α、4α 與 6α 得 D、C、B 三點，再將 A 逆時針旋轉 $2\pi-12\alpha$ 得 A'，此時 A' 與 B 重合，如圖 12-3。在單位圓上任取一點 E，取 $a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{10}{13}$，以 E 為圓心，a 為半徑畫圓，取交點 D,F ，. . . ，最後分別以 A,B 為圓心，$b=(32\cos^5\alpha-32\cos^3\alpha+6\cos\alpha)a$ 為半徑，作出圖 12-4。

當 $n=6$ 時，考慮 $(a_{(5)},b)$ 。由定理 1 得：$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin(6-1)\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha}=U_4(x)=16x^4-12x^2+1$ 。

取 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ ，在單位圓上任取一點 E ，以 O 為中心，逆時針旋轉 2α 與 4α 得 F 、A 三點。以 O 為中心，順時針旋轉 2α 、4α 與 6α 得 D 、C 、B 三點，再將 A 逆時針旋轉 $2\pi-10\alpha$ 得 A'，此時 A' 與 B 重合，如圖 12-5。在單位圓上任取一點 E ，取 $a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{10}{13}$ ，以 E 為圓心，a 為半徑畫圓，取交點 D、F，. . . ，最後分別以 A、B 為圓心，$b=(16\cos^4\alpha-12\cos^2\alpha+1)a$ 為半徑，作出圖 12-6。

所以倍角建構法，確定最後一邊 $b=2\sin(\pi-(n-1)\alpha)=2\sin(n-1)\alpha$ 與其餘邊 $a=2\sin\alpha$ 後，就可以取 2 個 a 去作 $2\sin 2\alpha$、3 個 a 去作 $2\sin 3\alpha$ 、. . . ，作邊長為有理設的圓內接多邊形。

(三) 以柴比雪夫多項式討論$(a_{(n-2)},b_{(2)})$：

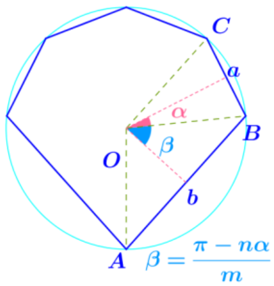

圖 13-1：$(a_{(n)},b_{(m)})$

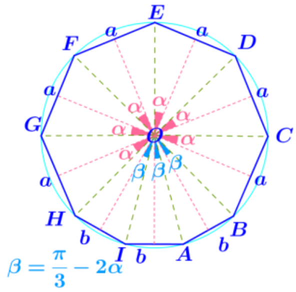

圖 13-2：$(a_{(6)},b_{(3)})$

若$n>m>3$，那我們是否可以推導出$(a_{(n)},b_{(m)})$完美$n+m$邊形呢？考慮之前的方法，在單位圓上取a與b對應的圓心角分別為2α與2β，如圖 13-1。

因為$n\alpha+m\beta=\pi$，故$\beta=\dfrac{\pi-n\alpha}{m}$。$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sin\beta}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi-n\alpha}{m}}{\sin\alpha}$，又$\dfrac{\sin(\pi-n\alpha)}{\sin\dfrac{\pi-n\alpha}{m}}=U_{m-1}(\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{m})$，

$$\text{故 }\frac{b}{a}=\frac{\dfrac{\sin(\pi-n\alpha)}{U_{m-1}(\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{m})}}{\sin\alpha}=\frac{\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}}{U_{m-1}(\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{m})}=\frac{U_{n-1}(\cos\alpha)}{U_{m-1}(\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{m})}\text{。}$$

但是$m\neq 2$時分母必為無理數，故取$m=2$討論分母$\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{m}=\cos\dfrac{\pi-n\alpha}{2}=\sin(n\cdot\dfrac{\alpha}{2})$為有理數。此時只需取$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$且$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，分子$U_{n-1}(\cos\alpha)$亦為有理數；也就是說像圖 13-2 中$(a_{(6)},b_{(3)})$這種最少邊數是3且每邊皆為有理數的情形，是**不可能**建構出來的；而目前建構$(a_{(n)},b_{(3)})$可行的方法是以半圓建構法控制，作出等腰梯形$(R_{(3)},2R)$，R為外接圓半徑，我們在後面會討論。所以目前我退而求其次開始討論最小邊數為2的情形。設$n\in$□，$n>3$。

