

# 2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010028

參展科別 數學

作品名稱 等比例線段下保角圖形之特徵探討

得獎獎項

就讀學校 臺北市私立泰北高級中學

指導教師 藍邦偉、劉繕榜

作者姓名 嚴才勝、蔡宗翰

關鍵詞 保角性、動點軌跡、曲面

## 作者簡介



我是嚴才勝，就讀泰北高中二年級。小時候的我不是很愛讀書，尤其不喜歡背誦的學習，成績自然不理想，也失去學習的熱忱，直到遇見了數學…。

數學給了我自信，因為數學是不用背誦的，只要充分了解定義，便可以推導出公式；做出補助線，就可以讓解答很美麗。數學充滿邏輯推理，這是我熱愛它的原因。

高一開始做數學專題，在老師的指導之下這是我第二件作品，很幸運能來參展。

我是蔡宗翰，目前就讀台北市泰北高中二年級。我的興趣是打籃球和跑步。從小到大，數學一直是最拿手的科目，因而建立我學習信心和熱忱。這是我第二件專題，其實這件作品從開始到現在還不滿一年，很幸運可以通過初審。在專題討論的過程中，學到使用不同角度與數學工具去鑽研數學，並跳脫原有框架思考不同的切入方式。在此謝謝隊友的幫忙，合作無間。透過這次科展我更肯定自己，希望日後學習數學有更強大的動力。

## 摘要

本研究由文獻[1]的一道題目進行發想。題目是給定正方形  $ABCD$ ， $E$  在  $\overline{AB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} = \overline{CE'}$ 。若  $\overline{DE}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $P$  且  $\overline{DE'}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $Q$ ，則存在點  $R$ ，使得  $\overline{AP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ ，則  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。我們改變正方形這個條件，考慮等長線段的特徵，再推廣到菱形。並在矩形與平行四邊形中，將「等長線段」這個條件改為「等比例線段」討論其保角特徵。最後將上述性質推廣到空間中的正方形、菱形、矩形與平行四邊形。

我們證明不論  $E$  點的位置在  $\overline{AB}$  線段的何處， $\angle PRQ$  恆為  $60^\circ$ 。我們也發現在平面上  $R$  點的可能位置有兩個，且滿足  $R$  點的軌跡正好是  $\frac{1}{3}$  圓弧，且此圓弧只與對角線長有關。在空間中， $E$  點固定時， $R$  點的位置在一個圓上，隨著  $E$  點在  $\overline{AB}$  線段移動。此時  $R$  點軌跡是  $\frac{1}{3}$  圓弧繞此圓弧所在的弦旋轉  $360^\circ$  所在曲面，此曲面也只與對角線長有關。

## Abstract

This project is taken from Crux mathematicorum, Vol. 46 (2), Feb. 2020 [1]. Starting from the square of the original problem, we consider the conformal graphic characteristics of equal length segments, and then extend it to rhombus. Next we talk about rectangles and parallelograms, the condition of "equal length segment" is changed to "equal proportion segment", and its conformal characteristics are discussed. Finally, the above properties are extended to squares, rhombus, rectangles and parallelograms in 3 dimension. We prove that wherever the point  $E$  located in segment  $AB$ , angle  $PRQ$  is still 60 degree. We also found there are two possible positions for the point  $R$  in plane. In 3 dimension, there is a circle where point  $R$  is located.

Finally we found the locus of the point  $R$  just depends on the diagonal line of the quadrilaterals above. The locus is a one third circular arc in plane, in 3 dimension, the locus is the one third circular arc rotates around the chord where the arc is located. The locus only related to the diagonal length not related to the quadrilateral shape.

# 壹、前言

## 一、研究動機

本研究是由 *Crux mathematicorum* 期刊中的一道題目進行發想[1]。如圖 1，已知正方形  $ABCD$ ， $E$  在  $\overline{AB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} = \overline{CE'}$ 。若  $\overline{DE}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $P$  且  $\overline{DE'}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $Q$ ，存在點  $R$ ，使得  $\overline{AP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ ，則  $\angle PRQ$  為  $60^\circ$  [1]，如圖 1。我們做出數學模型觀察，發現不管  $E$  在  $\overline{AB}$  上如何移動， $\angle PRQ$  都保持是  $60^\circ$ ，如圖 2 所示。而且當  $E$  在相同位置時， $R$  點有兩個可能位置  $R_1$  與  $R_2$ ，如圖 3 所示。在菱形中上述性質亦成立，如圖 4。經過數學實驗發現在矩形與平行四邊形中，需改變等長線段的條件為等比例線段， $\angle R$  亦為  $60^\circ$  如圖 5 與圖 6。最後在正立方體內，探討建構前述不同類型的四邊形，考慮等長與等比例線段的特徵之  $R$  點在空間中的相關性質，並討論平面與空間中  $R$  點軌跡方程式。

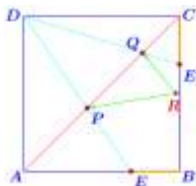


圖 1：原題

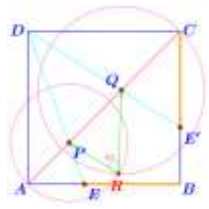


圖 2： $\angle R$  是  $60^\circ$

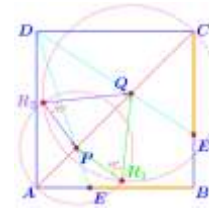


圖 3： $R$  點的兩個可能位置

## 二、研究目的與問題

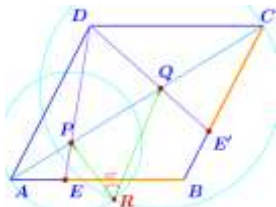


圖 4：菱形

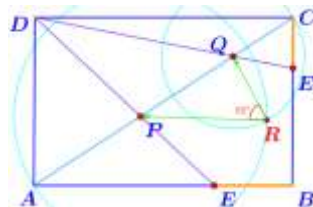


圖 5：矩形

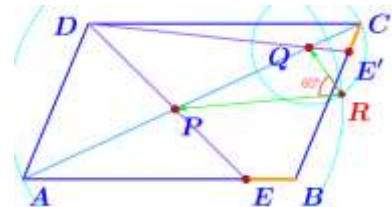


圖 6：平行四邊形

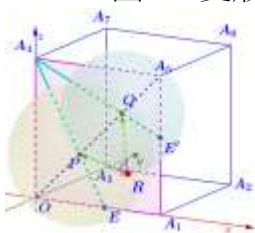


圖 7：正方形

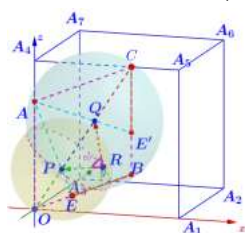


圖 8：菱形

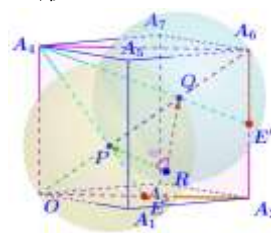


圖 9：矩形

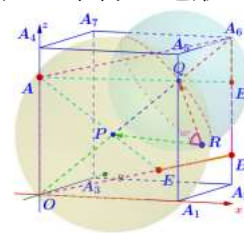


圖 10：平行四邊形

- (一) 四邊形  $ABCD$  為正方形或菱形， $E$  在  $\overline{AB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} = \overline{CE'}$ 。若  $\overline{DE}$  與  $\overline{DE'}$  分別交  $\overline{AC}$  於  $P$  與  $Q$ ，且  $\overline{AP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ ，則  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。
- (二) 四邊形  $ABCD$  為矩形或平行四邊形， $E$  在  $\overline{AB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} : \overline{BA} = \overline{CE'} : \overline{CB}$ 。若  $\overline{DE}$  與  $\overline{DE'}$  分別交  $\overline{AC}$  於  $P$  與  $Q$ ，且  $\overline{AP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ ，則  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。
- (三) 正方形、菱形、矩形與平行四邊形中，滿足上述構造的  $R$  點軌跡方程式。

