2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010035**

參展科別　**數學**

作品名稱　**2、3、4 進位 Kaprekar 變換的性質**

得獎獎項

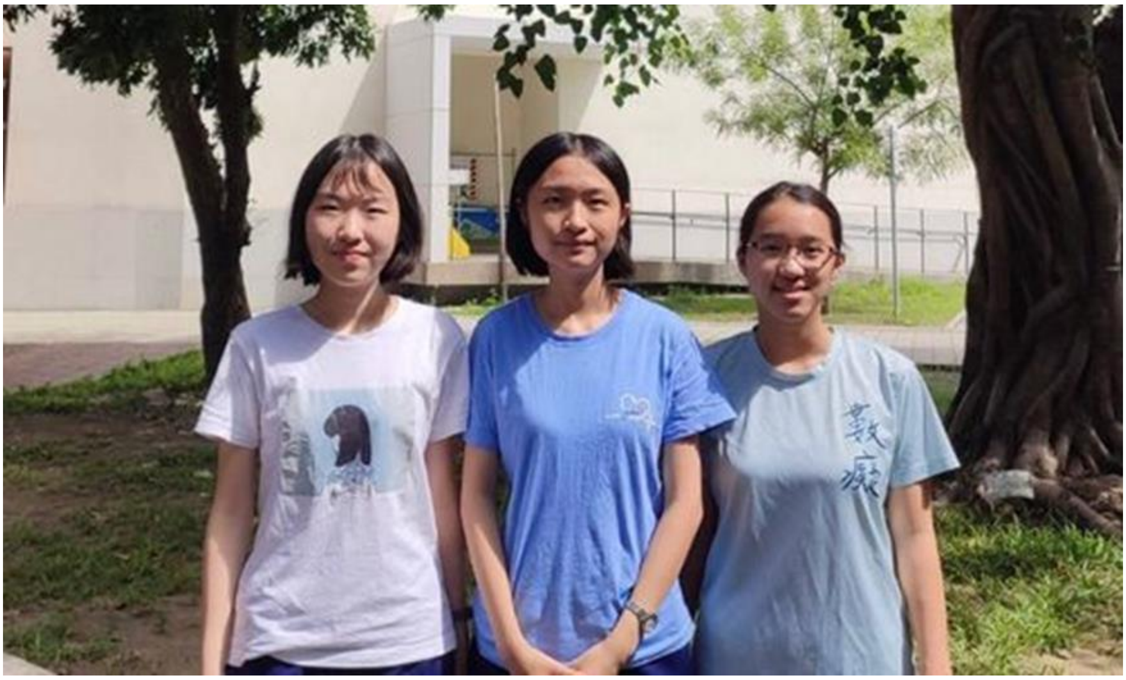
就讀學校　國立臺南女子高級中學

指導教師　洪士薰

作者姓名　鍾亞書、洪芷璿、洪旖昕

關鍵詞　**Kaprekar、三進位、混沌**

作者簡介



我是洪旖昕(左)，就讀臺南女中數理資優班。我的興趣是游泳、慢跑還有閱讀，這些休閒活動總能讓我在忙碌的生活中紓解壓力，得到前進的動力。過去的我曾認為數學就是繁雜的計算過程，直到開始科展的探究後，才了解看似凌亂的數字背後其實存在特殊的關聯性。因此很榮幸能有機會參加這次的科展，也期待能藉此一窺更多數學的奧秘！

我是洪芷瑨(中），目前就讀臺南女中數理資優班。很幸運可以和同學一起參加這次國際科展，雖然研究的過程中，也曾遇到困難，或是運算結果和預期不同，但是解決問題的渴望從未消失。希望能從這次比賽中拓展視野，並有所成長收穫。

我是鍾亞書(右)，就讀臺南女中數理資優班二年級。我喜歡探究數學問題，在享受解題的樂趣的同時也能帶給我自信與成就感。在研究過程中我得到了許多寶貴的經驗，也讓我更熱衷於數學，希望未來能更進一步探索數理世界的奧妙。

摘要

非負整數的各位數字重新排列後，由大到小減去由小到大的運算稱為 Kaprekar 運算。若原數和結果相等，則此數為 Kaprekar 常數。在此條件下，Kaprekar 變換最終定會進入循環(包含循環節為 1 的情形)。本研究探討 Kaprekar 常數與循環的結構，以及其與混沌之間的關聯。

結果如下:

(1)參考[1]和[4]中的一些數學符號，將二進位分為五類，得到二進位常數的形式和規律。

(2)在三進位時，我們利用$g(x)$來討論三進位的變換形式，得到能判斷其結構和循環節及數量的規則。

(3)$g(x)$有混沌的性徵，即在任何有理數區間中必有任意的n-循環點，其中n是任意正整數。

(4)關於四進位，我們發現將任意非負整數運算四次後必符合某一形式，且其結果與三進位有相似的結構。

Abstract

$T(z)$ is defined as the following: for n-digit integer z, arranging the numbers of all digits in descending (resp. ascending) order to obtain $T(z) := A - B$. If $T(z) = z$, then we call x a Kaprekar constant. There exist the smallest integers $d(z) \geq 0$ and $\ell(z) \geq 1$ such that after $d(z)$-times Kaprekar transformation and $d(z) + \ell(z)$-times Kaprekar transformation are equal. It is called the Kaprekar loop arising from z of cycle length $\ell(z)$ and $d(z)$ is called the Kaprekar distance from z. This study devotes to find $\ell(z)$ and $d(z)$. Under this condition, Kaprekar transformation will develop into a cycle, including the recurring period $= 1$. This study will explore not only the structure of Kaprekar constant and the cycle but the relationship between that and the chaos. In this article, we prove the following results:

(1) The form and the regular pattern of 2-adic constant.

(2)By studying behavior of function $g(x)$, we obtain $\ell(z)$, $d(z)$ for 3-adic and n-digit integer z, when z is regular. (We define x is regular in the article.)

(3)$g(x)$ is featured with the chaos, which means any n-recurring points must exist in any periods of the rational numbers. N can be any positive integers.

(4) For 4-adic integer, after taking at most 4-times Kaprekar transform, the 4-adic integer will be similar to 3-adic integer case.

壹、前言

一、研究動機

將非負整數的各位數字重新排列後，由大到小排列減去由小到大排列的運算稱為 Kaprekar 變換。像數字 213，各位數字由大而小與由小而大分別是 321 與 123，兩數相減得 198。如此計算下去 213 → 198 → 792 → 693 → 594 → 495。對於所有的非負整數，經過 Kaprekar 變換後會有兩種結果:得到 Kaprekar 常數或是進入 Kaprekar 循環。

因此，我們想要探討二、三、四進位 Kaprekar 變換的結果。例如：求出二、三進位數z經 Kaprekar 變換後的一般式、討論三進位的 Kaprekar 變換形式，並找出其性質。另外，我們也想探討四進位 Kaprekar 變換和三進位 Kaprekar 變換之間的關聯性。

二、研究目的

（一）探討二進位數z，經 Kaprekar 運算後的結果，並依z的分類求出其一般式。

（二）探討二進位數z，在分類情況下的長度$d(z)$、$K(z)$、循環長度$\ell(z)$。

（三）對三進位正規數分類, 並在各類情形下探討它們分別經 Kaprekar 運算後的結果及求出其一般式。

（四）探討$g(x)$函數的軌跡及性質並找出其與三進位數在 Kaprekar 變換仍為正規數的充要件。針對這些三進位數z，求出$d(z)$、$K(z)$、(z)。

（五）探討四進位數情經 Kaprekar 變換後的規律。並找出其與三進位數在 Kaprekar 變換下的結構之關係。

貳、定義與數學符號

對於正整數 B 及n，非負整數z可以表示成B進位數，即$z = a_1 \times B^{n-1} + a_2 \times B^{n-2} + \cdots + a_n$，其中$a_i$是小於 B 的非負整數，且$1 \le i \le n$。為了表示的方便，又將上式記為 $z = (a_1 a_2 \cdots a_n)_B$。

定義 0-1：集合 $Z(B,n) = \{z | z = (a_1 a_2 \ldots a_n)_B, 0 \le a_i \le B-1, 1 \le i \le n\}$。

$\overline{z}=(c_1c_2\cdots c_n)_B$，數字$c_1,c_2,\cdots,c_n$是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$的重新排列，且$c_1\geq c_2\geq\cdots\geq c_n$，$\underline{z}=(c_nc_{n-1}\cdots c_1)_B$

定義 0-2：集合 $\overline{Z}(B,n)=\{\overline{z}|z\in Z(B,n)\}$。

定義 0-3：

（1）$T_{(B,n)}(z)=\overline{z}-\underline{z}$，稱為 Kaprekar 變換。

$$T^k_{(B,n)}(z)=T_{(B,n)}(T^{k-1}_{(B,n)}(z))=\overbrace{(T_{(B,n)}\circ T_{(B,n)}\circ\cdots\circ T_{(B,n)})}^{k}(z)\text{，}k>1\text{。}$$

（2）若$T_{(B,n)}(z)=z$，則稱z為 Kaprekar 常數。

（3）若$z\in Z(B,n)$，非負整數d和正整數ℓ使得

$$x\to T_{(B,n)}(z)\to T^2_{(B,n)}(z)\to\cdots\to T^d_{(B,n)}(z)\to\cdots\to T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)\text{，}$$

當$T^d_{(B,n)}(z)=T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)$，則稱為 Kaprekar 循環。

（4）集合$\{T^k_{(B,n)}(z)\}_{k\in N}$ 稱為z的 Kaprekar 軌跡。

例如：（1）$T_{(10,3)}(123)=321-123=198$，$T^2_{(10,3)}(123)=T_{(10,3)}(198)=792$

（2）$T_{(10,4)}(6174)=7641-1467=6174$

（3）$81\to 63\to 27\to 45\to 09\to 81$，$T_{(10,2)}(81)=T^{1+5}_{(10,2)}(81)=63$

因為$Z(B,n)$只有有限個元素，所以任何$z\in Z(B,n)$必滿足上面（2）、（3）情形之一。
為了更進一步探討 Kaprekar 變換之結構，我們關心下面兩個問題：