1. 邊數n為偶數：

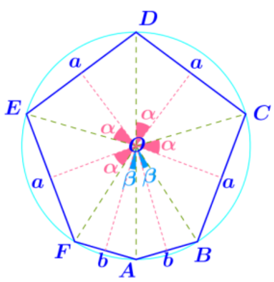

圖 14-1：$(a_{(4)},b_{(2)})$

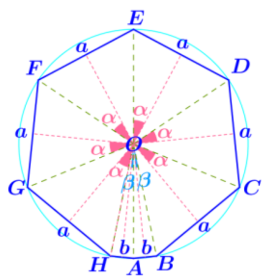

圖 14-2：$(a_{(6)},b_{(2)})$

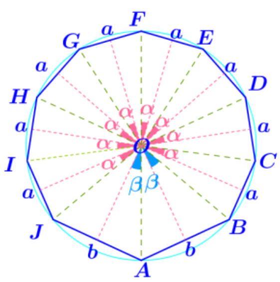

圖 14-3：$(a_{(8)},b_{(2)})$

(1) $(a_{(4)},b_{(2)})$：

對應的角如圖 14-1 所示。取a與b對應的圓心角分別為2α與2β，$4\alpha+2\beta=\pi$， 故

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$，且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$。可得 $a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha)=2\cos 2\alpha$，得：

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$。例如：取 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$，此時 $a=2\sin\alpha=\dfrac{6}{5}$，

$$\frac{b}{a}=\frac{T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(\frac{4}{5})^2-1}{\frac{3}{5}}=\frac{32-25}{15}=\frac{7}{15}$$ 。故 $b=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{42}{75}=\dfrac{14}{25}$。

(2) $(a_{(6)},b_{(2)})$：

對應的角如圖 14-2 所示。取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，其中 $6\alpha+2\beta=\pi$，故

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-3\alpha$，且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$。可得 $a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-3\alpha)=2\cos 3\alpha$，

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{T_3(x)}{\sqrt{1-x^2}}$。例如：取 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{15}{17}$，此時 $a=2\times\dfrac{8}{17}=\dfrac{16}{17}$，

$$\frac{b}{a}=\frac{T_3(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4(\frac{15}{17})^3-3(\frac{15}{17})}{\frac{8}{17}}=\frac{495}{2312}$$ 。故 $b=\dfrac{495}{2312}\times\dfrac{16}{17}=\dfrac{7920}{39304}=\dfrac{990}{4913}$。

(3) $(a_{(8)},b_{(2)})$：

對應的角如圖 14-3 所示。取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，$8\alpha+2\beta=\pi$，故

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-4\alpha$，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{8}$。可得 $a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-4\alpha)=2\cos 4\alpha$，

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{T_4(x)}{\sqrt{1-x^2}}$。例如：取 $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{24}{25}$，此時 $a=2\times\dfrac{7}{25}=\dfrac{14}{25}$，

$$\frac{b}{a}=\frac{T_4(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{8(\frac{24}{25})^4-8(\frac{24}{25})^2+1}{\frac{7}{25}}=\frac{164833}{109375}$$ 。故 $b=\dfrac{164833}{109375}\times\dfrac{14}{25}=\dfrac{2307662}{2734375}=\dfrac{329666}{390625}$。

2. 邊數 n 為奇數：

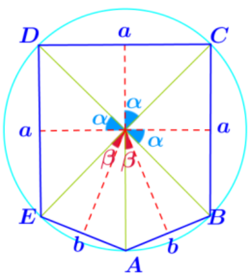

圖 14-4：$(a_{(3)},b_{(2)})$

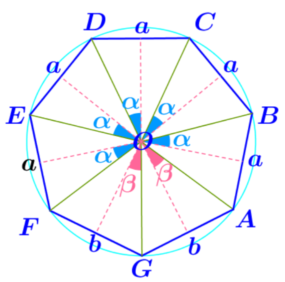

圖 14-5：$(a_{(5)},b_{(2)})$

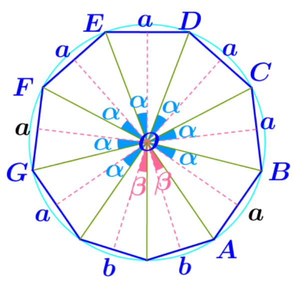

圖 14-6：$(a_{(7)},b_{(2)})$

(1) $(a_{(3)},b_{(2)})$

對應的角如圖 14-4 所示，取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，

$3\alpha+2\beta=\pi \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2}$。得：$a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta$，

$$\frac{b}{a}=\frac{2\sin\beta}{2\sin\alpha}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2})}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos(3\cdot\frac{\alpha}{2})}{\sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})}=\frac{T_3(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}$$。

取：$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{13}$，$\frac{b}{a}=\frac{T_3(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}=\frac{4(\frac{12}{13})^3-3(\frac{12}{13})}{\frac{120}{169}}=\frac{828}{1560}=\frac{207}{390}$，

$a=2\sin\alpha=\frac{240}{169}$，$b=\frac{207}{390}\times\frac{240}{169}=\frac{1656}{2197}$。