- (四) 在正立方體中，其中 4 個頂點構成的正方形、矩形或其中兩點頂點與邊上兩點所形成的平行四邊形、一頂點、邊上兩點與共面一點的菱形，上述的保角性是否成立。
- (五) 在正立方體中，選擇其中 4 個頂點構成的正方形、矩形或其中兩點頂點與邊上兩點所形成的平行四邊形、一頂點、邊上兩點與共面一點的菱形， $R$  點的軌跡方程式。

## 貳、研究方法



圖 11：研究流程圖

圖 11 是我們的研究流程圖。在平面上，我們討論的順序是從正方形、菱形、矩形最後是平行四邊形。我們使用兩種方法證明保角性，第一種方法是三角形中內角平分線長公式

$$t_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

與餘弦定理。第二種方法是利用兩組相似三角形與餘弦定理。在空間中，我們討論在正立方體中：

將我們討論的正方形、菱形、矩形與平行四邊形中，一個頂點置於原點，另一頂點放在  $z$  軸正向上。我們利用前述的第二種方法與三角形全等，證明保角性。

接著討論  $R$  點軌跡的部分，平面的部分，我們也證明本研究中正方形、菱形、矩形與平行四邊形的  $R$  點軌跡皆為  $\frac{1}{3}$  圓弧，故可以求出圓心為  $(x_0, y_0)$ ，半徑為  $r$  的  $R$  點軌跡參數

$$\Gamma: \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}, \phi \leq \theta \leq \phi + \frac{2\pi}{3}$$

。我們也想取[2]的軌跡討論手法，考慮在不同相鄰邊

時， $R$  點軌跡情形。

在空間中，我們討論的順序是正方形、平行四邊形、矩形與菱形。考慮  $R$  點所在的  $\frac{1}{3}$  圓弧，我們將討論的圖形旋轉適當角度，使得此圓弧的兩端點其中一點在原點，另一點在  $x$  軸正向，討論  $R$  點軌跡，寫出圓弧  $\Gamma$  的參數式，其圓心為  $(x_0, 0, z_0)$ ，半徑為  $r$  的  $R$  點軌跡參

$$\Gamma: \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = 0 \\ z = z_0 + r \sin \theta \end{cases}, \phi \leq \theta \leq \phi + \frac{2\pi}{3}$$

。將  $x$  分量改寫成  $t$ ，取出  $z$  分量當旋轉半徑，即

$$\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = f(t) \end{cases}, \phi \leq \theta \leq \phi + \frac{2\pi}{3}$$

，做出  $R$  點所在曲面參數式： $\Phi: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \cos \beta \\ z = f(t) \sin \beta \end{cases}$

$0 \leq t \leq \sqrt{2}, 0 \leq \beta < 2\pi$ ，此曲面即  $E$  點移動時， $R$  點的軌跡。最後再對物件利用空間中的旋轉矩陣還原。

## 參、研究結果

### 一、正方形保角性

作者以兩種方法證明  $\angle R = 60^\circ$ 。原題的  $R$  點是在正方形對角線  $\overline{AC}$  的下方，如圖 12 所示。我們發現在對角線  $\overline{AC}$  的上方也可能滿足原命題，為了後續討論方便我們令  $\overline{AC}$  下方的  $R$  點為  $R_1$ ， $\overline{AC}$  上方的  $R$  點為  $R_2$ ，如圖 13 所示。

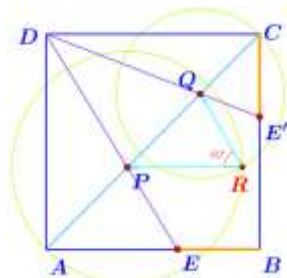


圖 12：原題

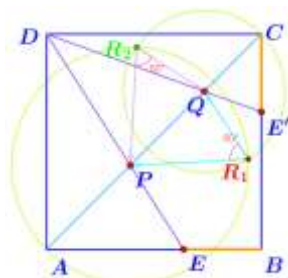


圖 13： $R_1$  與  $R_2$  所在位置

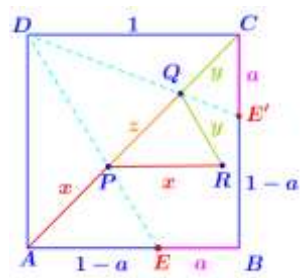


圖 14：正方形證明法 1

(一)如圖 14，正方形  $ABCD$  之邊長為 1， $\overline{BE} = \overline{CE'} = a$ ， $\overline{PA} = \overline{PR} = x$ ， $\overline{QR} = \overline{QC} = y$ ， $\overline{PQ} = z$ 。  
證明：

在  $\triangle ADE$  中， $\overline{AP}$  為  $\angle A$  的內角平分線，由內角平分線長公式知：

$$x = \frac{2 \times 1 \times (1-a)}{1+(1-a)} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{2-a}。$$

在  $\triangle CDE'$  中， $\overline{CQ}$  為  $\angle C$  的內角平分線，由內角平分線長公式知： $y = \frac{2 \times 1 \times a}{1+a} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{a+1}。$

如圖 14 中， $\overline{AC} = x + y + z = \sqrt{2}$ 。在  $\triangle PQR$  中，由餘弦定理知：

$$(\sqrt{2} - x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos R，$$

$$\text{故 } \cos R = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 + 2 + 2xy - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y)}{2xy}$$

$$\Rightarrow \cos R = \frac{-2xy - 2 + 2\sqrt{2}(x+y)}{2xy} = \frac{\sqrt{2}(x+y) - xy - 1}{xy}$$

$$\text{又 } x + y = \frac{\sqrt{2}a}{a+1} + \frac{\sqrt{2}(1-a)}{2-a} = \frac{-2a^2 + 2a + 1}{(a+1)(2-a)}， \quad xy = \frac{\sqrt{2}(1-a) \cdot \sqrt{2}a}{(2-a)(a+1)} = \frac{2a(1-a)}{(2-a)(a+1)}$$

$$\text{所以 } \sqrt{2}(x+y) - xy - 1 = \frac{-4a^2 + 4a + 2 - 2a + 2a^2 + a^2 - a - 2}{(2-a)(a+1)} = \frac{-a^2 + a}{(2-a)(a+1)} = \frac{a(1-a)}{(2-a)(a+1)}$$

$$\text{故 } \cos R = \frac{\frac{a(1-a)}{(2-a)(a+1)}}{\frac{2a(1-a)}{(2-a)(a+1)}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle PRQ = 60^\circ$$



(二) 利用相似三角形

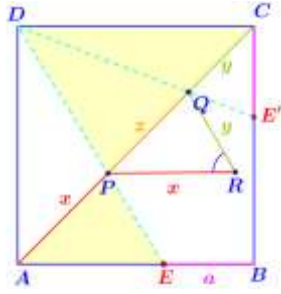


圖 15：正方形證明法 2

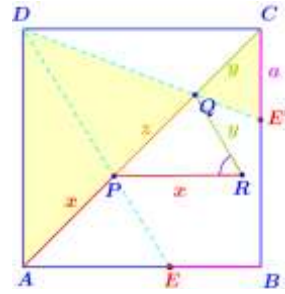


圖 16：正方形證明法 2

證明：

設正方形  $ABCD$  之邊長為 1，且  $\overline{PA} = \overline{PR} = x$ ， $\overline{QR} = \overline{QC} = y$ ， $\overline{PQ} = z$ 。

如圖 15，因為  $\triangle APE \sim \triangle CPD$ ，所以  $\frac{x}{y+z} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{1-a}{1}$ .....①。

如圖 16，因為  $\triangle CQE' \sim \triangle AQD$ ，所以  $\frac{y}{x+z} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CE'}}{\overline{AD}} = \frac{a}{1}$ .....②。