（a）哪些數是 Kaprekar 常數，哪些不是？

（b）若z不是 Kaprekar 常數，則使得$T^d_{(B,n)}(z)$是 Kaprekar 循環數的最小非負整數d為何？此時的循環長度是什麼？

因此我們定義：

定義 0-4：

$d(z):=min\{d\geq 0\ |\text{存在}\ell>1\text{使得}T^d_{(B,n)}(z)=T^{d+\ell}_{(B,n)}(z)\}$

$K(z):=T^{d(z)}_{(B,n)}(z)$

$\ell(z):=min\{\ell\geq 1\ |\ T^{\ell}_{(B,n)}(K(z))=K(z)\}$

參、研究過程

一、我們考慮以下情形：

（1）若$\ell(z)=1$，$T_{(B,n)}(K(z))=K(z)$，則$K(z)$為 Kaprekar 常數。

（2）若$z=(aa\cdots a)_B$，$0\le a\le B-1$，$T_{(B,n)}(z)=0$且$d(z)=1$，$K(z)=0$，$\ell(z)=1$，為無聊情形。

（3）定義$N(B,n)$為$Z(B,n)$中所有非無聊情形下出現的 Kaprekar 循環的數量（含$\ell(z)=1$的情 形）；定義$\ell(B,n)=(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_{N(B,n)})$，其中$\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_{N(B,n)}$表示所有非無聊情形的循環長$\ell(z)$。

（4）若$\ell(z)=1$且$N(B,n)=1$時稱此時的$K(z)$為嚴格的 Kaprekar 常數，且此時的(B,n)是嚴格的數對。（註：此處定義我們參考延用[4]中的定義方式。）

例如：（1）$6174\to 6174$，$d(6174)=0$，$K(6174)=6174$，$\ell(6174)=1$。

（2）$222\to 0\to 0$，$d(222)=1$，$K(222)=0$，$\ell(222)=1$。

（3）若$B=4$，$n=4$，則參考[4]中的資料有

$(3021)_4\to(3021)_4$，

$d((3021)_4)=1$，$K((3021)_4)=(3021)_4$，$\ell((3021)_4)=1$。

$(1332)_4\to(2022)_4\to(1332)_4$，

$d((1332)_4)=0$，$K((1332)_4)=(1332)_4$，$\ell((1332)_4)=2$。

兩個循環，且$\ell(z)$分別為 1 和 2

則$N(4,4)=2$，$\ell(4,4)=(1,2)$

（4）若$B=10$，$n=3$，則參考[4]中的資料有

$495\to 495$，$d(495)=0$，$K(495)=495$，$\ell(495)=1$。

一個循環，且$\ell(z)$為 1，

則$N(10,3)=1$，$\ell(10,3)=1$，$(10,3)$為嚴格的數對。

定義：若$z=(a_1a_2\cdots a_n)_B$，對任一$j\in\{0,\ldots,B-1\}$都有$a_i=j$，$1\le i\le n$，稱z為正規數，否則為非正規數。即z表示成B進位數時數字$0,\cdots,B-1$都會出現。

若不存在任意正整數m使$T^m_{(b,n)}(z)$為非正規數，則稱z為嚴格正規數。

二、本節我們定義名詞及介紹一些後面使用的的 Kaprekar 變換性質。

定義 2-1：

（1）$Z_B = \{[t_1, \dots, t_B] \mid t_i$為非負整數，$1 \le i \le B\}$

$Z_B^+ = \{[t_1, \dots t_B] \mid t_i > 0, 1 \le i \le B\}$

（Z_B^+是Z_B的子集，其中$t_i > 0$，$1 \le i \le B$）

（2）投影$P_B: Z(B,n) \longrightarrow Z_B$，$z = (a_1 a_2 \dots a_n)_B \in Z(B,n)$

$P_B(z) = [n_1, \dots, n_B]$，其中$n_i$是$a_1, \dots, a_n$中值為$B - i$的個數。

例如：$z_1 = (1739412)_{10}$，$z_2 = (12011)_3$

$P_{10}(z_1) = [1,0,1,0,0,1,1,1,2,0]$

$P_3(z_2) = [1,3,1]$

性質 2-1：

（1）$P_B: \overline{Z}(B,n) \longrightarrow Z_B$為一對一映成。

（2）$z \in Z(B,n)$，z是正規數的充要條件為$P_B(z) \in Z_B^+$。

例如：$z = (12011)_3$則$P_3(z) = [1,3,1]$，z是正規數。

定義 2-2：

（1）$\overline{T}_{(B,n)}(z) = \overline{T_{(B,n)}(z)}$。

（2）$\overline{T}^k_{(B,n)}(z) = \overline{T}_{(B,n)}(\overline{T}^{k-1}_{(B,n)}(z))$，$k > 1$，

顯然$\overline{T}^k_{(B,n)}(z) = \overline{T^k_{(B,n)}(z)} = \overline{T^k_{(B,n)}(\overline{z})}$，$k > 1$。

性質 2-2：

（1）$z \in Z(B,n)$則$T^k_{(B,n)}(z) = T^k_{(B,n)}(\overline{z})$，$k > 0$。

（2）$\overline{T}^k_{(B,n)}(z) = \overline{T}^k_{(B,n)}(\overline{z})$

（3）若$1 \le k_1 < k_2$，$T^{k_1}_{(B,n)}(z) = T^{k_2}_{(B,n)}(z)$則$\overline{T}^{k_1}_{(B,n)}(z) = \overline{T}^{k_2}_{(B,n)}(z)$，反之亦然。

證明：（1）、（2）是明顯的，（3）是因為

$$\begin{cases} T^{k-1}_{(B,n)}(\overline{T}_{(B,n)}(z)) = T^{k-1}_{(B,n)}(T_{(B,n)}(z)) & k > 1 \\ T_{(B,n)}(\overline{T}^{\ell}_{(B,n)}(z)) = T_{(B,n)}(T^{\ell}_{(B,n)}(z)) & \ell \ge 0 \end{cases}$$

故（3）成立。

例如：$T^2_{(3,4)}((2021)_3) = T^2_{(3,4)}((2210)_3) = (1221)_3$

$\overline{T}^2_{(3,4)}((2021)_3) = \overline{T^2_{(3,4)}((2021)_3)} = (2211)_3$

$T^2_{(3,4)}((1221)_3) = ((2021)_3) = T^4_{(3,4)}((2021)_3)$

$\Leftrightarrow \overline{T}^2_{(3,4)}((2021)_3) = (2211)_3 = \overline{T}^4_{(3,4)}((2021)_3)$

三、本節我們討論 2 進位的 Kaprekar 變換的情形並得到[4]相同的結果，當然[4]中也討論了一些 2 進位以外的內容，但方法上我們與[4]是完全不同的。

當$B = 2$，$z \in Z(2,n)$是正規數。

$\overline{z} = (\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{b})_2$，$P_2(z) = [a,b]$

其中$n = a + b$，a,b為正整數且$1 \leq a,b \leq n$。

對於所有的$a \geq \frac{n}{2}$，可分成（1）、（2）、（3）三種情形。

（1）若$a > b$且$b > 1$，則$T_{(2,n)}(z) = T_{(2,n)}(\overline{z}) = (\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{1\cdots1}_{a-b}\underbrace{0\cdots0}_{b-1}1)_2$

（2）若$a > b$且$b = 1$，則$T_{(2,n)}(z) = T_{(2,n)}(\overline{z}) = (0\underbrace{1\cdots1}_{a})_2$

（3）若$a = b = \frac{n}{2}$（n為偶數），則$T_{(2,n)}(z) = T_{(2,n)}(\overline{z}) = (\underbrace{1\cdots1}_{a-1}\underbrace{0\cdots0}_{a}1)_2$

（1）、（2）、（3）皆滿足$\overline{T}_{(2,n)}(\overline{z}) = \overline{z} = (\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{b})$

對於所有的$a < \frac{n}{2}$，可分成（4）、（5）兩種情形。

（4）若$a < b$且$a > 1$，則$T_{(2,n)}(z) = T_{(2,n)}(\overline{z}) = (\underbrace{1\cdots1}_{a-1}0\underbrace{1\cdots1}_{b-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2$

（5）若$a < b$且$a = 1$，則$T_{(2,n)}(z) = T_{(2,n)}(\overline{z}) = (0\underbrace{1\cdots1}_{b})_2$

（4）、（5）皆符合$\overline{T}_{(2,n)}(\overline{z}) = (\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{a})$，且將（4）、（5）運算後

$z \to T_{(2,n)}(z) \to T^2_{(2,n)}(z)$符合$\overline{T}_{(2,n)}(z) = \overline{T^2}_{(2,n)}(z) = \overline{T^3}_{(2,n)}(z) = \cdots$

引理 3-1

當$z \in Z(2,n)$，$\overline{z} = (\underbrace{1\cdots1}_{a}\underbrace{0\cdots0}_{b})_2 = (2^{a}-1)2^{b}$是正規數

（1）若$b > 1$，$a > b$，則$T_{(2,n)}(z) = (\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{1\cdots1}_{a-b}\underbrace{0\cdots0}_{b-1}1)_2 = (2^{a}-1)(2^{n-a}-1)$

（2）若$a = n-1$，$n > 2$，則$T_{(2,n)}(z) = (0\underbrace{1\cdots1}_{a})_2 = 2^{n-1}-1$

（3）若$a = \frac{n}{2}$，n為偶數，則$T_{(2,n)}(z) = (\underbrace{1\cdots1}_{a-1}\underbrace{0\cdots0}_{a}1)_2 = (2^{a}-1)(2^{a}-1)$

