2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號	**010034**
參展科別	數學
作品名稱	探討單位電阻排列有理數值
得獎獎項	

就讀學校	臺北市立建國高級中學
指導教師	黃世穎、楊一帆
作者姓名	洪胤軒

關鍵詞　電阻、連分數、費氏數列

作者簡介

我是洪胤軒，從小熱愛數學，非常享受解題的樂趣，我也很喜歡做研究，因為做研究沒有一個固定的模式，因此比做題目有趣以及發人深省。除了數學，我也擁有很多的興趣，從小我就是個鐵道迷，喜歡到處去搭火車、看火車，另外我從國中開始喜歡棒球，平常會看中華職棒，以及閱讀一些棒球評論的文章，讓我在研究、課業之餘，有個可以紓解壓力的休閒活動。

摘要

本研究在探討給定一有理數，如何用最少數量的一歐姆電阻串並聯使得等效電阻值為此有理數。首先我做出 f 函數的表格，利用程式找出分母分子較小時的值，並且依性質不同塗上各種顏色，觀察其中的規律，證明了一些定理，並找到電路圖與矩形的對應，再來是找到電阻排列一些數列的系統性構造，然後針對有理數分子和分母的特性，分析了費氏數、分母為 2、3 等等的情況的最小構造法，其中在分析分母為 2、3 等等的情況時，一開始使用了變換的概念證明，但變換過多次時會造成證明的繁複，因此後續提出了以幾何模型分割區域的概念證明，有效地提高到分母為 4、5 的情況，並且將證明過程擴充至所有正整數的情況，找到了 f 函數遞迴式的充分條件，最後計算連分數構造法的部分平均時，猜測出連分數構造法與正整數因數個數的關係。

Abstract

This project discusses issues about equivalent resistance. The main problem is how many required-resistors should be used to construct a value which is a positive rational number. First, I draw a table about the value of function f when the denominator and the numerator are little, and color it with various colors based on different properties. According to the table, I observe some properties and prove them. I discover a correspondence between resistance and dividing rectangle into squares. Also, I find constructions of the ratio of sequences and the minimum construction of Fibonacci sequence’s ratio and when the denominator is 2 or 3. As for the fraction with denominator being 2 or 3, we prove it using swap theorem. However, the proof is too complicated when the denominator is bigger. Therefore, I use the geometry model to prove it, and expand the denominator which is every positive integer. Then, I get the sufficient condition of $f(x+1) = f(x)+1$. Finally, I guess some relation of continued fraction construction and the number of factor.

壹、研究動機

我們在學習電路學的過程中常常要求一張電路圖中數個電阻的等效電阻值，若這些電阻只以串並聯排列，等效電阻值只需以簡單的加法和乘法計算；然而，我們將此問題顛倒，變成「給定一個有理數，最少要用多少單位電阻以串並聯使得等效電阻值為此有理數？」，發現這個簡單的問題背後卻非常複雜，因此引起我研究此問題之興趣。

貳、研究目的及研究問題

首先，我想要找到所有電阻值的 f 函數之值，甚至更進一步找到所有數量的單位電阻進行串聯或並聯，使得等效電阻為設定的有理數。我也定義了電阻排序函數，希望利用此函數找到一些性質，並回推成函數 f 的性質。此外，我也希望利用幾何和圖論模型，做直觀的對應與解釋，並利用程式輔助列出相關的表格，試圖找到他們的相關性質，並對應回原本的電阻相關性質，或做一些猜想與驗證。最後，我想找到電阻與數論和數列之間的關係，如連分數構造法和正整數因數個數函數的性質。

參、研究方法及過程

以下編號**一、定義**至編號**二十一、電阻與圖論**為本人先前參加北市科展和丘成桐中學數學獎之研究內容，編號**二十二、$g(n,m)$ 構造法**至編號**二十四、用生成函數統整已知的函數 f 公式**為比賽後新增的作品內容。

一、定義

(一)串聯、並聯

定義串聯運算符號為加法符號 $+$ ，兩個電阻值 R_1 和 R_2 做串聯得到的電阻值為 R_1+R_2 ；定義串聯運算符號為 $\|$ ，兩個電阻值 R_1 和 R_2 做串聯得到的電阻值為 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$ ，即

$$R_1 \| R_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$ 。

(二) $f(a)$

令 a 為正有理數，定義函數

$$f(a)=\min\{n\,|\,等效電阻值\,a\,可以使用\,n\,個單位電阻以串、並聯排出\}$$

並且我們稱用 $f(a)$ 個單位電阻排出電阻值 a 的方法稱之為 a 的**最小構造法**。

我們有以下性質：

性質 1：對於 $a,b\in\mathbb{Q}^+$， $f(a)+f(b)\geq f(a+b)$ 。

證明：

我們將兩個電阻值 a 與 b 串聯，於是找到了用 $f(a)+f(b)$ 個單位電阻構造出 $a+b$ ，即得 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$ 。

(三) $A(n)$

定義數列 $<A(n)>$ 為 n 個單位電阻串並聯後得到的相異等效電阻值個數。由文獻[3]可知， $<A(n)>$ 尚未有一般式，目前只知道 $A(1)$ 到 $A(27)$ 的值。例如： 3 個單位電阻可以排出 4 種相異等效電阻值： $3,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$ ，因此 $A(3)=4$ 。

(四) $R(n,k)$

令 n,k 為正整數，且 $k\leq A(n)$ ，定義 $R(n,k)$ 為 n 個單位電阻排出的 $A(n)$ 個等效電阻值中第 k 大的。例如： $R(3,1)=3,R(3,2)=\frac{3}{2},R(3,3)=\frac{2}{3},R(3,4)=\frac{1}{3}$ 。

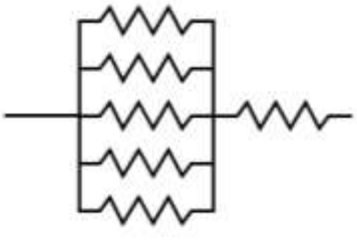
(五)電阻使用效率函數 $\sigma(a)$

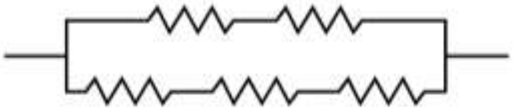
定義 $\sigma(a)=\frac{f(a)}{a}$ 。 $\sigma(a)$ 越大代表平均使用較多單位電阻，效率較低。

(六)串並表達式

定義**串並表達式**為數個 1 以 $+$ 和 $||$ 運算並用小括號表示運算順序，對應數個單位電阻經由串並聯所得出的等效電阻。每個串並表達式可以對應到一張電路圖與一等效電阻值，但多個相異的串並表達式所代表的等效電阻值可能相同。

例如： $\frac{6}{5}=((((1\,||\,1)\,||\,1)\,||\,1)\,||\,1)+1$ (左下圖)和 $\frac{6}{5}=(1+1)\,||\,((1+1)+1)$ (右下圖)為 $\frac{6}{5}$ 的兩種串並表達式。



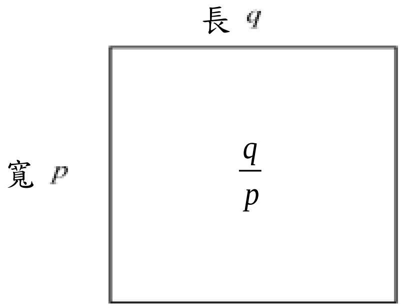


(七)變換

將一條串並表達式的其中一個 $+$ 置換成 $||$ ，或將一個 $||$ 置換成 $+$ ，即稱為**一次變換**。其中 $+$ 改為 $||$ 稱為**串聯變換**，並將 $||$ 改為 $+$ 稱為**並聯變換**。

二、幾何模型

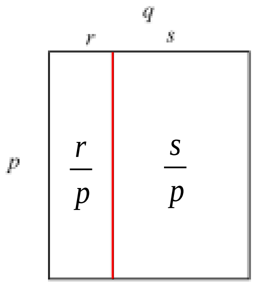
參考了文獻[4]，我發現裡面的矩形切割類似連分數構造法，因此我將電阻的各種構造方法都套用到矩形切割上，便找到電阻的幾何模型如下：



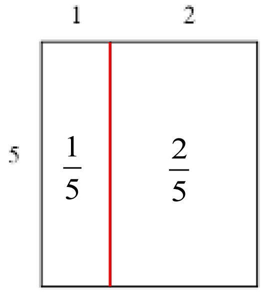
對於一個長為q、寬為p的矩形，假設其對應代表的電阻值為有理數$\frac{q}{p}$，其中$p,q\in\mathbb{N}$。特別地，當$p=q$時形成的矩形代表單位電阻。若$p=1$，我們稱此幾何模型為**基本幾何模型**。

(一)串聯

設$q=r+s$，其中$r,s\in\mathbb{N}$。如下左圖，在矩形的長上距左側r處直的切一刀，則左側矩形長為r、寬為p，右側矩形長為s、寬為p，對應出$\frac{q}{p}$是由$\frac{r}{p}$和$\frac{s}{p}$串聯而來。例如下右圖為$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$。



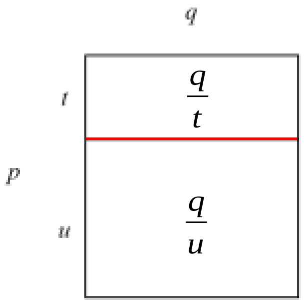
$$\frac{q}{p}+\frac{r}{p}=\frac{s}{p}$$



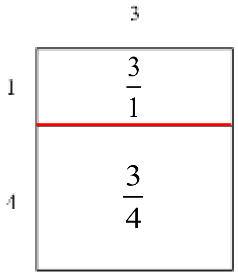
$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$$

(二)並聯

設$p=t+u$，其中$t,u\in\mathbb{N}$。如下左圖，在矩形寬上距上方t處橫的切一刀，則上方矩形長為q、寬為t，右側矩形長為q、寬為u，對應出$\frac{q}{p}$是由$\frac{q}{t}$和$\frac{q}{u}$並聯而來。例如下圖右為$\frac{3}{5}=\frac{3}{1}\|\frac{3}{4}$。



$$\frac{q}{p}=\frac{q}{t}\|\frac{q}{u}$$

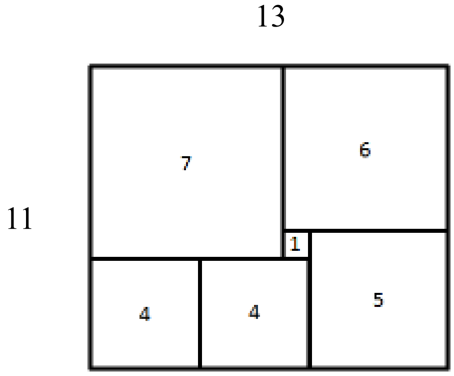


$$\frac{3}{5}=\frac{3}{1}\|\frac{3}{4}$$

(三)串並表達式

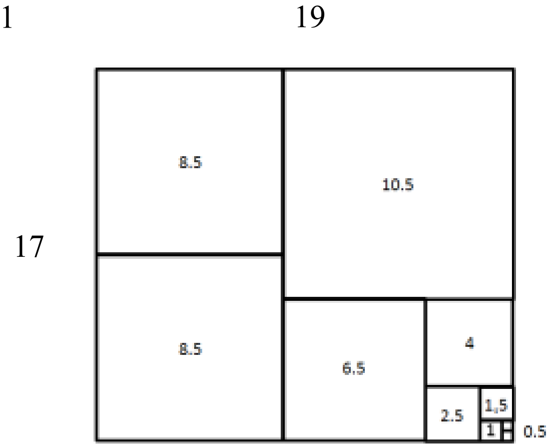
對於一串並表達式的每步，都可對應到將一塊完整的矩形分割為兩部分，也就是說一串並表達式可以對應到一個矩形，此矩形被切成若干個正方形，這些正方形不重疊，且其切法是一步切一刀。

並不是所有的矩形切成了正方形就可對應一串並表達式，例如下圖無法對應到任何串並表達式，其中正方形中的數值代表正方形的邊長，因為你找不到切此矩形的第一刀使得矩形分為兩部分。



(四)切出整數邊長的正方形

只要符合一刀一刀的切法，串並表達式並沒有規定切出來的正方形邊長要是整數，在極少的情況，一個最簡分數的最小構造法要切出非整數邊長的正方形，下圖為$\frac{19}{17}$的例子，類似的情況還有$\frac{25}{23},\frac{31}{29},\frac{43}{41}$。



三、串並聯相關性質

(一)$\frac{n}{m}$的基本構造法

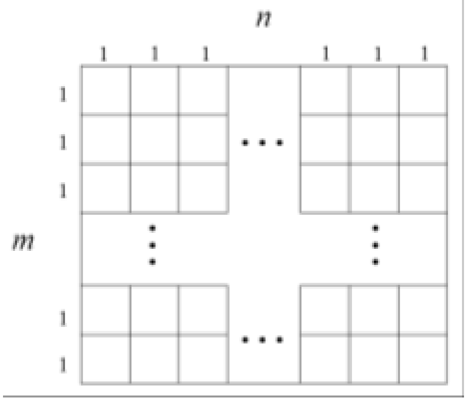
Step1：$n=\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n個}$，即將$n$個單位電阻串聯成等效電阻為$n$的構造

Step2：重複 Step1 m 次，得到m組值均為n的等效電阻。

Step3：將m組值為n的等效電阻進行並聯可得等效電阻為$\frac{n}{m}$，說明如下：

$$\overbrace{n\parallel n\parallel\ldots\parallel n}^{m個}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}=\frac{n}{m}$$。

此構造法的幾何模型即為將長為 n 、寬為 m 的幾何模型切割成 mn 個 1×1 小正方形，如下圖。



(二)倒數定理

從參考資料[3]有敘述此定理。

引理1：$\forall a,b\in\mathbb{Q}^{+} \Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}\parallel\frac{1}{b})=1$

證明：$(a+b)(\frac{1}{a}\parallel\frac{1}{b})=(a+b)(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{b}}})=(a+b)(\frac{1}{a+b})=1$

定理1：$\forall p,q\in\mathbb{N}$ ，$\frac{q}{p}$ 的串並表達式中的所有 $+$ 與 $\parallel$ 都作一次變換，則新的串並表達式的等效電阻為 $\frac{p}{q}$ 。

舉例：$\begin{cases}((1+1)\parallel 1\parallel 1)+1=(2\parallel 1\parallel 1)+1=(\frac{2}{3}\parallel 1)+1=\frac{2}{5}+1=\frac{7}{5}\\((1\parallel 1)+1+1)\parallel 1=(\frac{1}{2}+1+1)\parallel 1=(\frac{3}{2}+1)\parallel 1=\frac{5}{2}\parallel 1=\frac{5}{7}\end{cases}$

證明1：我們想要用強數學歸納法來證明 n 個 1 (單位電阻)組成的串並表達式都滿足此定理。

(1) $n=1$ 時顯然正確。

(2) $n=2$ 時只有 $\begin{cases}1+1=2\\1\parallel 1=\frac{1}{2}\end{cases}$ 兩種構造，顯然 $n=2$ 成立。

(3)假設 $\forall n<k,n\in\mathbb{N}$ 時定理成立，當 $n=k$ 時，考慮任一個有 k 個 1 的串並表達式，假設其等效電阻為 r ，我們可以針對此表達式最後一個運算步驟分成以下兩種狀況討論：

Case1：最後一步是等串聯，假設串聯的兩側的等效電阻為 r_1,r_2 ，即 $\frac{q}{p}=r_1+r_2$ ，且分別用了 a_1,a_2 個電阻，即 $a_1+a_2=k$ ，當我們對此串並表達式的 $+,\parallel$ 交換後，最後一步的串聯改為並聯，因為 $a_1,a_2<k$ ，因此由數學歸納法知並聯兩側的等效電阻變為 $\frac{1}{r_1},\frac{1}{r_2}$ ，新的串並表達式的

等效電阻為$\frac{1}{r_1}\|\frac{1}{r_2}$，由引理1知$\frac{1}{r_1}\|\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1+r_2}=\frac{p}{q}$，得證。

Case2：最後一步是並聯，假設並聯的兩側的等效電阻為r_1,r_2，即$\frac{q}{p}=r_1\|r_2$，且分別用了a_1,a_2個電阻，即$a_1+a_2=k$，當我們對此串並表達式的$+,\|$交換後，最後一步的並聯改為串聯，因為$a_1,a_2<k$，因此由數學歸納法知並聯兩側的等效電阻變為$\frac{1}{r_1},\frac{1}{r_2}$，新的串並表達式的等效電阻為$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$，由引理1知$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1\|r_2}=\frac{p}{q}$，得證。

$\forall n\in\mathbb{N}$，任意n個1所組成的串並表達式都滿足此定理。

證明2：

將$\frac{q}{p}$套用至幾何模型上，按照其串並表達式的步驟分割長q寬p。將$+$與$\|$置換，即是將整個矩形旋轉90°，因此可以得到$\frac{p}{q}$。

推論1：$\forall p,q\in\mathbb{N}\Rightarrow f(\frac{q}{p})=f(\frac{p}{q})$

證明：

由定理1知$\frac{q}{p}$的任一種串並表達式經由$+,\|$互換後可得到$\frac{p}{q}$。我們使用反證法，假設$y=f(\frac{q}{p})$，那麼$\frac{q}{p}$最少用y個單位電阻構造，且由定理1知$\frac{p}{q}$也可以用y個單位電阻構造，所以$f(\frac{p}{q})\le y$，若$f(\frac{p}{q})=z<y$，那麼再由定理1知$\frac{q}{p}$可以用z個單位電阻構造，與$f(\frac{q}{p})=y>z$矛盾，因此$f(\frac{p}{q})=y=f(\frac{q}{p})$。

推論2：$\forall n,k\in\mathbb{N},k\le A(n)\Rightarrow R(n,k)\times R(n,A(n)-k)=1$

證明：

因為n個單位電阻排出的等效電阻值中，可以找到$\frac{q}{p}$和$\frac{p}{q}$的對應，所以最大和最小的等效電阻值是倒數關係，第二大和第二小也是倒數關係，因此全部的電阻值以中位數對稱作對應。

(三)變換定理

引理2：$\forall a,b\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow a+b>a>a\|b$

證明：

$a+b>a$顯然成立，而右式因為$a\|b=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}<\frac{a(a+b)}{a+b}=a$所以成立。

引理3：將電阻值x, y串聯成等效電阻值R、並聯成等效電阻值r，其中

$x, y \in \mathbb{Q}^+, R = x + y, r = x \parallel y$，若固定$x$，則$R$和$r$均隨$y$增大而增大、減小而減小。

證明：

串聯之引理顯然成立。x, y並聯時，令$r' = x + y'$，若$y' < y$，

$r' = x \parallel y' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y'}} < \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = x \parallel y = r$，反之亦然，因此定理證畢。