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = 1 \Rightarrow x(x+z) + y(y+z) = (y+z)(x+z)$$

$$\Rightarrow x^2 + xz + y^2 + yz = xy + xz + yz + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

又由餘弦定理知  $\triangle PQR$  中： $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos R$ ，故  $\cos R = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle PRQ = 60^\circ$ 。 ■

二、菱形的保角性

如圖 17，接著我們考慮也是 4 邊等長的菱形是否會有上述的保角性。設菱形  $ABCD$  之邊長為 1，

$\overline{PA} = \overline{PR} = x$ ， $\overline{QR} = \overline{QC} = y$ ， $\overline{PQ} = z$ 。

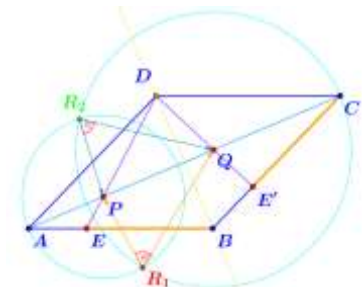


圖 17：菱形保角性

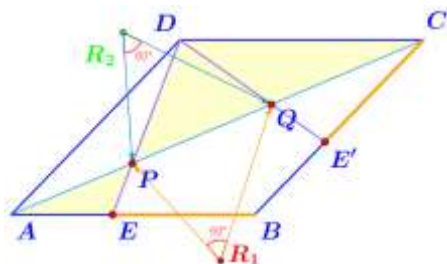


圖 18：菱形保角性證明 1

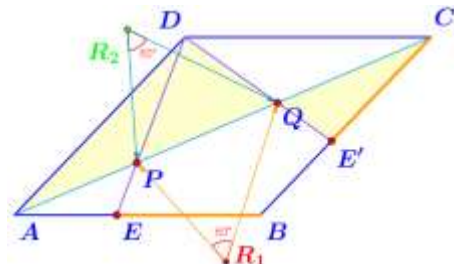


圖 19：菱形保角性證明 2

如圖 18，因為  $\triangle APE \sim \triangle CPD$ ，所以  $\frac{x}{y+z} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{1-a}{1}$ .....①。

如圖 19，因為  $\Delta CQE' \sim \Delta AQD$ ，所以  $\frac{y}{x+z} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CE'}}{\overline{AD}} = \frac{a}{1} \dots\dots \textcircled{2}$ 。

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = 1$$

$$\Rightarrow x(x+z) + y(y+z) = (y+z)(x+z)$$

$$\Rightarrow x^2 + xz + y^2 + yz = xy + xz + yz + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

又由餘弦定理知： $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos R$ ，故  $\cos R = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle PRQ = 60^\circ$ 。 ■

### 三、矩形與平行四邊形的保角性

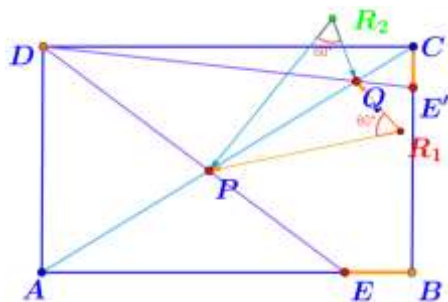


圖 20：矩形的保角性

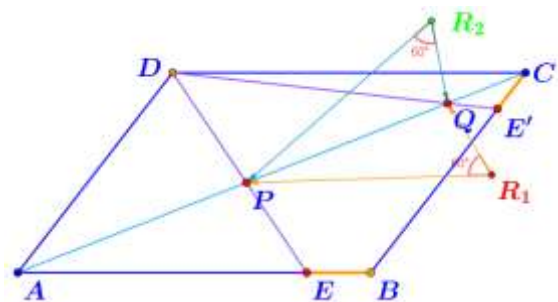


圖 21：平行四邊形的保角性

在研究初期，我們本來是分開研究矩形與平行四邊形如圖 20, 21。但後來發現此性質延伸到矩形與平行四邊形是相同的。甚至在證明中除了圖形略有不同，證明過程完全相同。

我們本來猜測在矩形與平行四邊形中是否有相同性質，但在 GeoGebra 中作出類似作圖後，並未觀察到。也就是說當  $\overline{BE} = \overline{CE'}$  時， $\angle PRQ \neq 60^\circ$ 。後來反向思考，我們解除  $\overline{BE} = \overline{CE'}$  這個條件，也就是說我們取  $E$  點在  $\overline{AB}$  上，取  $E'$  點在  $\overline{BC}$  上，在移動  $E$  點與  $E'$  點，觀察當  $\angle R = 60^\circ$  時，相對應的邊長是否有什麼關係？我們取出線段  $\overline{AE}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{BE'}$  與  $\overline{CE'}$  的長度，並由正方形與菱形的證明過程，發現當  $\angle R = 60^\circ$  時  $\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'B}}$ ，詳述如下。

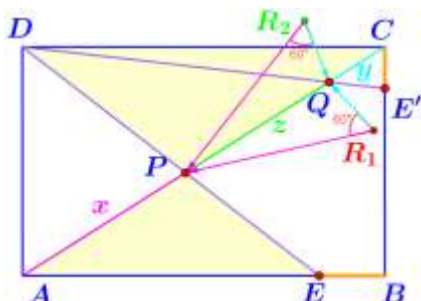


圖 22：矩形的保角性證明 1

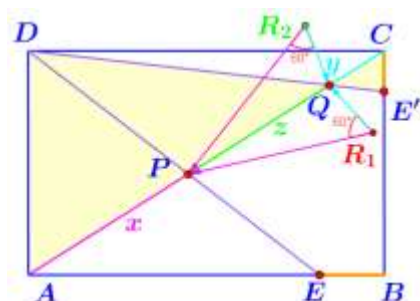


圖 23：矩形的保角性證明 2



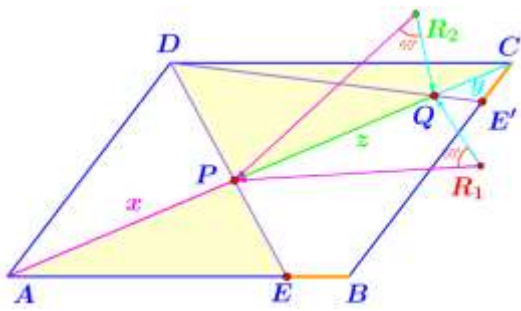


圖 24：平行四邊形的保角性證明 1

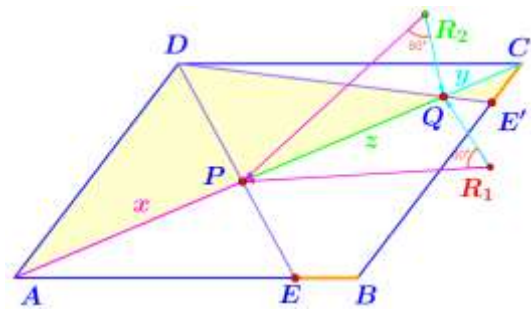


圖 25：平行四邊形的保角性證明 2

如圖 22, 24，因為  $\triangle APE \sim \triangle CPD$ ，所以  $\frac{x}{y+z} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{1-a}{1}$ .....①。

如圖 23, 25，因為  $\triangle CQE' \sim \triangle AQD$ ，所以  $\frac{y}{x+z} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CE'}}{\overline{AD}} = \frac{a}{1}$ .....②。

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = 1 \Rightarrow x(x+z) + y(y+z) = (y+z)(x+z)$$

$$\Rightarrow x^2 + xz + y^2 + yz = xy + xz + yz + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

又由餘弦定理知： $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos R$ ，故  $\cos R = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle PRQ = 60^\circ$ 。 ■

在證明矩形與平行四邊形的情形後，我發現在正方形與菱形中，其實只要滿足  $\overline{BE} : \overline{EA} = \overline{CE'} : \overline{E'B}$  時，就可以得到  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。