（4）若$a < \frac{n}{2}$，$a > 1$，則$T_{(2,n)}(z) = (\underbrace{1\cdots1}_{a-1}0\underbrace{1\cdots1}_{b-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_2 = (2^{n-a}-1)(2^{a}-1)$

（5）若$a = 1$，$a < \frac{n}{2}$，則$T_{(2,n)}(z) = (0\underbrace{1\cdots1}_{b})_2 = 2^{n-1}-1$

定理 3-1：當$z \in Z(2,n)$，$\overline{z} = (2^{a}-1)2^{b}$，$a, b$是正整數，$a+b=n$，則

$$d(z) = 1,\ \ell(z) = 1,\ \mathrm{K}(z) = \mathrm{T}_{(2,n)}(z) = \begin{cases} (\underbrace{1\ldots1}_{b-1}0\underbrace{1\ldots1}_{a-b}\underbrace{0\ldots0}_{b-1}1)_2 & a > b \\ (\underbrace{1\ldots1}_{a-1}0\underbrace{1\ldots1}_{b-a}\underbrace{0\ldots0}_{a-1}1)_2 & b > a \\ (\underbrace{1\ldots1}_{a-1}\underbrace{0\ldots0}_{a}1)_2 & a = b = \frac{n}{2} \\ (0\underbrace{1\ldots1}_{n-1})_2 & a = 1\ or\ b = 1 \end{cases} \quad \square$$

我們列舉一些例子如下表：

位數	$\overline{z}$	$d(\overline{z})$	$\ell(\overline{z})$	$K(\overline{z})$
2	$(10)_2$	1	1	$(01)_2$
3	$(111)_2$	1	1	$(000)_2$
	$(110)_2$	1	1	$(011)_2$
	$(100)_2$	1	1	$(011)_2$
4	$(1111)_2$	1	1	$(0000)_2$
	$(1110)_2$	1	1	$(0111)_2$
	$(1100)_2$	1	1	$(1001)_2$
	$(1000)_2$	1	1	$(0111)_2$
5	$(11111)_2$	1	1	$(00000)_2$
	$(11110)_2$	1	1	$(01111)_2$
	$(11100)_2$	1	1	$(10101)_2$
	$(11000)_2$	1	1	$(10101)_2$
	$(10000)_2$	1	1	$(01111)_2$
6	$(111111)_2$	1	1	$(000000)_2$
	$(111110)_2$	1	1	$(011111)_2$
	$(111100)_2$	1	1	$(101101)_2$
	$(111000)_2$	1	1	$(110001)_2$
	$(110000)_2$	1	1	$(101101)_2$
	$(100000)_2$	1	1	$(011111)_2$

四、本節我們定義名詞及介紹一些後面使用的 3 進位的 Kaprekar 變換性質。

考慮 3 進位的 Kaprekar 變換。當$B = 3$，且 $z \in Z(3, n)$是正規數時，

$\bar{z} = (\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c})_3$，$P_3(z) = [a,b,c]$，其中$a,b,c$為正整數且$n = a+b+c$。

經由直接計算，可得以下性質：

引理 4-1

當$z \in Z(3,n)$，$\bar{z} = (\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c})_3$是正規數。

（1）若$a \geq b+c$，則$T_{(3,n)}(z) = (\underbrace{2\cdots2}_{c}\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{2\cdots2}_{a-b-c}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

（2）若$c < a < b+c$，則$T_{(3,n)}(z) = (\underbrace{2\cdots2}_{c}\underbrace{1\cdots1}_{a-c-1}0\underbrace{2\cdots2}_{c+b-a}\underbrace{1\cdots1}_{a-c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

（3）若$c = a$，則$T_{(3,n)}(z) = (\underbrace{2\cdots2}_{c-1}1\underbrace{2\cdots2}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_3$

（4）若$a < c < a+b$，則$T_{(3,n)}(z) = (\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{c-a-1}0\underbrace{2\cdots2}_{a+b-c}\underbrace{1\cdots1}_{c-a}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_3$

（5）若$c \geq a+b$，則$T_{(3,n)}(z) = (\underbrace{2\cdots2}_{a}\underbrace{1\cdots1}_{b-1}0\underbrace{2\cdots2}_{c-b-a}\underbrace{1\cdots1}_{b}\underbrace{0\cdots0}_{a-1}1)_3$

定義 4-1：$F_3: Z_3^+ \to Z_3$（Z_3^+, Z_3的定義如定義 2-1）

$$F_3[a,b,c] = \begin{cases} [a-b, 2b, c] & a \geq b+c \\ [b+2c-a, 2(a-c), c] & c < a < b+c \\ [a+b-c, 2(c-a), a] & a = c \\ [b+2a-c, 2(c-a), a] & a < c < a+b \\ [c-b, 2b, a] & a+b \leq c \end{cases}$$

為了符號上的簡便，在不易混淆的情形下$T_{(3,n)}, F_3, P_3$我們都以T, F, P代替。

事實上，3 進位的 Kaprekar 數z 在 Kaprekar 變換下的行為與$P(z)$在F下的行為幾乎是相同的，對此我們有以下引理：

引理 4-2

$z \in Z(B,n)$且z是正規數。

（1）$P(T(z)) = F(P(z))$。

（2）$F^i(P(z)) \in Z_3^+$，$1 \leq i \leq k-1$則$T^i(z)$是正規數，此時$P(T^k(z)) = F^k(P(z))$。

（3）若$F^i(P(z)) \in Z_3^+$，$1 \leq i \leq k-1$，則 $\overline{T}_{\square}^{k_1}(z) = \overline{T}^{k_2}(z)$ 與 $F_{\square}^{k_1}(P_{\square}(z)) = F_{\square}^{k_2}(T(z))$ 互為充要條件。

$T(z)$與$F[a,b,c]$的關係：

$$z \to T(z) \to \cdots \to T^d(z) \to \cdots \to T^{d+\ell}(z),$$

對應

$$P(z) \to F(P(z)) \to \cdots \to F^d(z) \to \cdots \to F^{d+\ell}(P(z)),$$

其中$d, \ell, K(z)$如前面定義，顯然若T循環($T^d(z) = T^{d+\ell}(z)$)，F也會循環($F^d(z) = F^{d+\ell}(P(z))$)。反過來是否$F$循環，$T$也會有相同的循環呢？答案是肯定的。這是因為若$w \in Z_3^+$則必存在唯一正規數$z \in \overline{Z}(3,n)$使得$P_3(z) = w$，且$T_{3,n}^k(z) = F_3^k(w)$，對所有正整數$k$成立。所以我們有以下結果。

引理 4-3

若$w \in Z_3^+$，則有 $z \in \overline{Z}(3,n)$，使得 $P_3(z) = w$，令

$d_F = min\{d > 0 | 存在\ell > 1使得F^{d_F}(w) = F^{d_F+\ell}(w)\}$

$K_F = F^{d_F}(w)$

$\ell_F = min\{i \geq 1 \mid F^{d_F+i}(w)\} = F^{d_F}(w)\}$

若$d(z) = d_F$，$P_3(K(z)) = F^{d_F}(w)$，$\ell(z) = \ell_F$。

引理 4-4

若$[a,b,c] \in Z_3^+$，$a+b+c = n$且$F[a,b,c] = [a', b', c']$，則有

（1）$a' + b' + c' = n$ 且 $a' > c'$。

（2）若 $a \neq c$ 則 $a', b', c' > 0$。

（3）$F[a,b,c] = F[c,b,a]$。

五、這一節我們討論 3 進位的 Kaprekar 變換的情形，最後的結果有兩個部份：一個是得到 3 進位 Kaprekar 常數的形式、正規的 3 進位 Kaprekar 數 x 的$d(z), K(z), l(z)$的形式。另一個是我們引進了定義在正有理數上的函數 $g(x)$，利用此函數可以計算 3 進位的 Kaprekar 變換，並且在不能使用連續性及中間質性質的情形下，我們也得到了函數 $g(x)$

的一些結果。

定義 5-1：

（1）若x為正有理數，定義$g(x)$如下，

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \frac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases}。$$

（2）若x為實數，定義$\overline{g}(x)$ 如下，

$$\overline{g}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x\geq 1\\ \frac{1-x}{2x} & 0<x<1\end{cases},$$

我們也稱$\overline{g}$是函數 g 的延拓。

（3）$\varphi(x)=\frac{\frac{1}{x}-1}{2}$，$\phi(x)=\frac{x-1}{2}$

引理 5-1：若$[a',b',c']=F[a,b,c]$，$a\neq c$，$a,b,c\in N$

（1）若$\frac{|a-c|}{b}\neq 1$則$a'>c^{'}$

（2）$\frac{a'-c'}{b'}=g(\frac{|a-c|}{b})$

（3）$a'=\frac{g(\frac{|a-c|}{b})}{1+g(\frac{|a-c|}{b})}(|a-c|+b)$，$b'=\frac{1}{1+g(\frac{|a-c|}{b})}(|a-c|+b)$，$c'=min\{a,c\}$

証明：（1）直接由$F[a,b,c]$的定義可得。

（2）令$x=\frac{|a-c|}{b},x^{'}=\frac{a'-c'}{b^{'}}$。

將分成（1）$x>1$及（2）$x<1$討論。

若$x>1$即$a-c>b$，由 F 的定義知

$$x^{'}=\frac{a'-c'}{b^{'}}=\frac{a-b-c}{2b}=\frac{a-c-b}{2b}=\frac{\frac{a-c}{b}-1}{2}=\frac{x-1}{2}=g(x)$$

若$x<1$即$a<b+c$，同樣由 F 的定義知

$$x^{'}=\frac{a'-c'}{b^{'}}=\frac{b+2c-a-c}{2(a-c)}=\frac{b-(a-c)}{2(a-c)}=\frac{\frac{b}{a-c}-1}{2}=\frac{\frac{1}{x}-1}{2}=g(x)$$

