2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010007

參展科別　數學

作品名稱　解構奧運會徽探討平面鑲嵌

得獎獎項

就讀學校　桃園市立中興國民中學

指導教師　張怡雯、李慧玲

作者姓名　余宥芹、吳怡宣、藍睿瑜

關鍵詞　奧運會徽、平面鑲嵌、線對稱圖形

作者簡介

我們來自中興國中的數理資優班，從小就對數學、科學和邏輯推理類的題目很有興趣，資優班加深加廣的學習讓我們的求知慾得到大大的滿足，在同儕的競爭下激勵我們的學業進步，這兩年的科展比賽讓我們學到許多研究方法、證明技巧，提升統整資料以及報告的能力，一次又一次的磨練使我們更有自信在眾人面前發表並回答評審的問題。

摘要

觀察 2020 東京奧運會徽，發現圖形是由矩形組成，且矩形可經由三種元件（30°與 150°的菱形、60°與 120°的菱形、正方形）的各邊中點連線而成，本研究旨在利用這三種元件，探討平面鑲嵌。首先，找出利用元件拼貼一圈的組合個數，進一步向外擴增成正十二邊形，計算面積、對角線的長度，觀察旋轉之幾何變換，藉此得出拼貼成線對稱圖形時對稱軸上元件的擺放情形。接著，探討奧徽鑲嵌背景圖中不同大小正十二邊形的面積關係，並將線段變成曲線，推廣至拼貼成正 n 邊形的四邊形元件探討，得出如果 n 為偶數，則圖中的四邊形皆為菱形，且菱形的圈數為$\frac{n}{2}-1$，種類個數為$\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$。最後，觀察類似奧徽之非平面鑲嵌頂點相接圖，改成用正方形貼接圖形，計算出邊長有 1:$\sqrt{2}$的關係。

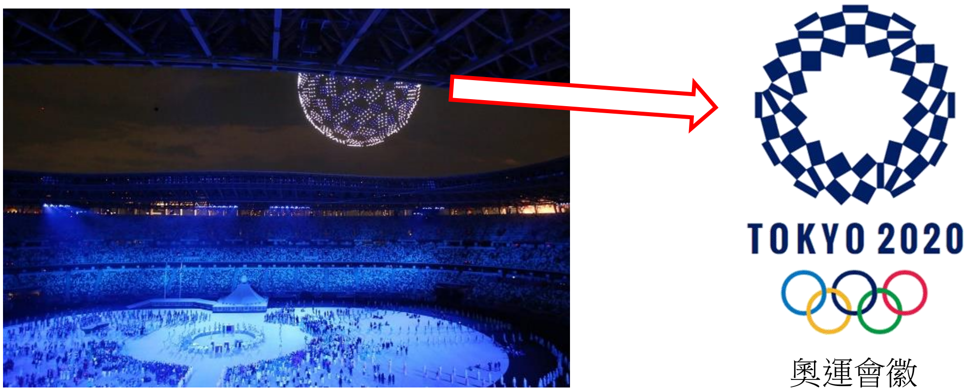
Abstract

Observing the emblem of the 2020 Olympics in Tokyo, we find that the fugure is composed of rectangles. The rectangles can be formed by connecting the midpoints of each side of the three elements. These elements are the rhombus with interior angles of 30 and 150 degrees, the rhombus with interior angles of 60 and 120 degrees, and the square, respectively. The purpose of this research is to use these three elements to study planar tessellation. First, we found out the number of combinations around a point with elements, and then expanded it to form a regular dodecagon. We calculated the area, the length of the diagonal, and observed the rotation of geometric transformation. In this way, we got to know how the components on the axis of symmetry will be placed when an axisymmetric figure is organized. Next, we focused on the background figure of the Olympic emblem drawn by the tessellated technique, and discussed the area relationship of regular dodecagons of different sizes. We transformed segments into curves and extended to the collage of regular polygons with quadrilaterals. We conclude that if n is an even number, the quadrilaterals in the figure will be all rhombuses, and the number of cycles is $\frac{n}{2}-1$, and the number of types is $\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$. Finally, we observed by changing the rectangles to the squares in the vertex-connected figure, which is similar to the Olympic emblem, we found that the ratio of side length is 1:$\sqrt{2}$.

壹、 前言

一、研究動機

在今年 2020 年東京奧運開幕式中，出現好多架無人機在國立競技場上空，排列成今年奧運會會徽的圖形[3]，我們看到這個場景覺得非常壯觀，然而要能精準排出圖形，想必操作無人機的人員一定對圖形的相對位置有所了解，於是引起我們對奧運會徽的好奇。



奧運會徽

圖片來源：[3]　　圖片來源：[2]

在視覺藝術課時要自己設計徽章，老師給我們看了一些歷屆奧運的會徽和各種運動的代表圖形，也簡單介紹了奧運環，告訴我們其中藏有規律，而 2020 年東京奧運的會徽其中共有三種長方形，整個圖形都是由這三種長方形轉換角度拼湊而成，藍白相間，其設計採用日本江戶時代流行的「市松模樣」方格圖紋[2]，另外，我們也注意到頒獎台的設計延續了奧運會徽「市松紋」的理念[9]，而近期很火紅的動漫「鬼滅之刃」裡頭，主角炭治郎的衣服也是「市松紋」的圖形。

2020 東京奧運頒獎台

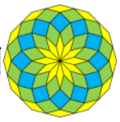
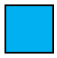
圖片來源：[9]

鬼滅之刃的主角：竈門炭治郎

圖片來源：[4]

如此神秘的奧運會徽裡頭還蘊藏了哪些規律，可以延伸出哪些其他相關的圖形呢？於是我們便決定著手於此篇研究。

二、研究目的

(一) 將奧運會徽中長方形對角線切出的四塊區域，以邊長為對稱軸做鏡射，再將部分圖形經由旋轉與平移後，得出奧徽鑲嵌背景圖，利用裡面的三種元件「30°與 150°的菱形」、「60°與 120°的菱形」、「正方形」進行平面鑲嵌，運用整數解的概念去探討選擇不同角度數量下拼成一圈時的組合個數。

(二) 接著往外拼貼成正十二邊形，計算三種元件和正十二邊形的對角線長度及面積，觀察旋轉後相同的圖形，並應用於線對稱圖形的討論與分析，歸納出如果要拼貼成線對稱正十二邊形時，對角線的元件應該如何擺放。

(三) 討論奧徽鑲嵌背景圖，觀察其鑲嵌結構以及由內至外嵌入元件的角度；計算圖中不同大小正十二邊形的面積關係；並將線段變成曲線，推廣至 n 個圓交疊，討論拼貼成正 n 邊形的四邊形元件，觀察 n 為多少時，圖中的四邊形皆為菱形，以及菱形的圈數與種類個數如何用 n 來表示一般式，並加以證明。

(四) 最後回到奧運會徽這種非平面鑲嵌之頂點相接圖，以類似的手法將正方形拼接於正十二邊形中，探討圖形中不同大小正方形的邊長比，並進一步觀察圖中空隙之鏢形設計。

三、文獻回顧

(一) 平面鑲嵌

鑲嵌又稱密鋪，是指能用一種或多種幾何圖形覆蓋整個平面或填充整個空間，且每個幾何圖形之間不存在空隙、也不重疊的幾何結構，與密鋪（Tessellation）或稱平面填充、細分曲面（subdivision surface）不同在於後者指的是二維的空間填充，前者則可以存在任何維度與不同結構中（如歐幾里得或羅氏幾何）。[5]

(二) 2020 年東京奧運會徽

奧運會徽　　　　　　帕奧會徽

1. 結構與設計理念

二○二○年東京的會徽由三種不同的長方形組成，代表來自世界各地參加奧運的隊伍各有其國家、文化和思想，也就是採用「和而不同」(Unity in diversity）方式，來呈現奧運和帕運的多元性，並串聯為四海一家的深遠意涵。東京奧組委表示，格子的設計在世界各國早已流行甚久，東京奧運會徽上的格子圖案有著濃厚的日本特色，優雅中兼具成熟。[6]

東京奧運會徽其實也充滿野老朝雄個人的設計風格。他涉獵的領域跨越藝術、建築和設計，在二○○一年推出名為「朝雄模式」設計圖案，特色就是以幾何圖形為原點，手法雖為極簡，但能組合出多樣化且令人驚豔的作品。[6]

2. 市松紋：

市松紋是用兩種顏色的方塊，間隔交叉排列表現出來的模樣。在江戶時代開始流行，紋樣名稱以最初穿著的歌舞伎藝「佐野市松」命名。這種以線條、色塊規律排列的圖案是屬於幾何圖形類的紋樣，在瓷器, 布料或包裝紙上最常看到，是很耐看的一個類別。而這樣的設計展現出純粹的和風視覺，讓人感覺到滿滿的日本味。東京 2020 年奧運的 Logo 就是採用了市松的圖案，響應了奧運環的傳統又融入了和風的市松格子。[8]

東京奧運會徽而被許多人所認識的「市松紋」，名稱其實是來自於江戶時代中期的歌舞伎演員「佐野川市松」。他曾在《心中萬年草》一劇中，飾演主人翁粂之助，並穿著深青、白兩色方格子交錯的褲子，蔚為風潮，此後人們便將這種花紋稱之為市松，也成了日本相當具代表性的圖樣。2020 東京奧運會徽正是由 45 個四邊形的「組市松紋」組成，蘊含了「包容與和諧」的意義。近期《鬼滅之刃》大放異彩，主角炭

治郎身上「綠黑格紋」圖樣的羽織裝也跟著爆紅，這個綠黑格紋也是市松紋！[10]

(三) 過去相關之科展與研究

過去有以下幾件與鑲嵌有關之科展作品，在第 45 屆中小學科學展覽會作品「平面與立體鑲嵌之研究」中，討論了形成平面鑲嵌時，每個頂點周圍多邊形的邊數以及數量需滿足之方程式，並且推廣至立體鑲嵌，探討圍繞一頂點之多面體的立體角[1]。在第 60 屆中小學科學展覽會作品「M.C-Escher 極限圖的結構解析與實務研究」中，對荷蘭著名版畫藝術家 Escher 的鑲嵌作品進行結構解析與實作，利用旋轉與鏡射的技巧去設計平面鑲嵌圖形[7]。

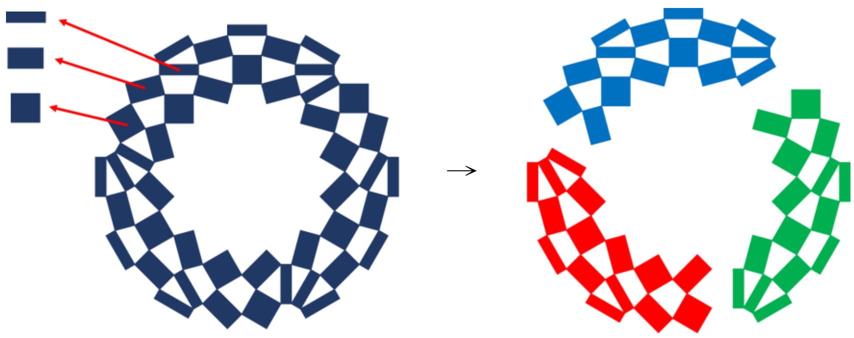
另外，在一篇投稿於藝術類的作品「2020 東京奧運 Logo」中，提到了 Logo 的設計理念以及美的形式原理(包含反覆、漸變、對稱、統一)如何運用在 Logo 圖形裡頭[11]，而本篇研究將會針對這些美的呈現進一步探討數學原理，運用鑲嵌的法則進行整數解討論，最後能歸納出一般式。