(2) $(a_{(5)},b_{(2)})$

對應的角如圖 14-5 所示，取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{10}$，

$5\alpha+2\beta=\pi \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{5\alpha}{2}$。$a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta$，

$\frac{b}{a}=\frac{2\sin\beta}{2\sin\alpha}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{5\alpha}{2})}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{5\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos(5\cdot\frac{\alpha}{2})}{\sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})}=\frac{T_5(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}$。取：$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{40}{41}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{41}$，

此時 $\frac{b}{a}=\frac{T_5(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}=\frac{16(\frac{40}{41})^5-20(\frac{40}{41})^3+5(\frac{40}{41})}{2\times\frac{40}{41}\times\frac{9}{41}}=\frac{51872200}{49623120}=\frac{1296805}{1240578}$，

$a=2\sin\alpha=2\times(\frac{9}{41})(\frac{40}{41})=\frac{720}{1681}$，$b=\frac{720}{1681}\times\frac{1296805}{1240578}=\frac{155616600}{347568603}$。

(3) $(a_{(7)},b_{(2)})$

對應的角如圖 14-6 所示，取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{14}$，

$7\alpha+2\beta=\pi \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{7\alpha}{2}$。$a=2\sin\alpha$，$b=2\sin\beta$，

$\frac{b}{a}=\frac{2\sin\beta}{2\sin\alpha}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{7\alpha}{2})}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{7\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos(7\cdot\frac{\alpha}{2})}{\sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})}=\frac{T_7(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}$。取：$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{60}{61}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{11}{61}$，

$\sin\alpha = 2\times\frac{11}{61}\times\frac{60}{61}=\frac{1320}{3721}$ ，此時

$$\frac{b}{a}=\frac{T_7(\cos\frac{\alpha}{2})}{U_1(\cos\frac{\alpha}{2})}=\frac{64(\frac{60}{61})^7-112(\frac{60}{61})^5+56(\frac{60}{61})^3-7(\frac{60}{61})}{\frac{1320}{3721}}=\frac{933420304380}{1114867117320}=\frac{15557005073}{18581118622}，$$

$a=2\sin\alpha=\frac{2640}{3721}$ ，$b=\frac{2640}{3721}\times\frac{15557005073}{18581118622}$ 。由上述討論，我們得到定理 3。

定理 3：

若 $x=\cos\alpha$ 、$\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ 、$x'=\cos\frac{\alpha}{2}$ 與 $\sqrt{1-x'^2}=\sin\frac{\alpha}{2}$ 皆為有理數，且 $n,k\in\mathbb{N}$ ，$n>3$ ，a 對應的圓心角為 2α ，則 $(a_{(n-2)},b_{(2)})$ 的一般式為：

(1) 當 $n=2k$ ，$(a_{(2k-2)},b_{(2)})$ ：$a=2U_0(x)\sin\alpha$ ，$b=2T_{k-1}(x)$ 。

(2) 當 $n=2k+1$ ，$(a_{(2k-1)},b_{(2)})$ ：$a=2U_1(x')$ ，$b=2T_{k-1}(x')$ 。

Pf：

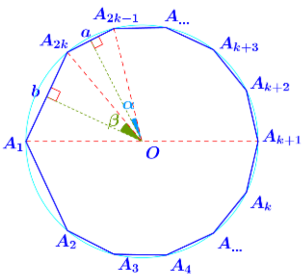

圖 15-1：$(a_{(2k-2)},b_{(2)})$

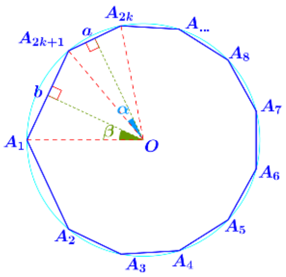

圖 15-2：$(a_{(2k-1)},b_{(2)})$

(1)邊數為偶數：

設邊數 $n=2k$ ，k 為自然數。取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β ，且 $(n-2)\alpha+2\beta=\pi$ ，

即 $\beta=\frac{\pi-(n-2)\alpha}{2}$ ，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{n-2}$ ，如圖 15-1。

設 $x=\cos\alpha$ ，故：$a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$ ，

$$b=2\sin\beta=2\sin\frac{\pi-(2k-2)\alpha}{2}=2\cos\frac{(2k-2)\alpha}{2}=2\cos(k-1)\alpha=2T_{k-1}(x)\Rightarrow b=2T_{k-1}(x)\text{ 。}$$

當取 $x=\cos\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ ，$\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ 時，則 a,b 皆為有理數。

(2)邊數為奇數：

設邊數 $n=2k+1$，k 為大於 2 的自然數。取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，且