我們也花了一些時間，改變某些參數，在梯形、鳶形與其他任意四邊形中，找尋保角性是否存在。目前並無具體結果。

#### 四、正方形中 R 點的軌跡方程式

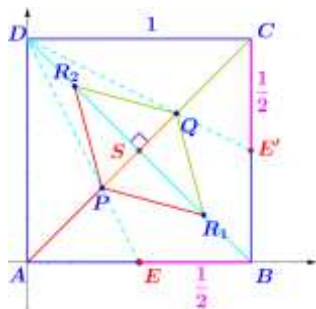


圖 26：正方形 R 點軌跡

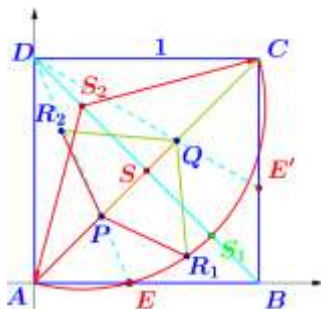


圖 27：R 點軌跡證明 1

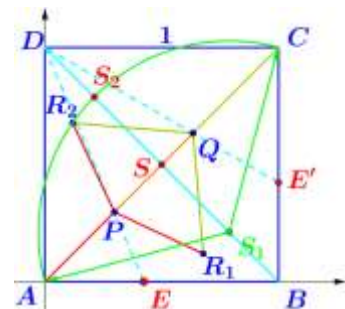


圖 28：R 點軌跡證明 2

我們移動 E 點觀察 R 點的軌跡後，確認  $\angle R$  恆為  $60^\circ$ ，並猜測 R 點在一個  $120^\circ$  的圓弧上，如圖 26。我們在平行四邊形時會證明。且此圓弧的圓心在當 E 為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，即圓弧與對角線  $\overline{BD}$  的交點。設  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,1)$  與  $D(0,1)$ ，我們令此時

$R_1$  與  $R_2$  的所在位置為  $S_1$  與  $S_2$ 。取  $\overline{AB}$  之中點  $E(\frac{1}{2}, 0)$ ，此時  $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC} = \frac{1}{3} \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

故可得： $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  與  $Q(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ，作法是將  $\overrightarrow{PQ}$  旋轉  $60^\circ$  得  $S_2$ ，旋轉  $-60^\circ$  得  $S_1$ 。

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow S_2(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$$

又此時  $\overline{PS_1} = \overline{PS_2} = \overline{QS_1} = \overline{QS_2}$ ，即四邊形  $PS_2QS_1$  為一平行四邊形，故：

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OS_2} = S_1(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6})，此時 \overline{S_1A}^2 = (\frac{3+\sqrt{3}}{6})^2 + (\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{S_1A} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \overline{S_2A}。設 \theta 為 \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AS_2} 之夾角，考慮 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS_2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS_2}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow (1,0) \cdot (\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}) = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12}$$

再檢查  $\overrightarrow{S_2A}$  與  $\overrightarrow{S_2C}$  的夾角  $\phi$ ，考慮  $\overrightarrow{S_2A} \cdot \overrightarrow{S_2C} = |\overrightarrow{S_2A}| \cdot |\overrightarrow{S_2C}| \cos \phi$

$$\Rightarrow (\frac{-3+\sqrt{3}}{6}, \frac{-3-\sqrt{3}}{6}) \cdot (\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \phi$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \cos \phi = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{故以 } S_2 \text{ 為圓心的圓弧軌跡方程式為 } \Gamma_1: \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \theta \end{cases}, \frac{17\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{25\pi}{12}。圖 27。$$

$$\text{同理以 } S_1 \text{ 為圓心的圓弧軌跡方程式為 } \Gamma_1': \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{3-\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \theta \end{cases}, \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{12}。圖 28。$$

## 五、菱形中 $R$ 點的軌跡方程式

我們觀察  $R$  點的軌跡後，猜測  $R$  點在一個  $120^\circ$  的圓弧上，如圖 29。且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令此時這兩點為  $S_1$  與  $S_2$ 。設  $\angle DAB = \alpha$ ， $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1+\cos \alpha, \sin \alpha)$  與  $D(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 。

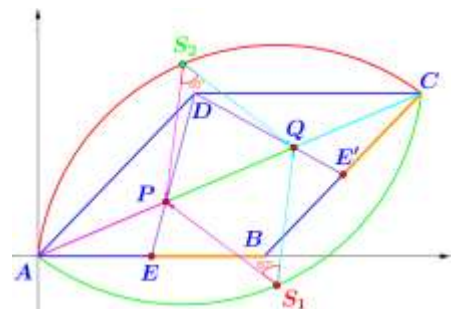


圖 29：菱形  $R$  點軌跡

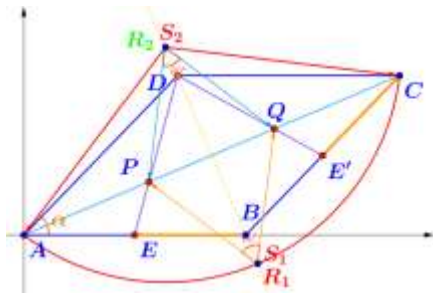


圖 30：菱形 R 點軌跡證明 1

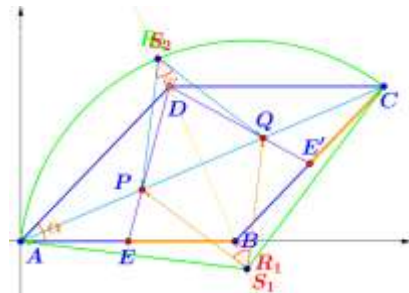


圖 31：菱形 R 點軌跡證明 2

取  $\overline{AB}$  之中點  $E(\frac{1}{2}, 0)$ ，得  $\overline{AC} = \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$ ，且  $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ 。

故可得： $P(\frac{1 + \cos \alpha}{3}, \frac{\sin \alpha}{3})$  與  $Q(\frac{2(1 + \cos \alpha)}{3}, \frac{2 \sin \alpha}{3})$ ，取  $\overrightarrow{PQ} = (\frac{1 + \cos \alpha}{3}, \frac{\sin \alpha}{3})$ ，考慮將  $\overrightarrow{PQ}$

旋轉  $60^\circ$  得  $S_2$ ，如圖 30。將  $\overrightarrow{PQ}$  旋轉  $-60^\circ$  得  $S_1$ ，如圖 31。

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3 + 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{6} \\ \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 \left( \frac{3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 3}{6}, \frac{\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha + \sqrt{3}}{6} \right)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ \frac{\sin \alpha}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 3}{6} \\ \frac{-\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow S_1 \left( \frac{3 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha + 3}{6}, \frac{-\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3}}{6} \right)$$

$$\text{此時 } \overline{S_2 A}^2 = \left( \frac{3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 3}{6} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha + \sqrt{3}}{6} \right)^2$$

$$= \frac{1}{36} [(3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha + 3)^2 + (\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha + \sqrt{3})^2]$$

$$= \frac{1}{36} (12 \cos^2 \alpha + 12 \sin^2 \alpha + 24 \cos \alpha + 12) = \frac{1}{36} (24 \cos \alpha + 24) = \frac{2}{3} (1 + \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \overline{S_2 A} = \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos \alpha} = \overline{S_1 A}。設 \theta 為 \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AS_2} 之夾角，考慮 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS_2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS_2}| \cos \theta$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1,0)\left(\frac{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha + 3}{6}, \frac{\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha + \sqrt{3}}{6}\right) = 1 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \cos\theta \\ &\Rightarrow \frac{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha + 3}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{6}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}}{4\sqrt{1 + \cos\alpha}} \\ &\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{6}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}}{4\sqrt{1 + \cos\alpha}} \text{。再檢查 } \vec{S_2A} \text{ 與 } \vec{S_2C} \text{ 的夾角 } \phi \text{：} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \vec{S_2A} = \left(\frac{-3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha - 3}{6}, \frac{-\sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha - \sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\vec{S_2C} = \left(\frac{3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + 3}{6}, \frac{-\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha - \sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\vec{S_2A} \cdot \vec{S_2C} = |\vec{S_2A}| \cdot |\vec{S_2C}| \cos\phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36} [(\sqrt{3}\sin\alpha)^2 - (3\cos\alpha + 3)^2 + (-\sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{3})^2 - (3\sin\alpha)^2] = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha}\right)^2 \cos\phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36} [3\sin^2\alpha - (9\cos^2\alpha + 18\cos\alpha + 9) + (3\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 3) - 9\sin^2\alpha] = \frac{2}{3} (1 + \cos\alpha) \cos\phi$$

$$\Rightarrow -6\sin^2\alpha - 6\cos^2\alpha - 12\cos\alpha - 6 = 24(1 + \cos\alpha) \cos\phi$$

$$\Rightarrow -12(1 + \cos\alpha) = 24(1 + \cos\alpha) \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