貳、 研究方法及過程

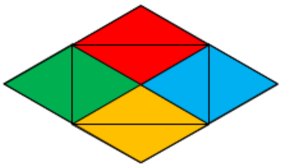
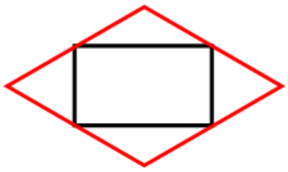
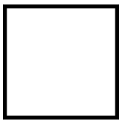
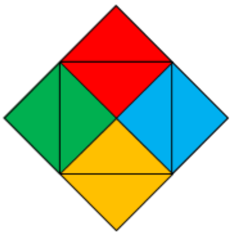
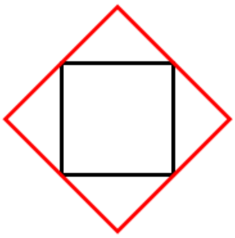
一、生成元件，討論平面鑲嵌的個數組合

(一) 奧運會徽的解構到重構

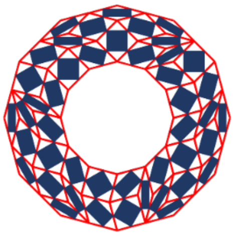
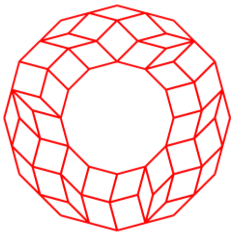
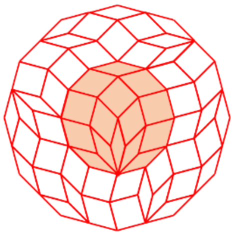
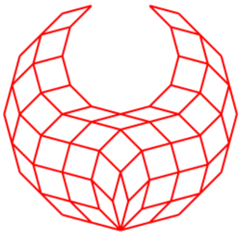
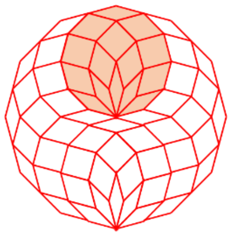
解構奧運會徽會發現裡面有三種不同的長方形，且是由一組圖案重複 3 次，每次旋轉 120 度所組成，如下圖所示，(參考美的形式原理-反覆[11])



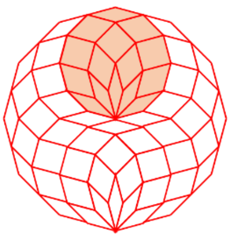
畫出原本奧運會徽中長方形的對角線後，圖形被切成四塊區域，分別以各自的邊長做鏡射，便會得到三種元件。

原圖的長方形	對角線切四塊→以邊長做鏡射		外為菱形為三種元件
			
			
			

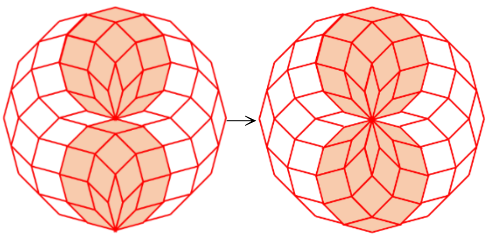
將奧運與帕奧運會徽圖中每個長方形經由上表中的鏡射技巧將背景結構畫出來如下表，而這兩個背景圖的缺空部分皆為正十二邊形，因此可以放入圖形變成鋪滿的平面鑲嵌。(參考美的形式原理-統一[11])

	會徽做鏡射後的背景結構圖形		缺空放入正十二邊形
奧運會徽			
帕奧運會徽			

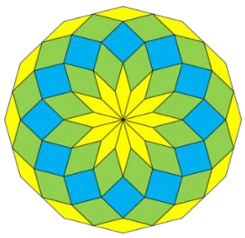
將帕奧運會徽經由旋轉與平移重組後，便可得到下圖中最右邊那個外圈為正十二邊形的鑲嵌圖形，我們將其稱作「奧徽鑲嵌背景圖」。



缺空放入正十二邊形



底下的正十二邊形旋轉 180°

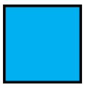


奧徽鑲嵌背景圖

(二) 奧徽鑲嵌背景圖中的元件有以下 3 個，其中所有元件的邊長皆相同。

1. 角度為 30°與 150°的菱形，圖示：。

2. 角度為 60°與 120°的菱形，圖示：。

3. 正方形，圖示：。

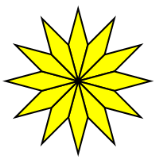
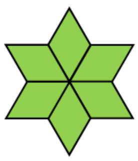
(三) 如果要在平面上鋪滿一圈，元件中的角度與數量如下表，則角度與數量需滿足方程式 $30a+60b+90c+120d+150e=360$。

角度	30°	60°	90°	120°	150°
數量	a	b	c	d	e

1. 選擇單一角度

編號	a	b	c	d	e
A1	12	0	0	0	0
A2	0	6	0	0	0
A3	0	0	4	0	0
A4	0	0	0	3	0

圖示

			
A1	A2	A3	A4

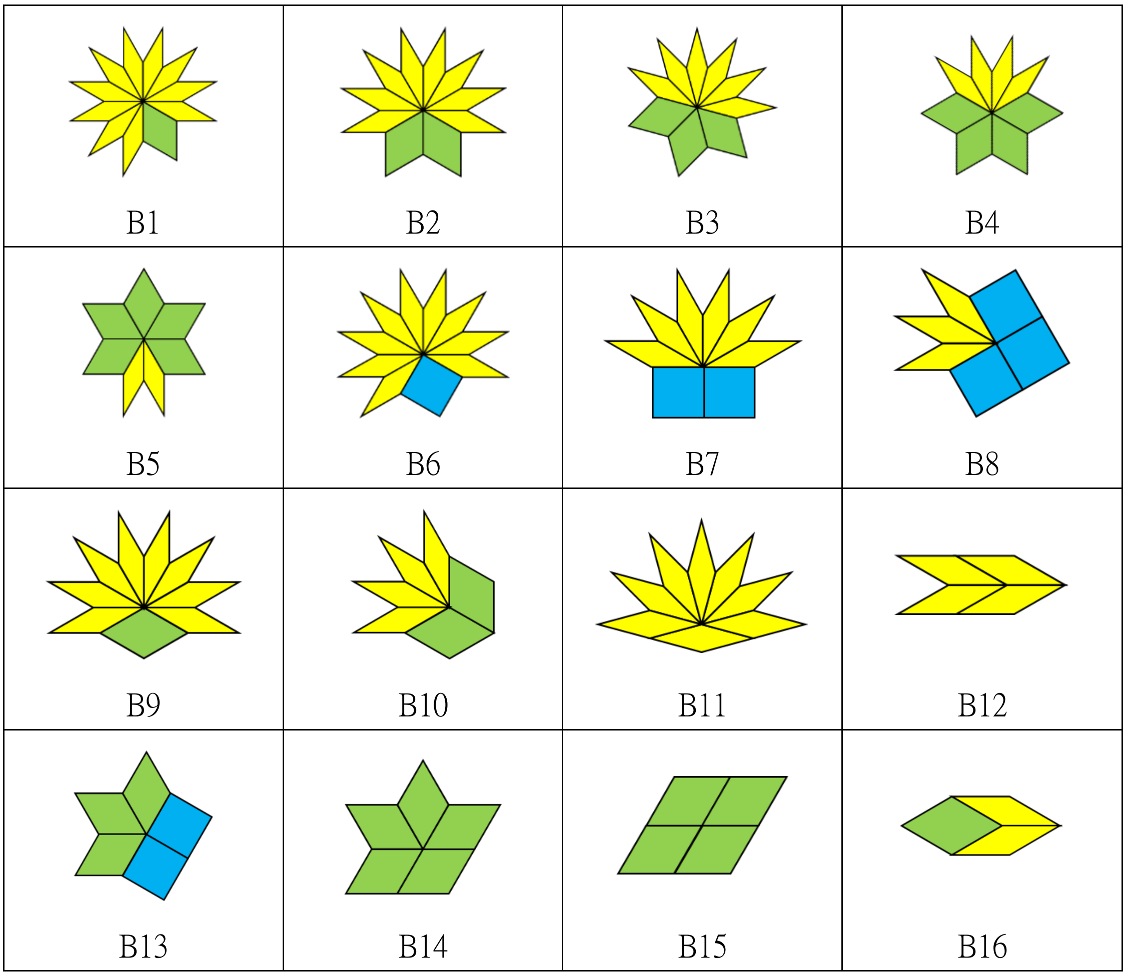
發現：因為 150 不是 360 的因數，所以選擇單一角度時，不能選 150°。

2. 選擇兩個角度

編號	a	b	c	d	e
B1	10	1	0	0	0
B2	8	2	0	0	0
B3	6	3	0	0	0
B4	4	4	0	0	0
B5	2	5	0	0	0
B6	9	0	1	0	0
B7	6	0	2	0	0
B8	3	0	3	0	0
B9	8	0	0	1	0
B10	4	0	0	2	0

B11	7	0	0	0	1
B12	2	0	0	0	2
B13	0	3	2	0	0
B14	0	4	0	1	0
B15	0	2	0	2	0
B16	0	1	0	0	2

舉例圖示，可換位置。



B1 B2 B3 B4
B5 B6 B7 B8
B9 B10 B11 B12
B13 B14 B15 B16

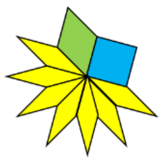
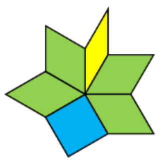
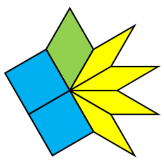
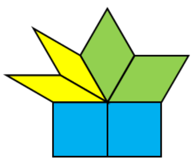
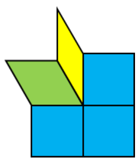
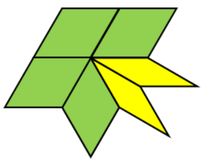
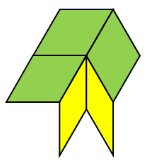
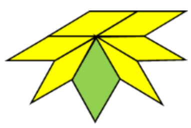
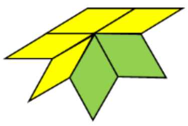
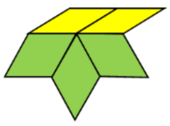
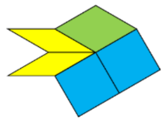
發現：一定要有 a 和 b 其中一種，才能做出兩種角度的組合。

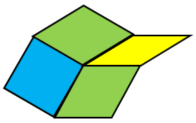
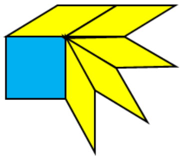
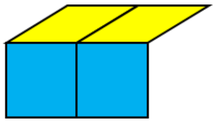
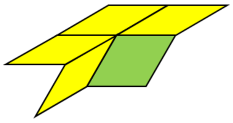
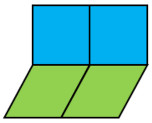
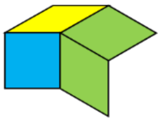
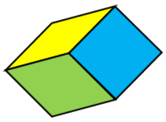
3. 選擇三個角度

編號	a	b	c	d	e
C1	7	1	1	0	0
C2	5	2	1	0	0
C3	3	3	1	0	0
C4	1	4	1	0	0
C5	4	1	2	0	0
C6	2	2	2	0	0
C7	1	1	3	0	0
C8	6	1	0	1	0

C9	4	2	0	1	0
C10	2	3	0	1	0
C11	2	1	0	2	0
C12	5	1	0	0	1
C13	3	2	0	0	1
C14	1	3	0	0	1
C15	5	0	1	1	0
C16	2	0	2	1	0
C17	1	0	1	2	0
C18	4	0	1	0	1
C19	1	0	2	0	1
C20	3	0	0	1	1
C21	0	1	2	1	0
C22	0	2	1	0	1
C23	0	0	1	1	1