定理2：若將一串並表達式作一次串聯變換，則等效電阻值降低；反之，若將一串並表達式作一次並聯變換，則等效電阻值增加。

證明：

先考慮串聯變換

Case1：只有電阻值a, b串聯，其中$a, b \in \mathbb{Q}^+$，對a, b間的串連作串聯變換，由引理2知

$a + b > a \parallel b$，因此定理成立。

Case2：當一串並表達式局部被作串聯變換後，由 Case1 知此局部減小，並由引理3知不論前面為串聯或並聯，外面一層層都會減小，所以總等效電阻值會減小。

反之亦然，所以並聯變換會讓等效電阻值增加。

(四)整數定理

定理3：$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow R(n,1) = n$

證明：

我們考慮n個單位電阻串聯(沒有並聯)的電阻表達式，由變換定理，作了一次串聯變換後，等效電阻值降低，而作了多次串聯變換後，等效電阻值會不斷降低，因此初始的n個單位電阻串聯才是最大的。

定理4：$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = f(\frac{1}{n}) = n$

證明：

因為n個單位電阻串聯的等效電阻為n，所以$f(n) \le n$。

使用反證法，若$y = f(n) < n$，然而由定理3知y個單位電阻所能排出的最大等效電阻為y，且$y < n$，因此y個電阻無法經由串並聯排出等效電阻n，矛盾，因此$f(n) = n$，且由定理1知$f(\frac{1}{n}) = f(n) = n$。

推論3：$\forall m \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow f(m) \ge \lceil m \rceil$

證明：

由定理4，因為$|m|$個單位電阻最大只能排出電阻值$|m|$，所以要構造出電阻值m要至少要

使用$|m|$個單位電阻。

(五) n 個單位電阻排出的所有等效電阻值

我們手算出 $1\sim 6$ 個單位電阻串並聯構造出之所有等效電阻值，想法如下：若要求出 n 個單位電阻構造出的所有等效電阻值，我們將所有 $n-1$ 個單位電阻構造出的電阻值加 1，得到其中一部份；設 $\forall\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \ge k > 1$，將 k 個和 $n-k$ 個單位電阻構造出的電阻值中，最後一步是並聯的作相加，就得到 n 個單位電阻構造出的所有等效電阻值的另一部份，最後刪除重複的部分。

n	$A(n)$	等效電阻值
1	1	1
2	2	$2,\frac{1}{2}$
3	4	$3,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$
4	9	$4,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{4}{3},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{4}$
5	22	$5,\frac{7}{2},\frac{8}{3},\frac{7}{3},2,\frac{7}{4},\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\frac{6}{7},\frac{5}{6},\frac{4}{5},\frac{5}{7},\frac{5}{8},\frac{4}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\frac{2}{7},\frac{1}{5}$
6	53	$6,\frac{9}{2},\frac{11}{3},\frac{10}{3},3,\frac{11}{4},\frac{13}{5},\frac{12}{5},\frac{9}{4},\frac{11}{5},\frac{13}{6},\frac{13}{7},\frac{11}{6},\frac{9}{5},\frac{12}{7},\frac{13}{8},\frac{11}{7},\frac{3}{2},\frac{10}{7},\frac{11}{8},\frac{4}{3},\frac{9}{7},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{10}{9},\frac{11}{10},1,$ $\frac{10}{11},\frac{9}{10},\frac{5}{6},\frac{4}{5},\frac{7}{9},\frac{3}{4},\frac{8}{11},\frac{7}{10},\frac{2}{3},\frac{7}{11},\frac{8}{13},\frac{7}{12},\frac{5}{9},\frac{6}{11},\frac{7}{13},\frac{6}{13},\frac{5}{11},\frac{4}{9},\frac{5}{12},\frac{5}{13},\frac{4}{11},\frac{1}{3},\frac{3}{10},\frac{3}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{6}$

四、連分數構造法

假設現有正整數 m,n，我們可以構造一種用有限個電阻串並聯出一電路圖使等效電阻為 $\frac{n}{m}$，

假設電阻值 $\frac{n}{m}$ 連分數構造法所需的電阻數為 $s(\frac{n}{m})$。構造如下：

(一)若 $m\mid n$，則串聯 $\frac{n}{m}$ 個單位電阻，$s(\frac{n}{m})=\frac{n}{m}$。

(二)若 $n\mid m$，則並聯 $\frac{m}{n}$ 個單位電阻，$s(\frac{n}{m})=\frac{m}{n}$。

(三)若 $m\nmid n, n\nmid m, n>m$，則串聯 $\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor,\left\{\frac{n}{m}\right\}$，其中 $\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$ 為高斯符號，$\left\{\frac{n}{m}\right\}=\frac{n}{m}-\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$。由定理 4 知 $\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$ 至少要 $\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$ 個電阻，我們再對 $\left\{\frac{n}{m}\right\}$ 重新判斷找到其連分數構造法，

$s(\frac{n}{m})=\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor+s(\left\{\frac{n}{m}\right\})$。

(四)若 $m\nmid n, n\nmid m, m>n$，則並聯 $\frac{1}{\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor},\frac{1}{\left\{\frac{m}{n}\right\}}$，因為 $\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor$ 為正整數，由定理 4 知 $\frac{1}{\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor}$ 至少要 $\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor$ 個電阻，我們再對 $\frac{1}{\left\{\frac{m}{n}\right\}}$ 重新判斷找到其連分數構造法，

$$s(\frac{n}{m})=\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + s(\frac{1}{\left\{ \frac{m}{n} \right\}}) = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + s(\left\{ \frac{m}{n} \right\})$$ 。

不斷重複此判斷法直到找完所有未知數的連分數構造法。
連分數構造法的幾何模型如下：在長為n、寬為m的矩形中，對於m,n中較小的數，不妨假設為m，則畫一個$m \times m$的正方形，然後對剩下的$(n-m)\times m$矩形再重新判斷，直到整張圖都被分割為若干個正方形，參考網路文章[5]，此幾何模型分割法即為連分數之幾何對應。

例如：$\frac{7}{10}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}=1\parallel\frac{7}{3}=1\parallel(1+1+\frac{1}{3})=1\parallel(1+1+(1\parallel1\parallel1))$ 。

五、電阻排列費波那契數列

(一)定義

費波那契數遞迴式 $F_n=\begin{cases}1, n=1\\ 1, n=2\\ F_{n-1}+F_{n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n>2\end{cases}$ 。我們稱$<F_n>$為費波那契數列，簡稱費氏數列。

性質 2：$<F_n>$為費氏數列，則有以下性質

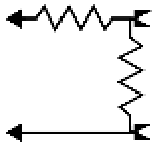
(1) $(F_n,F_{n+1})=1$，其中$n\in\mathbb{N}$ 。

(2) $F_{m+1}F_{n-m+1}+F_mF_{n-m}=F_{n+1}$，其中$n,m\in\mathbb{N}, n>m$ 。

(二) $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 的連分數構造法

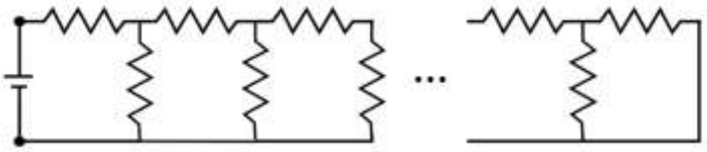
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 的連分數為$[1;\overbrace{1,\cdots,1}^{n-1\text{個}}]$，因此其連分數構造法為以下漂亮的形式：

我們將兩個電阻拼成如下的單位，類似於一塊積木，



當$n=2k-1$時，將上述單位拼接k個，其中最右邊的單位只有一個電阻，如下圖。

k 組，共 $2k-1$ 個電阻



當 $n=2k$ 時，將上述單位拼接 k 個，如下圖。

六、分子分母上界定理與費氏數比值構造法

定理5：$<F_n>$ 為費氏數，若 n 個電阻任意排出的最簡有理數 $\frac{q}{p}$，其中 $p,q\in\mathbb{N},(p,q)=1$，

則 $p\le F_{n+1}, q\le F_{n+1}, p+q\le F_{n+2}$

證明：

利用強數學歸納法，

當 $n=1$ 時，顯然成立。

若 $\forall k<n, k\in n$ 成立，

當 $n=k$ 時，由倒數定理我們只需討論串聯而不用討論並聯，假設電阻值 $\frac{s}{r}$ 和 $\frac{u}{t}$ 串聯成等效電阻值 $\frac{q}{p}$，且 $\frac{s}{r}$ 用了 m 個電阻、$\frac{u}{t}$ 用了 $k-m$ 個單位電阻，已知 $r\le F_{m+1},\ s\le F_{m+1},\ r+s\le F_{m+2}$，$t\le F_{k-m+1},\ u\le F_{k-m+1},\ t+u\le F_{k-m+2}$，又 $\frac{q}{p}=\frac{s}{r}+\frac{u}{t}=\frac{ru+st}{rt}$，因此我們想要證明

$$\begin{aligned}&1.q=ru+st\le F_{k+1},\\&2.p=rt\le F_{k+1},\\&3.p+q=ru+st+rt\le F_{k+2}\end{aligned}$$

1.因為 $r+s\le F_{m+2},\ t+u\le F_{k-m+2}$，所以 $ru+st$ 的最大值會發生在 $r+s=F_{m+2}, t+u=F_{k-m+2}$，此時不妨假設 $r+s=F_{m+2}, t+u=F_{k-m+2}$ 且 $r\ge s$。又 $r\le F_{m+1},\ u\le F_{k-m+1}$ 可由排序不等式知道 $ru+st$ 的最大值會發生在 $r=F_{m+1}, u=F_{k-m+1}$，所以 $s=F_{m+2}-r=F_{m+2}-F_{m+1}=F_m$ 且 $t=F_{k-m+2}-u=F_{k-m+2}-F_{k-m+1}=F_{k-m}$，因此 $q=ru+st\le F_{m+1}F_{k-m+1}+F_mF_{k-m}=F_{k+1}$。

2. $p=rt\le F_{m+1}F_{k-m+1}\le F_{m+1}F_{k-m+1}+F_mF_{k-m}=F_{k+1}$

3. $$\begin{aligned}p+q&=ru+st+rt\\&=(r+s)(t+u)-su\end{aligned}$$

$$\le F_{m+2}F_{k-m+2}-su$$

$$=F_{m+2}F_{k-m+2}-(F_{m+2}-r)(F_{k-m+2}-t)$$

$$\le F_{m+2}F_{k-m+2}-(F_{m+2}-F_{m+1})(F_{k-m+2}-F_{k-m+1})$$

$$=F_{m+2}F_{k-m+2}-F_mF_{k-m}$$

$$=F_{k+3}-F_{m+1}F_{k-m+1}-F_mF_{k-m}$$

$$=F_{k+3}-(F_{m+1}F_{k-m+1}+F_mF_{k-m})$$

$$=F_{k+3}-F_{k+1}$$

$$=F_{k+2}$$

定理6：$\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow f(\frac{F_{n+1}}{F_n})=f(\frac{F_n}{F_{n+1}})=n=s(\frac{F_{n+1}}{F_n})=s(\frac{F_n}{F_{n+1}})$

證明：

用反證法，前面已經知道可以用n個單位電阻構造$\frac{F_{n+1}}{F_n}$或$\frac{F_n}{F_{n+1}}$，設$f(\frac{F_{n+1}}{F_n})=n'<n$，即用$n'$個單位電阻構造出等效電阻值$\frac{F_{n+1}}{F_n}$。因為$(F_n,F_{n+1})=1$，可由定理5推出$F_{n+1}\le F_{n'+1}$，與$n'<n$矛盾。因此$f(\frac{F_{n+1}}{F_n})=n$，且由定理1推得$f(\frac{F_{n+1}}{F_n})=f(\frac{F_n}{F_{n+1}})=n$。

七、電阻排列佩爾數

從參考文件[2]中，節錄佩爾數的定義如下。

(一)定義佩爾數

佩爾數遞迴式$P_n=\begin{cases}0,n=0\\1,n=1\\2P_{n-1}+P_{n-2},n>1,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

(二)關於佩爾數的數列$\frac{P_{n+1}}{P_n}$

定義$<b_n>,\forall n\in\mathbb{N},b_n=\frac{P_{n+1}}{P_n}$

$b_n=\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{2P_n+P_{n-1}}{P_n}=2+\frac{1}{\frac{P_n}{P_{n-1}}}=2+\frac{1}{\frac{2P_{n-1}+P_{n-2}}{P_{n-1}}}=2+\frac{1}{2+\frac{\mathrm{P}_{n-2}}{P_{n-1}}}=2+\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{b_{n-2}}}$，因此我們可以作出如下構造：

八、電阻排列遞迴數列$<R_n>=kR_{n-1}+R_{n-2}$

從費氏數推到佩爾數時，我們將R_{n-1}項的係數由 1 改為 2，現在我們將它推廣到所有可能的有理數。

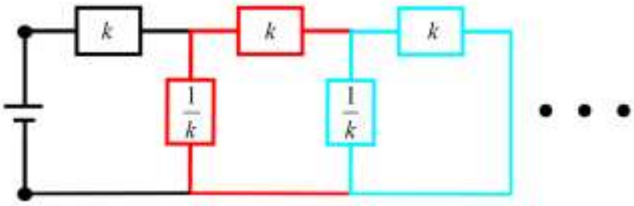
(一)定義

給定$k\in\mathbb{N}$，$R_n=\begin{cases}0,n=0\\1,n=1\\kR_{n-1}+R_{n-2},n>1,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

(二)關於R的數列$\frac{R_{n+1}}{R_n}$

定義$<c_n>,\forall n\in\mathbb{N},c_n=\frac{R_{n+1}}{R_n}$

$c_n=\frac{R_{n+1}}{R_n}=\frac{kR_n+R_{n-1}}{R_n}=k+\frac{1}{\frac{R_n}{R_{n-1}}}=k+\frac{1}{\frac{kR_{n-1}+R_{n-2}}{R_{n-1}}}=k+\frac{1}{k+\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}}=k+\frac{1}{k+\frac{1}{c_{n-1}}}$，因此我們可以作出如下構造：



九、電阻排列遞迴數列$<R_n>=R_{n-1}+kR_{n-2}$

現在我們將R_{n-2}係數改為所有正整數，嘗試構造此數列。

(一)定義

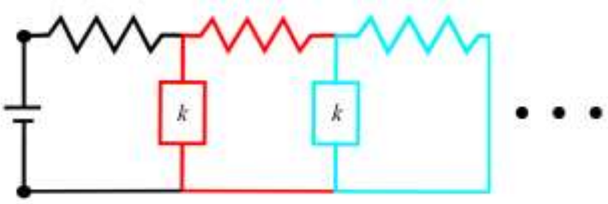
給定$k\in\mathbb{N}$，$R_n=\begin{cases}0,n=0\\1,n=1\\R_{n-1}+kR_{n-2},n>1,n\in\mathbb{N}\end{cases}$

(二)關於 R 的數列 $\frac{R_{n+1}}{R_n}$

定義 $< c_n >, \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$

$$c_n = \frac{R_{2n}}{R_{2n-1}} = \frac{R_{2n-1} + kR_{2n-2}}{R_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{R_{2n-1}}{kR_{2n-2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{R_{2n-2} + kR_{2n-3}}{kR_{2n-2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{R_{2n-3}}{R_{2n-2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{c_{n-1}}} ,$$

$r_1 = 1, r_2 = k+1$，因此我們可以作出如下構造：



十、電阻排列遞迴數列 $< R_n >= aR_{n-1} + bR_{n-2}$

將 R_{n-1} 跟 R_{n-2} 項都設為所有正整數，嘗試構造此數列。

(一)定義

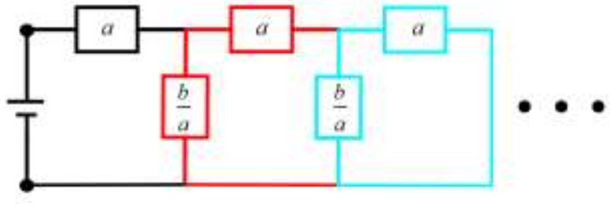
給定 $k \in \mathbb{N}$ ，$R_n = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 1, n = 1 \\ aR_{n-1} + bR_{n-2}, n > 0, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(二)關於 R 的數列 $\frac{R_{n+1}}{R_n}$

定義 $< d_n >, \forall n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$ ，

$$d_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{aR_n + bR_{n-1}}{R_n} = a + \frac{1}{\frac{R_n}{bR_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{aR_{n-1} + bR_{n-2}}{bR_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}}} = a + \frac{1}{\frac{1}{\frac{b}{a}} + \frac{1}{d_{n-1}}} ,$$

$r_1 = a, r_2 = a + \frac{b}{a}$ ，因此我們可以作出如下構造：



十一、電阻排列卡特蘭數

(一)定義卡特蘭數

卡特蘭數$C_n = \frac{C_n^{2n}}{n+1} = C_n^{2n} - C_{n+1}^{2n}$

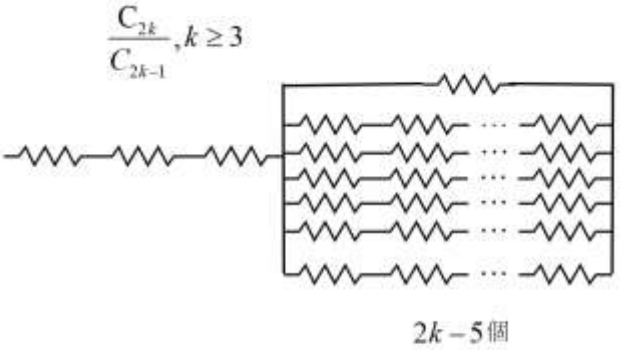
(二)關於卡特蘭數的數列$\frac{C_{2k}}{C_{2k-1}}$

已知卡特蘭數C_n，定義$<e_n>, e_k = \frac{C_{2k}}{C_{2k-1}}, k \geq 3$，將$d_k$進一步展開，

$$e_k = \frac{C_{2k}}{C_{2k-1}} = \frac{C_{2k}^{4k} - C_{2k+1}^{4k}}{C_{2k-1}^{4k-2} - C_{2k}^{4k-2}} = \frac{C_{2k}^{4k} - \frac{2k}{2k+1} C_{2k}^{4k}}{\frac{C_{2k-1}^{4k-2}}{2k}} \frac{8k-2}{2k+1} = 3 + \frac{2k-5}{2k+1} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2k-5}{6}}}$$

，因此在較大的

卡特蘭數可做出如下的構造：



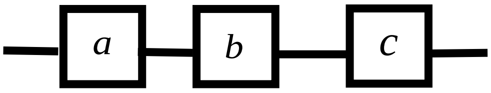
十二、電阻值為$\frac{2n-3}{2}$的連分數構造法

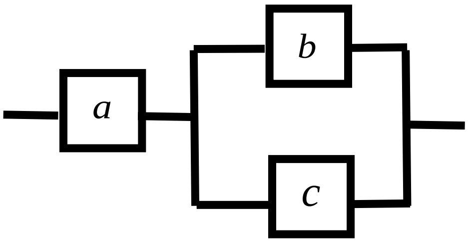
考慮n個單位電阻排出的所有等效電阻值，其中$n > 1$，由定理3知道，這些電阻值中最大的是n，我們想要證明這些電阻值中第二大的是$\frac{2n-3}{2}$。