（3）因$a\neq c$ 故必為 $a>c$ 或 $a<c$，由引理 4-4(3)知，$a>c$時與$a<c$結果一致。

故僅需要考慮的 $a>c$ 情形。由 F 的定義，$c'=c$，再由

$a+b+c=a'+b'+c'$，得$a-c+b=a'-c'+b'$，

令$x=\frac{|a-c|}{b},x^{'}=\frac{a^{'}-c'}{b^{'}}$，則 $(a^{'}-c'):b'=x^{'}:1$

因此$(a'-c')=\frac{x'}{1+x'}(a-c+b)$，$b'=\frac{1}{1+x'}(a-c+b)$，得証。

註：$x=\frac{|a-c|}{b}\neq 1$，則 $g(x)\neq 0$ ，故 $a'>c'$，因此$[a',b',c']\in Z_3^+$。

由引理 5-1 知，由$g(x)$的行為可刻畫 $F[a,b,c]$的行為，再由引理 4-3 即可由$g(x)$求得 $d(z)$、$K(z)$及$\ell(z)$的值。

定義 5-2：

（1） $\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_{2n-1}=2\alpha_{2n}+1$，$\alpha_{2n}=2\alpha_{2n-1}-1$，$n\geq 1$。

（2）$\beta_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}},k\geq 1$。

（3） 區間列$\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$，定義如下

$$J_1=(0,1/3),J_2=(\beta_3,1),\cdots,J_{2m-1}=(\beta_{2m-2},\beta_{2m}),J_{2m}=(\beta_{2m+1},\beta_{2m-1}),m>1$$

根據定義 5-2（1）計算可得 $\alpha_{2n-1}=2^{2n-1}-2^{2n-3}-\cdots-2-1$，$k>1$以及 $\alpha_{2n}=2^{2n}-2^{2n-2}-\cdots-2^2-1$，實際計算便可得

$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=3$，$\alpha_4=5$，$\alpha_5=11$，$\alpha_6=21$，$\cdots$

因此 $\beta_1=1$，$\beta_2=\frac{1}{3}$，$\beta_3=\frac{3}{5}$，$\beta_4=\frac{5}{11}$，$\cdots$

$J_1=(0,\frac{1}{3})$，$J_2=(\frac{3}{5},1)$，$J_3=(\frac{1}{3},\frac{5}{11})$，$\cdots$

$I_1=(1,3)$，$I_1=(3,7)$，$I_1=(7,15)$，$\cdots$

引理 5-2：

（1）若x是不為 1 的正實數，則$\overline{g}(x)=\overline{g}(\frac{1}{x})$

（2）$\overline{g}(\beta_{i+1})=\beta_i$ ，$i=1,2,\cdots$，$\overline{g}(\beta_1)=0$

（3）$\overline{g}(2^{k+1}-1)=2^k-1$，$k$為非負整數

（4）$\overline{g}:I_{k+1}\to I_k$，為一對一映成

（5）$\overline{g}:J_{k+1}\to J_k$，為一對一映成。

若z是正規數且$P(z)=[a,b,c]$，則由引理 5-2，函數 g(x)的映射

$\cdots\to 2^k-1\to(2^{k-1}-1)\to\cdots\to 3\to 1\to 0$，

$\cdots\to\beta_k\to\beta_{k-1}\cdots\to\beta_1=\frac{1}{3}\to 1\to 0$，因此可得

定義 5-3：

集合$\{g^k(x)\}_{k\in N}$ 稱為 x 的 g-軌跡

引理 5-3：

z 是正規數且$P(z) = [a, b, c]$

（1）若$\frac{|a-c|}{b} \neq 1$則$T(z)$是正規數。

（2）若$\frac{|a-c|}{b}$ 屬於$\{2^k - 1 \mid k \geq 1\} \cup \{\beta_k \mid k \in N\}$，則必有正整數 m，使得$T^m(z)$ 不為嚴格正規 數。

定義 5-4：x為正有理數，則

$d_g(x) := min\{d \geq 0 \mid$存在$l > 1$使得$g^d(x) = g^{d+\ell}(x)\}$

$K_g(x) := g^{d(x)}(x)$

$\ell_g(x) := min\{l \geq 1 \mid g^{\ell}(K_g(x)) = K_g(x)\}$，$x$是正有理數且若 $\ell(x) = k$，即稱x是$g(x)$的 k-循

環點(數)。若$d_g(x) = 0$，則x是$g(x)$的 k-週期點(數)。

引理 5-4：

若正實數 x 是$\overline{g}$的 k 週期點，$k > 1$，(即 $\overline{g}^k(x) = x$)的充要條件為$\{x, \overline{g}(x), \cdots, \overline{g}^{k-1}(x)\} \cap (0,1)\{x, \overline{g}(x), \cdots, \overline{g}^{k-1}(x)\} \cap (1, \infty)$皆不是空集合。

進一步考慮$g(x)$如下：

$$g(\frac{p}{q}) = \{ \begin{array}{lll} p > q & \frac{p-q}{2q} (= \frac{p_1}{q_1})\{ & \begin{array}{l} p_1 \equiv 2p \quad mod(p+q) \\ q_1 \equiv 2q \quad mod(p+q) \end{array} \\ p < q & \frac{q-p}{2p} (= \frac{p_1}{q_1})\{ & \begin{array}{l} p_1 \equiv -2p \quad mod(p+q) \\ q_1 \equiv -2q \quad mod(p+q) \end{array} \end{array}$$

因此我們有以下結果。

引理 5-5：

p, q是互質的正整數，若$\frac{p_1}{q_1} = g(\frac{p}{q})$，則

（1）$(p_1 + q_1)$ 整除 $(p + q)$

（2）$p_1 \equiv 2p\ mod(p+q)$，$q_1 \equiv 2q\ mod(p+q)$

或者 $p_1 \equiv -2p\ mod(p+q)$，$q_1 \equiv -2q\ mod(p+q)$

定義 5-5：若$p+q=2^sP$，P 為奇數，s 為非負整數

（1） $or2^{+}(P)=min\{r為正整數|\ 2^r\equiv 1\ modP\}$

（2） $or2^{-}(P)=min\{r為正整數|\ 2^r\equiv -1\ modP\}$

（3） $or2(P)=min\{or2^{-}(P),or2^{+}(P)\}$

定理 5-1：

$x=\frac{p}{q}$，p,q**是互質的正整數，若**$p+q=2^sP$，P**為奇數，s 為非負整數，則**$d_g(x)=s$ **且** $\ell_g(x)=or2(P)$。

證明：証明過程中我們會用到下列事實：

（1） a,b,c,d **是正整數，**$a+b=c+d$**，** $a\equiv cmod(a+b)$ **且** $b\equiv dmod(a+b)$**，則**$a=c,b=d$。

（2） **令** $\frac{p_k}{q_k}=g^k(\frac{p}{q}),k\geq 1$**，因為**$(p_k+q_k)$ **整除**$(p+q)$**為了方便我們選取** $(p_k+q_k)=(p+q),k\geq 1$ 。

由引理 5-5，（1） $p_k\equiv 2^k p\ mod(p+q)$，$q_k\equiv 2^k q\ mod(p+q)$

或者（2） $p_k\equiv -2^k p\ mod(p+q)$，$q_k\equiv -2^k q\ mod(p+q)$。

若（1）成立 $p_s\equiv 2^s p\ mod(p+q)$，$q_s\equiv 2^s q\ mod(p+q)$，$r$ **為正整數，** $2^r\equiv 1\ modP$**，則**$p_{s+r}\equiv 2^{s+r}p\ \ mod(p+q)$，$q_{s+r}\equiv 2^{r+s}q\ mod(p+q)$ **或** $p_{s+r}\equiv -2^{s+r}p\ \ mod(p+q)$，$q_{s+r}\equiv -2^{r+s}q\ mod(p+q)$

前者可得 $p_{s+r}\equiv 2^s p\equiv p_s\ \ mod(p+q)$，$q_{s+r}\equiv 2^s q\equiv q_s\ \ mod(p+q)$；**後者可得**$p_{s+r}\equiv -2^s p\equiv -p_s\ \ mod(p+q)$，$q_{s+r}\equiv -2^s q\equiv -q_s\ \ mod(p+q)$。

因為 $(p_k+q_k)=(p+q),k\geq 1$**，因此，**$\frac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\frac{p_s}{q_s}$。

類似地若(1) 成立，且 r **為正整數**$2^r\equiv -1\ modP$**，一樣會得到** $\frac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\frac{p_s}{q_s}$。

若(2)成立，與(1)類似的推論可得 $\frac{p_{s+r}}{q_{s+r}}=\frac{p_s}{q_s}$。

本文的後面我們將進一步推出，對哪些數z，對所有正整數 m，使得$T^m(z)$ 皆為正規數。哪些數z，存在正整數 m，使得$T^m(z)$ 不為正規數。

引理 5-6：

（1） $\overline{g}^k(x)$**必為** $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ **的形式，其中**A,B,C,D**為整數。**

（2） $\overline{g}^k(-1)=-1$

證明：（1）因為(a) 當$0 < x < 1$時，$\overline{g}(x) = \varphi(x)$，(b) 當$x > 1$時，$\overline{g}(x) = \phi(x)$。

直接計算可知 $\varphi^k(x), \phi^l(x)$與 $\varphi^k(x)(\phi^l(x))$ 和 $\phi^l(x)(\varphi^k(x))$皆為$\frac{Ax+B}{Cx+D}$ 的形式，

由數學歸納法可推得：$\overline{g}^k(x)$必為 $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ 的形式。

（2）因 $\varphi(-1) = \phi(-1) = -1$，由數學歸納法可推得 。

定理 5-2：

x是正實數，且 x 是$\overline{g}$的週期點，則x是正有理數。

證明：由引理 5-2，不妨令 $\overline{g}^k(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$，其中$A, B, C, D$為整數。