舉例圖示，可換位置。

 C1	 C2	 C3	 C4
 C5	 C6	 C7	 C8
 C9	 C10	 C11	 C12
 C13	 C14	 C15	 C16

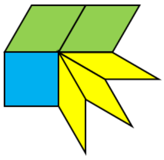
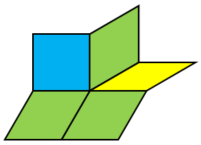
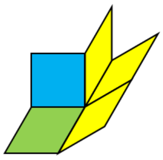
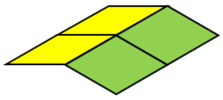
 C17	 C18	 C19	 C20
 C21	 C22	 C23	

發現：一共有 23 種可能。

4. 選擇四個角度

編號	a	b	c	d	e
D1	1	2	1	1	0
D2	3	1	1	1	0
D3	2	1	1	0	1
D4	1	1	0	1	1

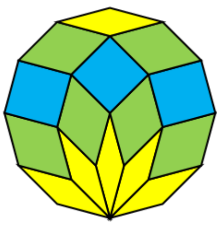
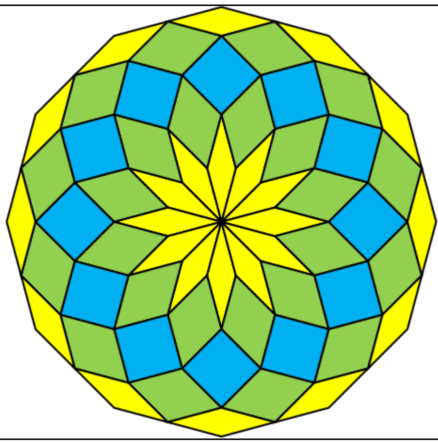
舉例圖示，可換位置。

 D1	 D2	 D3	 D4

發現：一共有 4 種可能。

二、拿不同數量的 3 個元件拼貼成正十二邊形

在平面上鋪滿一圈後，如果再往外拼貼，可以拼貼成正十二邊形，下表分別舉了邊長為 1 與 2 的拼貼例子。

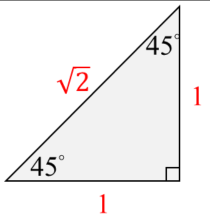
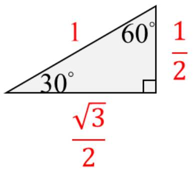
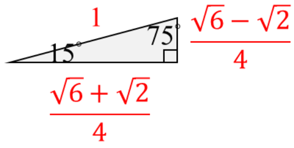
邊長	1	2
拼貼舉例		

(一) 計算圖形的長度與面積

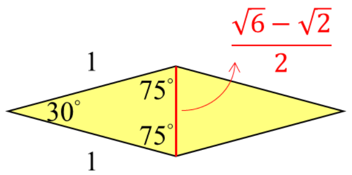
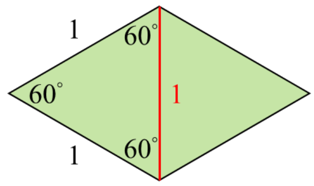
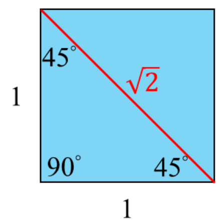
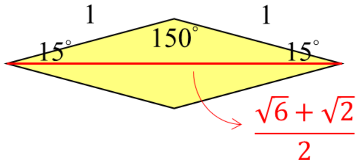
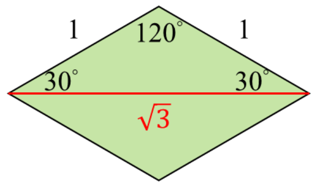
分別計算元件與正十二邊形中，對角線的長度以及圖形的面積。

1. 元件對角線的長度

先備知識：

角度	45°、45°、90°	30°、60°、90°	15°、75°、90°
邊長比例	$1:1:\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}:1$
圖示			

如果 3 個元件的邊長皆為 1 單位，計算對角線長度如下表：

名稱	元件一	元件二	元件三
圖形	角度為 30°與 150°的菱形	角度為 60°與 120°的菱形	正方形
兩條對角線	 短 $=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	 短 $=1$	 短 $=$ 長 $=\sqrt{2}$
	 長 $=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	 長 $=\sqrt{3}$	

2. 元件的面積

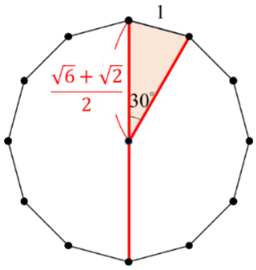
已知菱形的面積為對角線相乘除以 2，計算元件一、二、三的面積如下：

(1) 元件一：$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\div 2=\frac{1}{2}$

(2) 元件二：$1\times\sqrt{3}\div 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 元件三：$1\times 1=1$

3. 正十二邊形對角線的長度

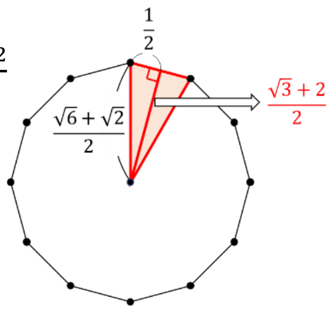


360° 平分成 12 等分，每一等分是 30°，如果正十二邊形的邊長為 1 單位，則對角線的長度為 $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\times 2=\sqrt{6}+\sqrt{2}$。

4. 正十二邊形的面積

將正十二邊形切成 12 塊三角形，運用畢氏定理，計算以邊長 1 為底的高：

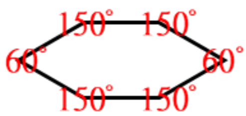
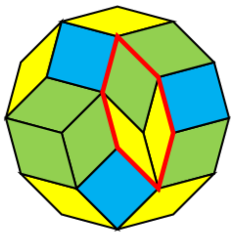
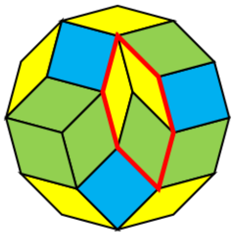
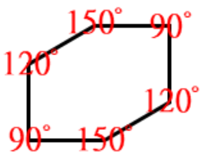
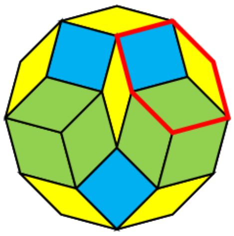
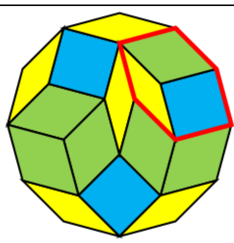
$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{7+2\sqrt{12}}{4}}=\frac{\sqrt{(3+4)+2\sqrt{3\times4}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{2}=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

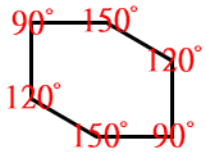
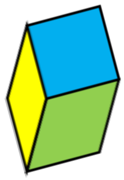
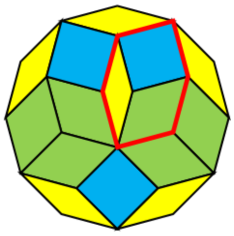
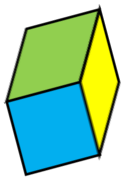
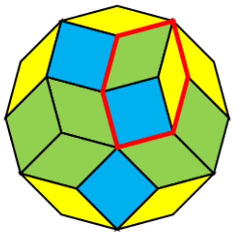


因此正十二邊形的面積為三角形面積乘以 12：

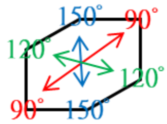
$$1\times\frac{\sqrt{3}+2}{2}\times\frac{1}{2}\times 12=6+3\sqrt{3}$$

(二) 旋轉後相同的圖形(拿三個元件拼貼)

編號	外框輪廓與角度	拼貼組合	舉例
E1			
			
E2			
			

E3			
			

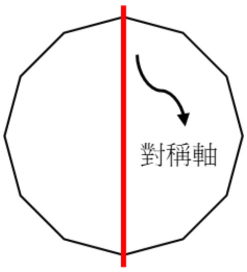
特性：拼貼完後的多邊形對角相等，舉例：編號 E2。



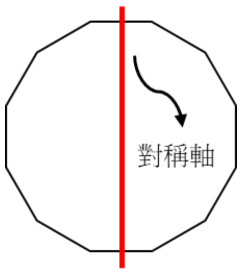
編號之間的關係：E2 和 E3 是線鏡射關係。

(三) 線對稱圖形

拼貼成邊長為 1 的正十二邊形時，如果圖形為線對稱，會有兩種對稱軸，分別為「點對點的對稱軸」和「邊對邊的對稱軸」，如下方所示。



點對點的對稱軸

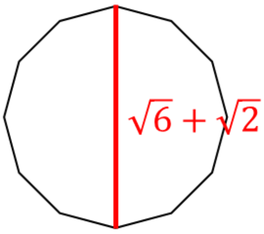


邊對邊的對稱軸

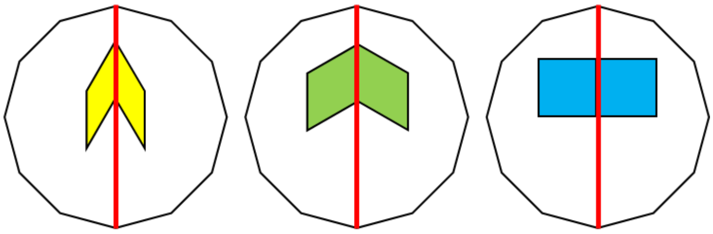
接下來，我們將討論對稱軸上的元件有哪些擺放方式。

1. 點對點的對稱軸

對稱軸上的線段長度為$\sqrt{6}+\sqrt{2}$，也就是正十二邊形的對角線，如果拿元件的邊長拼在對稱軸上，因為邊長為 1，故長度加總會出現整數，但對稱軸上的線段長度沒有整數，所以只能拿元件的對角線拼在對稱軸上。



對稱軸上的線段長度



拿元件的邊長拼在對稱軸上→不合

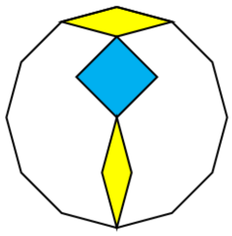
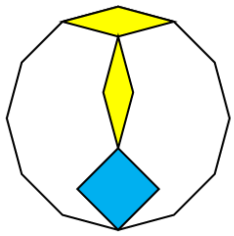
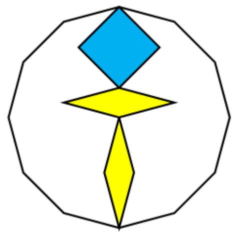
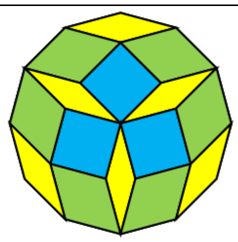
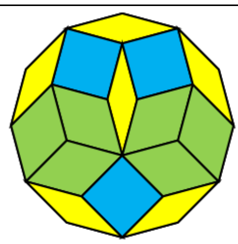
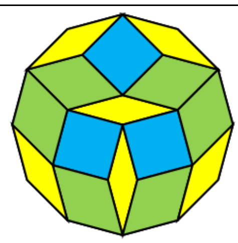
考慮拿元件的對角線拼在對稱軸上，回顧元件的對角線，長度與簡稱如下：

- 元件一的短對角線=$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (簡稱 S1)、長對角線=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (簡稱 L1)；
- 元件二的短對角線=1 (簡稱 S2)、長對角線=$\sqrt{3}$ (簡稱 L2)；
- 元件三的短對角線=長對角線=$\sqrt{2}$ (簡稱 S3)。

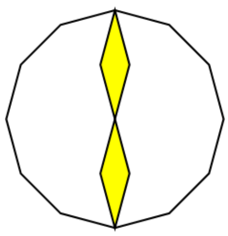
設拿了 a 個 S1、b 個 L1、c 個 S2、d 個 L2、e 個 S3，則會滿足方程式 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}b+c+\sqrt{3}d+\sqrt{2}e=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，其中 a、b、c、d、e 為整數，則解的組合有以下兩種：