$(n-2)\alpha+2\beta=\pi$ ，即 $\beta=\frac{\pi-(n-2)\alpha}{2}$ ，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{n-2}$ ，如圖 15-2。

設 $x'=\cos\dfrac{\alpha}{2}$，故：$a=2\sin\alpha=2\sin(2\cdot\dfrac{\alpha}{2})=2U_1(x')$，

$b=2\sin\beta=2\sin\dfrac{\pi-(2k-1)\alpha}{2}=2\cos\dfrac{(2k-1)\alpha}{2}=2\cos(2k-1)\cdot\dfrac{\alpha}{2}=2T_{2k-1}(x')\Rightarrow b=2T_{k-1}(x')$。

當取 $x'=\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$\sqrt{1-x'^2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ 時，則 a,b 皆為有理數。

(六) 半圓建構法

其實在[3]中已討論半圓建構法作出邊長皆相異的情形，我們利用 Chebyshev Polynomials 討論其中一邊是直徑的 Brahmagupta n-gons。

定理 4

若 a 對應的圓心角為 2α，且 $x=\cos\alpha$ 與 $\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ 皆為有理數，單位圓上存在邊長為有理數且其中一邊為直徑的圓內接 n 邊形。其中 $a=2U_0(x)\sin\alpha$，$b=2T_{n-2}(x)$。

Pf：

設 $a=2\sin\alpha=2U_0(x)\sin\alpha$ 與 b 所對的圓心角為 2α 與 2β，其中 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-(n-2)\alpha$。故 $b=2\sin\beta$ $=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-(n-2)\alpha)=2\cos(n-2)\alpha=2T_{n-2}(x)$，其中

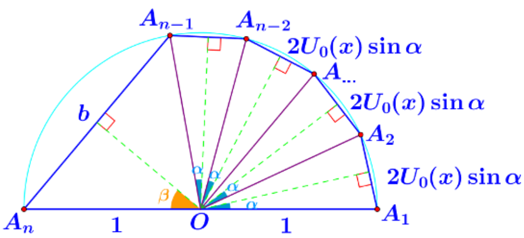

圖 16：$(2U_0\sin\alpha_{(n-2)},2T_{n-2}(x),2)$

$x=\cos\alpha$。只要取 $p,q\in$□，$\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$、$\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ 且 α 足夠小，就可得邊長為有理數的 $(2U_0\sin\alpha_{(n-2)},2T_{n-2}(\cos\alpha),2)$，再伸縮即可得 Brahmagupta n-gons。如圖 16。後來發現 $(a_{(2k-2)},b_{(2)})$ 也就是圖 15-1 的上半部份就是我們的半圓建構法的 $(a_{(k-2)},b,2)$。

(七) 一般化的討論

要作出邊長都不相同的 Brahmagupta n-gons，我們可以用下列步驟完成：

第一步：如圖 17-1，我先作出 $(a_{(n-1)},b)$，其中 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 2β，其中 $2\beta=2\pi-2(n-1)\alpha$，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n-1}$，且 $a=2\sin\alpha$，$b=2\sin(\pi-(n-1)\alpha)=2\sin(n-1)\alpha$，故 $a=2U_0(x)\sin\alpha$、$b=2U_{n-2}(x)\sin\alpha$，其中 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$，$y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$p>q$，$p,q\in$□。

第二步：如圖 17-2，分別取 b、c、d、e、f 與 g 對應的圓心角分別為 2α、4α、6α、8α、

10α 、12α 與 2β，其中 $2\beta = 2\pi - 2(n-1)\alpha$，其中 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{n-1}$ 。