故以  $S_2$  為圓心的圓弧軌跡方程式為：

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = \frac{3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + 3}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \cos\theta \\ y = \frac{-\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha - \sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \sin\theta \end{cases},$$

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{6}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}}{4\sqrt{1 + \cos\alpha}} \leq \theta \leq \cos^{-1} \frac{\sqrt{6}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}}{4\sqrt{1 + \cos\alpha}} + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{同理以 } S_1 \text{ 為圓心的圓弧軌跡方程式為： } \Gamma'_2: \begin{cases} x = \frac{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha + 3}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \cos\theta \\ y = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha + \sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{1 + \cos\alpha} \sin\theta \end{cases},$$

$$\frac{\pi}{3} - \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{3}}{2\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}} \leq \theta \leq \pi - \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{3}}{2\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}} \text{。}$$

我們也檢查了當  $\alpha = 90^\circ$  時，菱形軌跡參數曲線  $\Gamma_2$  與正方形軌跡參數曲線  $\Gamma_1$  相同，菱形軌跡參數曲線  $\Gamma'_2$  與正方形軌跡參數曲線  $\Gamma'_1$  相同。

## 六、矩形中 $R$ 點的軌跡方程式

由正方形的經驗，發現  $R$  點的軌跡也在一個  $120^\circ$  的圓弧上，如圖 32。且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令此時這兩點為  $S_1$  與  $S_2$ 。設  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,j)$  與  $D(0,j)$ ，取  $\overline{AB}$  之中點  $E(\frac{1}{2},0)$ 。

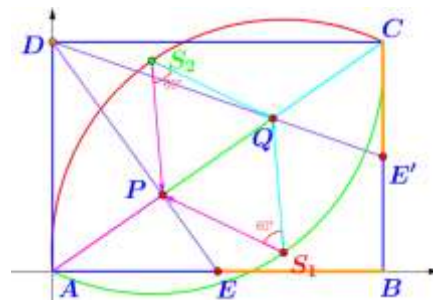


圖 32：矩形  $R$  點軌跡證明

此時  $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC} = \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{\sqrt{j^2+1}}{3}$ 。故可得： $P(\frac{1}{3}, \frac{j}{3})$  與  $Q(\frac{2}{3}, \frac{2j}{3})$ ，考慮將  $\overrightarrow{PQ}$  旋轉  $60^\circ$

得  $S_2$ ，旋轉  $-60^\circ$  得  $S_1$ 。

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}j}{6} \\ \frac{\sqrt{3}+3j}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_2(\frac{3-\sqrt{3}j}{6}, \frac{\sqrt{3}+3j}{6})$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}j}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}+3j}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1(\frac{3+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}+3j}{6})$$

$$\text{此時 } \overline{S_1A}^2 = (\frac{3+\sqrt{3}j}{6})^2 + (\frac{-\sqrt{3}+3j}{6})^2 = \frac{12+12j^2}{36} \Rightarrow \overline{S_1A} = \frac{\sqrt{3(1+j^2)}}{3} = \overline{S_2A}$$

設  $\theta$  為  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{S_2A}$  之夾角，考慮  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{S_2A} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{S_2A}| \cos \theta$

$$\Rightarrow (1,0) \cdot (\frac{-3+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}-3j}{6}) = 1 \times \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{-3+\sqrt{3}j}{6} = \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-3+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{-3+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}}$$

設  $\alpha$  為  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{S_1C}$  之夾角，考慮  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{S_1C} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{S_1C}| \cos \alpha$

$$\Rightarrow (1,0) \cdot (\frac{3-\sqrt{3}j}{6}, \frac{\sqrt{3}+3j}{6}) = 1 \times \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{3}j}{6} = \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{3-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}}$$

再檢查  $\vec{S}_2A$  與  $\vec{S}_2C$  的夾角  $\phi$  :  $\vec{S}_2A \cdot \vec{S}_2C = |\vec{S}_2A| \cdot |\vec{S}_2C| \cos \phi$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}-3j}{6}\right) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}+3j}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3+3j^2}}{3}\right)^2 \cos \phi$$

$$\Rightarrow \frac{(3j^2-9)+(3-9j^2)}{36} = \frac{1+j^2}{3} \cos \phi \Rightarrow \frac{-6(j^2+1)}{12} = (1+j^2) \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

故以  $S_2$  為圓心的圓弧軌跡方程式為：

$$\Gamma_3: \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}j}{6} + \frac{\sqrt{3(1+j^2)}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{3+3j^2}}{6} + \frac{\sqrt{3(1+j^2)}}{3} \sin \theta \end{cases}, \cos^{-1} \frac{-3+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} \leq \theta \leq \cos^{-1} \frac{-3+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} + \frac{2\pi}{3}$$

同理可得  $S_1$  為圓心的圓弧軌跡方程式為：

$$\Gamma'_3: \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}j}{6} + \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{-\sqrt{3}+3j}{6} + \frac{\sqrt{3+3j^2}}{3} \sin \theta \end{cases}, \cos^{-1} \frac{3-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} \leq \theta \leq \cos^{-1} \frac{3-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3+3j^2}} + \frac{2\pi}{3}$$

### 七、平行四邊形中 $R$ 點的軌跡方程式

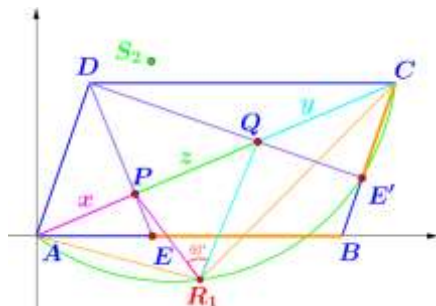


圖 33：平行四邊形  $R$  點軌跡證明

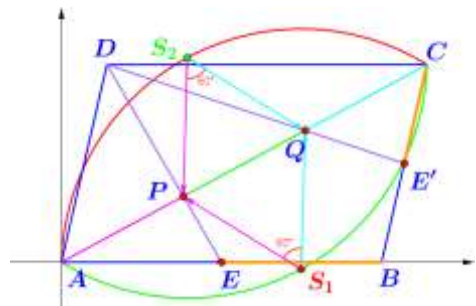


圖 34：平行四邊形  $R$  點軌跡證明

一般化的平行四邊形中，我們重新檢查  $R$  點的軌跡也在一個  $120^\circ$  的圓弧上，如圖 33。

在  $\triangle APR$  與  $\triangle CQR$  中，因為  $\overline{PA} = \overline{PR}$ ， $\overline{QC} = \overline{QR}$ ，所以  $\angle PRA = \angle PAR$ ， $\angle QRC = \angle QCR$ ，所以  $\angle ARC = \angle ARP + 60^\circ + \angle QRC = \angle PAR + 60^\circ + \angle QCR = 60^\circ + 180^\circ - \angle ARC$  故， $2\angle ARC = 240^\circ \Rightarrow \angle ARC = 120^\circ$ 。