(1) 組合一：a=1、b=1、e=1，也就是一個 S1、一個 L1 和一個 S3。

經由排列組合將三個對角線擺放，又分成三種情形，而此三種情形皆可以拼出線對稱圖形，如下表所示。

	情形一	情形二	情形三
對稱軸擺放			
線對稱圖形舉例：			

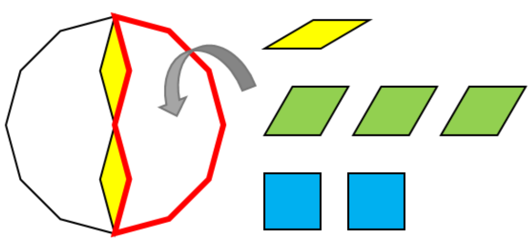
(2) 組合二：b=2，也就是兩個 L1。



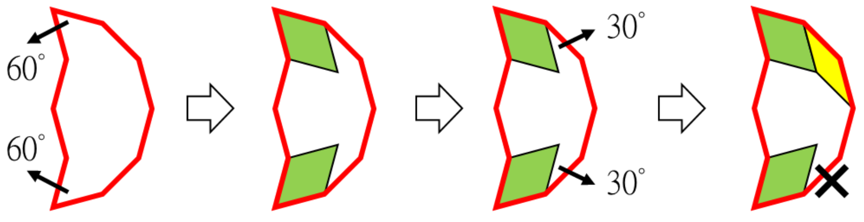
當兩個元件二擺上去後，剩下左右兩塊白色區域的面積皆為 $\frac{6+3\sqrt{3}-1}{2}=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$，設拿 f 個元件一、g 個元件二、h 個元件三去拼貼一半的白色區域，則會滿足方程式

$\frac{1}{2}f+\frac{\sqrt{3}}{2}g+h=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$，f、g、h 為整數，則 g=3 且 f 為奇數，有以下三種解：

f=1、g=3、h=2

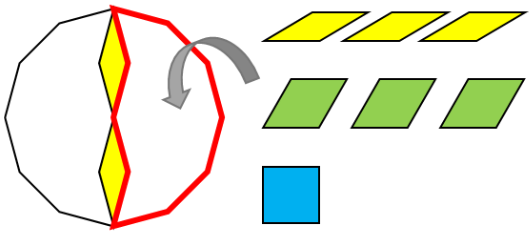


一半的白色區域上方及下方的角度皆為 60˚(如圖一)，可以放一個元件二或者兩個元件一，但因為元件一的數量只有一個，故上下僅能放元件二(如圖二)，接著旁邊的空隙角度皆為 30˚(如圖三)，但元件一的數量只有一個，所以無法拼貼(如圖四)。

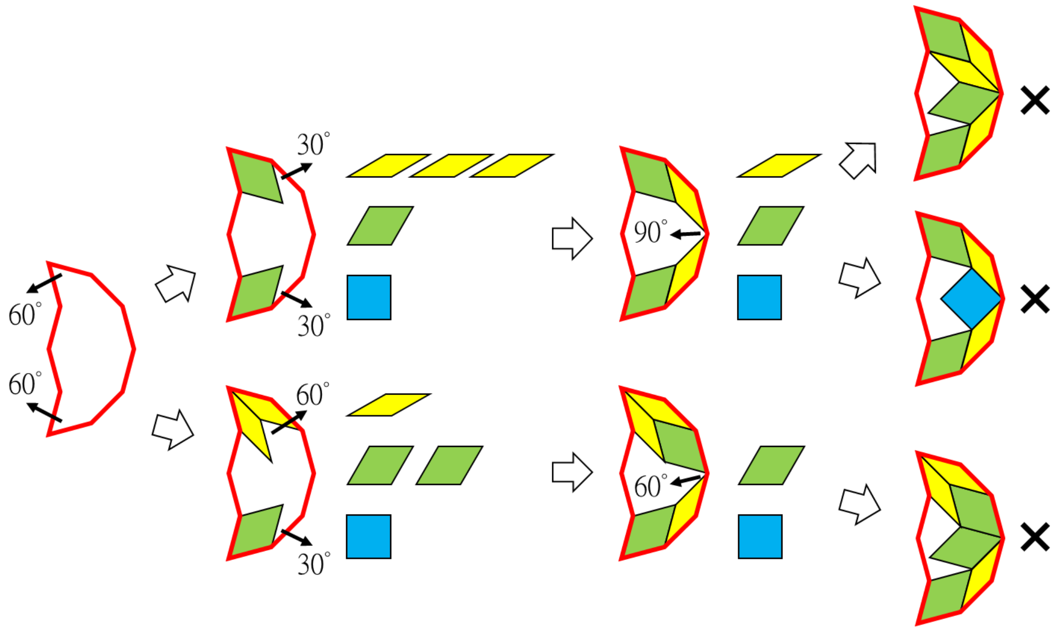


圖一　　圖二　　圖三　　圖四

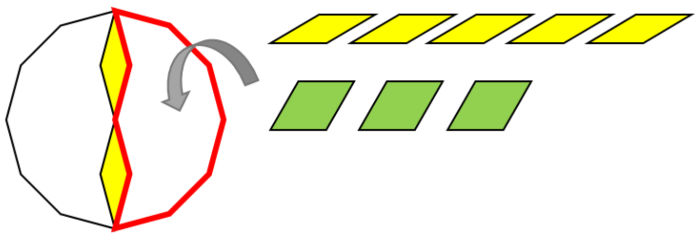
f=3、g=3、h=1



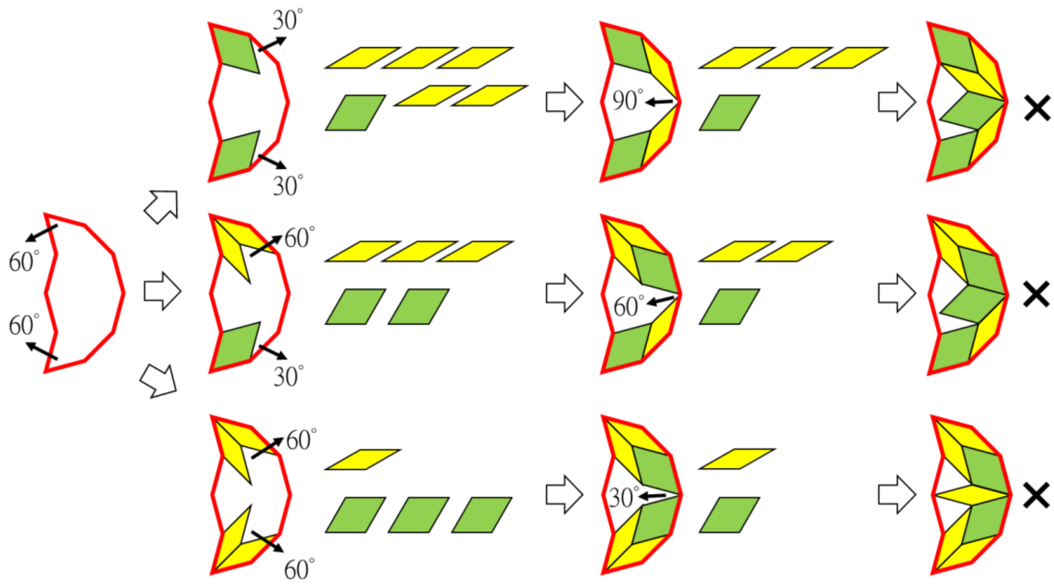
見下方數狀圖，白色區域從上下角落開始拼貼，60˚可以放一個元件二或者兩個元件一，所以有兩種分支的情況，而再繼續往下會發現都無法拼貼完成。



f=5、g=3、h=0



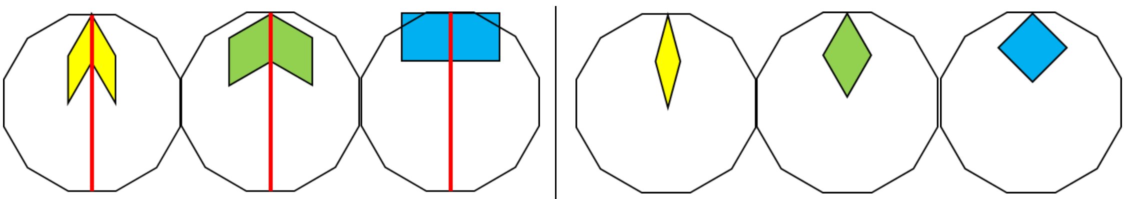
見下方數狀圖，白色區域從上下角落開始拼貼，60°可以放一個元件二或者兩個元件一，所以有三種分支的情況，而再繼續往下會發現都無法拼貼完成。



因此，拿兩個 L1 擺放在對稱軸上無法拼貼成線對稱圖形。

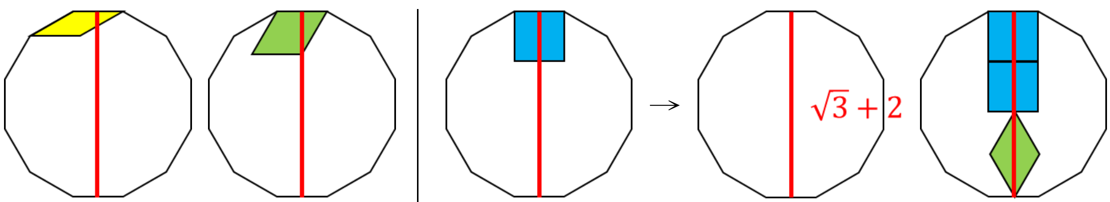
2. 邊對邊的對稱軸

首先，如果拿元件的邊長或對角線拼在對稱軸上，擺放完後兩邊的空隙長度為 0.5，所以沒有元件可以放入剩下的兩邊。



拿元件的邊長拼在對稱軸上→不合　拿元件的對角線拼在對稱軸上→不合

如果將元件的邊長貼齊正十二邊形的邊長，僅擺放元件三會是線對稱圖形，但對稱軸上的線段長度為$\sqrt{3}+2$，拿兩個元件三後一定要再拿一個元件二的長對角線，如此就會發生像上方討論的不合情況。



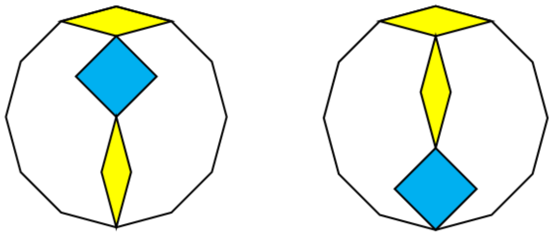
非線對稱圖形　線對稱圖形→對稱軸上的線段長度限制下不合

因此拼貼成邊長為 1 的線對稱正十二邊形時，對稱軸不會是邊對邊的對稱軸。

綜合以上討論，可以得到性質 1：

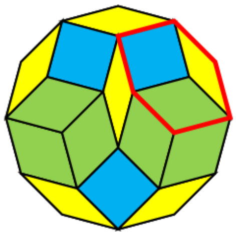
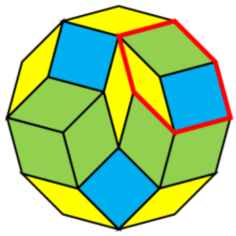
【性質 1】利用三個元件拼貼成邊長為 1 的正十二邊形時，如果要使拼貼出來的圖形為線對稱圖形，則擺放在對稱軸上的元件一定是以下三種情況：