若$x > 0$是$\overline{g}$ 的 k-週期點，$\overline{g}^k(x) = x$ 的解即為$Cx^2 + (D-A)x - B = 0$的解。

又-1是$Cx^2 + (D-A)x - B = 0$之一根，因此$\overline{g}^k(x) = x$ 的解必為有理數。

接下來我們介紹如何利用$g(x)$的性質，將 n 週期點，構造出更多 n-循環點。

若x為正有理數，將$g(x)$分成$x > 1$與$0 < x < 1$情形討論並令

$\varphi(x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{2}$，$\phi(x) = \frac{x-1}{2}$

則$x > 1$時$g(x) = \phi(x)$

$0 < x < 1$時$g(x) = \varphi(x)$

$\varphi: (2^{k+1}-1, 2^k-1) \to (2^k-1, 2^{k-1}-1) \to \cdots \to (1,0)$

$\phi: J_{k+1} \to J_k \to \cdots \to (\beta_3, 1) \to (0, \frac{1}{3})$

若任意正有理數子集合$S \subseteq (0, \frac{1}{3})$

（1）考慮$\varphi^{-1}(S), \varphi^{-2}(S), \cdots$,則$\varphi^{-k}(S) \subseteq J_{k+1}$

由引理 5-2，任何$\phi^{-k}(S_{\square})$與S是一對一映成的。

$y \in (0, \frac{1}{3})$時，$\frac{18}{25} \leq |(\varphi^{-1})'(y)| \leq 2$，因此若數列$\{S_n\} \subseteq S$

$|S_n - S_m| \to 0$則對任何給定的正整數k，

$|\varphi^{-k}(S_n) - \varphi^{-k}(S_m)| \to 0$

（2）$\phi^{-1}(S_1), \phi^{-2}(S_1), \cdots$,則$\phi^{-k}(S_1) \subseteq (2^k - 1, 2^{k+1} - 1)$

由引理 5-2，任何$\phi^{-k}(S_1)$與S_1是一對一映成的。

$y \in (0,1)$時，$(\phi^{-1})'(y) = 2$，因此若數列$\{S_n\} \subseteq S_1$

$|S_n - S_m| \to 0$則對任何給定的正整數k，

$|\phi^{-k}(S_n) - \phi^{-k}(S_m)| \to 0$

引理 5-7：$\alpha_k,\beta_k,k\geq 1$如定義 5-2

（1）$x=\frac{1}{2^n}$ 是 $g(x)$ 的 n-週期點。

（2）$x=2^d-1+\frac{2^d}{2^\ell}$，$d(x)=\begin{cases} d-\ell+1 & d>\ell-1 \\ 0 & d\leq \ell-1 \end{cases}$，$\ell(x)=\ell$。

（3）$x=\beta_k-\frac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$，是 $g(x)$ 的 $(m+k\text{-}1)$-週期點。

證明：（1）若$x<1$，$g(x),g^2(x),\cdots,g^{n-1}(x)>1$，且$g^n(x)=x$時，

$$x\to\frac{1-x}{2x}\to\cdots\to\frac{1-(2^n-1)x}{2^nx}=x$$

則$g^n(x)=\frac{1-(2^n-1)x}{2^nx}=x$

$$2^nx^2+(2^n-1)x-1=0$$

$$x=\frac{1}{2^n}$$

（2）若$x>1$，$g^d(x)<1$，$x,g(x),g^2(x),\cdots,g^{d-1}(x)>1$，且$g^{d+\ell}(x)=g^d(x)$時，

$$x\to\frac{x-1}{2}\to\cdots\to\frac{x+1-2^d}{2^d}=g^d(x)=\frac{1}{2^\ell}$$

$$x=2^d-1+\frac{2^d}{2^\ell}$$

（3）若$x>1$，$x,g(x),g^2(x),\cdots,g^{m-1}(x)>1$，

$g(x)^m,g^{m+1}(x),\cdots,g^{m+k-1}(x)>1$，且$g^{m+k}(x)=x$時，

$$x\to\frac{1-x}{2x}\to\frac{3x-1}{2(1-x)}\to\frac{3-5x}{2(3x-1)}\to\frac{5-11x}{2(5x-3)}\to\cdots\to\frac{\alpha_k-\alpha_{k+1}x}{2(\alpha_kx-\alpha_{k-1})}\to\cdots\to\frac{1}{2^m}(\frac{\alpha_k-\alpha_{k+1}x}{2(\alpha_kx-\alpha_{k-1})}+1)-1=x$$

$$(2^{m+1}\alpha_k)x^2+(2^{m+2}\alpha_{k-2}+\alpha_{k+1}-2\alpha_k)x-((2^{m+1}-2)\alpha_{k-1}+\alpha_k)=0$$

$$(x+1)((2^{m+1}\alpha_k)x-((2^{m+1}-2)\alpha_{k-1}+\alpha_k))=0$$

$$x=\beta_k-\frac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$$

定義 5-6：

（1）令 $S_1=S\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\varphi^{-k}(S))$，$S_{11}=S_1\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}(S_1))$

（2）令 $S_2=S_{11}\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\varphi^{-k}(S_{11}))$，$S_{11}=S_2\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}(S_2))$

（3）依（1）（2）可以定義集合 $S_1,S_{11},S_2,S_{21},\ldots$，

令 $\tilde{S}=(\bigcup_{k=1}^{\infty}(S_k))\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}(S_{k1}))$

（4）對於任何正有理數的子集合S，我們定義集合$\Im(S) = \tilde{S}$，並定義

1. $\Im_0 = \tilde{S}$，當 S 為所有$2^k - 1, \beta_k$形成的集合時。

2. $\Im_1 = \tilde{S}$，當 S 為所有$\frac{1}{2^n}$形成的集合時。

3. $\Im_2 = \tilde{S}$，當 S 為所有$2^d - 1 + \frac{2^d}{2^{\ell+1}}$形成的集合時。

4. $\Im_3 = \tilde{S}$，當 S 為所有$\beta_k - \frac{(-1)^k}{2^{m+1}\alpha_{k+2}}$形成的集合時。

引理 5-8：區間J_k定義如定義 5-2

（1）任意正整數n 存在數列$\{x_n^k\}_{k\in N}, \{y_n^m\})_{m\in N}$ ，滿足 $x_n^k \in J_k$，$y_n^m \in (2^m - 1, 2^{m+1} - 1)$，且 $\ell(x_n^k) = n$，$\ell(y_n^m) = n$

（2）任意正整數n，存在$\{s_n^k\}_{n=1}^{\infty}$，$\{t_n^m\}_{n=1}^{\infty}$，使得$\ell(S_n^k) = n$，$\ell(t_n^m) = n$ 且$\lim_{n\to\infty} S_n^k = \beta_k$，

$\lim_{n\to\infty} t_n^m = 2_m - 1$。

証明：（1） 令 S 為所有$\frac{1}{2^n}$形成的集合，考慮 定義 5-6 中取 $x_n^k = \varphi^{-k}(\{\frac{1}{2^n}\})$，

$y_n^k = \phi^{-k}(\{\frac{1}{2^n}\})$， 即為所求。

（2） 令 S 為所有$\frac{1}{2^n}$形成的集合，考慮 定義 5-6 中$S_1 = S \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k}(S))$及

$S_{11} = S_1 \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} \phi^{-k}(S_1))$，即為所求。

引理 5-9：

z 是正規數且$P(z) = [a, b, c]$，則對任何正整數 m，$T^m(z)$是正規數的充要條件為：$\frac{|a-c|}{b}$不屬於$\Im_0$。

証明：由$\Im$的定義，若$x \in \Im(x_0)$，則存在正整數列$k_1, k_2, k_3, \cdots, k_l$使得$x = \Im(x_0)$，其中 h 是由$\varphi^{-k_1}, \phi^{-k_2}, \cdots, \phi^{-k_l}$的合，故$g^{k_1+k_2+\cdots+k_l}(x) = x_0$。因此，若$\frac{|a-c|}{b} \in \Im_0$，則存在正整數 m 使得$g(\frac{|a-c|}{b}) \in \{\beta_k\} \cup \{2^k - 1\}$，故 z 的 Kaprekar 軌跡包含有非正規數。

反之，若 z 是正規數且 z 的 Kaprekar 軌跡包含有非正規數，則存在最小的正整數 m，使得$T^{m-1}(z)$是正規數，但$T^m(z)$不是正規數(若$m = 1$，規定$T^{m-1}(z) = z$) 。設

$P(T^{m-1}(z)) = [A,B,C]$ ，則有$\frac{|A-C|}{B} = 1$，因此$\frac{|a-c|}{b} \in \Im(\{1\}) \subseteq \Im_0$

定理 5-3：$z \in Z(3,n)$且$P(z) = [a,b,c]$，

（1）若p_k是$g(x)$的 k-循環點 $\frac{|a-c|}{b} \in \Im(\{p_k\})$，則 $\ell(z) = k$。

（2）$\ell(z) = 1$，的充要條件是$\frac{|a-c|}{b} \in \Im(\{\frac{1}{2}\})$，

此$K(z) = (\underbrace{2\ldots2}_{c}\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$k > 1$，$c > 1$，

或$K(z) = (2\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{k}1)_3$，$k > 1$，

或$K(z) = (\underbrace{2\ldots2}_{c}021\underbrace{0\ldots0}_{c-1}1)_3$，$c > 1$，

或$K(z) = (20211)_3$。

（3）若$\frac{|a-c|}{b}$不屬於$\Im_0$且$|a-c| + b = 2^s P$其中s為非負整數P為正奇數 ，則$\ell(z) = or2(P)$