定理 7：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow R(n,2) = \frac{2n-3}{2}$

證明：

給定n個單位電阻，將其全部進行串聯，分為三段分別有a,b,c個單位電阻，如左下圖，其中$a+b+c=n$。現在將b個單位電阻和c個單位電阻由串聯改為並聯，如右下圖，為一次串聯變換，即將電阻值$a+b+c$變換為$a+(b \| c)$。





以下針對b,c分三種狀況討論：

(1)當$b=c=1$且$a=n-2$

電阻值為$a+(b\parallel c)=n-2+\dfrac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\dfrac{2n-3}{2}$。

(2)當$b=1,c>1,a=n-1-c$

因為$\dfrac{c^2}{c+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2c^2-c-1}{2(c+1)}=\dfrac{(2c+1)(c-1)}{2(c+1)}>0$，即$\dfrac{c^2}{c+1}>\dfrac{1}{2}$

所以$a+(b\parallel c)=n-1-c+\dfrac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{c}}=n-1-c+\dfrac{c}{c+1}=n-1-\dfrac{c^2}{c+1}<n-1-\dfrac{1}{2}=n-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2n-3}{2}$ 。

(3)當$a=n-b-c,b>1,c>1$

此時等效電阻為$a+(b\parallel c)=a+\dfrac{bc}{b+c}$，

$$a+\frac{bc}{b+c}=n-(b+c-\frac{bc}{b+c})\le n-(b+c-\frac{(\frac{b+c}{2})^2}{b+c})=n-(b+c-\frac{b+c}{4})=n-\frac{3(b+c)}{4}<n-\frac{3}{2}=\frac{2n-3}{2}$$

。

因此從n作一次串聯變換所形成的所有電阻值中，最大的是$\dfrac{2n-3}{2}$。又由定理2，每作一次串聯變換，總電阻值就會降低，$\in\mathbb{N},n$因此我們要$\dfrac{2n-3}{2}$是n個單位電阻經由串並聯排出的等效電阻值中第二大的(僅次於n)。

定理 8：$\forall n\in\mathbb{N},n\ge 2\Rightarrow f(\dfrac{2n-3}{2})=n=s(\dfrac{2n-3}{2})$

由定理 7 知，$\forall m<n,m\in\mathbb{N}$，$m$個電阻構造的出來等效電阻值最大為$m$，$m\neq\dfrac{2n-3}{2}$；第二大為$\dfrac{2m-3}{2}$，$\dfrac{2m-3}{2}<\dfrac{2n-3}{2}$，構造不出$\dfrac{2n-3}{2}$，因此定理成立。

十三、電阻值為$\dfrac{3n-7}{3},\dfrac{3n-8}{3}$的連分數構造法

考慮n個電阻排出的所有等效電阻，其中$n\ge 3$，由定理 3、定理 7 知，最大的是n，第二大的是$\dfrac{2n-3}{2}$，我們想要證明$\dfrac{3n-7}{3},\dfrac{3n-8}{3}$分別是第三大的和第四大的。

定理 9： $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3 \Rightarrow R(n,3)=\frac{3n-7}{3}, R(n,4)=\frac{3n-8}{3}$

證明：

類似定理 7 的證法，改考慮兩次以內的串聯變換，有以下三種可能：

(一)一次變換

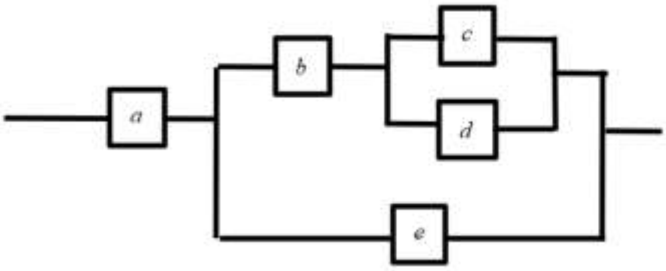
同定理 7 的作法，考慮 n 個單位電阻排出的電阻值中除了 $n,\frac{2n-3}{2},\frac{3n-7}{3},\frac{3n-8}{3}$ 以外，有 $a=n-b-c$ ，不妨設 $b\geq c$ 。

當 $c=1\Rightarrow b\geq 3$ ， $a+(b\parallel c)=n-b-c+\frac{bc}{b+c}\leq n-\frac{3(b+c)}{4}\leq n-\frac{12}{4}\leq n-\frac{8}{3}=\frac{3n-8}{3}$ 。

當 $c\geq 2\Rightarrow b\geq c\geq 2$ ， $a+(b\parallel c)=n-b-c+\frac{bc}{b+c}\leq n-\frac{3(b+c)}{4}\leq n-\frac{12}{4}\leq n-\frac{8}{3}=\frac{3n-8}{3}$ 。

，因此從 n 作一次串聯變換下所得的電阻值中除了 $\frac{2n-3}{2},\frac{3n-7}{3}$ 都小於 $\frac{3n-8}{3}$ 。

(二)二次變換1



依照上圖， $\frac{3n-7}{3},\frac{3n-8}{3}$ 分別是 $c=1,d=2,b=e=0,a=n-b-c-d-e=n-3$ 和 $b=0,c=d=e=1,a=n-b-c-d-e=n-3$ 的特例。

相較於 $n=a+b+c+d+e$ ，第一次變換完等效電阻為 $a+b+(c\parallel d)+e=n-((c+d)-(c\parallel d))$ ，；第二次變換完等效電阻為

$$a+((b+(c\parallel d))\parallel e)$$
$$=(a+b+(c\parallel d)+e)-((b+(c\parallel d)+e)-((b+(c\parallel d))\parallel e))$$
$$=(a+b+(c\parallel d)+e)-((b+(c\parallel d)+e)-(\frac{(b+(c\parallel d))\times e}{b+(c\parallel d)+e}))$$
$$=n-((c+d)-(c\parallel d))-((b+(c\parallel d)+e)-(\frac{(b+(c\parallel d))\times e}{b+(c\parallel d)+e}))$$
$$=n-((c+d)-(c\parallel d)+(b+(c\parallel d)+e)-(\frac{(b+(c\parallel d))\times e}{b+(c\parallel d)+e}))$$
$$=n-(c+d+b+e-(\frac{(b+(c\parallel d))\times e}{b+(c\parallel d)+e}))$$

$$=n-(b+c+d+e-(\frac{(b+\frac{cd}{c+d})\times e}{b+\frac{cd}{c+d}+e}))$$

$$\leq n-(b+c+d+e-\frac{(b+\frac{c+d}{4})\times e}{b+\frac{c+d}{4}+e})$$

$$\leq n-(b+c+d+e-\frac{b+\frac{c+d}{4}+e}{4})$$

$$=n-(\frac{12b+15c+15d+12e}{16})$$

以下分兩種情況討論：

1.二次變換且$b=0$

由於$c=d=e=1$為$\frac{3n-8}{3}$的構造法，因此考慮$c,d,e\geq 1$且三數不全為1：

$n-(\frac{12b+15c+15d+12e}{16})=n-(\frac{15c+15d+12e}{16})\leq n-(\frac{15+15+12\times 2}{16})=n-\frac{27}{8}\leq n-\frac{8}{3}=\frac{3n-8}{3}$，

得證。

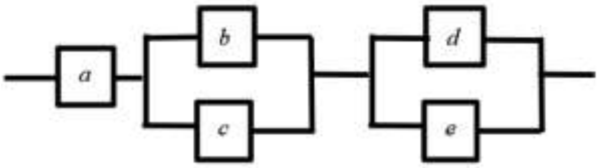
2.二次變換且$b>0$

此時$b,c,d,e\geq 1$，因此$n-(\frac{12b+15c+15d+12e}{16})\leq n-(\frac{12+15+15+12}{16})=n-\frac{27}{8}\leq n-\frac{8}{3}=\frac{3n-8}{3}$，

得證。

(三)二次變換2

由於此處是單純討論二次變換，因此$a\geq 0$且$b,c,d,e>0$，即$b,c,d,e\geq 1$，此時等效電阻



$$a+(b\parallel c)+(d\parallel e)$$

$$=a+\frac{bc}{b+c}+\frac{de}{d+e}$$

$$=n-(b+c-\frac{bc}{b+c}+d+e-\frac{de}{d+e})$$

$$\leq n-(b+c-\frac{b+c}{4}+d+e-\frac{d+e}{4})$$

$$=n-\frac{3(b+c+d+e)}{4}$$

$$\leq n-3\leq n-\frac{8}{3}=\frac{3n-8}{3}$$

定理 10：$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3 \Rightarrow f(\frac{3n-7}{3})=f(\frac{3n-8}{3})=n=s(\frac{3n-7}{3})=s(\frac{3n-8}{3})$

證明：

由定理 9 知，$\forall m<n, m\in\mathbb{N}$ ，m 個電阻構造的出來等效電阻最大為 m ，$m\neq\frac{3n-7}{3}, m\neq\frac{3n-8}{3}$ ；第二大為 $\frac{2m-3}{2}$ ，$\frac{2m-3}{2}\neq\frac{3n-7}{3},\frac{2m-3}{2}\neq\frac{3n-8}{3}$ ；第三和第四大為 $\frac{3m-7}{3}$ 和 $\frac{3m-8}{3}$ ，又 $\frac{3m-8}{3}<\frac{3m-7}{3}<\frac{3n-8}{3}<\frac{3n-7}{3}$ ，所以無法構造 $\frac{3m-7}{3}$ 和 $\frac{3m-8}{3}$ ，因此定理成立。

十四、正整數的構造法

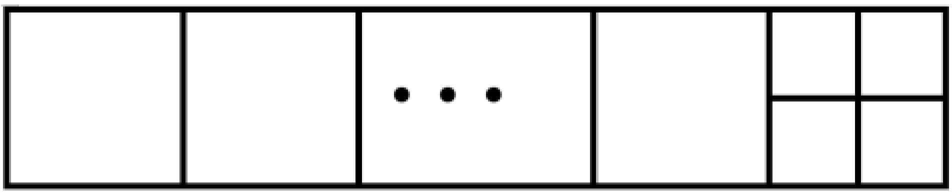
由定理 4 知道，對於任一個正整數 n ，最少要用 n 個單位電阻，那麼電阻值 n 可以用哪些數量的單位電阻構造呢？

(一) n 個

構造為將 n 個單位電阻串聯。

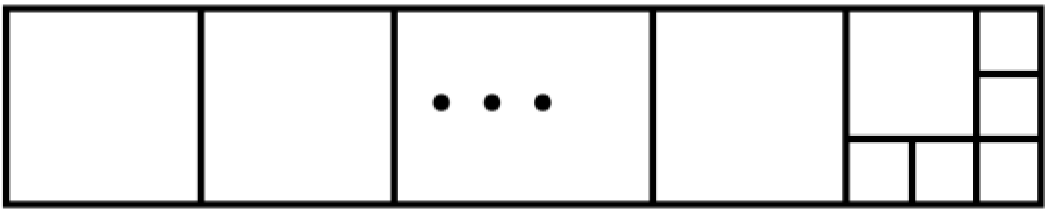
(二) $n+3$ 個

幾何構造如下，其中左邊有 $n-1$ 個 1×1 的正方形，右邊有 4 個 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ 的小正方形



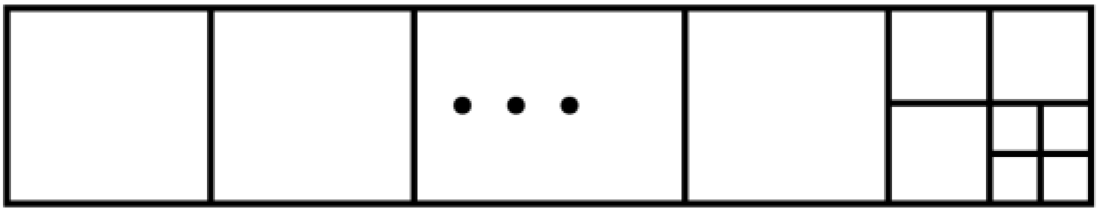
(三) $n+5$ 個

幾何構造如下，其中左邊有 $n-1$ 個 1×1 的正方形，右邊有 1 個 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ 的小正方形和 5 個 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ 的小正方形



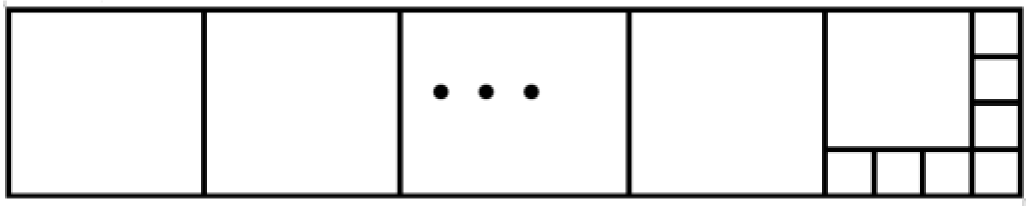
(四) $n+6$ 個

幾何構造如下，其中左邊有 $n-1$ 個 1×1 的正方形，右邊有 3 個 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ 的小正方形和 4 個 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$ 的小正方形



(五)$n+7$個

幾何構造如下，其中左邊有$n-1$個1×1的正方形，右邊有 1 個$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$的小正方形和 7 個$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$的小正方形



(六)$n+k+3$個

$\forall k\in\mathbb{N},k\geq5$ ，$n+k+3$個單位電阻都可以如下構造：幾何模型之構造為在$n+k$的幾何模型中任取一正方形，將其切成四等分，如$n+3$最右邊的4個小正方形的構造。

(七)$n+1$個單位電阻無法構造出電阻值n

證明：用數學歸納法，

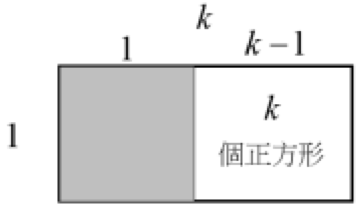
1.$n=1$時，$n+1$個單位電阻構造出的等效電阻值只有$2,\frac{1}{2}$，因此無法構造出n。

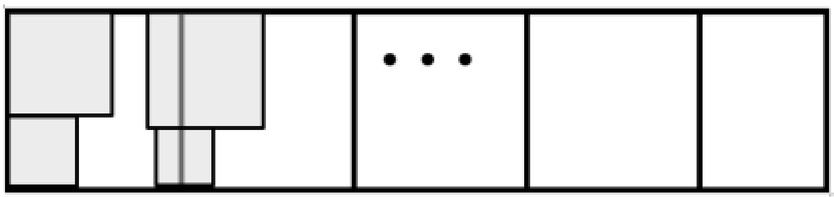
2.若$n=k-1$時，命題成立，當$n=k$時，此時$k\geq2$，用反證法，假設$k+1$個單位電阻可以構造出電阻值k。

Case1：考慮長為k、寬為1的幾何模型，如果切割出1×1的正方形，則其餘部分是以k個正方形正確拼出$k-1$，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足以下條件 case2

Case2：將此幾何模型由左而右分為k個1×1的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，左側兩區域上各自的兩個正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出$2k>k+1$個正方形，代表電阻值k要超過$k+1$個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。





(八)$n+2$個單位電阻無法構造出電阻值n

證明：同(七)證法，用數學歸納法，

1.$n=1$時，$n+2$個單位電阻構造出的等效電阻值只有$3,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$，因此無法構造出$n$。

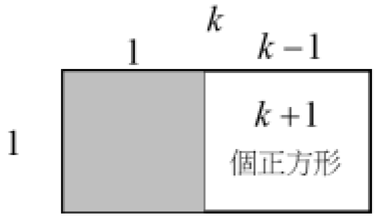
2.$n=2$時，$n+2$個單位電阻構造出的等效電阻值只有$4,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{4}{3},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{4}$，因此無法構造出$n$。

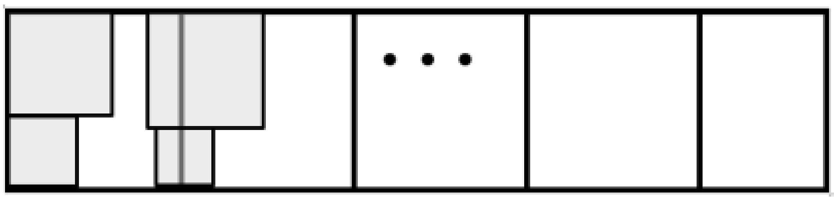
3.若$n=k-1$時，命題成立，當$n=k$時，此時$k\geq3$，用反證法，假設$k+2$個單位電阻可以構造出電阻值k。

Case1：考慮長為k、寬為1的幾何模型，如果切割出1×1的正方形，則其餘部分是以$k+1$個正方形正確拼出$k-1$，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足 case2

Case2：將此幾何模型由左而右分為k個1×1的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出$2k>k+2$個正方形，代表電阻值k要超過$k+2$個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。





(九) $n+4$ 個單位電阻無法構造出電阻值 n

證明：同(七)證法，用數學歸納法，

1. $n=1$時，$n+4$個單位電阻構造出的等效電阻值只有

$5,\frac{7}{2},\frac{8}{3},\frac{7}{3},2,\frac{7}{4},\frac{8}{5},\frac{7}{5},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\frac{6}{7},\frac{5}{6},\frac{4}{5},\frac{5}{7},\frac{5}{8},\frac{4}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\frac{2}{7},\frac{1}{5}$，因此無法構造出$n$。

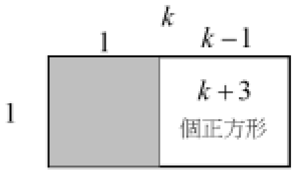
2. $n=2,3,4$時，$n+4$個單位電阻無法構造出n。

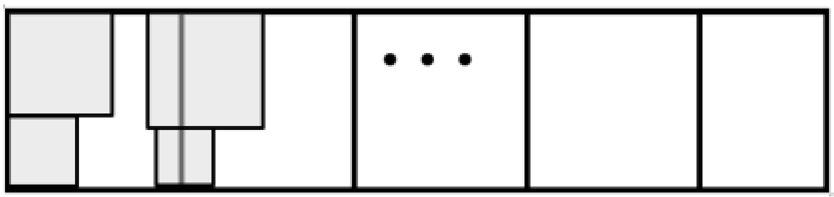
3. 若$n=k-1$時，命題成立，當$n=k$時，此時$k\ge5$，用反證法，假設$k+4$個單位電阻可以構造出電阻值k。

Case1：考慮長為k、寬為1的幾何模型，如果切割出1×1的正方形，則其餘部分是以$k+3$個正方形正確拼出$k-1$，如左下圖，與數學歸納法矛盾。

所以上述幾何模型都滿足 case2

Case2：將此幾何模型由左而右分為k個1×1的區域，每個區域的最左側的邊上都至少有兩個正方形，如右下圖，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少會切出$2k>k+4$個正方形，代表電阻值k要超過$k+4$個單位電阻構造，矛盾，因此命題成立。