情形一　　　　情形二　　　　情形三



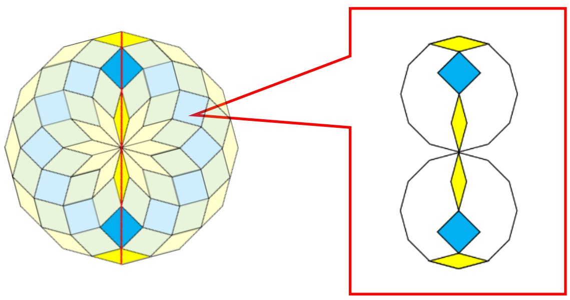
反之，如果對稱軸上的元件是以上三種情形，則圖形不一定是線對稱。

原因是如果有旋轉後相同的圖形，則可經由旋轉後得到不是線對稱的圖形，下表例子為圖形中有編號 E2，

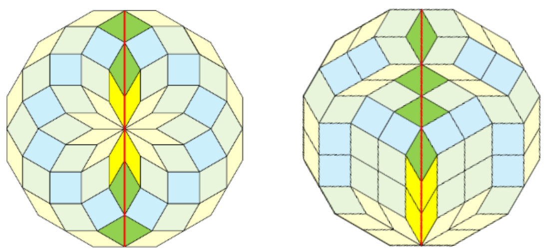
	
擺法一：線對稱	擺法二：旋轉後變成不是線對稱

另外，拼貼成邊長為 2 的正十二邊形時，如果圖形為線對稱，以下舉例幾個對稱軸的元件擺放情形：

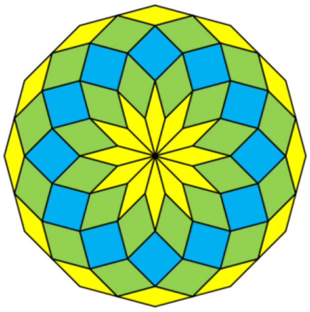
點對點的對稱軸，用兩個情形一圖形拼貼於正中間(如下圖)。



邊對邊的對稱軸，這時就可以將元件二擺放在對稱軸上(如下圖)。



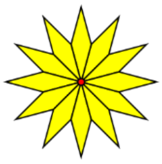
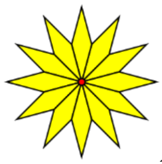
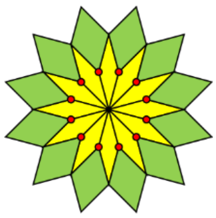
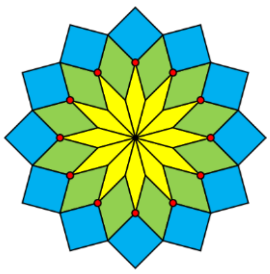
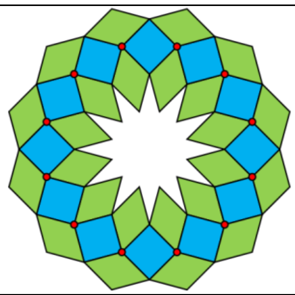
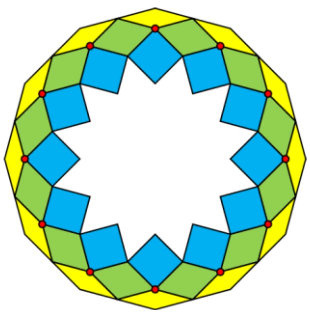
三、奧徽鑲嵌背景圖的結構與變化



拼貼成邊長為 2 的正十二邊形中，有一種情況就拼貼成是奧徽鑲嵌背景圖(如右圖)，我們發現了此圖形有很多特別的結構與變化，因此接下來會針對我們觀察到的幾點做討論。

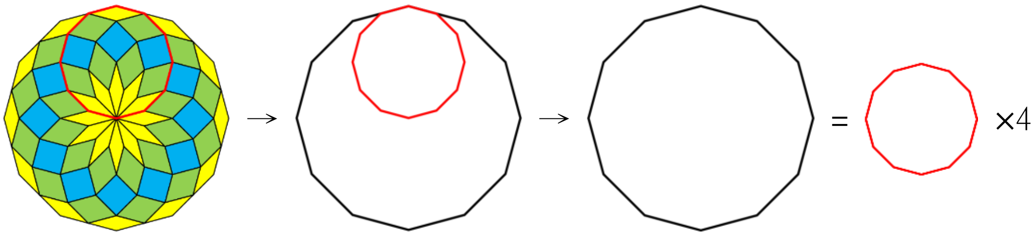
(一) 解構圖形：觀察鑲嵌結構以及嵌入角度。

1. 線對稱圖形，對稱軸有 24 條。
2. 嵌入角度由中心往外分別為 30°、60°、90°、120°、150°，逐漸變大，且三個元件中所有可能的角度皆出現。

	圖示	單一點鑲嵌/編號	嵌入角度
第一圈		 A1	30°
第二圈		 B16	60°
第三圈		 C17	90°
第四圈		 C21	120°
第五圈		 C22	150°

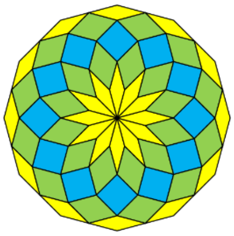
(二) 邊長=1 vs 邊長=2 的正十二邊形：

觀察奧徽鑲嵌背景圖，可以發現裡面有邊長為 1 的正十二邊形，如下方圖形中，外圍黑色大的正十二邊形邊長=2，裡面紅色小的邊長=1，因兩者為相似圖形，故面積比等於邊長平方比，由此可知大正十二邊形面積等於小正十二邊形面積的 4 倍，



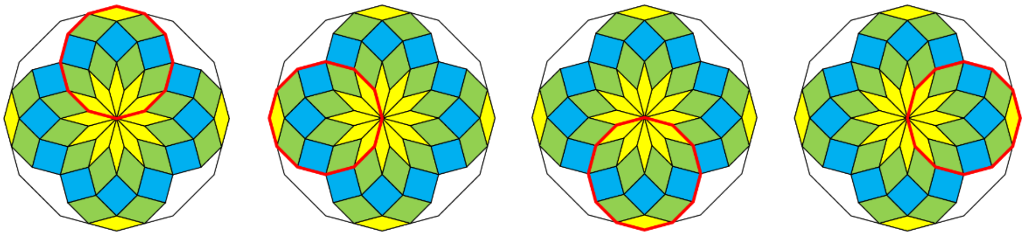
這個關係也可以用奧徽鑲嵌背景圖的元件拼貼結構去解釋，以下說明 2 種方式：

1. 利用元件的個數去計算面積，已知元件一、二、三的面積分別為$\frac{1}{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$、1，

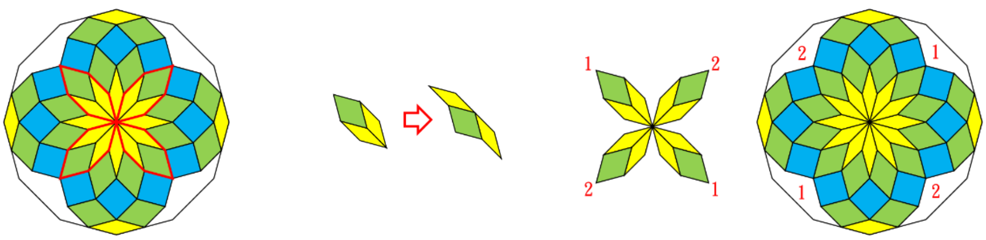
	$=$ 元件一 $\times 5 +$ 元件二 $\times 6 +$ 元件三 $\times 3$ $=\frac{1}{2}\times 5+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6+1\times 3=\frac{11+6\sqrt{3}}{2}$
	$=$ 元件一 $\times 20 +$ 元件二 $\times 24 +$ 元件三 $\times 12$ $=\frac{1}{2}\times 20+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 24+1\times 12=22+12\sqrt{3}$

由上表數據可得 $22+12\sqrt{3}=\frac{11+6\sqrt{3}}{2}\times 4$，也就是面積有 4 倍的關係。

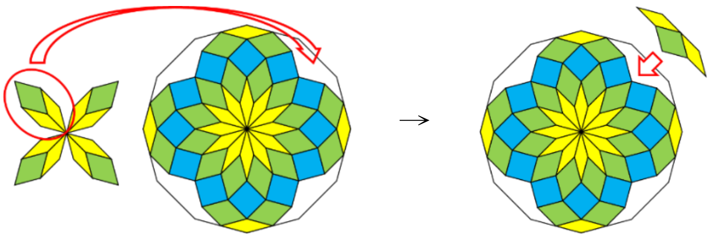
2. 觀察下方圖形，此圖為四個相同且邊長為 1 的正十二邊形重疊組合而成，



重疊的部分皆為兩個元件一和一個元件二拼貼而成(即編號 B16)，將重疊的部分經由平移重組後，後剛好可以補在旁邊空白的對應位置，如下圖所示。

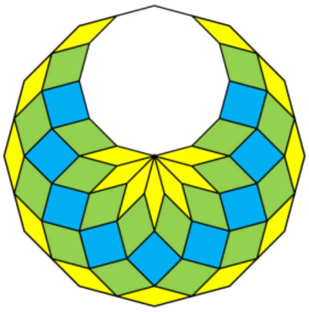
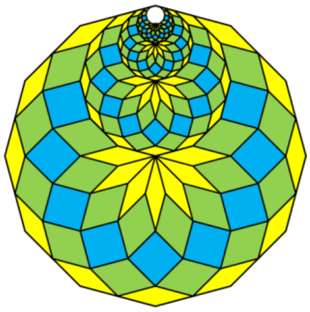
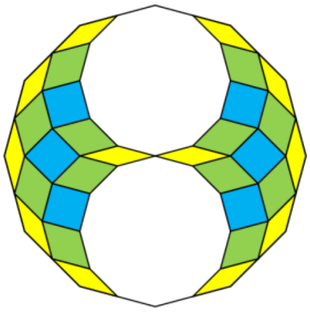
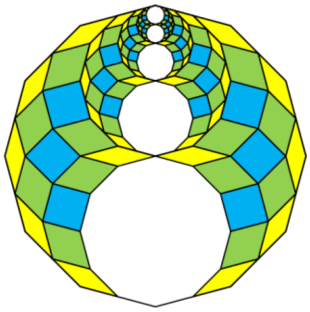


重疊的部分　　　　平移重組　　　　移動的對應位置



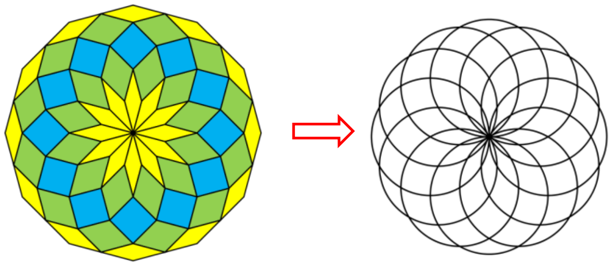
平移重組後移動到對應的位置

另外，我們也發現了圖形挖空後可重複放入的有趣現象，將小的正十二邊形挖空後，可以在空缺中再放入一樣的圖形，如此重複下去，底下舉兩個例子：

舉例	單一圖形	重複放入
1		
2		

(三) 線段變成曲線，延伸討論 n 個圓，也就是拼貼成正 n 邊形的情況

如果將奧徽鑲嵌背景圖的線段變成曲線(如下圖)，它的結構會是 12 個互相交疊的圓，因此我們好奇當圓的數量改變時，會有什麼相同的性質？相異的變化？



1. 繪製 n 個圓以及交點連線成四邊形的過程：

<u>步驟一</u>：畫一個半徑為 r 的圓 O，圓心稱作中心點，在圓 O 上畫出 n 個等分點；

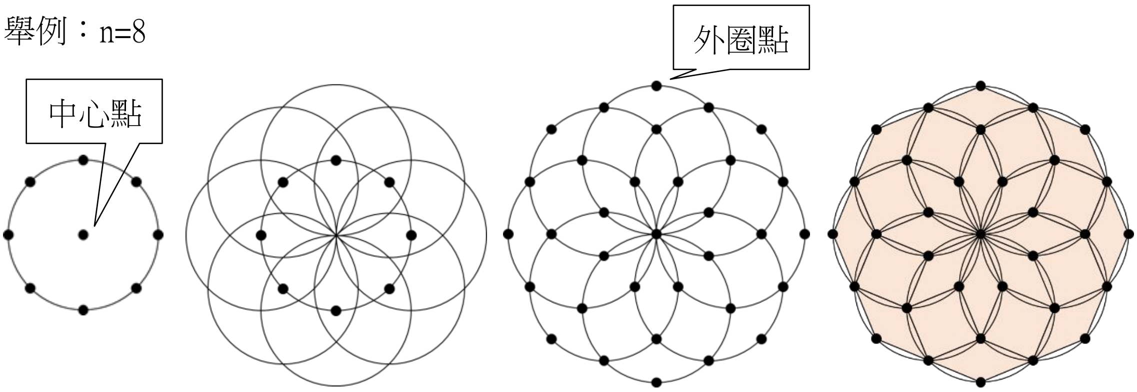
<u>步驟二</u>：以這 n 個等分點為新的圓心，半徑為 r 畫出 n 個互相交疊的圓；