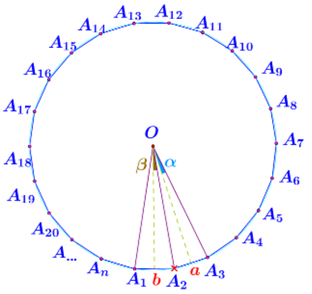

圖 17-1：$(a_{(n-1)}, b)$

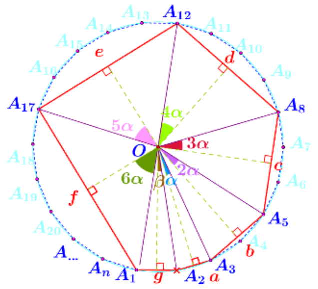

圖 17-2：以 a,b,c,d,e,f,g 表示

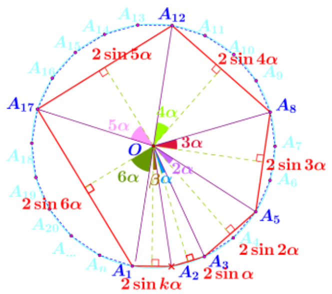

圖 17-3：以 $\sin k\alpha$ 表示

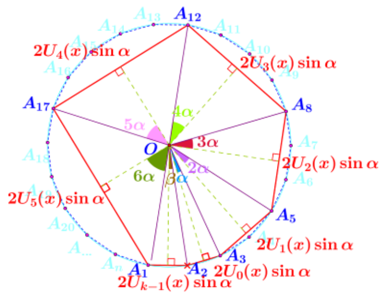

圖 17-4：以 $U_{k-1}(x)$ 表示

第三步：如圖 17-3，取 $a = 2\sin\alpha$ 、 $b = 2\sin 2\alpha$ 、$c = 2\sin 3\alpha$ 、$d = 2\sin 4\alpha$ 、$e = 2\sin 5\alpha$ ，$f = 2\sin 6\alpha$ 、$g = 2\sin[\pi - (1+2+...+(n-1))\alpha] = 2\sin(\dfrac{n(n-1)}{2})\alpha$ 。

第四步：如圖 17-4，故 $a = 2U_0(x)\sin\alpha$、$b = 2U_1(x)\sin\alpha$、$c = 2U_2(x)\sin\alpha$、$d = 2U_3(x)\sin\alpha$ 、$e = 2U_4(x)\sin\alpha$ 、$\dfrac{f}{a} = \dfrac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha} = U_5(x)$ 、...、$g = 2U_{\frac{n(n-1)}{2}-1}(x)\sin\alpha$ ，其中 $x = \cos\alpha = \dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ，$y = \sqrt{1-x^2} = \sin\alpha = \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ， $p > q$ ， $p,q \in \mathbb{N}$ 。

如果要做出某些邊長相同且邊長皆為有理數的圓內接多邊形，例如 $(a_{(5)}, b_{(4)}, c_{(3)}, d_{(2)}, e)$ ，以幾何觀點看，只要取 a 、b 、c 、d 與 e 對應的圓心角分別為 2α 、4α 、6α 、8α 與 2β，其中 $\beta = \pi - (5\alpha + 2\alpha\times 4 + 3\alpha\times 3 + 4\alpha\times 2) = \pi - 30\alpha$ ，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{30}$ 。再取 $a = 2\sin\alpha$ 、 $b = 2\sin 2\alpha$ 、$c = 2\sin 3\alpha$、$d = 2\sin 4\alpha$、$e = 2\sin\beta$，可得：$a = 2U_0(x)\sin\alpha$、$b = 2U_1(x)\sin\alpha$、$c = 2U_2(x)\sin\alpha$、$d = 2U_3(x)\sin\alpha$ 、$e = 2U_{29}(x)\sin\alpha$。就是某一邊 $a\cdot U_k$ 可以換成 k 個 $a\cdot U_1$，以此類推。也就是說，集合 $A = \{2U_i(x)\cdot\sin\alpha \mid i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ ，其中 $x = \cos\alpha$ 、 $\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha$ 、 $x' = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ ，與 $\sqrt{1-x'^2} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ 皆為有理數。即我選擇 $p+1$ 種相異邊長 $2U_0(x)\sin\alpha$ 、 $2U_1(x)\sin\alpha$ 、... 、$2U_p(x)\sin\alpha$，每個邊有 k_0 、k_1 、...、k_p 個，且這些邊對應的圓心角分別為 2α 、4α 、...、

$2(p+1)\alpha$。其中 $p+1\le n-1$ 且 $\sum_{i=0}^{p} k_i = n-1$。

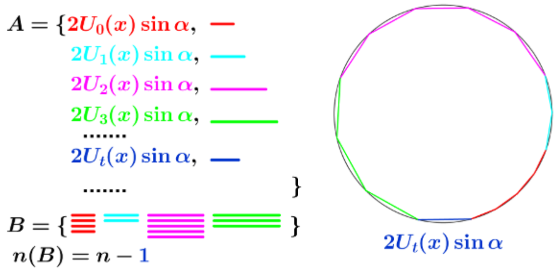

圖 17-5：Brahmagupta *n*-gons

則最後一邊對的圓心角是：

$=2\pi-2(k_0+2k_1+3k_2+4k_3+...+(p+1)k_p)\alpha$

$2\pi-(2k_0+4k_1+6k_2+8k_3+...+2(p+1)k_p)\alpha$

$=2\pi-2(\sum_{i=0}^{p}(i+1)k_i)\alpha$，故最後一邊的圓心角的一半是 $\pi-(\sum_{i=0}^{p}(i+1)k_i)\alpha$，故最後一邊的邊長為