証明：（1）因為$\ell_g(p_k) = k$ ，設$d_g(p_k) = s$，若$x \in \Im(\{p_k\})$，由引理 5-9 的証明過程，存在正整數 m，使得$g^m(x) = p_k$，$d_g(x) = s + m$，$\ell_g(x) = k$，又由

$\ell(z) = \ell_g(\frac{|a-c|}{b})$，可得$\ell(z) = k$。

（2） 由$g(x) = x$只有唯一解$x = \frac{1}{2}$，模仿引理 5-9 的証明可得。

（3） 由定理 5-1 及模仿引理 5-9 的証明可得。

例如：（1） $z = (2111112111111120111111)_3, P(z) = [3,17,1], Or2(19) = 9$，

$\ell(z) = 9$，$P(z)$的 Kaprekar 軌跡如下

$[3,17,1] \to [16,4,1] \to [12,8,1] \to [4,16,1] \to [14,6,1] \to [8,12,1] \to [6,14,1] \to$
$[10,10,1] \to [2,18,1] \to [18,2,1] \to [16,4,1] \to$

（2） $P(z) = [14,27,3], Or2(19) = 9$，$\ell(z) = 9$

$P(z)$的 Kaprekar 軌跡如下

$[14,27,3] \to [1922,3] \to [9,32,3] \to [29,12,3] \to [17,24,3] \to [13,28,3] \to$
$[21,20,3] \to [5,36,3] \to [37,4,3] \to [33,8,3] \to [25,16,3] \to [9,32,3] \to$

多的示例我們以 excel 做了一個演算法進行測試下表各值為

p+q	a-c	b	cyclic	length	p+q	a-c	b	cyclic	length	p+q	a-c	b	cyclic	length
38	2	36	9	0	76	2	74	9	2	152	2	150	9	3
38	3	35	9	2	76	3	73	9	3	152	3	149	9	4
38	4	34	9	1	76	4	72	9	0	152	4	148	9	2
38	5	33	9	2	76	5	71	9	3	152	5	147	9	4
38	6	32	9	0	76	6	70	9	2	152	6	146	9	3
38	7	31	9	2	76	7	69	9	3	152	7	145	9	4
38	8	30	9	1	76	8	68	9	1	152	8	144	9	0
38	9	29	9	2	76	9	67	9	3	152	9	143	9	4
38	10	28	9	0	76	10	66	9	2	152	10	142	9	3
38	11	27	9	2	76	11	65	9	3	152	11	141	9	4
38	12	26	9	1	76	12	64	9	0	152	12	140	9	2
38	13	25	9	2	76	13	63	9	3	152	13	139	9	4
38	14	24	9	0	76	14	62	9	2	152	14	138	9	3
38	15	23	9	2	76	15	61	9	3	152	15	137	9	4

$$P(z) = [a, b, c], p = a - c, q = b, p + q = 2 \times 19, 2^2 \times 19, 2^3 \times 19$$

38	16	22	9	1	76	16	60	9	1	152	16	136	9	1
38	17	21	9	2	76	17	59	9	3	152	17	135	9	4
38	18	20	9	0	76	18	58	9	2	152	18	134	9	3
38	19	19	1	1	76	19	57	1	1	152	19	133	1	1
38	20	18	9	1	76	20	56	9	0	152	20	132	9	2
38	21	17	9	2	76	21	55	9	3	152	21	131	9	4
38	22	16	9	0	76	22	54	9	2	152	22	130	9	3
38	23	15	9	2	76	23	53	9	3	152	23	129	9	4
38	24	14	9	1	76	24	52	9	1	152	24	128	9	0
38	25	13	9	2	76	25	51	9	3	152	25	127	9	4
38	26	12	9	0	76	26	50	9	2	152	26	126	9	3
38	27	11	9	2	76	27	49	9	3	152	27	125	9	4
38	28	10	9	1	76	28	48	9	0	152	28	124	9	2
38	29	9	9	2	76	29	47	9	3	152	29	123	9	4
38	30	8	9	0	76	30	46	9	2	152	30	122	9	3
38	31	7	9	2	76	31	45	9	3	152	31	121	9	4
38	32	6	9	1	76	32	44	9	1	152	32	120	9	1
38	33	5	9	2	76	33	43	9	3	152	33	119	9	4
38	34	4	9	0	76	34	42	9	2	152	34	118	9	3

定理 5-3 基本上已回答了 3 進位的正規 Kaprekar 數的循環長度$\ell(z)$，也可以計算$d(z)$，及 Kaprekar 常數，對於非正規的 3 進位 Kaprekar 數，在[1]的文章中有仔細的計算。因此 3 進位的 Kaprekar 數不論正規與否都是可解決的。接下來我們關心$g(x)$的行為。

首先，因為 Kaprekar 數必定是 Kaprekar 常數或循環，而每一個正有理數數 x 對應 Kaprekar 數，若正有理數數x不屬於$\Im_0$，則 x 必是$g(x)$的 k-循環點(數)。如果任何正有理數的區間中必有任意的 n-循環點，其中 n 是任意正整數。此即意味著$g(x)$是混沌的。

引理 5-10：

任何$\frac{1}{2^{n_1}}$，$\frac{1}{2^{n_2}}$（n_1,n_2-週期點）間必存在$x \in (\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})$（不妨設 $n_2 < n_1$）滿足

$f^{n_1+1}(x) = x_0$，$x_0 \in (2^{n_2} - 1, \infty)$，因此，任何正整數，必有 n-循環點$x_n \in (\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}})$。

定理 5-4：若y_1, y_2是正有理數，$y_1 < y_2$

（1）若有$x \in \{\beta_k\}_{k\in N} \cup \{2^k - 1\}_{k\in N}$，使得$y_1 < x < y_2$，則區間$(y_1, y_2)$中必有任意的 n-循環點，其中 n 是任意正整數。

（2）若有$x \in \mathfrak{I}_0$，使得$y_1 < x < y_2$，則區間(y_1, y_2)中必有任意的 n-循環點，其中 n 是任意正整數。

（3） $y_1, y_2 \in (0, \frac{1}{3})$，若存在某一正整數使得$g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$或 $g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1)$成立，則區間(y_1, y_2)中必有任意的 n-循環點，其中 n 是任意正整數。

（4）若存在某一正整數使得$g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$或$g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1)$成立，則區間(y_1, y_2)
中必有任意的 n-循環點，其中 n 是任意正整數。

（3）（4）中條件 $g^m(y_1) < 1 < g^m(y_2)$ $(g^m(y_2) < 1 < g^m(y_1))$可換成
$g^m(y_1) < x < g^m(y_2)$ ($(g^m(y_2) < x < g^m(y_1))$，其中$x \in \mathfrak{I}_0$。

六、對於 4 進位的情形，$z \in Z(4, n)$，$\overline{z} = (3 \cdots 32 \cdots 21 \cdots 10 \cdots 0)$，

將z經過卡布里卡運算後，得到$T(z) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

根據[1]，將$a_1, a_2, \cdots, a_n$配對得到一組和為 2（(2,0)(1,1)），許多組和為 3（(3,0)(2,1)），一組和為 4（(2,2)(3,1)），剩餘一些數字 3（可能為 0 個）。

設其中（3,0)有 A 組、（2,1)有 B 組、（2,0)和(1,1)選其中一組、（3,0)和(2,1)選其中一組，另外還有x個不成對的 3$(x \geq 0)$。

配對方式			種類	3的數量	2的數量	1的數量	0的數量
和為4	和為3	和為2					
(2,2)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(1)	A + x	B + 2	B + 2	A
(3,1)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(1)	A + x +1	B + 1	B + 1	A +1
(3,1)	(3,0) (2,1)	(1,1)	(2)	A + x +1	B + 3	B + 3	A
(2,2)	(3,0) (2,1)	(2,0)	(3)	A + x	B	B	A +1

可將上表中的 4 類重新表示，可知$P_4(T_{(4,n)}(z))$必為以下 3 種形式之一

$$x = \begin{cases} I \ \ [a,b,b,c] & a \geq c \\ III \left[a,b+3,b,c\right] & a \geq c-1 \\ II \left[a,b,b+3,c\right] & a \geq c \end{cases}$$

因此我們定義

定義 6-1：

若$z \in Z(4,n)$，若有非負整數a,b,c使得

$P_4(z) = [a,b,b,c]$或$[a,b+3,b,c]$或$[a,b,b+3,c]$

即依序稱 z 為第 I,II,III 類數分別針對

（1）$P_4(z) = [a,b,b,c]$，$a \geq c$

（2）$P_4(z) = [a,b,b+3,c]$，$a > c$

（3）$P_4(z) = [a,b+3,b,c]$，$a \geq c-1$

定理 6-1

令$z_1 = P_4(T_{(4,n)}(z))$且z,z_1皆為正規數則有

計算$P_4(T_{(4,n)}(z))$可得

$$F_4[a,b,b,c] = \begin{cases} [a,b,b,c] & a-c < b \\ [a,b-1,b+2,c-1] & a-c = b \\ [2b+2c-a,a-c,a-c,c] & b < a-c \leq 2b \\ [a-2b,2b,2b,c] & a-c \geq 2b \end{cases}$$

$$F_4[a,b,b+3,c]=\begin{cases}[a-2b-3,2b+3,2b+3,c] & 2b+3\le a-c\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b+3<a-c\le 2b+3\\ [b+c,b+2,b+5,c-1] & a-c=b+3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & b<a-c<b+3,3\le a-c\\ [2c+3-a,b+a-c,b+a-c,c] & b<a-c<b+3,a-c<3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & b=a-c,b\ge 3\\ [c+3-b,2b,2b,c] & b=a-c\le 3\\ [a-3,b+3,b+3,c] & 3\le a-c<b\\ [2c+3-a,b+a-c,b+a-c,c] & 0<a-c\le 3,a-c<b\end{cases}$$

$$F_4[a,b+3,b,c]=\begin{cases}[a-2b-3,2b+3,2b+3,c] & 2b+3\le a-c\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b+3\le a-c\le 2b+3\\ [2b+2c+3-a,a-c,a-c,c] & b<a-c\le b+3\\ [a+3,b-1,b+2,c-1] & b=a-c\\ [a+3,b,b,c] & 0\le a-c<b\\ [a+2,b+1,b+1,a] & a-c=-1\end{cases}$$