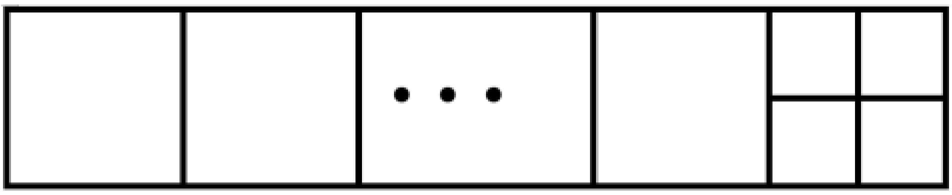


(十)結論

定理 11：$\forall n\in\mathbb{N}$，$n,n+3,n+5$和大於$n+5$的所有正整數都可以構造出電阻值n。

十五、 $n-3$ 的次小構造法

$\forall n\in\mathbb{N},n\ge4$，電阻值$n-3$可以用$n-3$個單位電阻全部串聯，也可以用$n$個單位電阻構造，構造之幾何模型如下，其中左邊有數格正方形，最右邊有個2×2的方格：



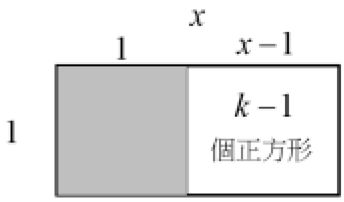
定理12：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow R(n,5) = n-3$

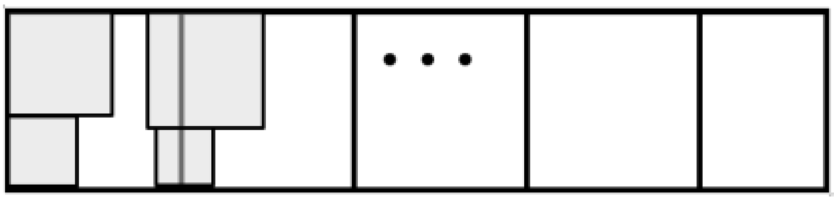
證明：用數學歸納法，

(一)$n=4$時定理成立

(二)若$n=k-1$定理成立，當$n=k$時，我們使用反證法，假設$R(k,5)=x$，由定理 10 知 $R(k,4)=\dfrac{3k-8}{3}$，因此可得$k-3<x<\dfrac{3k-8}{3}$。

Case1：如果x的構造法為1和$x-1$串聯，即x的基本幾何模型中有1×1的正方形，那麼$x-1$可以用$k-1$個單位電阻構造，如左下圖。又$R(k-1,5)=k-4<x-1<\dfrac{3k-11}{3}=R(k-1,4)$，矛盾。因此$x$的基本幾何模型中沒有$1\times1$的正方形。





所以上述幾何模型都滿足以下條件 Case2

Case2：先有$\lceil x \rceil = n-2$。將此幾何模型由左而右分為$k-3$個1×1的區域和剩下最右邊的$(x-n+3)\times1$的區域，如右上圖，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出$2(n-2)=2n-4>n$個小正方形，矛盾，定理成立。

十六、定理 12 證明法之推廣

定理13：若$h \in \mathbb{Q}^{+}, p \in \mathbb{N}$滿足$R(2\lfloor h \rfloor, p) = 2\lfloor h \rfloor - h$，則

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2\lfloor h \rfloor \Rightarrow R(n+1,p) = R(n,p)+1$$

證明：對p做數學歸納法，由定理 7 知$p=2$時定理顯然成立。

若$p=j-1$時定理成立，當$p=j$時，對n做數學歸納法，

$n=2\lfloor h \rfloor$時，欲證$R(n+1,j)=R(n,j)+1$成立，用反證法，假設$R(2\lfloor h \rfloor+1,j)=x$ $\neq R(2\lfloor h \rfloor,j)+1=y$，以下分成兩個 case：

Case1：$y>x$，因為電阻值y可以用$2\lfloor h \rfloor+1$個單位電阻構造，因此可以設q使得$y=R(2\lfloor h \rfloor+1,q),\ q\in\mathbb{N}$，於是就有$R(2\lfloor h \rfloor+1,q)=y>x=R(2\lfloor h \rfloor+1,j)$，所以$j>q$；又由數學歸納法知$R(2\lfloor h \rfloor+1,q)=R(2\lfloor h \rfloor,q)+1$，所以$R(2\lfloor h \rfloor,q)+1=R(2\lfloor h \rfloor+1,q)=y$

$=R(2\lfloor h \rfloor, j)+1$，因此 $q=j$，矛盾。

Case2： $x>y$ 且以 $2\lfloor h \rfloor+1$ 個單位電阻構造電阻值 x 的構造法是 $x-1$ 和 1 串聯，也就是 x 的構造法中有 1×1 的正方形，代表 $x-1$ 可以用 $2\lfloor h \rfloor$ 個單位電阻構造，因此可以設 r 使得 $R(2\lfloor h \rfloor, r)=x-1$，於是就有 $R(2\lfloor h \rfloor, r)=x-1>y-1=R(2\lfloor h \rfloor, j)$，所以 $r<j$；又由數學歸納法知 $R(2\lfloor h \rfloor, r)+1=R(2\lfloor h \rfloor+1, r)$，所以 $R(2\lfloor h \rfloor+1, r)=R(2\lfloor h \rfloor, r)+1=x=R(2\lfloor h \rfloor+1, j)$，因此 $r=j$，矛盾。

Case3： $x>y$ (式 1)且 x 的基本幾何模型中沒有 1×1 的正方形，將此幾何模型由左而右分為 $\lfloor x \rfloor$ 個 1×1 的區域，若 x 不是整數，則會剩下最右邊的小區域，無論 x 是否為整數，都會切出 $|x|$ 個區域，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出 $2\lceil x \rceil$ 個小正方形，而 x 的基本幾何模型要切出 $2\lfloor h \rfloor+1$ 個正方形，所以有 $2\lfloor h \rfloor+1\geq 2\lceil x \rceil$(式 2)，然而

$2\lfloor h \rfloor+1\geq 2\lceil x \rceil$（由式 2）

$\geq 2\lceil y \rceil$（由式 1）

$=2\lceil R(2\lfloor h \rfloor, j)+1 \rceil$

$=2\lceil 2\lfloor h \rfloor-h+1 \rceil$

$=2\lceil (2\lfloor h \rfloor+1)-h \rceil$

$=2\left[(2\lfloor h \rfloor+1)-\lfloor h \rfloor\right]$

$=2\lfloor h \rfloor+3$

矛盾。

若 $n=k-1$ 時，$R(n+1, j)=R(n, j)+1$ 成立，此時有 $k-1\geq 2\lfloor h \rfloor$，即 $k\geq 2\lfloor h \rfloor+1$ (式 3)，當 $n=k$ 時，欲證 $R(k+1, j)=R(k, j)+1$ 成立，用反證法，假設 $R(k+1, j)=u\neq R(k, j)+1=v$，以下分成兩個 case：

Case1： $v>u$，因為電阻值 y 可以用 $k+1$ 個單位電阻構造，因此可以設 s 使得 $v=R(k+1, s)$,

$s \in \mathbb{N}$，於是就有 $R(k+1,s)=v>u=R(k+1,j)$，所以 $j>s$；又由數學歸納法知 $R(k+1,s)=R(k,s)+1$，所以 $R(k,s)+1=R(k+1,s)=v=R(k,j)+1$，因此 $s=j$，矛盾。

Case2：$u>v$ 且以 $k+1$ 個單位電阻構造電阻值 u 的構造法是 $u-1$ 和 1 串聯，也就是 u 的構造法中有 1×1 的正方形，代表 $u-1$ 可以用 k 個單位電阻構造，因此可以設 t 使得 $R(k,t)=u-1$，於是就有 $R(k,t)=u-1>v-1=R(k,j)$，所以 $t<j$；又由數學歸納法知 $R(k,t)+1=R(k+1,t)$，所以 $R(2\lfloor h\rfloor+1,t)=R(k,t)+1=u=R(k+1,j)$，因此 $t=j$，矛盾。

Case3：$u>v$(式 4)且 u 的基本幾何模型中沒有 1×1 的正方形，將此幾何模型由左而右分為 $\lfloor u\rfloor$ 個 1×1 的區域，若 u 不是整數，則會剩下最右邊的小區域，無論 u 是否為整數，都會切出 $|u|$ 個區域，每個區域左側的邊上都有至少兩個小正方形，統計所有區域的此類正方形，它們兩兩不重複，因此至少要分割出 $2\lceil u\rceil$ 個小正方形，而 u 的基本幾何模型要切出 $k+1$ 個正方形，所以有 $k+1\geq 2\lceil u\rceil$(式 5)，然而

$k+1\geq 2\lceil u\rceil$(由式 4)

$\geq 2\lceil v\rceil$(式 5)

$=2\lceil R(k,j)+1\rceil=2\lceil R(k-1,j)+2\rceil$(數學歸納法)

$\vdots$

$=2\lceil R(2\lfloor h\rfloor,j)+(k-2\lfloor h\rfloor+1)\rceil$(數學歸納法)

$=2\lceil (2\lfloor h\rfloor-h)+(k-2\lfloor h\rfloor+1)\rceil$(數學歸納法)

$=2\lceil k-h+1\rceil=2\lceil (k+1)-h\rceil=2[(k+1)-\lfloor h\rfloor]\geq 2(2\lfloor h\rfloor+1+1-\lfloor h\rfloor)$ (由式 3)

$=2\lfloor h\rfloor+3$

矛盾，因此定理成立。

十七、電阻值為 $\frac{4n-13}{4}$ 的連分數構造法

考慮 n 個電阻排出的所有等效電阻，其中 $n \in \mathbb{N}, n \ge 4$ ，由定理 3、定理 7、定理 9、定理12 知道了 $R(n,k), k = 1 \sim 5$ ，我們想要證明 $R(n,6) = \frac{4n-13}{4}$ 。

定理14： $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 4 \Rightarrow R(n,6) = \frac{4n-13}{4}$

證明：由定理13 ，定理14成立若且為若 $R(6,6) = \frac{11}{4}$ ，後者顯然成立，因此定理成立。

定理15： $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 4 \Rightarrow f(\frac{4n-13}{4}) = n = s(\frac{4n-13}{4})$

證明：因為 $\frac{4n-13}{4} = (n-4) + \frac{3}{4} = (n-4) + (1 \| 3)$ ，所以 $f(\frac{4n-13}{4}) \le n - 4 + 1 + 3 = n$ 。

假設 $m = f(\frac{4n-13}{4}) < n$ ，由定理14 ，就有 $R(m,6) = \frac{4m-13}{4} < \frac{4n-13}{4} = R(n,6) = R(m,k)$ ，其中 $k < 6$ ，然而 $k = 1 \sim 5$ 都不可能使上述等式成立，因此 $f(\frac{4n-13}{4}) = n$ 。

十八、定理 13 的應用

定理13的條件 $R(2\lfloor h \rfloor, p) = 2\lfloor h \rfloor - h$ 中，$\lfloor h \rfloor \ge 2\lfloor h \rfloor - h > \lfloor h \rfloor - 1$ ，也就是說我們可以利用程式模擬的結果，找 $2n$ 個單位電阻構造出的等效電阻值 r ，若 $n \ge r > n-1$ 內的，他都會遵循定理 13，我們稱 r 為 $2n$ 的母電阻值，而 $2n+k$ 個單位電阻構造出的電阻值 $r+k$ ，其中 $n \ge r > n-1$ ，我們稱 $r+k$ 為 $2n$ 的子電阻值。

以 $n=3$ 為例，可參照**一、(六) n 個單位電阻排出的所有等效電阻值**，找尋6個電阻構造出的等效電阻值在區間 $(2,3]$ 內，總共會有 $3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ ，因此就有大於6個電阻構造出的等效電阻值中，且 $3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$ 是第6到12大的。

在 $2(n+1)$ 個電阻構造出的所有等效電阻值中，在區間 $(n, n+1]$ 中的電阻值為 $2(n+1)$ 的母電阻值，而區間 $(n+1, n+2]$ 的是 $2n$ 的子電阻值，區間 $(n+k, n+k+1]$ 的是 $2(n-k+1)$ 的子電阻值，所以所有大於 $n+1$ 的電阻值，都是用數量較少的電組構造所得的子電阻值，而我們都可以推算到其源頭，因此可以導出以下定理。

定理 16： $R(n,p) > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow R(n+1,p) = R(n,p) + 1$

證明：假設 $R(n,p) > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ，依 n 的奇偶性討論：

Case1：如果 n 是偶數，設 $n = 2t$ ， $R(2t,p) > \left\lfloor \frac{2t-1}{2} \right\rfloor = t-1$ 。用反證法，若 $R(2t+1,p) \ne R(2t,p)+1$ ，顯然有 $R(2t+1,p) > R(2t,p)+1$ ，由定理 13 知此時 $t < \lfloor h \rfloor$ ，且 $R(2t,p) < 2t-h$ ， $R(2t,p) < 2t-h \le 2t-\lfloor h \rfloor < t$ ，又 $R(2t,p) > t-1$ ，也就是 $t > 2t-\lfloor h \rfloor > t-1$ ，

然而此三數都是正整數，矛盾。

Case2：如果n是奇數，設$n=2t+1$，$R(2t+1,p)>\left\lfloor \frac{2t}{2} \right\rfloor = t$。用反證法，若$R(2t+2,p)\neq R(2t+1,p)+1$，顯然有$R(2t+2,p)>R(2t+1,p)+1\geq R(2t,p)+2$，由定理 13 知此時$t<\lfloor h \rfloor$，且$R(2t+2,p)<2t-h+2$，$R(2t+2,p)<2t-h+2\leq 2t-\lfloor h \rfloor+2<t+2$，又$R(2t+2,p)>R(2t+1,p)+1>t+1$，也就是$t+2>2t-\lfloor h \rfloor+2>t+1$，然而此三數都是正整數，矛盾。

定理 17：$R(n,p)>\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow R(n,p)=R(n-1,p)+1$

證明：假設$R(n,p)>\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，依$n$的奇偶性討論：

Case1：如果n是偶數，設$n=2t$，$R(2t,p)>\left\lfloor \frac{2t}{2} \right\rfloor = t$。用反證法，若$R(2t,p)\neq R(2t-1,p)+1$，顯然有$R(2t,p)>R(2t-1,p)+1\geq R(2t-2,p)+2$，由定理 13 知此時$t-1<\lfloor h \rfloor$，且$R(2t,p)<2t-h$，$R(2t,p)<2t-h\leq 2t-\lfloor h \rfloor<t+1$，又$R(2t,p)>t$，也就是$t+1>2t-\lfloor h \rfloor>t$，然而此三數都是正整數，矛盾。

Case2：如果n是奇數，設$n=2t+1$，$R(2t+1,p)>\left\lfloor \frac{2t+1}{2} \right\rfloor = t$。用反證法，若$R(2t+1,p)\neq R(2t,p)+1$，顯然有$R(2t+2,p)-1\geq R(2t+1,p)>R(2t,p)+1$，由定理 13 知此時$t<\lfloor h \rfloor$，且$R(2t+2,p)<2t-h+2$，$R(2t+2,p)<2t-h+2\leq 2t-\lfloor h \rfloor+2<t+2$，又$R(2t+2,p)\geq R(2t+1,p)+1>t+1$，也就是$t+2>2t-\lfloor h \rfloor+2>t+1$，然而此三數都是正整數，矛盾。

定理 18：$m\in\mathbb{Q}^+, m>\left\lfloor \frac{f(m)-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow f(m+1)=f(m)+1$

證明：用反證法，如果$m\in\mathbb{Q}^+, m>\left\lfloor \frac{f(m)-1}{2} \right\rfloor$但$f(m+1)\neq f(m)+1$，顯然$f(m+1)<f(m)+1$，設$f(m)=a, f(m+1)=a-k+1, R(a,p)=m, R(a-k+1,q)=m+1$，因此$R(a,q)=m+k$，因為$f(m)=a$，所以$R(a-k,q)\neq m$，顯然$R(a-k,q)<m$，所以$R(a-k+1,q)=m+1\leq\left\lfloor \frac{a-k+1}{2} \right\rfloor$，$\left\lfloor \frac{a-k+1}{2} \right\rfloor \geq R(a-k+1,q)=m+1=R(a,q)-k+1>\left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor -k+1=\left\lfloor \frac{a-2k+1}{2} \right\rfloor$，顯然矛盾，因此$f(m+1)=f(m)+1$。

十九、定理 18 的推廣

定理 18 讓我們找到切割出 1 的充分條件，再來我們希望能找到何時可以切出$\frac{1}{2}$，因此我們找到以下定理：

定理 19：$m\in\mathbb{Q}^+, m\geq\frac{1}{2}, m\geq\frac{2}{9}f(m-\frac{1}{2})+\frac{4}{9}\Rightarrow f(m)=f(m-\frac{1}{2})+2$ or $f(m)=f(m-1)+1$

證明：用反證法，畫出m的基本幾何模型，若$m\in\mathbb{Q}^+, m\geq\frac{1}{2}, m\geq\frac{2}{9}f(m-\frac{1}{2})+\frac{4}{9}$，且

$f(m) < f(m-\frac{1}{2})+2$ and $f(m) < f(m-1)+1$，代表此時m的最小構造法沒有切割出1×1的正方形以及長為$\frac{1}{2}$和寬為1的矩形，滿足這些條件中的矩形中，效率函數最小的是$\frac{2}{3}$，因此有

$f(m) \ge f(\frac{2}{3})(\left\lceil \frac{m}{\frac{2}{3}} \right\rceil)$，以下以$m$的性質分三個 case 討論

(1) $m=\frac{2}{3},\frac{3}{2}$，顯然不滿足$m \ge \frac{2}{9}f(m-\frac{1}{2})+\frac{4}{9}$

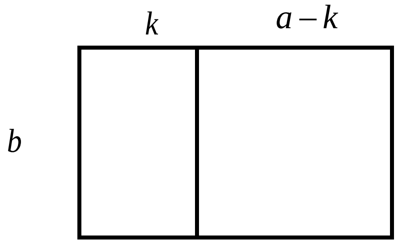
(2) $\frac{2}{3} \mid m, m>\frac{2}{3}$，由定理10知其最小構造法必切出$1\times 1$的正方形。

(3) $\frac{2}{3} \nmid m$，$f(m) \ge f(\frac{2}{3})(\left\lceil \frac{m}{\frac{2}{3}} \right\rceil) \ge f(\frac{2}{3})\times\frac{m}{\frac{2}{3}}=\frac{9m}{2} \ge \frac{9}{2}(\frac{2}{9}f(m-\frac{1}{2})+\frac{4}{9}) \ge f(m-\frac{1}{2})+2$，矛盾。因此定理成立。

二十、無法切割無理數邊長

定理 20：串並表達式對應的幾何模型中，正方形邊長不可能是無理數。

證明：使用反證法，首先我們可以確定若干個單位電阻進行串並聯的等效電阻值為有理數。假設有一個串並表達式對應幾何模型中存在一個邊長為無理數的正方形 S，我們考慮包含 S 的矩形中邊長皆是有理數且面積最小的，將 S 分割為兩部分的那刀一定是切在邊長不為有理數的點上，如下圖，$a,b \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，那麼我們就會得到若干個單位電阻進行串並聯得到等效電阻值$\frac{k}{b}$，而$\frac{k}{b} \notin \mathbb{Q}$，因此矛盾。