<u>步驟三</u>：畫出 n 個圓中兩兩之間的交點，以及外圈點；

(註：中心點對新的圓心做點對稱，對稱過去的點稱作外圈點)

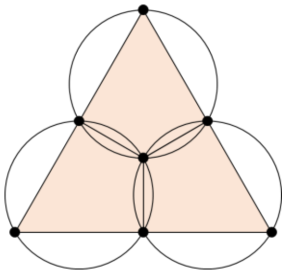
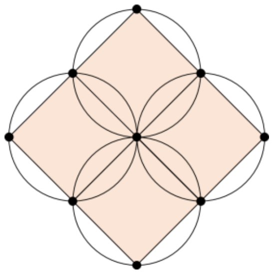
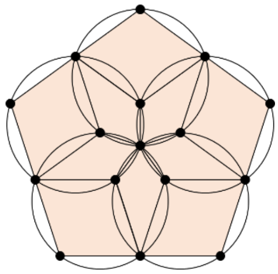
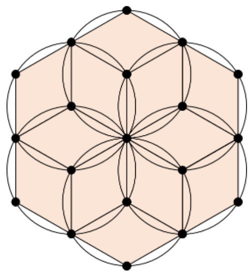
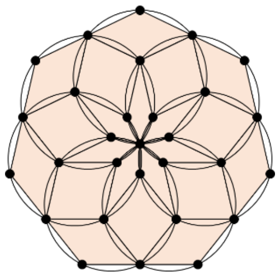
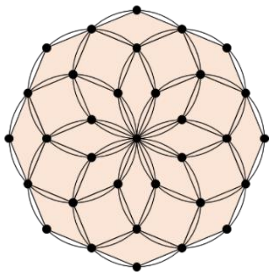
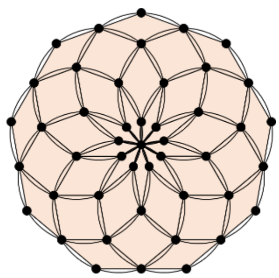
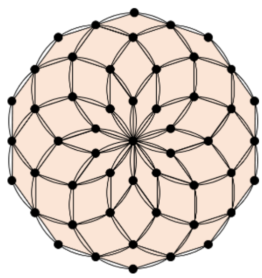
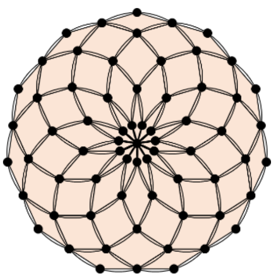
<u>步驟四</u>：將 n 個圓的交點與外圈點連線，形成四邊形。

舉例：n=8

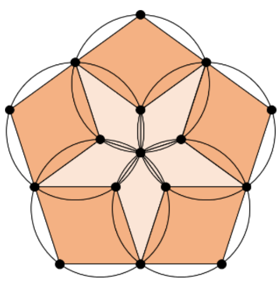


步驟一　步驟二　步驟三　步驟四

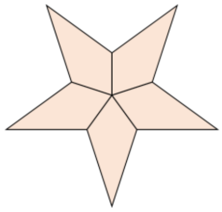
下表呈現 n=3~11，進一步討論拼貼成正 n 邊形的四邊形元件：

n	3	4	5
圖示			
n	6	7	8
圖示			
n	9	10	11
圖示			

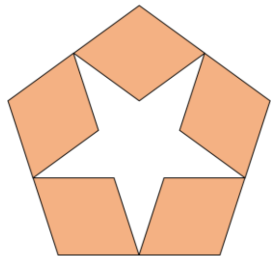
2. 觀察上表，我們發現在 n 個圓的交點與外圈點連線所形成的四邊形中，不是全部都是菱形，舉例：n=5，內圈的四邊形為箏形，外圈的四邊形為菱形。



n=5



內圈的四邊形為箏形



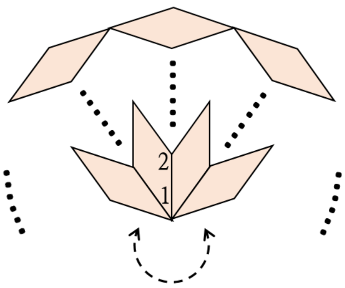
外圈的四邊形為菱形

於是，我們推論出以下兩個性質：

【性質 2】如果 n 為偶數，則 n 個圓的交點與外圈點連線形成的四邊形皆為菱形。

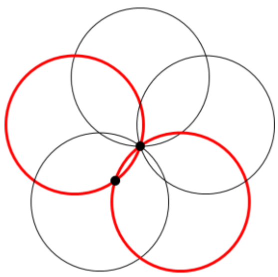
證明：

首先，看最內圈的四邊形(如圖)，因為每一圈都有 n 個四邊形，所以$\angle 1=\frac{360°}{n}$，如果最內圈的四邊形是菱形，則$\angle 2=180°-\frac{360°}{n}$，也就是$\angle 2$會等於正 n 邊形的內角度數。※

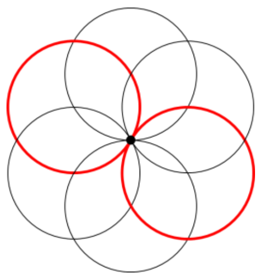


討論兩圓的交點數，有以下兩種情形：

- 有兩個交點，其中一個點是中心點。(如圖一)
- 只有一個交點，也就是中心點，這種情形只有 n 是偶數時才有。(如圖二)



圖一：兩個交點



圖二：一個交點

接著，分成 n 為奇數與偶數，討論在繪製步驟三的圖中，一個圓上有幾個點：

(1)　n 為奇數

一個圓與其他 n−1 個圓的交點個數為 n，計算方式如下：

$$\underbrace{(n-1)\times 2}_{\text{與 n−1 個圓交 2 點}}\ \underbrace{-(n-1)}_{\text{扣除交點為中心點}}\ \underbrace{+1}_{\text{計算一次中心點}}=n$$

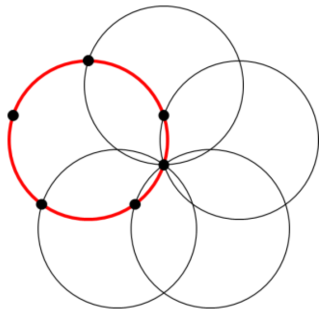
加上外圈點之後，每個圓上會有 $n+1$ 個點。(舉例：n=5，如圖三)

(2) n 為偶數

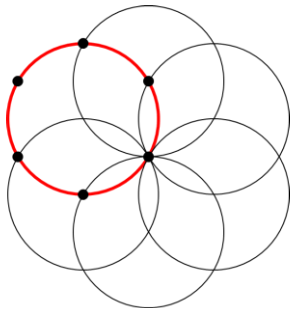
一個圓與其他 n−1 個圓的交點個數為 n，計算方式如下：

$$\underbrace{(n-2)\times 2}_{\text{與 n−2 個圓交 2 點}}\ \underbrace{-(n-2)}_{\text{扣除交點為中心點}}\ \underbrace{+1}_{\text{與 1 個圓交於中心點}} = n-1$$

加上外圈點之後，每個圓上會有 n 個點。(舉例：n=6，如圖四)



圖三：n=5，有 6 個點

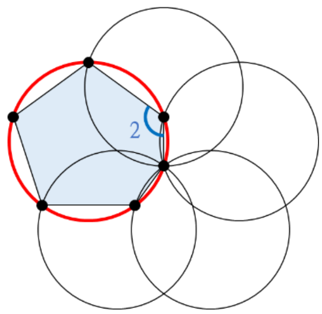


圖四：n=6，有 6 個點

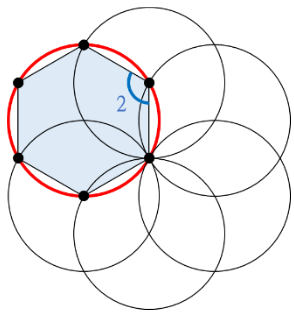
最後，一樣分成 n 為奇數與偶數，計算∠2的角度：

(1) 如果 n 為偶數，一個圓上有 n 個點，連起來是正 n 邊形，所以 $\angle 2$ 會等於 $180° - \frac{360°}{n}$，根據前面※可知，最內圈的四邊形會是菱形。(如圖六)

(2) 如果 n 為奇數，一個圓上有 $n+1$ 個點，連起來是 $n+1$ 邊形，所以 $\angle 2$ 不會等於$180° - \frac{360°}{n}$，因此最內圈的四邊形不會是菱形。(如圖五)



圖五：$\angle 2 \neq 180° - \frac{360°}{n}$



圖六：$\angle 2 = 180° - \frac{360°}{n}$

以上只有討論最內圈的四邊形，不過因為從第二圈開始，連線的長度皆為正 n 邊形的邊長，因此從第二圈往最外圈的四邊形皆為菱形。

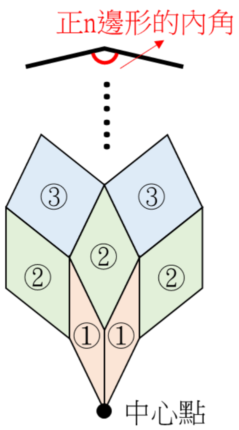
注意：當 n 為奇數時，除了最內圈是箏形，其他圈的四邊形也是菱形。

■

【性質 3】如果 n 為偶數，菱形的圈數為$\frac{n}{2}-1$，菱形種類個數為$\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$，其中$\lceil x\rceil$為取頂符號，表示不小於 x 的整數中最小的一個。

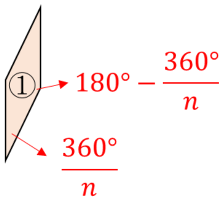
<u>證明圈數</u>：

從性質 2 可知，如果 n 為偶數，則每一圈的四邊形皆為菱形，分別計算每一圈菱形的鄰角，並記錄成數對的形式：



圖一

第一圈

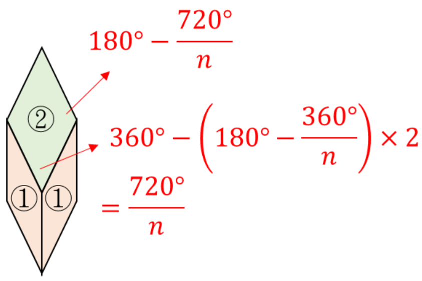


數對表示：

$$\left(\frac{360°}{n}, 180°-\frac{360°}{n}\right)$$

360° × 1

第二圈

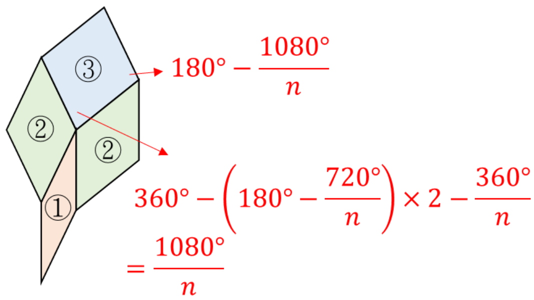


數對表示：

$$\left(\frac{720°}{n}, 180°-\frac{720°}{n}\right)$$

360° × 2

第三圈



數對表示：

$$\left(\frac{1080°}{n}, 180°-\frac{1080°}{n}\right)$$

360° × 3

由此可推得第 i 圈菱形的鄰角數對為 $\left(\frac{360°\times i}{n}, 180°-\frac{360°\times i}{n}\right)$。