且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令此時這兩點為  $S_1$  與

$S_2$ 。設  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1+t, j)$  與  $D(t, j)$ ，取  $\overline{AB}$  之中點  $E(\frac{1}{2}, 0)$ ，取  $\overline{BC}$  之中點



$E'(1+\frac{t}{2}, \frac{j}{2})$ ，此時  $P$ 、 $Q$  分別為  $\triangle ABD$  與  $\triangle BCD$  之重心，所以  $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC} = \frac{1}{3}\overline{AC}$   
 $= \frac{\sqrt{(1+t)^2 + j^2}}{3}$ 。得： $P(\frac{1+t}{3}, \frac{j}{3})$  與  $Q(\frac{2+2t}{3}, \frac{2j}{3})$ 。考慮將  $\overrightarrow{PQ}$  旋轉  $60^\circ$  得  $S_2$ ，旋轉  $-60^\circ$  得  $S_1$ 。

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+3t-\sqrt{3}j}{6} \\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}t+3j}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_2(\frac{3+3t-\sqrt{3}j}{6}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}t+3j}{6})$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+t}{3} \\ \frac{j}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+3t+\sqrt{3}j}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}t+3j}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1(\frac{3+3t+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}t+3j}{6})$$

$$\text{此時 } \overline{S_1A}^2 = (\frac{3(1+t)+\sqrt{3}j}{6})^2 + (\frac{-\sqrt{3}(1+t)+3j}{6})^2 = \frac{(1+t)^2 + j^2}{3} \Rightarrow \overline{S_1A} = \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} = \overline{S_2A}$$

設  $\theta$  為  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{S_2A}$  之夾角，考慮  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{S_2A} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{S_2A}| \cos \theta$

$$\Rightarrow (1,0) \cdot (\frac{-3-3t+\sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}t-3j}{6}) = 1 \times \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{-3-3t+\sqrt{3}j}{6} = \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{-3(1+t)+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{-3(1+t)+\sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}$$

設  $\alpha$  為  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{S_1C}$  之夾角，考慮  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{S_1C} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{S_1C}| \cos \alpha$

$$\Rightarrow (1,0) \cdot (\frac{3(1+t)-\sqrt{3}j}{6}, \frac{\sqrt{3}(1+t)+3j}{6}) = 1 \times \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3+3t-\sqrt{3}j}{6} = \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3(1+t)-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{3+3t-\sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} \text{。再檢查 } \overrightarrow{S_2A} \text{ 與 } \overrightarrow{S_2C} \text{ 的夾角 } \phi \text{：考慮 } \overrightarrow{S_2A} \cdot \overrightarrow{S_2C} = |\overrightarrow{S_2A}| \cdot |\overrightarrow{S_2C}| \cos \phi$$

$$\Rightarrow \left( \frac{-3(1+t) + \sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}(1+t) - 3j}{6} \right) \left( \frac{3(1+t) + \sqrt{3}j}{6}, \frac{-\sqrt{3}(1+t) + 3j}{6} \right) = \left( \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \right)^2 \cos \phi$$

$$\Rightarrow \frac{3j^2 - 9(1+t)^2 + 3(1+t)^2 - 9j^2}{36} = \frac{(1+t)^2 + j^2}{3} \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

故以  $S_2$  為圓心的圓弧軌跡方程式為： $\Gamma_4$ ：

$$\begin{cases} x = \frac{3(1+t) - \sqrt{3}j}{6} + \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{\sqrt{3}(1+t) + 3j}{6} + \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \sin \theta \end{cases},$$

其中  $\cos^{-1} \frac{-3(1+t) + \sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} \leq \theta \leq \cos^{-1} \frac{-3(1+t) + \sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} + \frac{2\pi}{3}$ 。

同理可得以  $S_1$  為圓心的圓弧軌跡方程式為： $\Gamma'_4$ ：

$$\begin{cases} x = \frac{3(1+t) + \sqrt{3}j}{6} + \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \cos \theta \\ y = \frac{-\sqrt{3}(1+t) + 3j}{6} + \frac{\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}}{3} \sin \theta \end{cases},$$

其中  $\cos^{-1} \frac{3(1+t) - \sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} \leq \theta \leq \cos^{-1} \frac{3(1+t) - \sqrt{3}j}{2\sqrt{3(1+t)^2 + 3j^2}} + \frac{2\pi}{3}$ 。

此處我們也檢查了平行四邊形的軌跡方程式取  $t=0$ ， $j=1$  代到正方形、菱形的軌跡方程式取  $\tan \alpha = \frac{j}{t}$  代到正方形與矩形的軌跡方程式取  $t=0$  代到正方形，皆與原正方形的軌跡方程式相同。

### 八、正立方體中的保角性

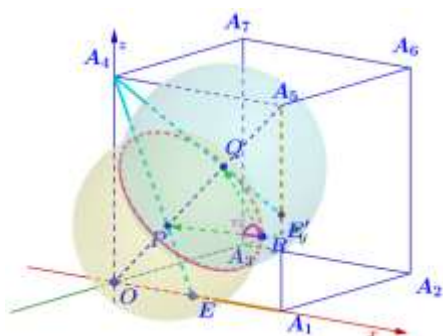


圖 35：根平面上  $R$  點

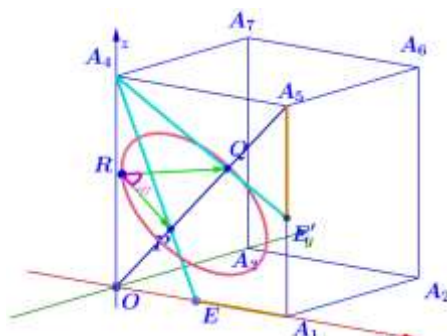


圖 36：正立方體中  $R$  點

接著討論在正立方體中，滿足上述性質是否仍然有保角性。我們把原來的正方形放在  $xz$  平面上的正立方體上討論。此時我們發現：平面上固定  $E$  點時可以找到正方形對角線兩側的兩個解  $R_1$  與  $R_2$ ；但空間中，滿足原題的解在一個圓上。如圖 35 所示。我們分別以  $P$ 、 $Q$  為球心， $\overline{PO}$  與  $\overline{QA_5}$  為半徑，作球面  $s_1$  與  $s_2$ 。則  $R$  點的軌跡會在球面  $s_1$  與  $s_2$  交圓上。在正

立方體  $OA_1A_2A_3-A_4A_5A_6A_7$  中， $E$  在  $\overline{OA_1}$  上， $E'$  在  $\overline{A_1A_5}$  上，且  $\overline{A_1E} = \overline{A_5E'}$ 。若  $\overline{A_4E}$  與  $\overline{A_4E'}$  分別交  $\overline{OA_3}$  於  $P$  與  $Q$ ，且  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{A_5Q} = \overline{QR}$ ，如圖 36。想證  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。

故  $R$  點可能位置在以  $P$  為圓心  $\overline{OP}$  為半徑的球面與以  $Q$  為圓心  $\overline{A_5Q}$  為半徑的球面之交圓上。  
證明：