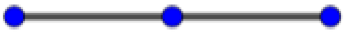


二十一、電阻與圖論

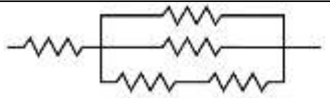
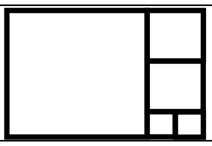
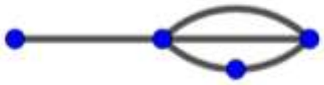
由參考資料[5]，我們可以定義電阻的圖論模型。

對於一個單位電阻，我們可以將它改為圖論的形式，是一線段且左右兩端各有一個點，左邊的點稱為它的頭，右邊的點稱為尾，如左下圖，並且我們稱電阻轉為圖論形式為其圖論模型。

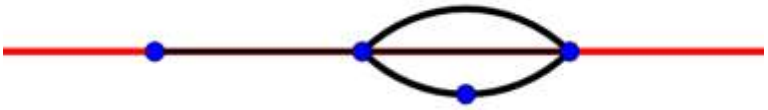
如果兩個單位電阻進行串聯，則左邊模型的尾與右邊模型的頭相接，如左下圖；如果兩個單位電阻進行並聯，則將兩模型的頭相接、尾相接，如右下圖。



將數個單位電阻進行串並聯得到一個模組。如果將兩個模組進行串聯，則連接左邊模組的圖論模型的尾與後面模組的圖論模型的頭；如果要將兩個模組進行並聯，則將兩模組的圖論模型的頭相接、尾相接。以下以$\frac{7}{5}=1+\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}$舉例。

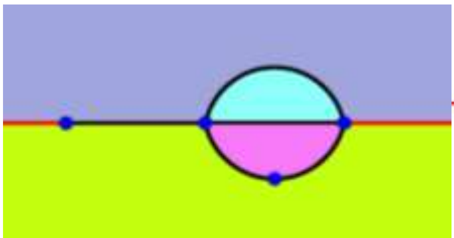
電路圖	幾何模型	圖論模型
		

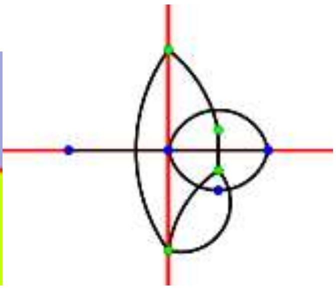
定義一圖論模型中的軸為過兩端點的直線，且此圖若可以分割為許多的模組串聯，則每個模組的兩端點也都在軸上。例如下圖的紅線極為它的軸。



定義圖論模型中的對偶圖：原圖的邊以及圖外的軸將平面分割為許多區域，對於每個區域中恰有一個對偶圖的點；對於原圖中的每條邊，其兩側區域中各有一個對偶圖的點，在此兩點間連一條過此邊的線，此線為對偶圖的邊。

以下面兩張圖為例，原圖使用藍色的點，其對偶圖使用綠色的點。左下圖用四種顏色標示出此圖有四個獨立的區域，而在右下圖中，我們在每個區塊標出一個綠點，並且對於原圖的五條邊都用一條邊連結兩側的點。





如果我們計算兩張互為對偶圖對應的電阻值，可以發現他們互為倒數，因此由以下定理：

定理 21：將一串並表達式的$+$和$||$都作一次變換等價它的圖論模型的對偶圖

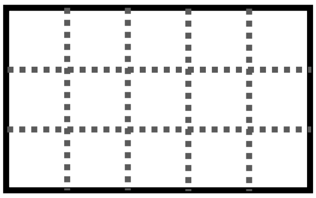
證明：事實上此定理證明即為定理1的證明1轉為圖論模式，將圖論模型拆解為許多部份並且做數學歸納法，因此在此省略。

二十二、 $g(n,m)$ 構造法

定義一個演算法：

$$g(n,m)=\begin{cases}\min\left(\min\left(g(i,m)+g(n-i,m),i=1\sim\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right),\min\left(g(n,i)+g(n,m-i),i=1\sim\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right),m,n\in\mathbb{N},m,n>1\\ n,m=1\\ m,n=1\\ \end{cases}$$

此演算法的幾何意義將長為 n 寬為 m 的矩形畫上 mn 個 1×1 的正方形，如下圖是 $n=5,m=3$ 的舉例。將此矩形沿著虛線切割為兩部分，找到切割後的兩矩形在 g 函數下的值並相加，嘗試切割所有虛線後取相加的值最小的作為此矩形 g 的值，因此他是**切割出最少正整數邊長的正方形的構造方法**。



事實上 $g(n,m)=f(\frac{n}{m})$ 若且為若 $\frac{n}{m}$ 在後面的最小構造法的表格上不是綠色，因此我們可以發現，此演算法是非常好的函數 f 上界。特別注意若 $k\in\mathbb{N}$ ，可能有 $g(n,m)\neq g(kn,km)$ ，例如 $g(17,19)=11,g(34,38)=10$ ，所以 g 函數有兩個參數。

根據定義我們可以找到許多 g 函數的性質：

性質 3： $k,m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow f(\frac{n}{m})\leq g(kn,km)\leq g(n,m)$

證明：

$f(\frac{n}{m})\leq g(kn,km)$ ：前面已知函數 g 是函數 f 的上界，因此 $f(\frac{n}{m})=f(\frac{kn}{km})\leq g(kn,km)$ 。

$g(kn,km)\leq g(n,m)$ ：從幾何觀點來看，若將長 n 寬 m 的矩形等比例放大 k 倍， $g(n,m)$ 的每種切割方法都包含在 $g(kn,km)$ 中，因此有 $g(kn,km)\leq g(n,m)$ 。

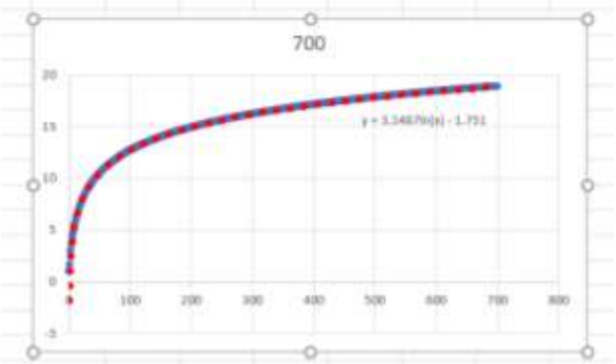
定理 22： $\forall m,n\in\mathbb{N}\ \exists k\in\mathbb{N}\ s.t.\ g(kn,km)=f(\frac{n}{m})$

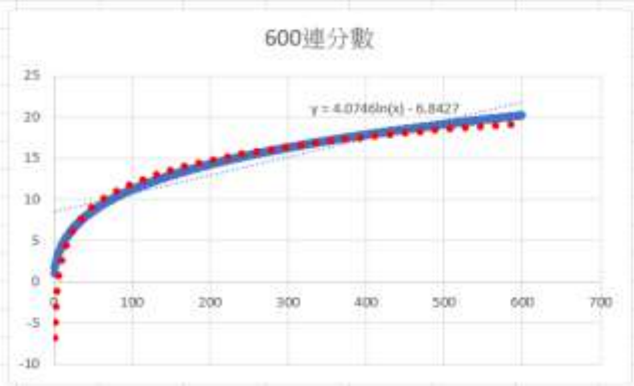
證明：從幾何觀點來看，由定理20知， $\frac{n}{m}$ 的幾何模型的最小構造法是一種將長為 n 寬為 m 的矩形切割有理數邊長數刀，切成許多有理數邊長的正方形。因為邊長是有理數，因此我們可以將矩形等比例放大正整數倍，直到所有的正方形都是正整數。假設長為 n 寬為 m 的矩形切割出的最小構造法的正方形邊長為 $\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2},\cdots,\frac{q_{f(\frac{n}{m})}}{p_{f(\frac{n}{m})}}$ ，其中 $p,q\in\mathbb{N}$ 且 p,q 互質，則

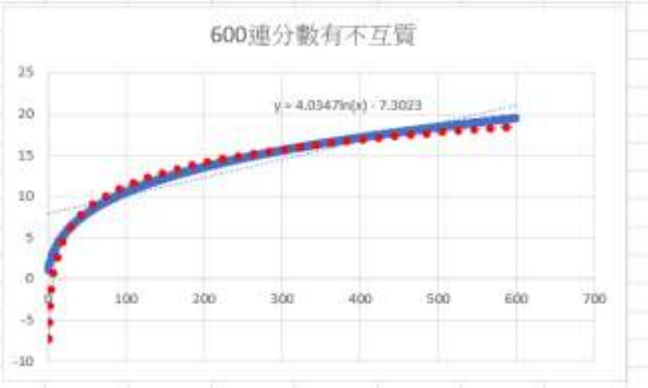
$lcm(p_1,p_2,\cdots,p_{f(\frac{n}{m})})\,|\,k$

二十三、連分數構造法之特殊性質

如果我們對 g 函數像 f 一樣畫出表格，則從左上開始的 $n\times n$ 格中的平均對 n 作圖可以畫出如下面第一張的圖，作圖後發現像一個 log 函數，然而此演算法較為複雜，因此改用連分數構造法以相同方式做圖，可做出下面第二張圖，然而不論是否排除掉不互質的值，圖形較不像 log 函數。







而我也直接計算了 $n\times n$ 格子內的和，假定此值為 a_n ，$a_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s(\frac{j}{i})$ ，可知 a_n-a_{n-1} 的值是最外圍的 L 型，如 a_5-a_4 是紅色線，其中的每個格子都是由第 n 條對角線上的值+1 而來，也就是 $s(\frac{i}{j})=\begin{cases} s(\frac{i-j}{j})+1, i>j \\ s(\frac{i}{j-i})+1, j>i \\ 1, i=j \end{cases}$ ，因此有

$$
\begin{aligned}
&a_n-a_{n-1}\\
&=s(\frac{1}{n})+s(\frac{2}{n})+\cdots+s(\frac{n-1}{n})+s(\frac{n}{n})+s(\frac{n}{n-1})+\cdots+s(\frac{n}{2})+s(\frac{n}{1})\\
&=(s(\frac{1}{n-1})+1)+(s(\frac{2}{n-2})+1)+\cdots+(s(\frac{n-1}{1})+1)+1+(s(\frac{1}{n-1})+1)+\cdots+(s(\frac{n-2}{2})+1)+(s(\frac{n-1}{1})+1)\\
&=2\sum_{k=1}^{n-1}s(\frac{k}{n-k-1})+2n-1\\
&=2\times A072031(n-1)+2n-1
\end{aligned}
$$

所以

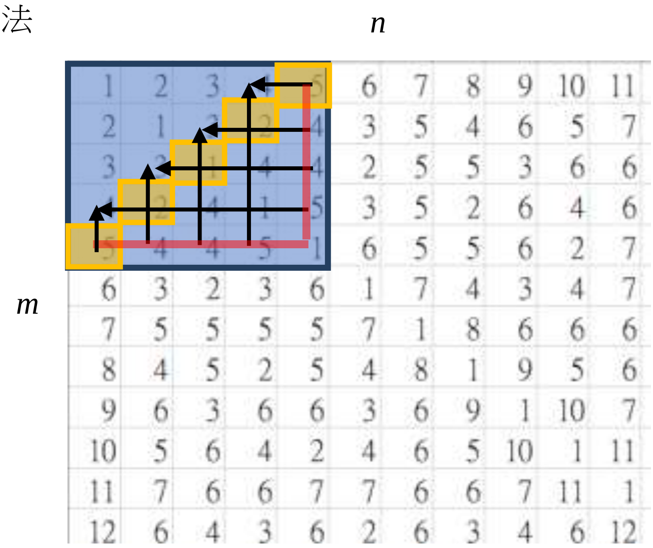
$$
\begin{aligned}
&a_n\\
&=a_1+\sum_{k=2}^{n}(2\times A072031(k-1)+2k-1)\\
&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2\times A072031(k)+2k+1)\\
&=1+2\sum_{k=1}^{n-1}A072031(k)+(n-1)n+(n-1)\\
&=2\sum_{k=1}^{n-1}A072031(k)+n^2
\end{aligned}
$$

其中 $A072031(n)$ 為參考資料[6]的數列，因此可推得以下定理。

定理 23： $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s(\frac{j}{i})=2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}s(\frac{k-i+1}{i})+n$

而這個計算結果也代表說 $n\times n$ 的表格內，右下部分包括左下到右上的對角線的和與左上部分和的差為 n^2 。

$\frac{n}{m}$ 的連分數構造法



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7
3	2	1	4	4	2	5	5	3	6	6
4	2	4	1	5	3	5	2	6	4	6
5	4	4	5	1	6	5	5	6	2	7
6	3	2	3	6	1	7	4	3	4	7
7	5	5	5	5	7	1	8	6	6	6
8	4	5	2	5	4	8	1	9	5	6
9	6	3	6	6	3	6	9	1	10	7
10	5	6	4	2	4	6	5	10	1	11
11	7	6	6	7	7	6	6	7	11	1
12	6	4	3	6	2	6	3	4	6	12

在資料[6]中也提到 $(\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{1-x^n})^2=\sum_{n\geq 2}\frac{A072031(n)x^n}{1-x^n}$ ，在嘗試證明的過程中，我找到了一些關係，並且猜測 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s(\frac{j}{i})=a_n=\sum_{i=1}^{n}\tau(i(n-i+1))$ ，其中 $\forall k\in\mathbb{N},\tau(k)$ 是 k 的正因數個數。

猜想 1： $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s(\frac{j}{i})=\sum_{i=1}^{n}\tau(i(n-i+1))$

二十四、用生成函數統整已知的函數 *f* 公式

(一)分母為 2 的公式

已知 $f(\frac{k}{2})=\begin{cases}2, k=1\\ 1, k=2\\ f(\frac{k}{2}-1)+1, k>2, k\in\mathbb{N}\end{cases}$ ，假設多項式 $P_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(\frac{k}{2})x^k$ ，

$x^2P_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(\frac{k}{2})x^{k+2}=\sum\limits_{k=3}^{\infty}f(\frac{k-2}{2})x^k=\sum\limits_{k=3}^{\infty}(f(\frac{k}{2})-1)x^k$ ，因此

$(1-x^2)P_2(x)=f(\frac{1}{2})x+f(\frac{2}{2})x^2+\sum\limits_{k=3}^{\infty}x^k=2x+x^2+\sum\limits_{k=3}^{\infty}x^k=x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k$ ，所以

$P_2(x)=\dfrac{x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k}{1-x^2}=\dfrac{x+\dfrac{x}{1-x}}{1-x^2}=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)(1-x^2)}=\dfrac{-\dfrac{3}{4}}{1+x}+\dfrac{\dfrac{1}{4}}{1-x}+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{(1-x)^2}$ ，其中 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ 、

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k$ 、 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{d\dfrac{1}{1-x}}{dx}=\dfrac{d\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k}{dx}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ ，因此

$P_2(x)=-\frac{3}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k+\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^kx^k+\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-\frac{3}{4}(-1)^k+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(k+1))x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{3}{4}(-1)^{k+1}+\frac{3}{4}+\frac{k}{2})x^k$ ，也就是說 $f(\frac{k}{2})=\frac{3}{4}(-1)^{k+1}+\frac{3}{4}+\frac{k}{2}$ ，

因此我們將此一般式整理成以下定理：

定理 24： $k\in\mathbb{N}\Rightarrow f(\frac{k}{2})=\frac{3}{4}(-1)^{k+1}+\frac{3}{4}+\frac{k}{2}$