$2\sin(\pi-\alpha\sum_{i=0}^{p}(i+1)k_i)=2\sin(\sum_{i=0}^{p}(i+1)k_i)\alpha=2U_t(x)\sin\alpha, t=\sum_{i=0}^{p}(i+1)k_i-1$ 也在集合 A 中。

1. 建構 $(a_{(n-1)},b)$ 時，在 A 中任取若干元素，最後造成 $n-1$ 個元素的多重子集合 (Multiset) B，最後再在 A 中取1個特別的 $2U_t(x)\sin\alpha$。

2. 建構 $(a_{(n-2)},b_{(2)})$ 時，在 A 中任意取若干元素，最後造成 $n-2$ 個元素的多重子集合 (Multiset) C，n 為偶數時取2個 $2T_p(x)$，或 n 為奇數時取2個 $2T_q(x')$，$p,q\in$□。

最後再經過適當伸縮，必可將其變為 Brahmagupta *n*-gons，也可以變成完美 *n* 邊形。

(八) 以倍角建構法與 Chebyshev Polynomials 建構 Brahmagupta *n*-gons：

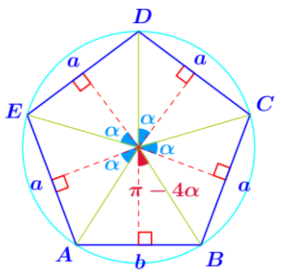

圖 18-1：$(a_{(4)},b)$

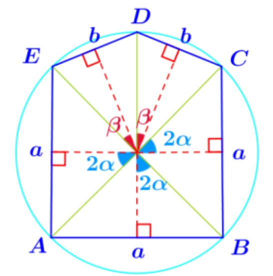

圖 18-2：$(a_{(3)},b_{(2)})$

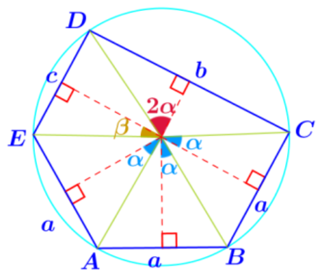

圖 18-3：$(a_{(3)},b,c)$

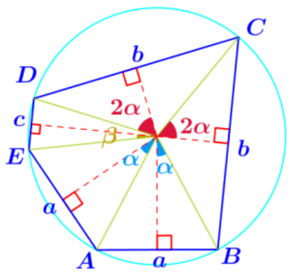

圖 18-4：$(a_{(2)},b_{(2)},c)$

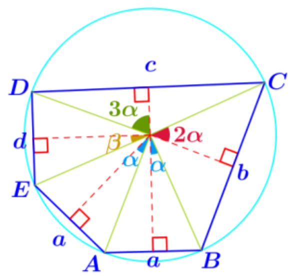

圖 18-5：$(a_{(2)},b,c,d)$

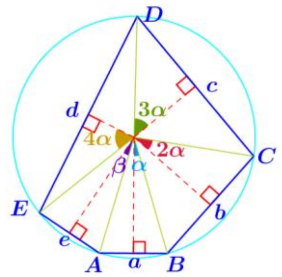

圖 18-6：(a,b,c,d,e)

最後我以五邊形為例，討論出所有的情形。更多邊的情形當然也可以依倍角建構法完成。在單位圓上建構出邊長為有理數的圓內接多邊形後，只要取邊長的最小公倍數做適當地伸縮，就可以作出 Brahmagupta *n*-gons。因為5的正整數分割有4+1、3+2、3+1+1、2+2+1、2+1+1+1與1+1+1+1+1，我們依序討論如下：

(1) $(a_{(4)},b)$：

取 a 與 b 對應的圓心角分別為 2α 與 $2\pi-8\alpha$，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，且 $a=2\sin\alpha$，$b=2\sin(\pi-4\alpha)$

$=2\sin 4\alpha$ ，故 $a=2U_0(x)\sin\alpha$ 、 $b=2U_3(x)\sin\alpha$ ，其中 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ，

$y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ， $p>q$ ， $p,q\in\mathbb{N}$ 。即可得所有解。

例如取 $p=2$ ， $q=1$ ， $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ ， $\dfrac{b}{a}=U_3(x)=U_3(\dfrac{4}{5})=8(\dfrac{4}{5})^3-4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{112}{125}$ ，得圖 18-1。

(2) $(a_{(3)},b_{(2)})$ ：

取 a 與 b 對應的圓心角分別為 4α 與 $2\pi-6\alpha$ ，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ ，且 $a=2U_0(x)\sin\alpha$ ，

$b=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-3\alpha)=2\cos 3\alpha=2T_3(x)$ 。其中 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ，

$y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ， $p>q$ ， $p,q\in\mathbb{N}$ ，即可得所有解。例如取 $p=3$ ， $q=2$ ，