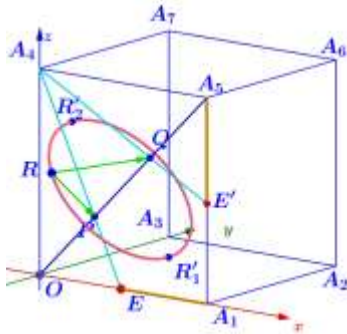


圖 37：正立方體中  $R$  點

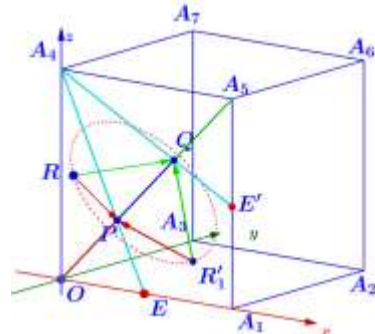


圖 38：正立方體中  $R$  點

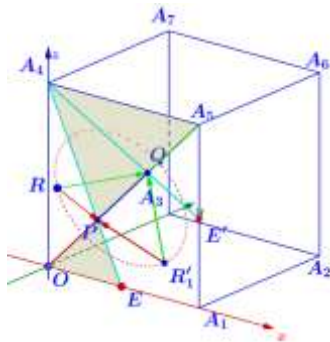


圖 39：正立方體中對應三角形相似證明

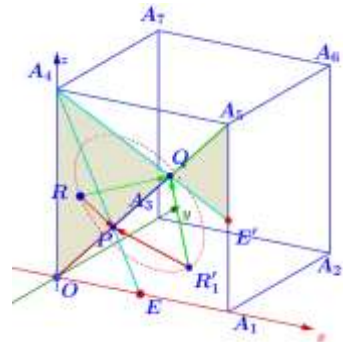


圖 40：正立方體中對應三角形相似證明

設正方形  $ABCD$  之邊長為 1，兩球面的交圓為  $c$ ， $c$  與平面  $y=0$  的一交點為  $R'_1$  與  $R'_2$ 。

我們取  $R'_1$  證明保角性， $R'_2$  同理可證。

證明：

設  $\overline{PQ} = r$ 。因為  $\Delta PQR \cong \Delta PQR'_1 (SSS)$ ，所以  $\overline{PO} = \overline{PR} = \overline{PR}'_1 = p$ ， $\overline{QR} = \overline{QA_5} = \overline{QR}'_1 = q$ 。如

圖 39，因為  $\Delta OPE \sim \Delta A_5PA_4$ ，所以  $\frac{p}{q+r} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PA_5}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{A_4A_5}} = \frac{1-a}{1}$ .....①。

如圖 40，因為  $\Delta OQA_4 \sim \Delta E'QA_5$ ，所以  $\frac{q}{p+r} = \frac{\overline{QA_5}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{A_5E'}}{\overline{A_4O}} = \frac{a}{1}$ .....②。

$$\text{①} + \text{②} : \frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r} = 1 \Rightarrow p(p+r) + q(q+r) = (q+r)(p+r)$$

$$\Rightarrow p^2 + pr + q^2 + qr = pq + pr + qr + r^2 \Rightarrow r^2 = p^2 + q^2 - pq$$

又由餘弦定理知  $\Delta PQR'_1$  中： $r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos R'_1$ ，故  $\cos R'_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle R'_1 = 60^\circ$ 。又

$\Delta PQR \cong \Delta PQR'_1 (SSS)$ ，所以  $\angle R = \angle R'_1 = 60^\circ$



接著討論菱形的保角性。在正立方體  $OA_1A_2A_3 - A_4A_5A_6A_7$  中， $A$  在  $\overline{OA_4}$  上， $C$  在  $\overline{A_4A_5}$  上， $B$  在正方形  $OA_1A_3A_4$  上， $E$  在  $\overline{OB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} = \overline{CE'}$ 。若  $\overline{AE}$  與  $\overline{AE'}$  分別交  $\overline{OC}$  於  $P$  與  $Q$ ，且  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ ，如圖 41。想證  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。因為證明與正方形類似，我們記錄在實驗日誌上。

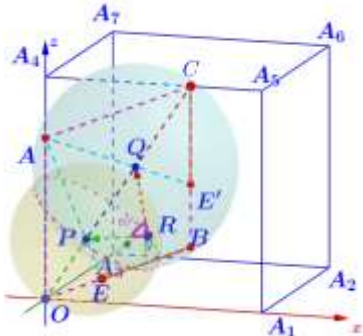


圖 41：正立方體中的菱形

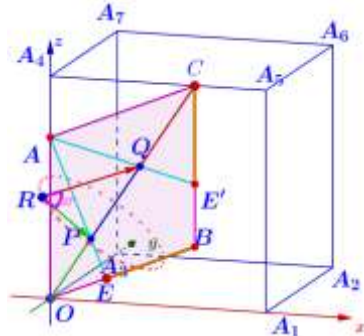


圖 42：菱形中對應三角形相似證明

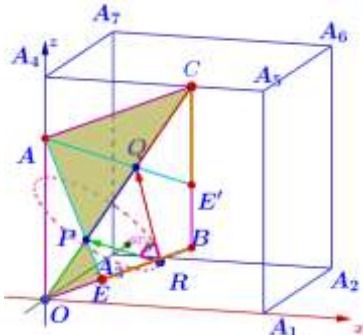


圖 43：菱形中對應三角形相似證明

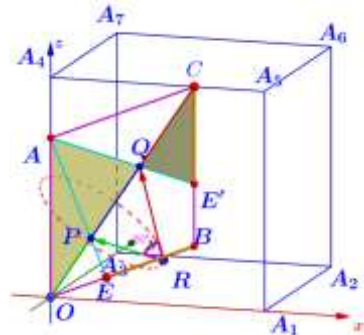


圖 44：菱形中對應三角形相似證明

接著考慮正立方體中的矩形，如圖 45。在正立方體  $OA_1A_2A_3 - A_4A_5A_6A_7$  中。取  $E$  與  $E'$  分別在  $\overline{OA_2}$  與  $\overline{A_2A_6}$  上，且  $\overline{A_2E} : \overline{OE} = \overline{A_6E'} : \overline{E'A_2}$ ， $\overline{AE}$  與  $\overline{AE'}$  分別交  $\overline{OA_6}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。 $R$  點滿足  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{A_6Q} = \overline{QR}$ ，則  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。

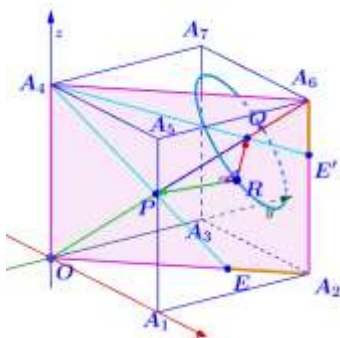


圖 45：正立方體中的矩形

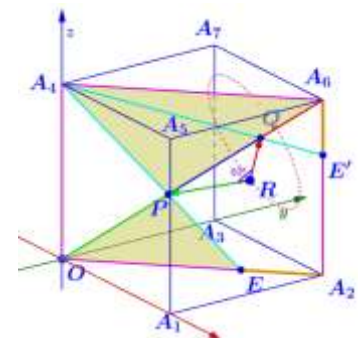


圖 46：矩形中對應三角形相似證明

我們一樣考慮  $\triangle OQA_4 \sim \triangle E'QA_5$  與  $\triangle OQA_4 \sim \triangle E'QA_5$ ，如圖 46 與圖 47 中。再取  $R_1$  是矩形  $OA_2A_6A_4$  所在平面與兩球面與的交圓為  $c$  之交點，證明  $\triangle PQR \cong \triangle PQR_1$  (SSS)，如圖 48，即可得證  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。