肆、結論與應用

一、最小構造法表格

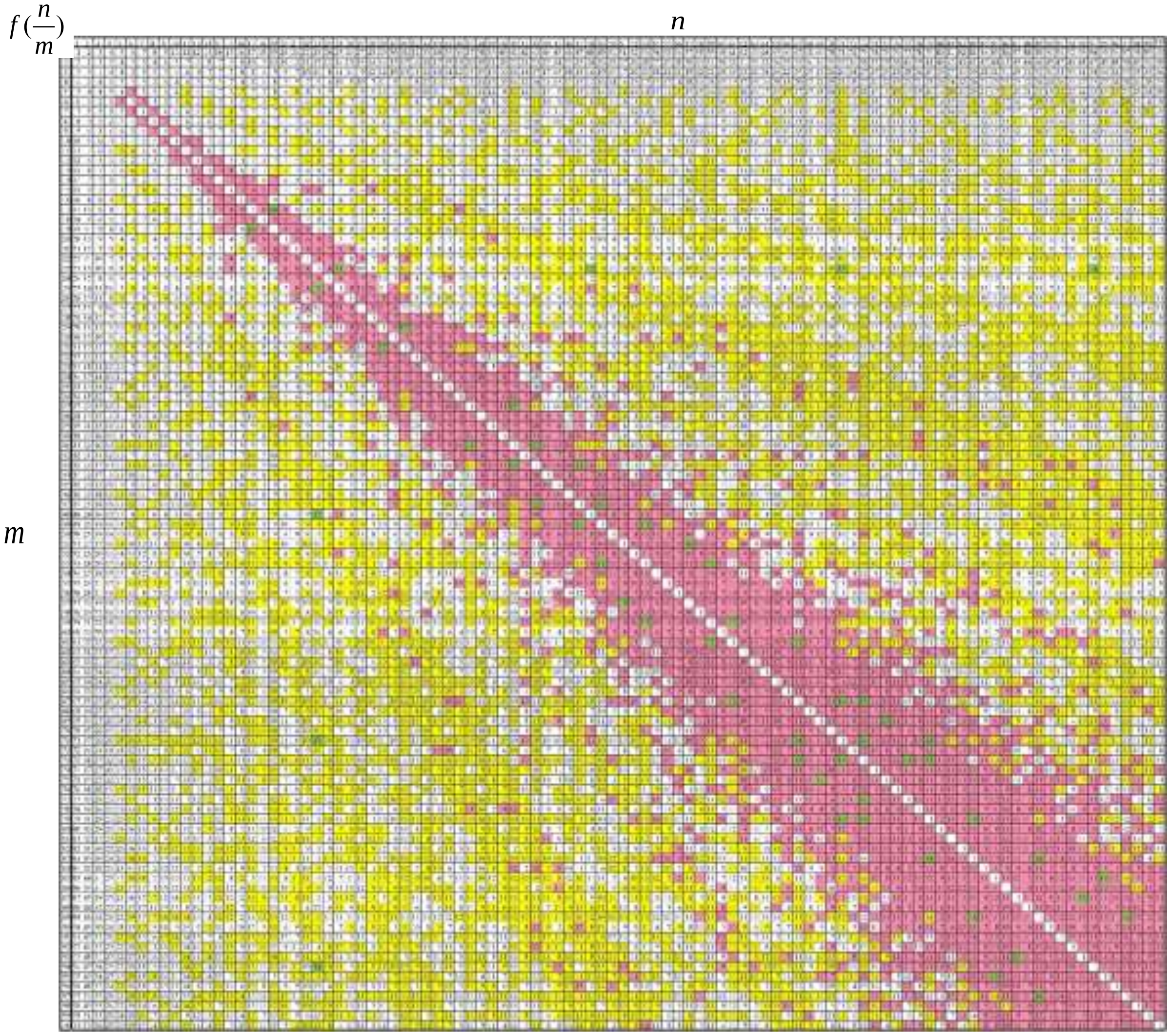
下表統計分子和分母在 50 以內時最小構造法的值。

白色代表連分數構造法即為最小構造法，即 $f(\frac{n}{m})=g(n,m)=s(\frac{n}{m})$ 。

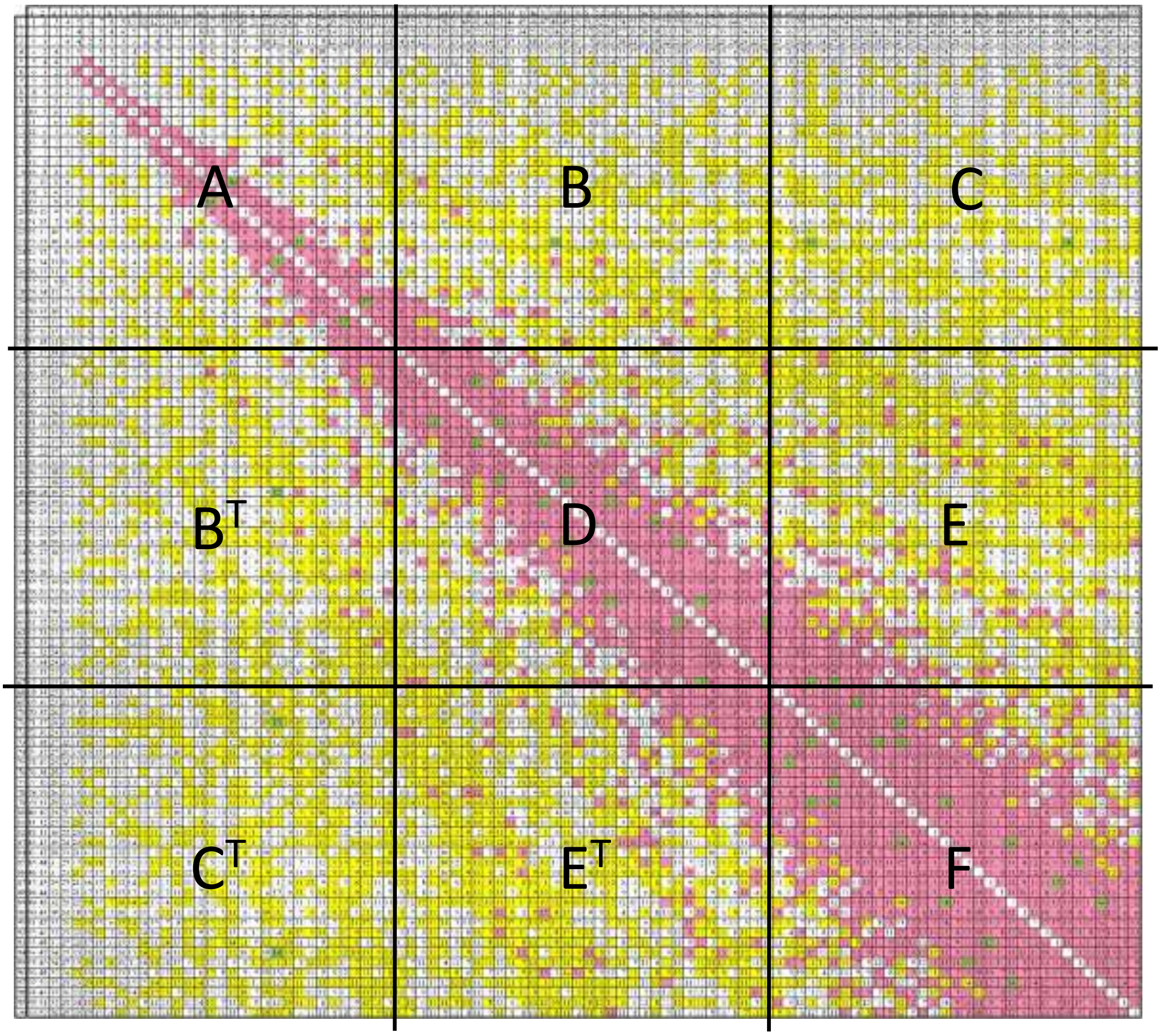
綠色代表最小構造法的幾何模型中有小數邊長的正方形，即 $g(n,m)\neq f(\frac{n}{m})$ 。

粉紅色代表 $f(\frac{n}{m})=g(n,m)\neq\begin{cases} f(\frac{n}{m}-1)+1,\text{if } n>m \\ f(\frac{m}{n}-1)+1,\text{if } m>n \end{cases}$ and $s(\frac{n}{m})$ 。

黃色代表 $f(\frac{n}{m})=g(n,m)=\begin{cases} f(\frac{n}{m}-1)+1,\text{if } n>m \\ f(\frac{m}{n}-1)+1,\text{if } m>n \end{cases}\neq s(\frac{n}{m})$ 。



由於圖片內的數字過小，因此分為 9 塊區域(如下圖)，根據對稱性，我們選擇僅列出 A、B、C、D、E、F 等 6 個區塊，並分別呈現於後，以便檢視本研究成果。

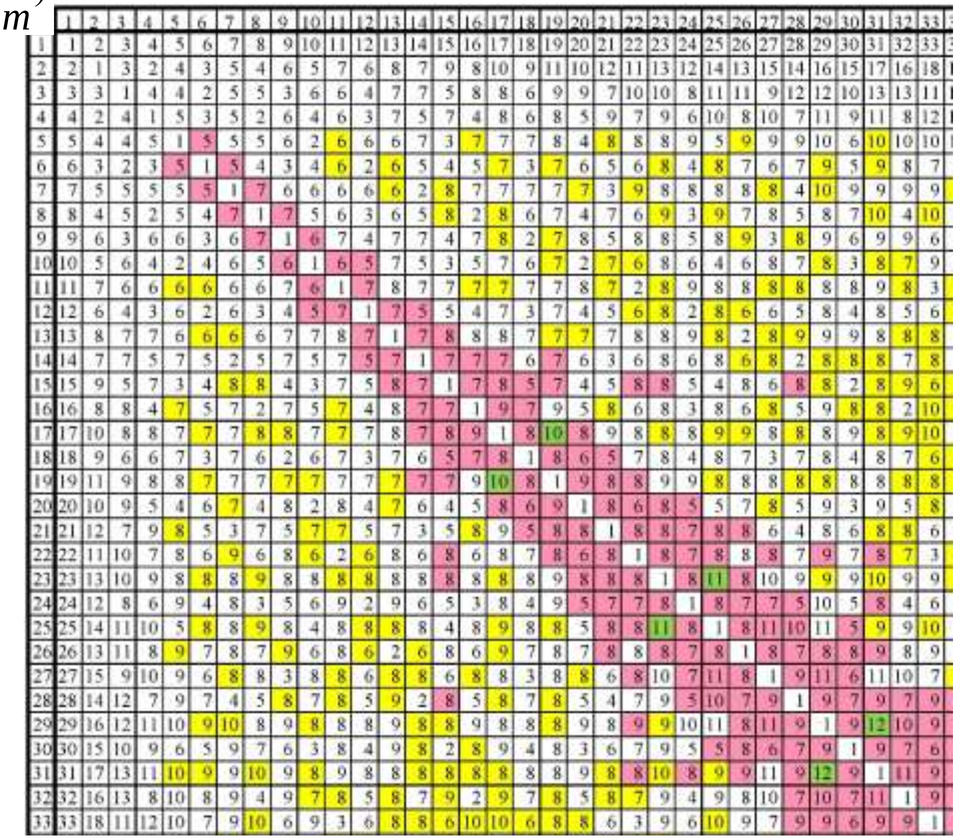


A 區塊：

$f(\frac{n}{m})$

n

m



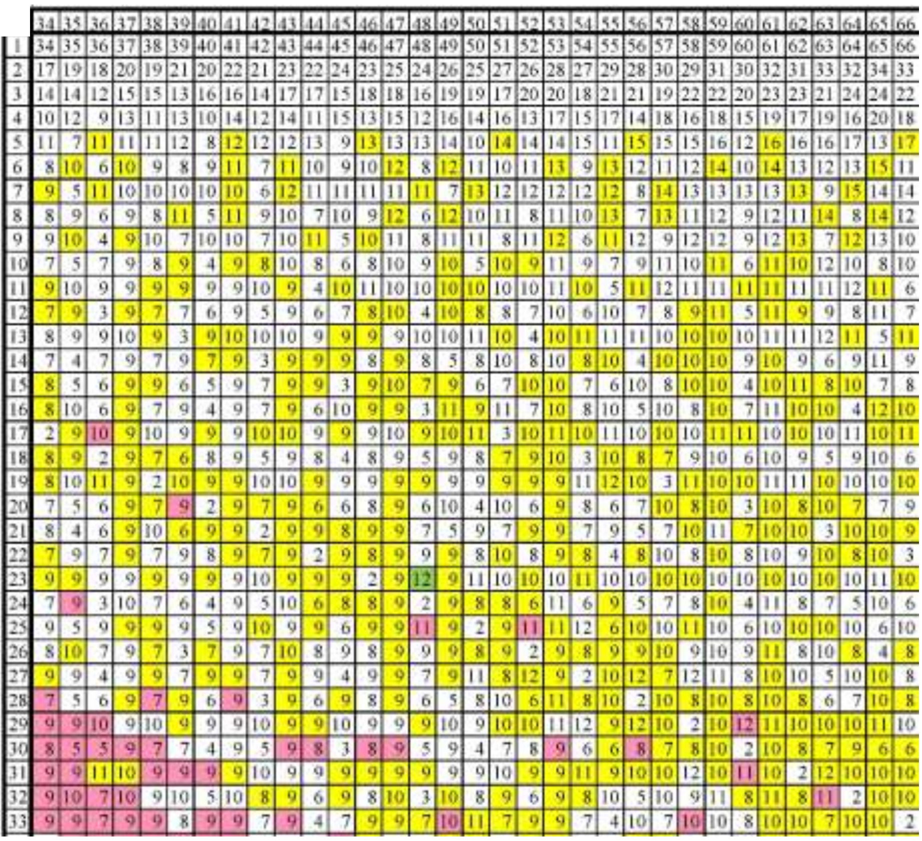
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
2	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9	8	10	9	11	10	12	11	13	12	14	13	15	14	16	15	17	16	18
3	3	3	1	4	4	2	5	5	3	6	6	4	7	7	5	8	8	6	9	9	7	10	10	8	11	11	9	12	12	10	13	13	11
4	4	2	4	1	5	3	5	2	6	4	6	3	7	5	7	4	8	6	8	5	9	7	9	6	10	8	10	7	11	9	11	8	12
5	5	4	4	5	1	5	5	5	6	2	6	6	6	7	3	7	7	7	8	4	8	8	8	9	5	9	9	9	10	6	10	10	10
6	6	3	2	3	5	1	5	4	3	4	6	2	6	5	4	5	7	3	7	6	5	6	8	4	8	7	6	7	9	5	9	8	7
7	7	5	5	5	5	5	1	7	6	6	6	6	6	2	8	7	7	7	7	7	3	9	8	8	8	8	8	4	10	9	9	9	9
8	8	4	5	2	5	4	7	1	7	5	6	3	6	5	8	2	8	6	7	4	7	6	9	3	9	7	8	5	8	7	10	4	10
9	9	6	3	6	6	3	6	7	1	6	7	4	7	7	4	7	8	2	7	8	5	8	8	5	8	9	3	8	9	6	9	9	6
10	10	5	6	4	2	4	6	5	6	1	6	5	7	5	3	5	7	6	7	2	7	6	8	6	4	6	8	7	8	3	8	7	9
11	11	7	6	6	6	6	6	6	7	6	1	7	8	7	7	7	7	7	7	8	7	2	8	9	8	8	8	8	8	8	9	8	3
12	12	6	4	3	6	2	6	3	4	5	7	1	7	5	5	4	7	3	7	4	5	6	8	2	8	6	6	5	8	4	8	5	6
13	13	8	7	7	6	6	6	6	7	7	8	7	1	7	8	8	8	7	7	7	7	8	8	9	8	2	8	9	9	9	8	8	8
14	14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	5	7	1	7	7	7	6	7	6	3	6	8	6	8	6	8	2	8	8	8	7	8
15	15	9	5	7	3	4	8	8	4	3	7	5	8	7	1	7	8	5	7	4	5	8	8	5	4	8	6	8	8	2	8	9	6
16	16	8	8	4	7	5	7	2	7	5	7	4	8	7	7	1	9	7	9	5	8	6	8	3	8	6	8	5	9	8	8	2	10
17	17	10	8	8	7	7	7	8	8	7	7	7	8	7	8	9	1	8	10	8	9	8	8	8	9	9	8	8	8	9	8	9	10
18	18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	5	7	8	1	8	6	5	7	8	4	8	7	3	7	8	4	8	7	6
19	19	11	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	9	10	8	1	9	8	8	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8
20	20	10	9	5	4	6	7	4	8	2	8	4	7	6	4	5	8	6	9	1	8	6	8	5	5	7	8	5	9	3	9	5	8
21	21	12	7	9	8	5	3	7	5	7	7	5	7	3	5	8	9	5	8	8	1	8	8	7	8	8	6	4	8	6	8	8	6
22	22	11	10	7	8	6	9	6	8	6	2	6	8	6	8	6	8	7	8	6	8	1	8	7	8	8	8	7	9	7	8	7	3
23	23	13	10	9	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	1	8	11	8	10	9	9	9	10	9	9
24	24	12	8	6	9	4	8	3	5	6	9	2	9	6	5	3	8	4	9	5	7	7	8	1	8	7	7	5	10	5	8	4	6
25	25	14	11	10	5	8	8	9	8	4	8	8	8	8	4	8	9	8	8	5	8	8	11	8	1	8	11	10	11	5	9	9	10
26	26	13	11	8	9	7	8	7	9	6	8	6	2	6	8	6	9	7	8	7	8	8	8	7	8	1	8	7	8	8	9	8	9
27	27	15	9	10	9	6	8	8	3	8	8	6	8	8	6	8	8	3	8	8	6	8	10	7	11	8	1	9	11	6	11	10	7
28	28	14	12	7	9	7	4	5	8	7	8	5	9	2	8	5	8	7	8	5	4	7	9	5	10	7	9	1	9	7	9	7	9
29	29	16	12	11	10	9	10	8	9	8	8	8	9	8	8	9	8	8	8	9	8	9	9	10	11	8	11	9	1	9	12	10	9
30	30	15	10	9	6	5	9	7	6	3	8	4	9	8	2	8	9	4	8	3	6	7	9	5	5	8	6	7	9	1	9	7	6
31	31	17	13	11	10	9	9	10	9	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	10	8	9	9	11	9	12	9	1	11	9
32	32	16	13	8	10	8	9	4	9	7	8	5	8	7	9	2	9	7	8	5	8	7	9	4	9	8	10	7	10	7	11	1	9
33	33	18	11	12	10	7	9	10	6	9	3	6	8	8	6	10	10	6	8	8	6	3	9	6	10	9	7	9	9	6	9	9	1