下列性質 6-1

性質 6-1：

令$z_1=P_4(T_{(4,n)}(z))$且z,z_1皆為正規數則有

（1）若 z 為第 I 類且$a-c\neq b$，則z_1為第 I 類（若$a-c=b$，則z_1為第 II 類）

（2）若 z 為第 II 類且$a-c\neq b+3$，則z_1為第 I 類（若$a-c=b+3$，則z_1為第 II 類）

（3）若 z 為第 III 類且$a-c\neq b$，則z_1為第 I 類（若$a-c=b$，則z_1為第 II 類）

證明置於附錄 1

因此若考慮

$z\to T_{(4,n)}(z)\to T_{(4,n)}^2(z)\to T_{(4,n)}^3(z)$

並令$z_i=T_{(4,n)}^i(z)$屬於正規數，i=1,2,3，則z_1為第 I,II,III 類。

在z_2不為第 I 類的$a-c=b$的情況下，則z_3必為第 I 類。

定義 6-2

集合$Z_3^4 = \{[a,b,b,c] | a,b,c$為正整數且$a \geq c\}$

模仿 3 進位情形我們定義F_4：$Z_3^4 \to Z_3^4$

4 進位的正規數在不考慮第 I 類的$a-c=b$的情形下，最多在 3 次運算後，依性質 6-1，$P_4(T^3(z)) \in Z_3^4$，若連結Z_3^+與$Z_3^4, a>0, b>0, c>0$，$F_4[a,b,b,c]$ 可以對應成$F_3[a,b,c]$的情形，所以第五節中的結構是可以套用到 4 進位的情形的。

引理 6-1

若$z \in Z_3^4$，$z=[a,b,b,c]$且滿足$a-c \neq b$

$$F_4[a,b,b,c] = \begin{cases} [a,b,b,c] & a-c<b \\ [2b+2c-a, a-c, a-c, c] & b<a-c \leq 2b \\ [a-2b, 2b, 2b, c] & a-c \geq 2b \end{cases}$$

若$z=[a,b,b,c]$且$a-c \neq b$，令$w=[a,2b,c]$，則

$Z_3^4 = \{[a,b,b,c] | a,b,c$為正整數$\}$與$\{[a,b,c] | a,b,c$為正整數$\}$

間必有一對一映成的對應關係，$\psi(z)=w$，且ψ滿足$\psi(F_4(z)) = F_3(w)$。

引理 6-2

$z=[a,b,b,c]$且滿足$a-c \neq b$，令$x=\frac{a-c}{2b}$，分成三種情形考慮

（1）$0 \leq x < \frac{1}{2}$，可知$F(z)=z$。

（2）$\frac{1}{2} < x \leq 1$，則$0 \leq g(x) < \frac{1}{2}$，即$F^2(z)=F(z)$。

（3）$x \in (2^k-1, 2^{k+1}-1)$且$k \geq 1$，則$g^k(x)<1$，即$F^{k+1}(z)=F^k(z)$或$F^{k+2}(z)=F^{k+1}(z)$。

證明：（1）、（2）可由引理 6-1 得知。

（3）因$g^k(x)<1 (g^{k-1}(x)>1)$，故令$x_k = g^k(x) \Rightarrow x_k$必滿足（2），

若令$z_i = F^i(z) = [a_i, b_i, b_i, c_i] \Rightarrow x_k = \frac{a_i - c_i}{2b_i}$

x_k必為情形（1）或（2），因此$F^{k+1}(z)=F^k(z)$或$F^{k+2}(z)=F^{k+1}(z)$。

引理 6-3

令$z \in Z_3^4$，滿足$\frac{a-c}{2b} \neq \frac{1}{2}$，則$\ell(z) = 1$，且$\frac{a-c}{2b}$依下列情形，可得$d(z)$、$K(z)$如下：

（1）$\frac{a-c}{2b} < \frac{1}{2}$時，$d(\overline{z}) = 1$ 。

（2）$\frac{1}{2} < \frac{a-c}{2b} < 1$時，$d(\overline{z}) = 2$ 。

（3）$2^k - 1 \leq \frac{a-c}{2b} < 3 \cdot 2^{k-1} - 1$，$k$為正整數，$d(\overline{z}) = k$ 。

（4）$3 \cdot 2^{k-1} - 1 < \frac{a-c}{2b} \leq 2^{k+1} - 1$，$k$為正整數，$d(\overline{z}) = k + 1$ 。

上述(1)~(4)中皆可得$K(z)$為 $(\underbrace{3\cdots3}_{c}\underbrace{2\cdots2}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c-1}0\underbrace{3\cdots3}_{a-c}\underbrace{1\cdots1}_{b-a+c}\underbrace{0\cdots0}_{c-1}1)_4$ 的形式。

定義 6-3

$$F_4[a,b,b,c] = \begin{cases} [a,b,b,c] & a-c < b \\ [a-2b, 2b, 2b, c] & a-c > 2b \\ [2b+2c-a, a-c, c] & b < 1-c < 2b \end{cases}$$

4 進位的情形最多在 4 次運算後，依性質 6-1，$T^4(z) \in Z_3^4$，若連結Z_3^+與$Z_3^4, a > 0, b > 0, c > 0$上$F_4[a,b,b,c]$ 可以對應成$F_3[a,b,c]$的 情形，所以第五節中的結論是可以套用到 4 進位的情形。

肆、結論

（一）關於 2 進位的 Kaprekar 變換最後的結果為 定理 3-1

定理 3-1.

當$z \in Z(2,n)$，$\overline{z} = (2^a - 1)2^b$，$a, b$是正整數，$a + b = n$，則

$$d(z)=1\text{ ，}\ell(z)=1\text{ ，}K(z)=T_{(2,n)}(z)=\begin{cases}(\underbrace{1\ldots1}_{b-1}0\underbrace{1\ldots1}_{a-b}\underbrace{0\ldots0}_{b-1}1)_2 & a>b\\(\underbrace{1\ldots1}_{a-1}0\underbrace{1\ldots1}_{b-a}\underbrace{0\ldots0}_{a-1}1)_2 & b>a\\(\underbrace{1\ldots1}_{a}\underbrace{0\ldots0}_{a}1)_2 & a=b=\frac{n}{2}\\(0\underbrace{1\ldots1}_{n-1})_2 & a=1\ or\ b=1\end{cases}$$

此結果[4]中的主要定理 0.1 是一致的

Theorem 0.1. (1) *Let $n\geq 2$ be any integer. For any non-trivial $x\in\mathbb{Z}(2,n)_{\mathrm{rep}}$ of the form $x=(\overbrace{1\cdots1}^{k}\overbrace{0\cdots0}^{n-k})_2$ with $1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]$, we see that $d(x)=1$, $\ell(x)=1$,*

$$K(x)=(\overbrace{1\cdots1}^{k-1}\ 0\ \overbrace{1\cdots1}^{n-2k}\ \overbrace{0\cdots0}^{k-1}1)_2=(\overbrace{1\cdots1}^{k})_2\times(\overbrace{1\cdots1}^{n-k})_2$$

and that $N(2,n)=\left[\frac{n}{2}\right]$. In particular, $(2,n)$ is strict, i.e., $N(2,n)=1$ if and only if $n=2,3$, and in these cases,

$$K_{(2,2)}=(01)_2,\quad K_{(2,3)}=(011)_2.$$

(2) *Conversely, the 2-adic expression of the product of two Mersenne numbers $2^{k_1}-1$ and $2^{k_2}-1$ with any positive integers $k_1\leq k_2$ is equal to a 2-adic (k_1+k_2)-digit Kaprekar constant*

$$(\overbrace{1\cdots1}^{k_1-1}\ 0\ \overbrace{1\cdots1}^{k_2-k_1}\ \overbrace{0\cdots0}^{k_1-1}1)_2.$$

定理 3-1 中$\overline{z}=(2^a-1)2^b$，b,a為[4]中定理 0.1 的k_1,k_2，而2^a-1即 Mersenne 數。[4]的定理 0.1 也計算了 N(2,n)，事實由定理 3-1 也很容易得到，因為在 2 進位的情形複雜度不高所以我們沒有去探究 N(2,n)。另外[4]也有另一個主要結果是任何進位的 2 位數 Kaprekar 變換，而本文研究的重心則放在任何位數的情形上。

（二）關於 3 進位的 Kaprekar 變換，最終結果是定理 5-3。我們得到了所有正規數z的$d(z)$及循環長度$\ell(z)$的公式。另外也求得了 3 進位的 Kaprekar 常數以及z的 Kaprekar 軌跡皆為正規數的充要條件。另外引理 5-7、定義 5-6、引理 5-8 、引理 5-10、定理 5-2、定理 5-4，則是去探究$g(x)$的混沌性，因為$g(x)$是定義在正有理數，並不是一個完備的集合。所以像週期 3 則會有 LiYorke 定理的混沌性，方法上就不可能使用在$g(x)$。若是把$g(x)$自然地延拓至$\overline{g}(x)$第一步當然是先考慮週期點會不會在$\overline{g}(x)$上，所以定理 2 得到了$\overline{g}(x)$上的週期點就是$g(x)$上的那一些。接下來通過引理 5-7、定義 5-6 構

造方法我們可以在每個小區間$J_k,(2^k-1,2^{k+1}-1)$甚至$\Im_0$任兩點間都可以找到任何 n-循環點。最後則得到任何兩正有理數，若存在一個 m 使得此兩有理數在T^m映射的值之間包含有$\Im_0$的任一點，則此兩有理數間都可以找到任何 n-循環點。當然在這裡最完整的混沌性質是希望任何兩正有理數間都有。