$\alpha=\cos^{-1}\dfrac{12}{13}$ ， $\beta=\dfrac{\pi}{2}-3\alpha$ ， $\dfrac{b}{a}=\dfrac{T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2(\frac{12}{13})^2-1}{\frac{5}{13}}=\dfrac{119}{65}$ ，得圖 18-2。

(3) $(a_{(3)},b,c)$ ：

取 a、b 與 c 的對角分別為 2α、4α 與 $2\pi-10\alpha$，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{5}$，且 $a=2\sin\alpha$、$b=2\sin 2\alpha$、

$c=2\sin(\pi-5\alpha)=2\sin 5\alpha$，故 $a=2U_0(x)\sin\alpha$ 、 $b=2U_1(x)\sin\alpha$ 、 $c=2U_4(x)\sin\alpha$ 。其中

$x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ， $y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ， $p>q$ ， $p,q\in\mathbb{N}$ ，即可得所有解。例如

取 $p=7$ ， $q=4$ ， $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{56}{65}$ ， $\beta=\pi-5\alpha$ ， $\dfrac{b}{a}=U_1(x)=U_1(\dfrac{56}{65})=\dfrac{112}{65}$ ，

$\dfrac{c}{a}=U_4(x)=U_4(\dfrac{56}{65})=16(\dfrac{56}{65})^4-12(\dfrac{56}{65})^2+1=\dfrac{16207361}{17850625}$ ，得圖 18-3。

(4) $(a_{(2)},b_{(2)},c)$ ：

取 a 、 b 與 c 對應的圓心角分別為 2α 、 4α 與 $2\pi-12\alpha$ ，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ ，且 $a=2\sin\alpha$ 、

$b=2\sin 2\alpha$ 、 $c=2\sin(\pi-6\alpha)=2\sin 6\alpha$ ，故 $a=2U_0(x)\sin\alpha$ ， $b=2U_1(x)\sin\alpha$ ，

$c=2U_5(x)\sin\alpha$ 。其中 $x=\cos\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ ， $y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ ， $p>q$ ， $p,q\in\mathbb{N}$ ，

即可得所有解。例如取 $p=5$，$q=3$，$\alpha=\tan^{-1}\frac{15}{17}$，$\beta=\pi-6\alpha$，$\frac{b}{a}=U_1(x)=U_1(\frac{15}{17})=\frac{30}{17}$，

$\frac{c}{a}=U_5(x)=U_5(\frac{15}{17})=32(\frac{15}{17})^5-32(\frac{15}{17})^3+6(\frac{15}{17})=\frac{604890}{1419857}$，得圖 18-4。

(5) $(a_{(2)},b,c,d)$：

取 a、b、c 與 d 對應的圓心角分別為 2α、4α、6α 與 $2\pi-14\alpha$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{7}$，且

$a=2\sin\alpha$、$b=2\sin2\alpha$、$c=2\sin3\alpha$、$d=2\sin(\pi-7\alpha)=2\sin7\alpha$，故 $a=2U_0(x)\sin\alpha$、

$b=2U_1(x)\sin\alpha$、$c=2U_2(x)\sin\alpha$、$d=2U_6(x)\sin\alpha$。其中 $x=\cos\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$，

$y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$。例如取 $p=3$，$q=2$，$\alpha=\cos^{-1}\frac{12}{13}$，

$\beta=\pi-7\alpha$，$\frac{b}{a}=U_1(x)=U_1(\frac{12}{13})=2\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$，$\frac{c}{a}=U_2(x)=U_2(\frac{12}{13})=4(\frac{12}{13})^2-1=\frac{407}{169}$，

$\frac{d}{a}=U_6(x)=U_6(\frac{12}{13})=64(\frac{12}{13})^6-80(\frac{12}{13})^4+24(\frac{12}{13})^2-1=\frac{4632263}{4826809}$，得圖 18-5。

(6) (a,b,c,d,e)：

取 a、b、c、d 與 e 對應的圓心角分別為 2α、4α、6α、8α 與 $2\pi-20\alpha$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{10}$，

且 $a=2\sin\alpha$、$b=2\sin2\alpha$、$c=2\sin3\alpha$、$d=2\sin4\alpha$、$e=2\sin(\pi-10\alpha)=2\sin10\alpha$，故

$a=2U_0(x)\sin\alpha$、$b=2U_1(x)\sin\alpha$、$c=2U_2(x)\sin\alpha$、$d=2U_3(x)\sin\alpha$、$e=2U_9(x)\sin\alpha$。

其中 $x=\cos\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$，$y=\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$p>q$，$p,q\in\mathbb{N}$，即可得所有解。