B 區塊：

$f(\frac{n}{m})$

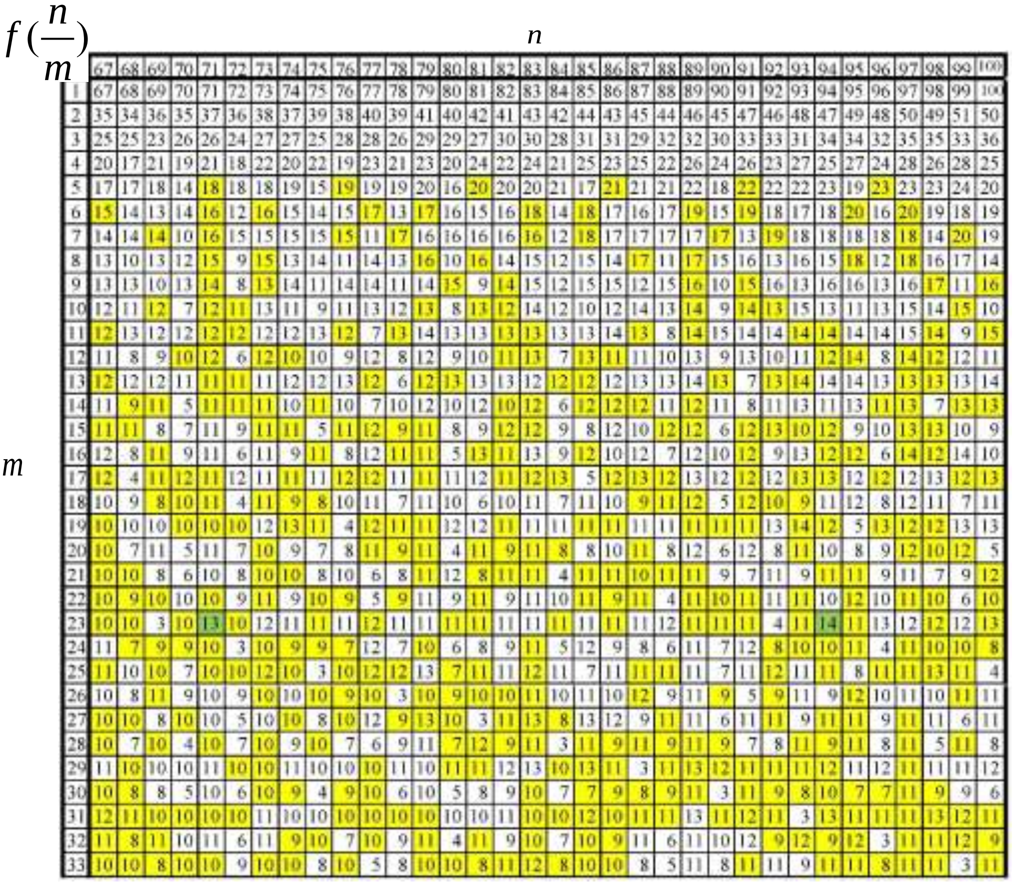
n

m



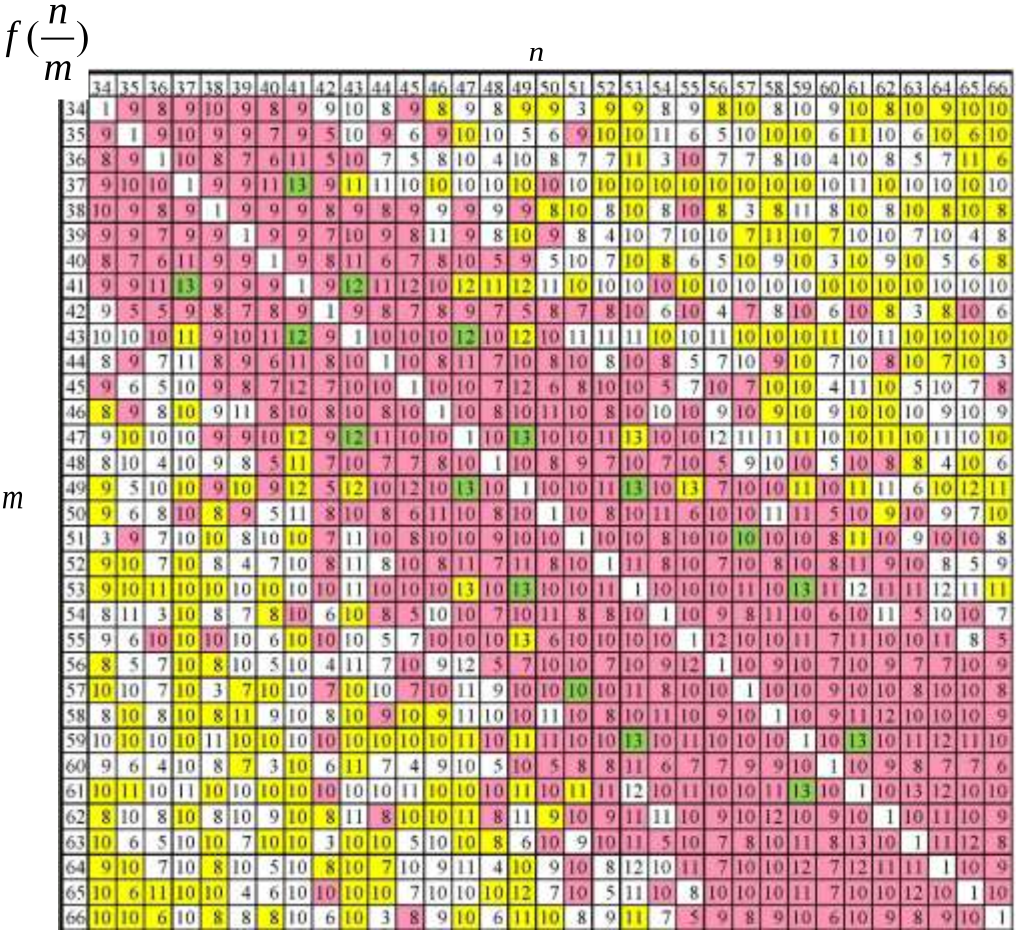
	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
1	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
2	17	19	18	20	19	21	20	22	21	23	22	24	23	25	24	26	25	27	26	28	27	29	28	30	29	31	30	32	31	33	32	34	33
3	14	14	12	15	15	13	16	16	14	17	17	15	18	18	16	19	19	17	20	20	18	21	21	19	22	22	20	23	23	21	24	24	22
4	10	12	9	13	11	13	10	14	12	14	11	15	13	15	12	16	14	16	13	17	15	17	14	18	16	18	15	19	17	19	16	20	18
5	11	7	11	11	11	12	8	12	12	12	13	9	13	13	13	14	10	14	14	14	15	11	15	15	15	16	12	16	16	16	17	13	17
6	8	10	6	10	9	8	9	11	7	11	10	9	10	12	8	12	11	10	11	13	9	13	12	11	12	14	10	14	13	12	13	15	11
7	9	5	11	10	10	10	10	10	6	12	11	11	11	11	11	7	13	12	12	12	12	12	8	14	13	13	13	13	13	9	15	14	14
8	8	9	6	9	8	11	5	11	9	10	7	10	9	12	6	12	10	11	8	11	10	13	7	13	11	12	9	12	11	14	8	14	12
9	9	10	4	9	10	7	10	10	7	10	11	5	10	11	8	11	11	8	11	12	6	11	12	9	12	12	9	12	13	7	12	13	10
10	7	5	7	9	8	9	4	9	8	10	8	6	8	10	9	10	5	10	9	11	9	7	9	11	10	11	6	11	10	12	10	8	10
11	9	10	9	9	9	9	9	9	10	9	4	10	11	10	10	10	10	10	10	11	10	5	11	12	11	11	11	11	11	11	12	11	6
12	7	9	3	9	7	7	6	9	5	9	6	7	8	10	4	10	8	8	7	10	6	10	7	8	9	11	5	11	9	9	8	11	7
13	8	9	9	10	9	3	9	10	10	10	9	9	9	9	10	10	11	10	4	10	11	11	11	10	10	10	10	11	11	12	11	5	11
14	7	4	7	9	7	9	7	9	3	9	9	9	8	9	8	5	8	10	8	10	8	10	4	10	10	10	9	10	9	6	9	11	9
15	8	5	6	9	9	6	5	9	7	9	9	3	9	10	7	9	6	7	10	10	7	6	10	8	10	10	4	10	11	8	10	7	8
16	8	10	6	9	7	9	4	9	7	9	6	10	9	9	3	11	9	11	7	10	8	10	5	10	8	10	7	11	10	10	4	12	10
17	2	9	10	9	10	9	9	9	10	10	9	9	9	10	9	10	11	3	10	11	10	11	10	10	10	11	11	10	10	10	11	10	11
18	8	9	2	9	7	6	8	9	5	9	8	4	8	9	5	9	8	7	9	10	3	10	8	7	9	10	6	10	9	5	9	10	6
19	8	10	11	9	2	10	9	9	10	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	11	12	10	3	11	10	10	11	11	10	10	10	10
20	7	5	6	9	7	9	2	9	7	9	6	6	8	9	6	10	4	10	6	9	8	6	7	10	8	10	3	10	8	10	7	7	9
21	8	4	6	9	10	6	9	9	2	9	9	8	9	9	7	5	9	7	9	9	7	9	5	7	10	11	7	10	10	3	10	10	9
22	7	9	7	9	7	9	8	9	7	9	2	9	8	9	9	9	8	10	8	9	8	4	8	10	8	10	8	10	9	10	8	10	3
23	9	9	9	9	9	9	9	9	10	9	9	9	2	9	12	9	11	10	10	10	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	10
24	7	9	3	10	7	6	4	9	5	10	6	8	8	9	2	9	8	8	6	11	6	9	5	7	8	10	4	11	8	7	5	10	6
25	9	5	9	9	9	9	5	9	10	9	9	6	9	9	11	9	2	9	11	11	12	6	10	10	11	10	6	10	10	10	10	6	10
26	8	10	7	9	7	3	7	9	7	10	8	9	8	9	9	9	8	9	2	9	8	9	9	10	9	10	9	11	8	10	8	4	8
27	9	9	4	9	9	7	9	9	7	9	9	4	9	9	7	9	11	8	12	9	2	10	12	7	12	11	8	10	10	5	10	10	8
28	7	5	6	9	7	9	6	9	3	9	6	9	8	9	6	5	8	10	6	11	8	10	2	10	8	10	8	10	8	6	7	10	8
29	9	9	10	9	10	9	9	9	10	9	9	10	9	9	9	10	9	10	10	11	12	9	12	10	2	10	12	11	10	10	10	11	10
30	8	5	5	9	7	7	4	9	5	9	8	3	8	9	5	9	4	7	8	9	6	6	8	7	8	10	2	10	8	7	9	6	6
31	9	9	11	10	9	9	9	9	10	9	9	9	9	9	9	9	9	10	9	9	11	9	10	10	12	10	11	10	2	12	10	10	10
32	9	10	7	10	9	10	5	10	8	9	6	9	8	10	3	10	8	9	6	9	8	10	5	10	9	11	8	11	8	11	2	10	10
33	9	9	7	9	9	8	9	9	7	9	4	7	9	9	7	10	11	7	9	9	7	4	10	7	10	10	8	10	10	7	10	10	2

C 區塊：



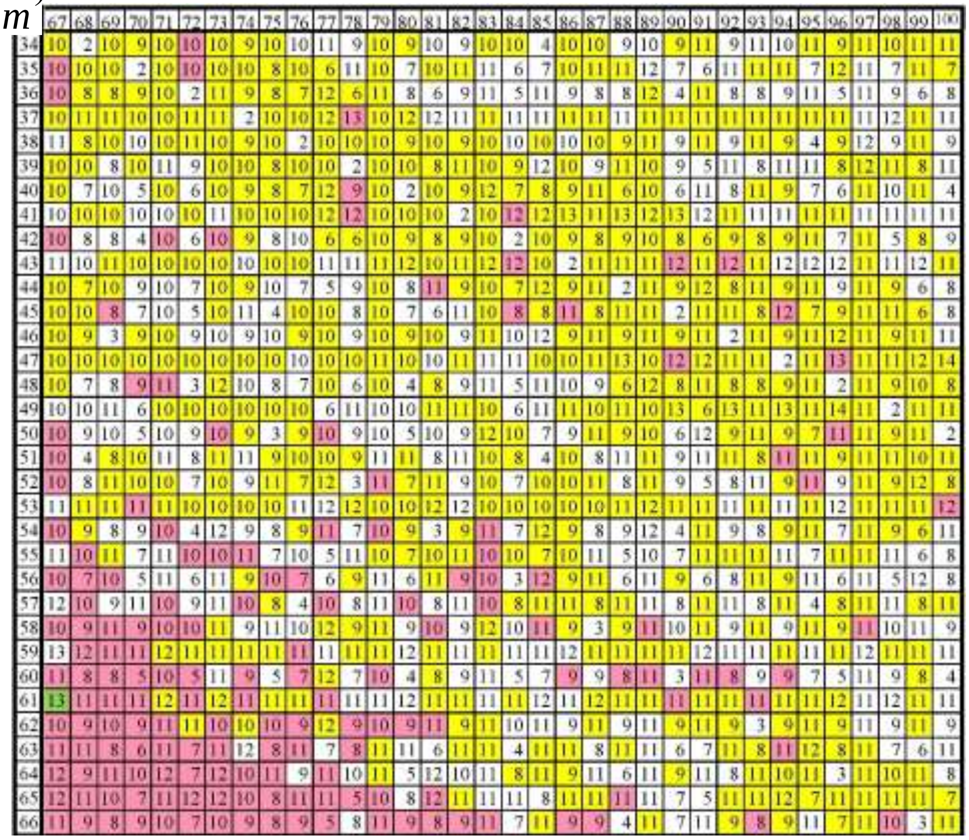
	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
2	35	34	36	35	37	36	38	37	39	38	40	39	41	40	42	41	43	42	44	43	45	44	46	45	47	46	48	47	49	48	50	49	51	50
3	25	25	23	26	26	24	27	27	25	28	28	26	29	29	27	30	30	28	31	31	29	32	32	30	33	33	31	34	34	32	35	35	33	36
4	20	17	21	19	21	18	22	20	22	19	23	21	23	20	24	22	24	21	25	23	25	22	26	24	26	23	27	25	27	24	28	26	28	25
5	17	17	18	14	18	18	18	19	15	19	19	19	20	16	20	20	20	21	17	21	21	21	22	18	22	22	22	23	19	23	23	23	24	20
6	15	14	13	14	16	12	16	15	14	15	17	13	17	16	15	16	18	14	18	17	16	17	19	15	19	18	17	18	20	16	20	19	18	19
7	14	14	14	10	16	15	15	15	15	15	11	17	16	16	16	16	16	12	18	17	17	17	17	17	13	19	18	18	18	18	18	14	20	19
8	13	10	13	12	15	9	15	13	14	11	14	13	16	10	16	14	15	12	15	14	17	11	17	15	16	13	16	15	18	12	18	16	17	14
9	13	13	10	13	14	8	13	14	11	14	14	11	14	15	9	14	15	12	15	15	12	15	16	10	15	16	13	16	16	13	16	17	11	16
10	12	11	12	7	12	11	13	11	9	11	13	12	13	8	13	12	14	12	10	12	14	13	14	9	14	13	15	13	11	13	15	14	15	10
11	12	13	12	12	12	12	12	12	13	12	7	13	14	13	13	13	13	13	13	14	13	8	14	15	14	14	14	14	14	14	15	14	9	15
12	11	8	9	10	12	6	12	10	10	9	12	8	12	9	10	11	13	7	13	11	11	10	13	9	13	10	11	12	14	8	14	12	12	11
13	12	12	12	11	11	11	11	12	12	13	12	6	12	13	13	13	12	12	12	12	13	13	14	13	7	13	14	14	14	13	13	13	13	14
14	11	9	11	5	11	11	11	10	11	10	7	10	12	10	12	10	12	6	12	12	12	11	12	11	8	11	13	11	13	11	13	7	13	13
15	11	11	8	7	11	9	11	11	5	11	12	9	11	8	9	12	12	9	8	12	10	12	12	6	12	13	10	12	9	10	13	13	10	9
16	12	8	11	9	11	6	11	9	11	8	12	11	11	5	13	11	13	9	12	10	12	7	12	10	12	9	13	12	12	6	14	12	14	10
17	12	4	11	12	11	12	11	11	11	12	12	11	11	11	12	11	12	13	5	12	13	12	13	12	12	12	13	13	12	12	12	13	12	13
18	10	9	8	10	11	4	11	9	8	10	11	7	11	10	6	10	11	7	11	10	9	11	12	5	12	10	9	11	12	8	12	11	7	11
19	10	10	10	10	10	10	12	13	11	4	12	11	11	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	13	14	12	5	13	12	12	13	13
20	10	7	11	5	11	7	10	9	7	8	11	9	11	4	11	9	11	8	8	10	11	8	12	6	12	8	11	10	8	9	12	10	12	5
21	10	10	8	6	10	8	10	10	8	10	6	8	11	12	8	11	11	4	11	11	10	11	11	9	7	11	9	11	11	9	11	7	9	12
22	10	9	10	10	10	9	11	9	10	9	5	9	11	9	11	9	11	10	11	9	11	4	11	10	11	11	11	10	12	10	11	10	6	10
23	10	10	3	10	13	10	12	11	11	11	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	11	11	11	4	11	14	11	13	12	12	12	13
24	11	7	9	9	10	3	10	9	9	7	12	7	10	6	8	9	11	5	12	9	8	6	11	7	12	8	10	10	11	4	11	10	10	8
25	11	10	10	7	10	10	12	10	3	10	12	12	13	7	11	11	12	11	7	11	11	11	11	7	11	12	11	11	8	11	11	13	11	4
26	10	8	11	9	10	9	10	10	10	9	10	3	10	9	10	10	11	10	11	10	12	9	11	9	5	9	11	9	12	10	11	10	11	11
27	10	10	8	10	10	5	10	10	8	10	12	9	13	10	3	11	13	8	13	12	9	11	11	6	11	11	9	11	11	9	11	11	6	11
28	10	7	10	4	10	7	10	9	10	7	6	9	11	7	12	9	11	3	11	9	11	9	11	9	7	8	11	9	11	8	11	5	11	8
29	11	10	10	10	11	10	10	11	10	10	10	11	10	11	11	12	13	10	13	11	3	11	13	12	11	11	11	12	11	12	11	11	11	12
30	10	8	8	5	10	6	10	9	4	9	10	6	10	5	8	9	10	7	7	9	8	9	11	3	11	9	8	10	7	7	11	9	9	6
31	12	11	10	10	10	10	11	10	10	10	10	10	10	10	10	11	10	10	12	10	11	11	13	11	12	11	3	13	11	11	11	13	12	11
32	11	8	11	10	11	6	11	9	10	7	10	9	11	4	11	9	10	7	10	9	11	6	11	10	12	9	12	9	12	3	11	11	12	9
33	10	10	8	10	10	9	10	10	8	10	5	8	10	10	8	11	12	8	10	10	8	5	11	8	11	11	9	11	11	8	11	11	3	11