（三）對於 4 進位的情形發現 $F_4[a,b,b,c]$本質上可以化約成$F_3[a,b,c]$的情形，所有的正規 4 進位數經 Kaprekar 運算後皆為 Kaprekar 常數，對於其他進位例如 5 進位數是否也有類似結果，留到日後完成。

伍、參考文獻

[1] G. D. Prichett, A. L. Ludington, & J. F. Lapenta. "The Determination of All Decadic. Kaprekar Constants." Fibonacci Quarterly 19.1 (1981):45-52. 11. Lucio Saffara.
[2] STAN DOLAN, A classification of Kaprekar constants, The Mathematical Gazette. Vol. 95, No. 534 (November 2011), pp. 437-443.
[3] Manuel R. F. Moreira, “Dihedral Symmetry in Kaprekar's Problem.”. Mathematics Magazine, Volume 90, 2017 - Issue 1 pp. 38-47.
[4] Atsushi Yamagami "On 2-adic Kaprekar constants and 2-digit Kaprekar distences" Journal of Number Theory, 185, October 2017

附錄

第 I 類：z_4: $[A,B,B,C]$，其中$A \geq C$，且令$x = \frac{A-C}{2B}$：

$I_{(1)}$：若$B > A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A,B,B,C]$，此為 Kaprekar 常數，且$0 < x < \frac{1}{2}$。

$I_{(2)}$：若$B = A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A,B-1,B+2,C-1]$，且$x = \frac{1}{2}$。

$I_{(3)}$：若$B < A - C \leq 2B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2B+2C-A,A-C,A-C,C]$，且$\frac{1}{2} < x \leq 1$。

$I_{(4)}$：若$A - C \geq 2B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-2B,2B,2B,C]$，且$x \geq 1$。

第 II 類：z_4: $[A,B,B+3,C]$，**其中**$A > C$：

$II_{(1)}$：若$2B + 3 \leq A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-2B-3,2B+3,2B+3,C]$。

$II_{(2)}$：若$B + 3 < A - C \leq 2B + 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2B+2C+3-A,A-C,A-C,C]$。

$II_{(3)}$：若$A - C = B + 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [B+C,B+2,B+5,C-1]$。

$II_{(4)}$：若$B < A - C < B + 3$，$3 \leq A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(5)}$：若$B < A - C < B + 3$，$A - C < 3$（此時$B = 1$，$A - C = 2$），

則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2C+3-A,B+A-C,B+A-C,C]$，代入$B = 1$，$A - C = 2$，

即$[C+2,1,1,C] \to [C+1,3,3,C]$。

$II_{(6)}$：若$B = A - C$，$B \geq 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(7)}$：若$B = A - C \leq 3$，則 $P_4(T_{(4,n)}(z)) = [C+3-B,2B,2B,C]$。

$II_{(8)}$：若$3 \leq A - C < B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-3,B+3,B+3,C]$。

$II_{(9)}$：若$0 < A - C \leq 3$，$B > A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2C+3-A,B+A-C,B+A-C,C]$

第 III 類：$z_4 = [A,B+3,B,C]$，其中$A \geq C - 1$：

$III_{(1)}$：若$2B + 3 \leq A - C$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A-2B-3,2B+3,2B+3,C]$。

$III_{(2)}$：若$B + 3 \leq A - C \leq 2B + 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2B+2C+3-A,A-C,A-C,C]$。

$III_{(3)}$：若$B < A - C \leq B + 3$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [2B + 2C + 3 - A, A - C, A - C, C]$。

$III_{(4)}$：若$B = A - C$，則，$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A + 3, B - 1, B + 2, C - 1]$。

$III_{(5)}$：若$0 \leq A - C < B$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A + 3, B, B, C]$。

$III_{(6)}$：若$A - C = -1$，則$P_4(T_{(4,n)}(z)) = [A + 2, B + 1, B + 1, A]$。

$$F_4[a,b,b,c] = \begin{cases} [a,b,b,c] & a - c < b \\ [a, b-1, b+2, c-1] & a - c = b \\ [2b + 2c - a, a - c, a - c, c] & b < a - c < 2b \\ [a - 2b, 2b, 2b, c] & a - c > 2b \end{cases}$$

$$F_4[a, b+3, b, c] = \begin{cases} [a - 2b - 3, 2b + 3, 2b + 3, c] & 2b + 3 \leq a - c \\ [2b + 2c + 3 - a, a - c, a - c, c] & b + 3 < a - c < 2b + 3 \\ [b + c, b + 2, b + 5, c - 1] & a - c = b + 3 \\ [a - 3, b + 3, b + 3, c] & b < a - c < b + 3, 3 \leq a - c \\ [2c + 3 - a, b + a - c, b + a - c, c] & b < a - c < b + 3, a - c < 3 \\ [a - 3, b + 3, b + 3, c] & b = a - c, b \geq 3 \\ [c + 3 - b, 2b, 2b, c] & b = a - c \leq 3 \\ [a - 3, b + 3, b + 3, c] & 3 \leq a - c < b \\ [2c + 3 - a, b + a - c, b + a - c, c] & 0 < \ a - c \leq 3, a - c < b \end{cases}$$

$$F_4[a, b, b+3, c] = \begin{cases} [a - 2b - 3, 2b + 3, 2b + 3, c] & 2b + 3 \leq a - c \\ [2b + 2c + 3 - a, a - c, a - c, c] & b + 3 \leq a - c \leq 2b + 3 \\ [2b + 2c + 3 - a, a - c, a - c, c] & b < a - c < \ b + 3 \\ [a + 3, b - 1, b + 2, c - 1] & b = a - c \\ [a + 3, b, b, c] & 0 \leq a - c < b \\ [a + 2, b + 1, b + 1, a] & a - c = -1 \end{cases}$$

四進位非正規數

$I_b(a - c = b)$

（1）$b = 2$，$c = 1$

[3,2,2,1] → [3,1,4,0] → [0,5,2,1] → [2,4,1,0] → [3,3,0,1] → [2,2,2,1]

（2）$b > 2$，$c = 1$

$[b+1, b, b, 1] \to [b+1, b-1, b+2, 0] \to [b-2, b+3, b, 1]$

（3）$b = 1$，$c = 2$

$[3,1,1,2] \to [3,0,3,1] \to [2,1,4,0] \to [1,4,1,1] \to [4,1,1,1] \to [2,2,2,1]$

（4）$b = 1$，$c > 2$

$[c+1,1,1,c] \to [c+1,0,3,c-1] \to [c,1,4,c-2] \to [c-1,3,3,c-2]$

（5）$b = 1$，$c = 1$

$[2,1,1,1] \to [2,0,3,0] \to [1,3,1,0] \to [3,1,1,0] \to [1,3,0,1]$

$II_c(a - c = b + 3)$

（1）$c = 1$，$b > 2$

$[b+4, b, b+3, 1] \to [b+1, b+2, b+5, 0] \to [b-2, b+6, b+3, 1] \to [b+1, b+3, b+3, 1]$

（2）$c = 1$，$b = 2$

$[6,2,5,1] \to [3,4,7,0] \to [0,8,5,1] \to [2,7,4,1] \to [5,4,4,1] \to [5,3,6,0]$

（3）$c = 1$，$b = 1$

$[5,1,4,1] \to [2,3,6,0] \to [1,6,3,1] \to [4,3,3,1] \to [4,2,5,0]$

（4）$c > 1$，$b \geq 2$

$[a, b, b+3, c] \to [b+c, b+2, b+5, c-1] \to [b+c-3, b+5, b+5, c-1]$

（5）$c > 1$，$b = 1$

$[c+4,1,4,c] \to [c+1,3,6c-1] \to [c,5,5,c-1]$

$III_d(a-c=b)$

（1）$b=1$，$c=1$

$[2,4,1,1] \rightarrow [5,0,3,0] \rightarrow [2,3,3,0]$

（2）$b=1$，$c=2$

$[3,4,1,2] \rightarrow [6,0,3,1] \rightarrow [3,2,5,0] \rightarrow [0,6,3,1] \rightarrow [2,5,2,1] \rightarrow [5,2,2,1] \rightarrow [1,4,4,1]$

（3）$b=1$，$c>2$

$[c+1,4,1,c] \rightarrow [c+4,0,3,c-1] \rightarrow [c+1,2,5,c-2] \rightarrow [c-2,5,5,c-2]$

（4）$b=2$，$c>1$

$[c+2,5,2,c] \rightarrow [c+5,1,4,c-1] \rightarrow [c,5,5,c-1]$

（5）$b=2$，$c=1$

$[3,5,2,1] \rightarrow [6,1,4,0] \rightarrow [1,6,3,1] \rightarrow [4,3,3,1] \rightarrow [4,2,5,0]$

（6）$b \geq 3$，$c>1$

$[b+c,b+3,b,c] \rightarrow [b+c+3,b-1,b+2,c-1] \rightarrow [b+c-4,b+4,b+4,c-1]$

（7）$b \geq 3$，$c=1$

$[b+1,b+3,b,1] \rightarrow [b+4,b-1,b+2,0] \rightarrow [b-3,b+5,b+2,1] \rightarrow [b,b+2,b+2,1]$

【評語】010035

將正整數的各位數字頭尾對調重新排列後相減的運算稱為 Kaprekar 變換。Kaprekar 變換產生的循環也是一個有趣的現象。作者探討了 2 進位、3 進位、4 進位 Kaprekar 變換的一些性質，因為在這些情況下各個位數的選擇相對少，所以可以將問題聚焦於數字位數的長度，從此出發，作者們得到一些有趣的觀察，甚至有 3 進位和 4 進位之間的連結。不過比較可惜的是題目設定的條件還是太特殊了些，並沒有得到比較一般性的結果。