例如取 $p=4$，$q=3$，$\alpha=\cos^{-1}\frac{24}{25}$，$\beta=\pi-10\alpha$，$\frac{b}{a}=U_1(x)=U_1(\frac{24}{25})=2\times\frac{24}{25}=\frac{48}{25}$，

$\frac{c}{a}=U_2(x)=U_2(\frac{24}{25})=4(\frac{24}{25})^2-1=\frac{1679}{625}$，$\frac{d}{a}=U_3(x)=U_3(\frac{24}{25})=8(\frac{24}{25})^3-4(\frac{24}{25})=\frac{50592}{15625}$，

$\frac{e}{a}=U_9(x)=U_9(\frac{24}{25})=512(\frac{24}{25})^9-1024(\frac{24}{25})^7+672(\frac{24}{25})^5-160(\frac{24}{25})^3+10(\frac{24}{25})$

$=\frac{4073642984688}{3814697265625}$，得圖 18-6。

肆、 結論與未來展望

(一) 由定理 2 知，若 $x=\cos\alpha$ 與 $\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ 皆為有理數，且 α 是能任意小。若集合 $A=\{2U_i(x)\cdot\sin\alpha\,|\,i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$，在 A 中任取若干元素，最後造成 $n-1$ 個元素的多重子集

合(Multiset) B ，最後再在 A 中取1個特別的 $2U_t(x)\sin\alpha$ 。必可做出最少邊數為 1 的圓內接多邊形。伸縮後即可得 Brahmagupta *n*-gons，當然也可以得到完美 n 邊形。我利用 Chebyshev Polynomials 解決了使用倍角建構法，在單位圓上建構邊長為有理數的圓內接多邊形。而將其伸縮後就是 Brahmagupta *n*-gons 或是文獻[2,3]中的完美多邊形。

(二) 由定理 3 知，若 $x=\cos\alpha$ 、$\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha$ 、$x'=\cos\frac{\alpha}{2}$ 與 $\sqrt{1-x'^2}=\sin\frac{\alpha}{2}$ 皆為有理數，且 α 是能任意小。若集合 $A=\{2U_i(x)\cdot\sin\alpha \mid i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ ，在 A 中任意取若干元素，最後造成 $n-2$ 個元素的多重子集合(Multiset) C ，最後：

(1) n 為偶數時，取 2 個特別的 $2T_p(x)$ ， $p\in\mathbb{N}$ 。

(2) n 為奇數時，取 2 個特別的 $2T_q(x')$ ， $q\in\mathbb{N}$ 。

必可做出最少邊數為 2 的圓內接多邊形。伸縮後即可得 Brahmagupta *n*-gons，當然也可以得到完美 n 邊形。

(三) 發現可以利用 Chebyshev Polynomials 的幾何意義推出 Brahmagupta *n*-gons 邊長的一般式，且可能有多個邊長相等。另外所有對角線長、外接圓半徑與面積亦為整數。

伍、 參考資料

[1] MA3(2019). Crux Mathematicorum. 45(6), 308-309.

[2] 藍○○(2020)。建構邊長為整數的圓內接多邊形。第 12 屆丘成桐數學獎佳作。

[3] 藍○○(2021)。建構三種以上相異整數邊長的圓內接多邊形。2021 臺灣國際科展數學科。

[4] Silverman, J. H. (2014). A friendly introduction to number theory. Pearson. 13-25.

[5] Sastry, K. R. S. (2005). Construction of Brahmagupta n-gons. In Forum Geometricorum (Vol. 5, pp. 119-126).

[6] Dulio, P., & Laeng, E. (2021). Generalization of Heron’s and Brahmagupta’s equalities to any cyclic polygon. Aequationes mathematicae, 95(5), 941-952.

[7] Olmsted, J. M. H. (1945). Rational values of trigonometric functions. The American Mathematical Monthly, 52 (9), 507–508.

[8] Czédli, G., & Kunos, Á. (2015). Geometric constructibility of cyclic polygons and a limit theorem. Acta Scientiarum Mathematicarum, 81(3), 643-683.

[9] Dulio, P., & Laeng, E. (2019). A" right" path to cyclic polygons. arXiv preprint arXiv: 1910.08396.

[10]Buchholz, R. H., & MacDougall, J. A. (2008). Cyclic polygons with rational sides and area. Journal of Number Theory, 128(1), 17-48.

【評語】010013

本作品為延續作品，主要探討給定一多邊形，其邊長種類及每一種的邊長個數時，是否存在整數邊長的圓內接多邊形。在本件作品中，作者利用 Chebyshev 多項式給出了一個新的構造方法，對於其中幾類給了完整的刻畫。作品的想法頗有新意，值得鼓勵。由於 Chebyshev 多項式的使用，使得 "特殊的有趣解" 是有可能的，這可以是未來考慮的方向。