假設總共可以拼貼出 k 圈的菱形，則第 k 圈菱形的鄰角數對為 $\left(\frac{360°\times k}{n}, 180°-\frac{360°\times k}{n}\right)$，因為最後會拼貼成正 n 邊形，所以最外圈(也就是第 k 圈)菱形的其中一個角度會等於正 n 邊形的內角(見上表中的圖一)，於是分成以下兩種形況討論：

(1) $\frac{360°\times k}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$

$\Rightarrow \frac{360°\times(k+1)}{n} = 180° \Rightarrow \frac{(k+1)}{n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow n = 2k+2 \Rightarrow k = \frac{n}{2} - 1$

(2) $180° - \frac{360°\times k}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$

$\Rightarrow k=1$ 只有一層 $\Rightarrow \frac{360°}{n}=180°-\frac{360°}{n} \Rightarrow n=4$

在這種情況下也可以表示成$k=\frac{n}{2}-1$。

因此，如果 n 為偶數，菱形的圈數 k 為$\frac{n}{2}-1$。

■

<u>證明種類個數</u>：

假設總共可以拼貼出 k 圈的菱形，觀察菱形的種類，第一圈的菱形會和最外圈(也就是第 k 圈)的菱形相同，鄰角數對皆為$(\frac{360°}{n},180°-\frac{360°}{n})$，其實菱形的種類會有對稱性，接下來證明第 i 圈的菱形種類 = 第 $k+1-i$ 圈的菱形種類：

第 $k+1-i$ 圈菱形的鄰角數對為$(\frac{360°\times(k+1-i)}{n},180°-\frac{360°\times(k+1-i)}{n})$，又剛剛證得菱形的圈數 k 為$\frac{n}{2}-1$，將$k=\frac{n}{2}-1$分別代入兩個鄰角度數：

$$\rightarrow \frac{360°\times(k+1-i)}{n}=\frac{360°\times\left(\frac{n}{2}-1+1-i\right)}{n}=\frac{360°\times\left(\frac{n}{2}-i\right)}{n}=\frac{180°n-360°i}{n}=180°-\frac{360°\times i}{n}$$

$$\rightarrow 180°-\frac{360°\times(k+1-i)}{n}=180°-\left(180°-\frac{360°\times i}{n}\right)=\frac{360°\times i}{n}$$

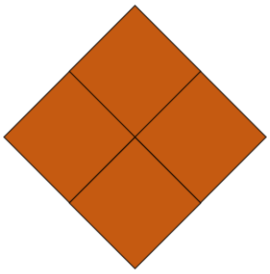
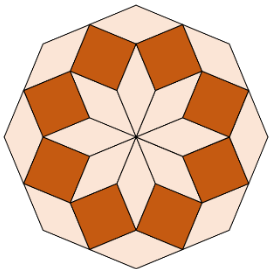
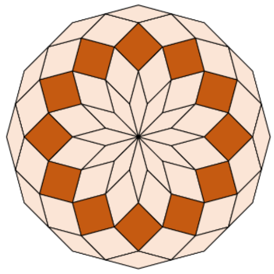
得到數對$(\frac{360°\times i}{n},180°-\frac{360°\times i}{n})$，會等於第 i 圈菱形的鄰角數對。

因此，菱形種類中，第 1 圈=第 k 圈、第 2 圈=第 k-1 圈、第 3 圈=第 k-2 圈、……，如果圈數為偶數，則菱形種類數量為$\left(\frac{n}{2}-1\right)\div 2=\frac{n}{4}-\frac{1}{2}$；如果圈數為奇數，則菱形種類數量為圈數除以 2 後取整數部分再加上 1，用取頂符號表示即為$\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$。

■

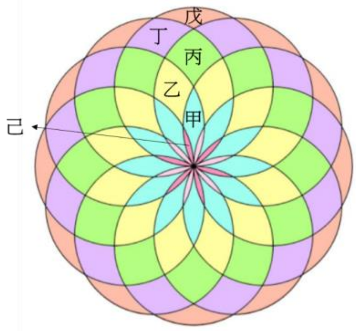
另外，我們也發現當圈數為奇數時，中間那一圈的菱形必為正方形，因為中間那一圈是第 $\frac{k+1}{2}$ 圈，菱形的鄰角數對為$(\frac{360°\times(\frac{k+1}{2})}{n},180°-\frac{360°\times(\frac{k+1}{2})}{n})$，將$k=\frac{n}{2}-1$代入可得到$\left(\frac{360°\times\frac{n}{4}}{n},180°-\frac{360°\times\frac{n}{4}}{n}\right)=(90°,90°)$，也就是正方形。如果 n=4、8、12，圈數=1、3、5 為奇數，故中間那一圈的菱形會是正方形。(如下表)

n	4	8	12
圈數	1	3	5

圖示 (深色 為正方 形)			

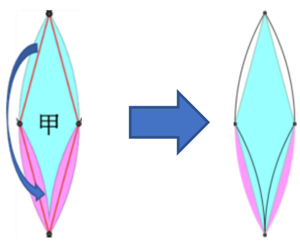
3. 計算區塊面積

12 個圓交疊後，會切出甲、乙、丙、丁、戊、己 6 種區塊圖形，每種區塊圖形有 12 塊，故總共會切出 72 塊 (如下圖)。



計算甲、乙、丙、丁、戊 5 種區塊圖形的面積，並探討其與三個元件的關係：

(1) 甲區塊面積=戊區塊面積



將甲圖的四個頂點相連成一個菱形(如上圖)，再把上方兩邊切出的弓形下移拼到底下的粉色弓形上，會變成角度為 30°與 150°的菱形。故甲區塊面積與角度為 30°與 150°的菱形面積相等，面積為$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\div 2=\frac{1}{2}$。

因為在奧徽鑲嵌背景圖中，中間與最外圈的元件相同，因此戊區塊面積會等於甲區塊面積。依此類推，其他圖形也可以用相同的方式算出來。

(2) 乙區塊面積=丁區塊面積

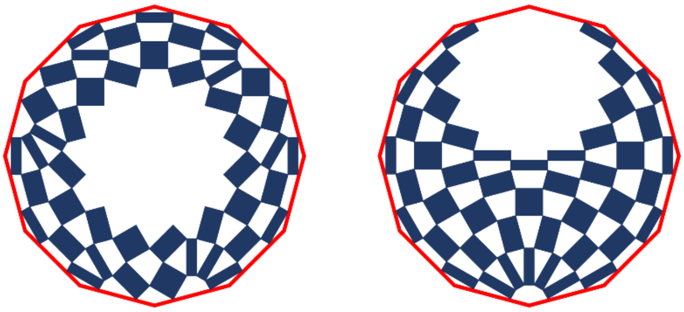
與角度為 60°與 120°的菱形面積相等，面積為$1\times\sqrt{3}\div 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(3) 丙區塊面積

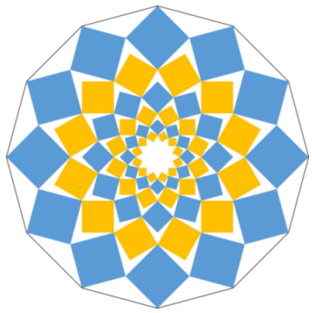
與正方形元件面積相等，面積為 1。

四、探討非平面鑲嵌之頂點相接圖

本來奧運會徽中長方形的拼貼並非平面鑲嵌，是由四邊形的頂點彼此相接而成的圖形，且拼貼於正十二邊形中。因為正方形是長方形中最特別的例子，於是接下來我們拿正方形拼接於正十二邊形中(如下方最右邊的圖)，並進一步做討論。



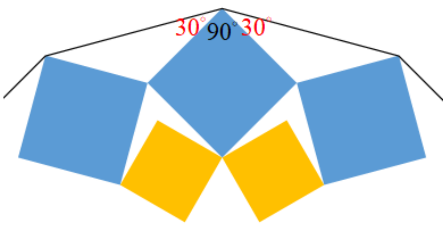
奧運會徽之頂點相接圖



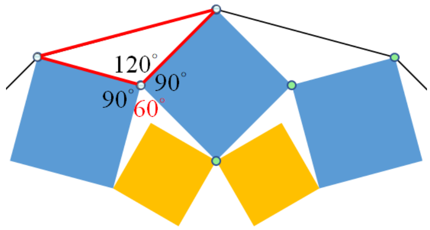
正方形拼接

(一) 討論不同大小正方形的邊長比

正十二邊形的內角為$\frac{180^\circ\times(12-2)}{12}=150^\circ$，如圖一，利用正十二邊形的內角扣掉正方形內角 90°再除以 2 可以得出圖一 90°旁的兩個角皆為 30°；如圖二，因剛剛求出的 30°得到紅線框起來的等腰三角形的頂角為 120°。一圈 360°扣掉等腰三角形的頂點 120°與兩個正方形內角 90°得到夾角 60°；

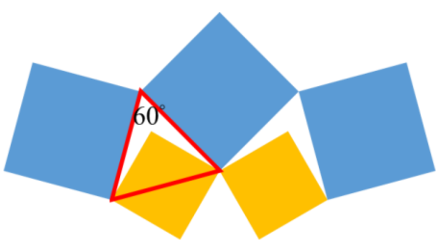


圖一

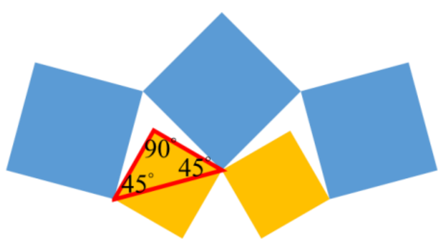


圖二

如圖三，利用圖二求出的夾角 60°和正方形四邊等長的條件得到紅框圖形為正三角形。從正三角形可以得知圖中小的正方形對角線會等於大的正方形邊長；如圖四，正方形從對角線畫下去後，會分成兩個一樣的等腰直角三角形；