D 區塊：



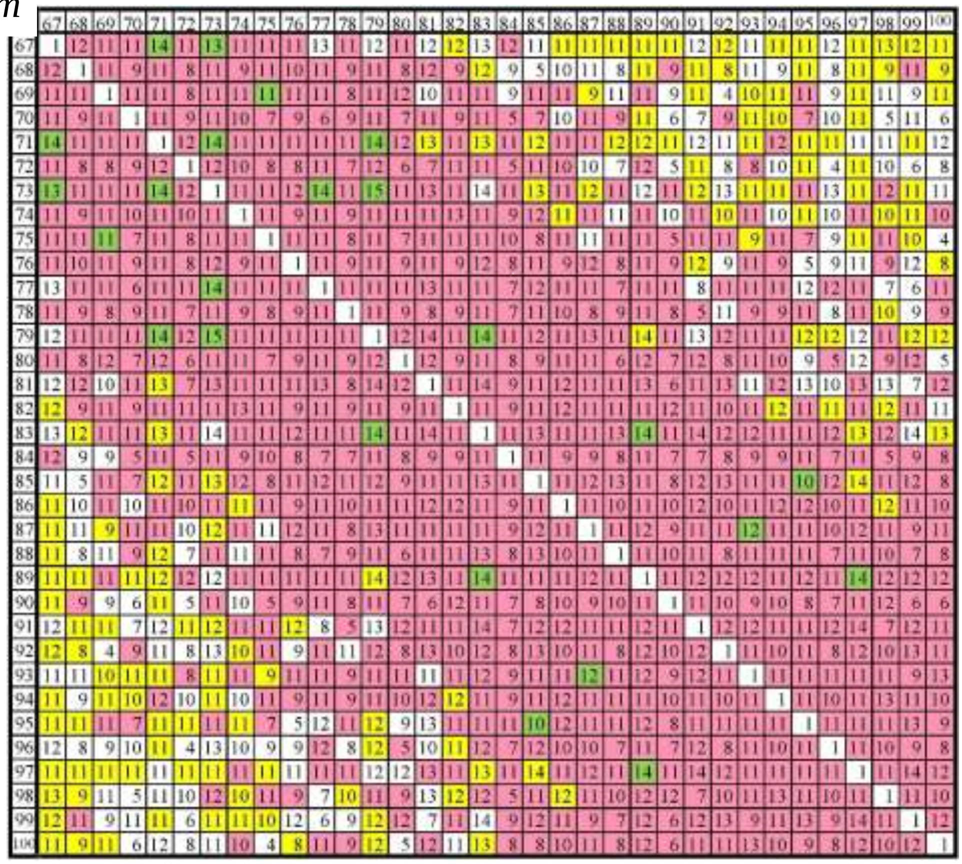
	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
34	1	9	8	9	10	9	8	9	9	10	8	9	8	9	8	9	9	3	9	9	8	9	8	10	8	10	9	10	8	10	9	10	10
35	9	1	9	10	9	9	7	9	5	10	9	6	9	10	10	5	6	9	10	10	11	6	5	10	10	10	6	11	10	6	10	6	10
36	8	9	1	10	8	7	6	11	5	10	7	5	8	10	4	10	8	7	7	11	3	10	7	7	8	10	4	10	8	5	7	11	6
37	9	10	10	1	9	9	11	13	9	11	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	10	10	10	10	10
38	10	9	8	9	1	9	9	9	8	9	8	9	9	9	9	9	8	10	8	10	8	10	8	3	8	11	8	10	8	10	8	10	8
39	9	9	7	9	9	1	9	9	7	10	9	8	11	9	8	10	9	8	4	10	7	10	10	7	11	10	7	10	10	7	10	4	8
40	8	7	6	11	9	9	1	9	8	11	6	7	8	10	5	9	5	10	7	10	8	6	5	10	9	10	3	10	9	10	5	6	8
41	9	9	11	13	9	9	9	1	9	12	11	12	10	12	11	12	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
42	9	5	5	9	8	7	8	9	1	9	8	7	8	9	7	5	8	7	8	10	6	10	4	7	8	10	6	10	8	3	8	10	6
43	10	10	10	11	9	10	11	12	9	1	10	10	10	12	10	12	10	11	11	11	10	10	11	10	10	10	11	10	11	10	10	10	10
44	8	9	7	11	8	9	6	11	8	10	1	10	8	11	7	10	8	10	8	10	8	5	7	10	9	10	7	10	8	10	7	10	3
45	9	6	5	10	9	8	7	12	7	10	10	1	10	10	7	12	6	8	10	10	5	7	10	7	10	10	4	11	10	5	10	7	8
46	8	9	8	10	9	11	8	10	8	10	8	10	1	10	8	10	11	10	8	10	10	10	9	10	9	10	9	10	10	10	9	10	9
47	9	10	10	10	9	9	10	12	9	12	11	10	10	1	10	13	10	10	11	13	10	10	12	11	11	11	10	10	11	10	11	10	10
48	8	10	4	10	9	8	5	11	7	10	7	7	8	10	1	10	8	9	7	10	7	10	5	9	10	10	5	10	8	8	4	10	6
49	9	5	10	10	9	10	9	12	5	12	10	12	10	13	10	1	10	10	11	13	10	13	7	10	10	11	10	11	11	6	10	12	11
50	9	6	8	10	8	9	5	11	8	10	8	6	11	10	8	10	1	10	8	10	11	6	10	10	11	11	5	10	9	10	9	7	10
51	3	9	7	10	10	8	10	10	7	11	10	8	10	10	9	10	10	1	10	10	8	10	10	10	10	10	8	11	10	9	10	10	8
52	9	10	7	10	8	4	7	10	8	11	8	10	8	11	7	11	8	10	1	11	8	10	7	10	8	10	8	11	9	10	8	5	9
53	9	10	11	10	10	10	10	10	10	11	10	10	10	13	10	13	10	10	11	1	10	10	10	11	10	13	11	12	11	11	12	11	11
54	8	11	3	10	8	7	8	10	6	10	8	5	10	10	7	10	11	8	8	10	1	10	9	8	11	10	6	10	11	5	10	10	7
55	9	6	10	10	10	10	6	10	10	10	5	7	10	10	10	13	6	10	10	10	10	1	12	10	10	11	7	11	10	10	11	8	5
56	8	5	7	10	8	10	5	10	4	11	7	10	9	12	5	7	10	10	7	10	9	12	1	10	9	10	7	10	9	7	7	10	9
57	10	10	7	10	3	7	10	10	7	10	10	7	10	11	9	10	10	10	10	11	8	10	10	1	10	10	9	10	10	8	10	10	8
58	8	10	8	10	8	11	9	10	8	10	9	10	9	11	10	10	11	10	8	10	11	10	9	10	1	10	9	11	12	10	10	10	9
59	10	10	10	10	11	10	10	10	10	10	10	10	10	11	10	11	11	10	10	13	10	11	10	10	10	1	10	13	10	11	12	11	10
60	9	6	4	10	8	7	3	10	6	11	7	4	9	10	5	10	5	8	8	11	6	7	7	9	9	10	1	10	9	8	7	7	6
61	10	11	10	11	10	10	10	10	10	10	10	11	10	10	10	11	10	11	11	12	10	11	10	10	11	13	10	1	10	13	12	10	10
62	8	10	8	10	8	10	9	10	8	11	8	10	10	11	8	11	9	10	9	11	11	10	9	10	12	10	9	10	1	10	11	10	9
63	10	6	5	10	10	7	10	10	3	10	10	5	10	10	8	6	10	9	10	11	5	10	7	8	10	11	8	13	10	1	11	12	8
64	9	10	7	10	8	10	5	10	8	10	7	10	9	11	4	10	9	10	8	12	10	11	7	10	10	12	7	12	11	11	1	10	9
65	10	6	11	10	10	4	6	10	10	10	10	7	10	10	10	12	7	10	5	11	10	8	10	10	10	11	7	10	10	12	10	1	10
66	10	10	6	10	8	8	8	10	6	10	3	8	9	10	6	11	10	8	9	11	7	5	9	8	9	10	6	10	9	8	9	10	1

E 區塊：



	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
34	10	2	10	9	10	10	10	9	10	10	11	9	10	9	10	9	10	10	4	10	10	9	10	9	11	9	11	10	11	9	11	10	11	11
35	10	10	10	2	10	10	10	10	8	10	6	11	10	7	10	11	11	6	7	10	11	11	12	7	6	11	11	11	7	12	11	7	11	7
36	10	8	8	9	10	2	11	9	8	7	12	6	11	8	6	9	11	5	11	9	8	8	12	4	11	8	8	9	11	5	11	9	6	8
37	10	11	11	10	10	11	11	2	10	10	12	13	10	12	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	11	11
38	11	8	10	10	10	11	10	9	10	2	10	10	10	9	10	9	10	10	10	10	10	9	11	9	11	9	11	9	4	9	12	9	11	9
39	10	10	8	10	11	9	10	10	8	10	10	2	10	10	8	11	10	9	12	10	9	11	10	9	5	11	8	11	11	8	12	11	8	11
40	10	7	10	5	10	6	10	9	8	7	12	9	10	2	10	9	12	7	8	9	11	6	10	6	11	8	11	9	7	6	11	10	11	4
41	10	10	10	10	10	10	11	10	10	10	12	12	10	10	10	2	10	12	12	13	11	13	12	13	12	11	11	11	11	11	11	11	11	11
42	10	8	8	4	10	6	10	9	8	10	6	6	10	9	8	9	10	2	10	9	8	9	10	8	6	9	8	9	11	7	11	5	8	9
43	11	10	11	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	12	10	11	12	12	10	2	11	11	11	12	11	12	11	12	12	12	11	11	12	11
44	10	7	10	9	10	7	10	9	10	7	5	9	10	8	11	9	10	7	12	9	11	2	11	9	12	8	11	9	11	9	11	9	6	8
45	10	10	8	7	10	5	10	11	4	10	10	8	10	7	6	11	10	8	8	11	8	11	11	2	11	11	8	12	7	9	11	11	6	8
46	10	9	3	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	11	10	12	9	11	9	11	9	11	2	11	9	11	12	11	9	11	11
47	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	10	10	11	11	11	10	10	11	13	10	12	12	11	11	2	11	13	11	11	12	14
48	10	7	8	9	11	3	12	10	8	7	10	6	10	4	8	9	11	5	11	10	9	6	12	8	11	8	8	9	11	2	11	9	10	8
49	10	10	11	6	10	10	10	10	10	10	6	11	10	10	11	11	10	6	11	11	10	11	10	13	6	13	11	13	11	14	11	2	11	11
50	10	9	10	5	10	9	10	9	3	9	10	9	10	5	10	9	12	10	7	9	11	9	10	6	12	9	11	9	7	11	11	9	11	2
51	10	4	8	10	11	8	11	11	9	10	10	9	11	11	8	11	10	8	4	10	8	11	11	9	11	11	8	11	11	9	11	11	10	11
52	10	8	11	10	10	7	10	9	11	7	12	3	11	7	11	9	10	7	10	10	11	8	11	9	5	8	11	9	11	9	11	9	12	8
53	11	11	11	11	11	10	10	10	10	11	12	12	10	10	12	12	10	10	10	10	10	11	12	11	11	11	11	11	11	12	11	11	11	12
54	10	9	8	9	10	4	12	9	8	9	11	7	10	9	3	9	11	7	12	9	8	9	12	4	11	9	8	9	11	7	11	9	6	11
55	11	10	11	7	11	10	10	11	7	10	5	11	10	7	10	11	10	10	7	10	11	5	10	7	11	11	11	11	7	11	11	11	6	8
56	10	7	10	5	11	6	11	9	10	7	6	9	11	6	11	9	10	3	12	9	11	6	11	9	6	8	11	9	11	6	11	5	12	8
57	12	10	9	11	10	9	11	10	8	4	10	8	11	10	8	11	10	8	11	11	8	11	11	8	11	11	8	11	4	8	11	11	8	11
58	10	9	11	9	10	10	11	9	11	10	12	9	11	9	10	9	12	10	11	9	3	9	11	10	11	9	11	9	11	9	11	10	11	9
59	13	12	11	11	12	11	11	11	11	11	11	11	11	12	11	11	11	11	11	12	11	11	11	11	12	11	11	11	11	11	12	11	11	11
60	11	8	8	5	10	5	11	9	5	7	12	7	10	4	8	9	11	5	7	9	9	8	11	3	11	8	9	9	7	5	11	9	8	4
61	13	11	11	11	12	11	12	11	11	11	11	11	11	12	11	11	11	11	12	11	12	11	11	11	11	11	11	11	11	12	11	12	11	11
62	10	9	10	9	11	11	10	10	10	9	12	9	10	9	11	9	11	10	11	9	11	9	11	9	11	9	3	9	11	9	11	9	11	9
63	11	11	8	6	11	7	11	12	8	11	7	8	11	11	6	11	11	4	11	11	8	11	11	6	7	11	8	11	12	8	11	7	6	11
64	12	9	11	10	12	7	12	10	11	9	11	10	11	5	12	10	11	8	11	9	11	6	11	9	11	8	11	10	11	3	11	10	11	8
65	12	11	10	7	11	12	12	10	8	11	11	5	10	8	12	11	11	11	8	11	11	11	11	7	5	11	11	12	7	11	11	11	11	7
66	11	9	8	9	10	7	10	9	8	9	5	8	11	9	8	9	11	7	11	9	9	4	11	7	11	9	8	9	11	7	11	10	3	11

F 區塊：



	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
67	1	12	11	11	14	11	13	11	11	11	13	11	12	11	12	12	13	12	11	11	11	11	11	11	12	12	11	11	11	12	11	13	12	11
68	12	1	11	9	11	8	11	9	11	10	11	9	11	8	12	9	12	9	5	10	11	8	11	9	11	8	11	9	11	8	11	9	11	9
69	11	11	1	11	11	8	11	11	11	11	11	8	11	12	10	11	11	9	11	11	9	11	11	9	11	4	10	11	11	9	11	11	9	11
70	11	9	11	1	11	9	11	10	7	9	6	9	11	7	11	9	11	5	7	10	11	9	11	6	7	9	11	10	7	10	11	5	11	6
71	14	11	11	11	1	12	14	11	11	11	11	11	14	12	13	11	13	11	12	11	11	12	12	11	12	11	11	12	11	11	11	11	11	12
72	11	8	8	9	12	1	12	10	8	8	11	7	12	6	7	11	11	5	11	10	10	7	12	5	11	8	8	10	11	4	11	10	6	8
73	13	11	11	11	14	12	1	11	11	12	14	11	15	11	13	11	14	11	13	11	12	11	12	11	12	13	11	11	11	13	11	12	11	11
74	11	9	11	10	11	10	11	1	11	9	11	9	11	11	11	13	11	9	12	11	11	11	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10
75	11	11	11	7	11	8	11	11	1	11	11	8	11	7	11	11	11	10	8	11	11	11	11	5	11	11	9	11	7	9	11	11	10	4
76	11	10	11	9	11	8	12	9	11	1	11	9	11	9	11	9	12	8	11	9	12	8	11	9	12	9	11	9	5	9	11	9	12	8
77	13	11	11	6	11	11	14	11	11	11	1	11	11	11	13	11	11	7	12	11	11	7	11	11	8	11	11	11	12	12	11	7	6	11
78	11	9	8	9	11	7	11	9	8	9	11	1	11	9	8	9	11	7	11	10	8	9	11	8	5	11	9	9	11	8	11	10	9	9
79	12	11	11	11	14	12	15	11	11	11	11	11	1	12	14	11	14	11	12	11	13	11	14	11	13	12	11	11	12	12	12	11	12	12
80	11	8	12	7	12	6	11	11	7	9	11	9	12	1	12	9	11	8	9	11	11	6	12	7	12	8	11	10	9	5	12	9	12	5
81	12	12	10	11	13	7	13	11	11	11	13	8	14	12	1	11	14	9	11	12	11	11	13	6	11	13	11	12	13	10	13	13	7	12
82	12	9	11	9	11	11	11	13	11	9	11	9	11	9	11	1	11	9	11	12	11	11	11	12	11	10	11	12	11	11	11	12	11	11
83	13	12	11	11	13	11	14	11	11	12	11	11	14	11	14	11	1	11	13	11	11	13	14	11	14	12	12	11	11	12	13	12	14	13
84	12	9	9	5	11	5	11	9	10	8	7	7	11	8	9	9	11	1	11	9	9	8	11	7	7	8	9	9	11	7	11	5	9	8
85	11	5	11	7	12	11	13	12	8	11	12	11	12	9	11	11	13	11	1	11	12	13	11	8	12	13	11	11	10	12	14	11	12	8
86	11	10	11	10	11	10	11	11	11	9	11	10	11	11	12	12	11	9	11	1	11	10	11	10	12	10	11	12	12	10	11	12	11	10
87	11	11	9	11	11	10	12	11	11	12	11	8	13	11	11	11	11	9	12	11	1	11	12	9	11	11	12	11	11	10	12	11	9	11
88	11	8	11	9	12	7	11	11	11	8	7	9	11	6	11	11	13	8	13	10	11	1	11	10	11	8	11	11	11	7	11	10	7	8
89	11	11	11	11	12	12	12	11	11	11	11	11	14	12	13	11	14	11	11	11	12	11	1	11	12	12	12	11	12	11	14	12	12	12
90	11	9	9	6	11	5	11	10	5	9	11	8	11	7	6	12	11	7	8	10	9	10	11	1	11	10	9	10	8	7	11	12	6	6
91	12	11	11	7	12	11	12	11	11	12	8	5	13	12	11	11	14	7	12	12	11	11	12	11	1	12	12	11	11	12	14	7	12	11
92	12	8	4	9	11	8	13	10	11	9	11	11	12	8	13	10	12	8	13	10	11	8	12	10	12	1	11	10	11	8	12	10	13	11
93	11	11	10	11	11	8	11	11	9	11	11	9	11	11	11	11	12	9	11	11	12	11	12	9	12	11	1	11	11	11	11	11	9	13
94	11	9	11	10	12	10	11	10	11	9	11	9	11	10	12	12	11	9	11	12	11	11	11	10	11	10	11	1	11	10	11	13	11	10
95	11	11	11	7	11	11	11	11	7	5	12	11	12	9	13	11	11	11	10	12	11	11	12	8	11	11	11	11	1	11	11	11	13	9
96	12	8	9	10	11	4	13	10	9	9	12	8	12	5	10	11	12	7	12	10	10	7	11	7	12	8	11	10	11	1	11	10	9	8
97	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	13	11	13	11	14	11	12	11	14	11	14	12	11	11	11	11	1	11	14	12
98	13	9	11	5	11	10	12	10	11	9	7	10	11	9	13	12	12	5	11	12	11	10	12	12	7	10	11	13	11	10	11	1	11	10
99	12	11	9	11	11	6	11	11	10	12	6	9	12	12	7	11	14	9	12	11	9	7	12	6	12	13	9	11	13	9	14	11	1	12
100	11	9	11	6	12	8	11	10	4	8	11	9	12	5	12	11	13	8	8	10	11	8	12	6	11	11	13	10	9	8	12	10	12	1

二、函數的性質

$f(n)=n$	$R(n,1)=n$
$f(\frac{2n-1}{2})=n+1$	$R(n+1,2)=\frac{2n-1}{2}$
$f(\frac{3n-1}{3})=n+2$	$R(n+2,3)=\frac{3n-1}{3}$
$f(\frac{3n-2}{3})=n+2$	$R(n+2,4)=\frac{3n-2}{3}$
	$R(n+3,5)=n$
$f(\frac{4n-1}{4})=n+3$	$R(n+3,6)=\frac{4n-1}{4}$
$f(\frac{F_{n+1}}{F_n})=n$	
若 $R(2\lfloor h\rfloor,p)=2\lfloor h\rfloor-h$ ，則 $\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2\lfloor h\rfloor\Rightarrow R(n+1,p)=R(n,p)+1$	
$R(n,p)>\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\Rightarrow R(n+1,p)=R(n,p)+1$	
$R(n,p)>\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\Rightarrow R(n,p)=R(n-1,p)+1$	
$m\in\mathbb{Q}^+,m>\left\lfloor\frac{f(m)-1}{2}\right\rfloor\Rightarrow f(m+1)=f(m)+1$	
$m\in\mathbb{Q}^+,m\geq\frac{1}{2},m\geq\frac{2}{9}f(m-\frac{1}{2})+\frac{4}{9}\Rightarrow f(m)=f(m-\frac{1}{2})+2\text{ or }f(m)=f(m-1)+1$	
$\forall m,n\in\mathbb{N}\ \exists k\in\mathbb{N}\ s.t.\ g(kn,km)=f(\frac{n}{m})$	
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s(\frac{j}{i})=2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}s(\frac{k-i+1}{i})+n$	
$n\in\mathbb{N}\Rightarrow f(\frac{n}{2})=\frac{3}{4}(-1)^{n+1}+\frac{3}{4}+\frac{n}{2}$	

三、連分數構造法與數論性質猜測

猜測 $a_n=\sum_{i=1}^{n}\tau(i(n-i+1))$ ，這樣我們便可以得到連分數構造法與正整數因數個數的關係。並且猜測 g 函數平均作圖得到的圖形近似的 ln 函數係數為 π 。

四、應用

1. 如果可以找到完整的結果，或許可以利用函數 f 與 R 之間的關係，進行加密與解密，就有機會應用於密碼學。
2. 或許有機會可以將單位電阻應用在電路學中，花費最少的單位電阻，組合出想要的電阻值，朝向最省材料的方向結合。
3. 或許有機會可以解釋圖論中的一些現象。

伍、參考文獻

[1] MolokoPlusPlus. (2013, August 12). Minimum number of resistor. reddit, from https://www.reddit.com/r/math/comments/1k78bt/minimum_number_of_resistors/

[2] 佩爾數。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/佩爾數

[3] Number of distinct resistances that can be produced from a circuit of n equal resistors using only series and parallel combinations. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, from https://oeis.org/A048211

[4] University of Surrey, from http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html

[5] Series-parallel duality and read-once functions.1101110, from https://11011110.github.io/blog/2016/05/19/series-parallel-duality-and.html

[6] Row sums of A072030. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, from https://oeis.org/A072031

【評語】010034

作者先以電阻串並聯詮釋連分數，分析費氏數列，繼而由幾何及圖論的視角尋求突破，深具創意。作者勇於探索未知領域，難能可貴，但與先前作品相較，本作品未有實質突破。數學研究路途艱辛，總有跌宕停滯之時，期許作者深入探索各個面向，繼續攻堅。