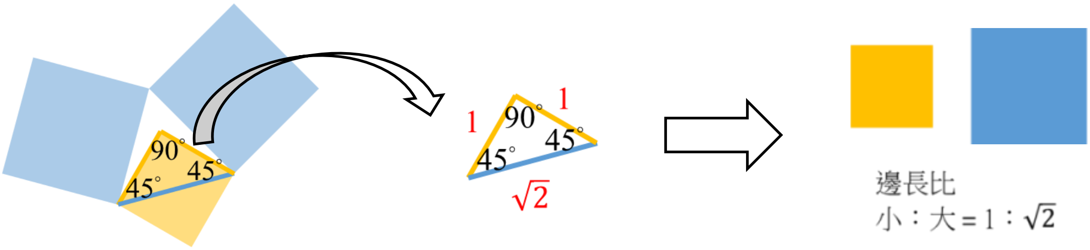


圖三



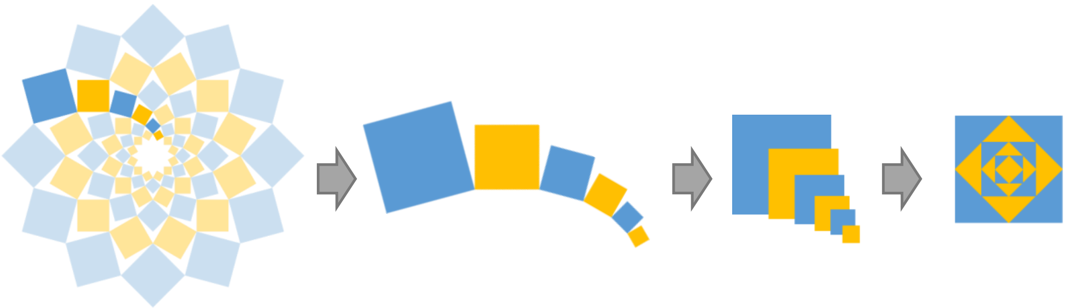
圖四

綜合圖三與圖四的討論，得出小的正方形邊長：大的正方形邊長=1：$\sqrt{2}$ (如下圖)。



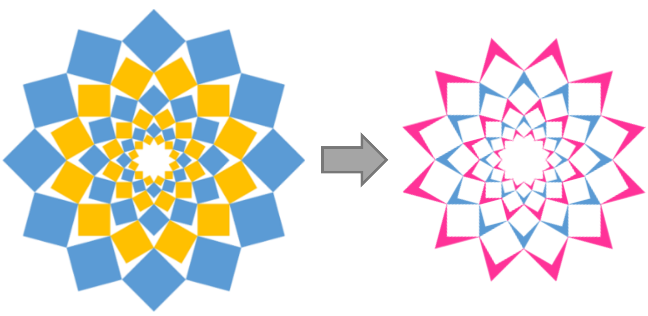
(二) 與收縮圖的關聯

正方形由小到大排列後，任選兩項中較小的邊長比上較大的邊長皆為 1:$\sqrt{2}$，所以可以把每個小正方形的內角放在大正方形邊的中點上(如下圖)。

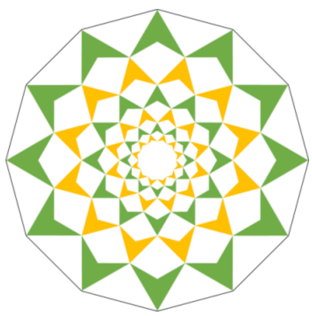


(三) 鏢形拼貼

在正方形拼接的圖形中，我們發現正方形之間的空隙為鏢形，因此也可以改用鏢形去拼接，然而鏢形也可以透過不同的方式去設計，下方舉了兩種例子：

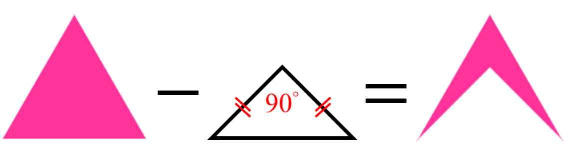


正方形之間的空隙為鏢形 → 鏢形拼接 1

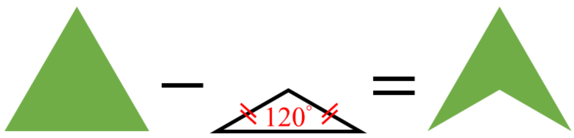


鏢形拼接 2

鏢形拼接 1 所使用的鏢形為正三角形減掉等腰直角三角形；鏢形拼接 1 所使用的鏢形為正三角形減掉三分之一的正三角形，如下圖所示。



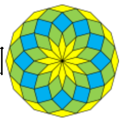
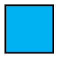
鏢形拼接 1 之鏢形製作



鏢形拼接 2 之鏢形製作

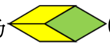
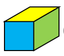
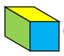
然而，如果看製作鏢形的正三角形，一樣可以得出小的正三角形邊長：大的正三角形邊長=1：$\sqrt{2}$。

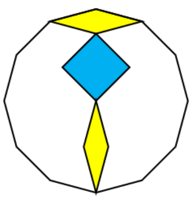
參、　研究結果與討論

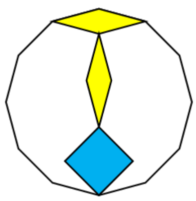
一、將奧運會徽中長方形對角線切出的四塊區域，以邊長為對稱軸做鏡射，再將部分圖形經由旋轉與平移後，得出奧徽鑲嵌背景圖，裡面有三種元件「30°與 150°的菱形」、「60°與 120°的菱形」、「正方形」，反之，奧運會徽的三個矩形也可經由這三種元件的各邊中點連線而成，利用奧徽鑲嵌背景圖中的三種元件進行平面鑲嵌，我們歸納出如果選擇單一、兩個、三個、四個角度拼成一圈，分別有 3 種、16 種、23 種、4 種組合個數，其中如果選擇兩個角度拼成一圈時，一定要選擇 30°和 60°其中一個。

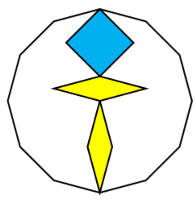
二、三種元件和正十二邊形的對角線長度及面積如下表：

名稱	元件一	元件二	元件三	正十二邊形
圖形	30°與 150°的菱形	60°與 120°的菱形	正方形	邊長為 1
對角線長度	長 $=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$、短 $=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	長 $=\sqrt{3}$、短 $=1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
面積	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$6+3\sqrt{3}$

如果拿三個元件拼貼一圈時，旋轉 180 度後會相同的圖形一共有三種，分別為(E1)、(E2)、(E3)，其中 E2 和 E3 為線鏡射圖形。且如果要拼成線對稱圖形時，我們得出【性質 1】利用三個元件拼貼成邊長為 1 的正十二邊形時，如果要使拼貼出來的圖形為線對稱圖形，則擺放在對稱軸上的元件一定是以下三種情況：


情形一


情形二


情形三

反之，如果對稱軸上的元件是以上三種情形，則圖形不一定是線對稱。

三、討論奧徽鑲嵌背景圖的結構與變化，得到以下結論：

1. 線對稱圖形，對稱軸有 24 條。嵌入角度由中心往外分別為 30°、60°、90°、120°、150°，逐漸變大，且三個元件中所有可能的角度皆出現。

2. 計算圖中不同大小正十二邊形的面積關係，可得大的面積等於小的面積的 4 倍，因此圖形可經由四個相同且邊長為原長一半的正十二邊形重疊組合，將重疊的部分經平移

重組後，補在旁邊空白的位置。且若將圖形中的小十二邊形挖空後，可重複放入。

3. 將線段變成曲線，推廣至 n 個圓交疊，討論拼貼成正 n 邊形的四邊形元件，得到：

【性質 2】如果 n 為偶數，則 n 個圓的交點與外圈點連線形成的四邊形皆為菱形。

【性質 3】如果 n 為偶數，菱形的圈數為$\frac{n}{2}-1$，菱形種類個數為$\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$，其中$\lceil x\rceil$為取頂符號，表示不小於 x 的整數中最小的一個。

四、回到奧運會徽這種非平面鑲嵌之頂點相接圖，將正方形拼接於正十二邊形中，得出小的正方形邊長：大的正方形邊長=1：$\sqrt{2}$，而圖中空隙處為鏢形，亦可設計鏢形進形拼接。

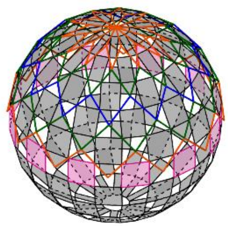
肆、　結論與應用

一、結論：

1. 利用三種元件進行平面鑲嵌，如果選擇兩個角度拼成一圈時，一定要選擇 30°和 60°其中一個。利用不同數量的三種元件拼貼成邊長為 1 的正十二邊形時，如果要使拼貼出來的圖形為線對稱圖形，則擺放在點對點的對稱軸上必為兩個元件一及一個元件三；反之，如果對稱軸上的元件如上述擺放，則圖形不一定是線對稱。
2. 奧徽鑲嵌背景圖為線對稱圖形，嵌入角度由中心往外分別為 30°、60°、90°、120°、150°，三個元件中所有可能的角度皆出現；將線段變成曲線後，推廣至 n 個圓交疊，討論拼貼成正 n 邊形的四邊形元件，如果 n 為偶數，則 n 個圓的交點與外圈點連線形成的四邊形皆為菱形；且如果 n 為偶數，菱形的圈數為$\frac{n}{2}-1$，菱形種類個數為$\left\lceil\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right\rceil$，其中$\lceil x\rceil$為取頂符號，表示不小於 x 的整數中最小的一個。
3. 回到奧運會徽這種非平面鑲嵌之頂點相接圖，將正方形拼接於正十二邊形中，得出小的正方形邊長：大的正方形邊長=1：$\sqrt{2}$。

二、未來展望與應用：

1. 利用三個元件拼貼成正十二邊形的組合有好多種，除了根據面積關係去討論整數解之外，還需要考慮角度的位置關係，這個部分可再繼續延伸，並且討論得更加完整。
2. 未來我們可以利用這些研究結果設計商標、益智遊戲或建築花紋等，甚至延伸到立體鑲嵌(如右圖)，發明積木等生活中的應用。



伍、　參考文獻

1. 吳哲仰，蔡適鴻，賴聖安（2005），平面與立體鑲嵌之研究。第 45 屆中小學科學展覽會，國中組，數學科。
2. 維基百科（2022 年 5 月 25 日），2020 年夏季奧林匹克運動會。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/2020%E5%B9%B4%E5%A4%8F%E5%AD%A3%E5%A5%A5%E6%9E%97%E5%8C%B9%E5%85%8B%E8%BF%90%E5%8A%A8%E4%BC%9A
3. 維基百科（2022 年 5 月 8 日），2020 年夏季奧林匹克運動會開幕式。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/2020%E5%B9%B4%E5%A4%8F%E5%AD%A3%E5%A5%A7%E6%9E%97%E5%8C%B9%E5%85%8B%E9%81%8B%E5%8B%95%E6%9C%83%E9%96%8B%E5%B9%95%E5%BC%8F#cite_note-18
4. 維基百科（2022 年 4 月 12 日），竈門炭治郎。檢自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%AB%88%E9%96%80%E7%82%AD%E6%B2%BB%E9%83%8E
5. 維基百科（2021 年 9 月 28 日），鑲嵌(幾何)。檢自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%91%B2%E5%B5%8C_(%E5%B9%BE%E4%BD%95)
6. 劉善群（2021 年 7 月 23 日），《東京奧運 634》：好的設計能衍生大賣的周邊，東京奧運會徽充滿了野老朝雄的風格。檢自：https://www.thenewslens.com/article/153945
7. 蕭鼎霖，陳裕達（20020），M.C-Escher 極限圖的結構解析與實務研究。第 60 屆中小學科學展覽會，國中組，生活與應用科學科(一)(機電與資訊)。
8. ABC Cooking Studio Taiwan（2018 年 9 月 24 日），ABC 日本圖騰小介紹-市松紋。檢自：https://www.facebook.com/ABCCookingStudio.tw/posts/1027119630801971/
9. Adela Cheng（2021 年 6 月 8 日），東京奧運頒獎台設計！以回收塑膠為原料體現永續環保理念。檢自：https://www.wowlavie.com/article/ae2100752
10. NeNe（2020 年 11 月 18 日），《鬼滅之刃》炭治郎、禰豆子服裝圖案別有含義！你所不知道的日本傳統和柄。檢自：https://tokyo.letsgojp.com/archives/71995/
11. 2020 東京奧運 Logo。投稿類別：藝術類。

【評語】010007

本作品以奧運會徽為研究的起點動機，經過一系列的轉化後，主要討論正十二邊形的平行四邊形鑲嵌。作品主要尋找鑲嵌中其中的對稱性質及存在性質等。問題的發想相當有新意，值得鼓勵。可惜作品的難度不高，而且主要僅限於十二邊形的討論。平面鑲嵌是一個豐富內容的領域，未來可以試圖挖掘其中的組合代數性質，使作品更豐富且有數學的深度。