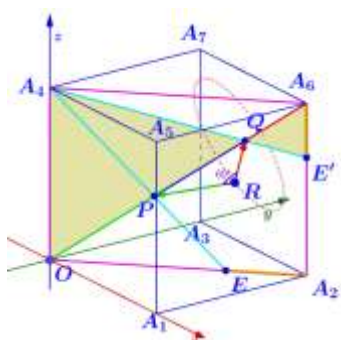


圖 47：矩形中對應三角形相似證明

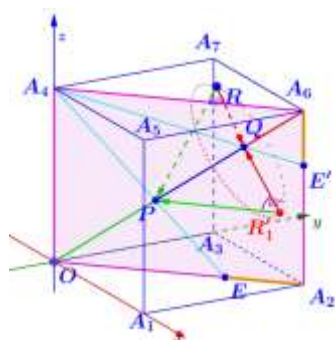


圖 48：正立方體中對應三角形全等證明

接下來是兩種平行四邊形的保角性，因為證明也與上述雷同，所以我們簡述如下。

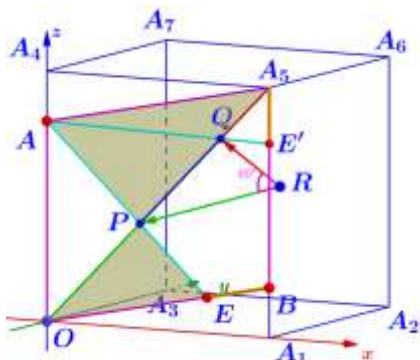


圖 49：正立方體中對應平行四邊形相似證明

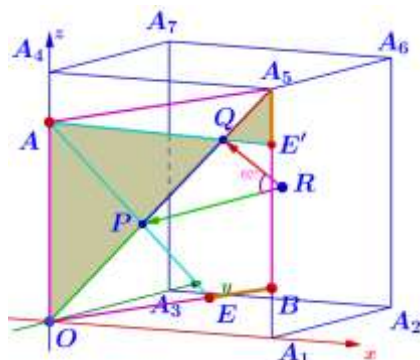


圖 50：正立方體中對應平行四邊形相似證明

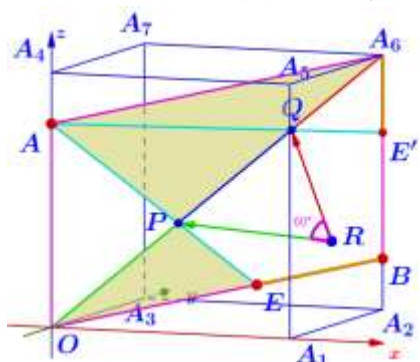


圖 51：正立方體中對應平行四邊形相似證明

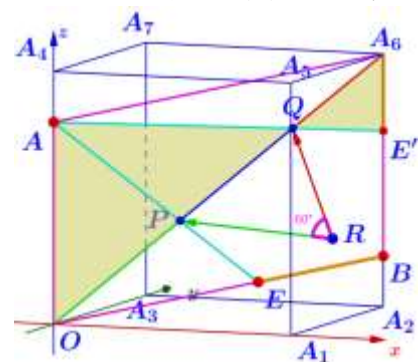


圖 52：正立方體中對應平行四邊形相似證明

設正立方體的邊長為1。取  $A$  點在  $\overline{OA_4}$  上， $B$  點在  $\overline{A_1A_5}$  上，使得四邊形  $OBA_5A$  為一平行四邊形。此時  $E$  與  $E'$  分別在  $\overline{OB}$  與  $\overline{A_5B}$  上，且  $\overline{BE}:\overline{OE} = \overline{A_5E'}:\overline{E'B}$ ， $\overline{AE}$  與  $\overline{AE'}$  分別交  $\overline{OA_5}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。 $R$  點滿足  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{A_5Q} = \overline{QR}$ 。由圖 49 至 52 可以看出兩組三角形全等，故可以依前述平面上平行四邊形的性質，確定  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。由圖 49 與 50，取  $A$  點在  $\overline{OA_4}$  上， $B$  點在  $\overline{A_1A_5}$  上，使得四邊形  $OBA_5A$  為一平行四邊形。 $E$  與  $E'$  分別在  $\overline{OB}$  與  $\overline{A_1A_5}$  上，且  $\overline{BE}:\overline{OE} = \overline{A_5E'}:\overline{E'B}$ ， $\overline{AE}$  與  $\overline{AE'}$  分別交  $\overline{OA_5}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。如圖 51 與 52，取  $A$  點在  $\overline{OA_4}$  上， $B$  點在  $\overline{A_2A_6}$  上，使得四邊形  $OBA_6A$  為一平行四邊形。 $E$  與  $E'$  分別在  $\overline{OB}$  與  $\overline{A_6B}$  上，且  $\overline{BE}:\overline{OE} = \overline{A_6E'}:\overline{E'B}$ ， $\overline{AE}$  與  $\overline{AE'}$  分別交  $\overline{OA_6}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。 $R$  點滿足  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{A_6Q} = \overline{QR}$ 。可以看出兩組三角形相似，故可以依前述平面上平行四邊形的性質，確定  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。



## 九、正立方體中 $R$ 點的軌跡方程式

### (一) 正立方體頂點構成的正方形

正立方體中我們分為五種情形。第一是考慮正方形。第二種是正立方體一頂點，相鄰邊上兩點，與共面的第四點構成的菱形。第三是我考慮正立方體中兩對角線與邊長構成的矩形。第四種與第五種情形是取正立方體的兩頂點與其邊上兩點所形成的平行四邊形。

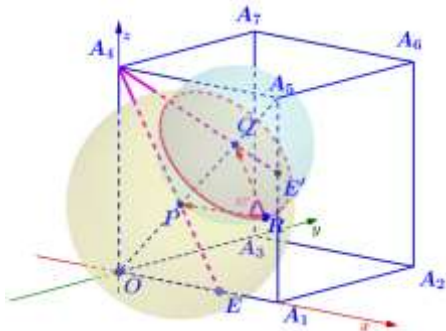


圖 53：正立方體  $R$  點軌跡 1

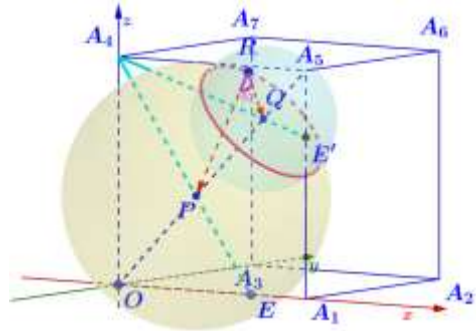


圖 54：正立方體  $R$  點軌跡 1

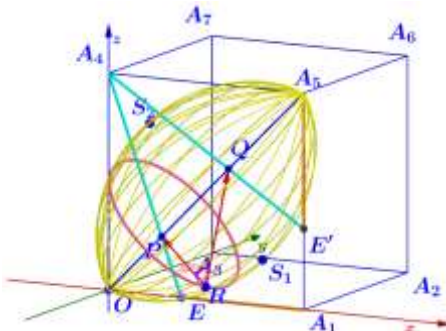


圖 55：正立方體  $R$  點軌跡 1

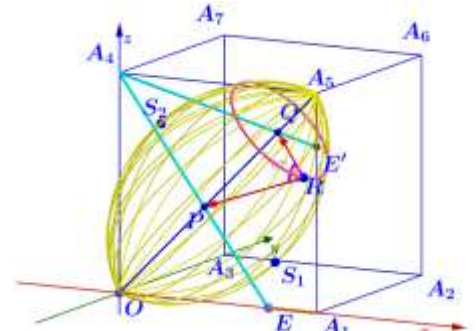


圖 56：正立方體  $R$  點軌跡 1

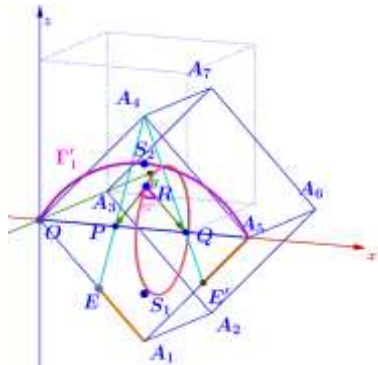


圖 57：旋轉正立方體  $-45^\circ$

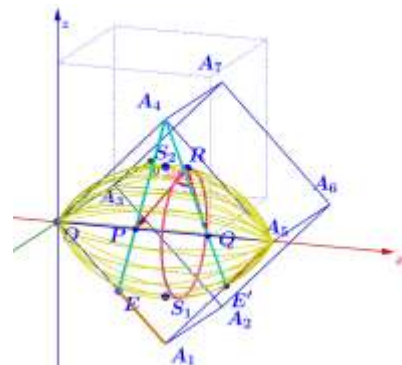


圖 58：旋轉正立方體  $-45^\circ$

設正立方體邊長為 1。首先我們比照研究問題(一)中正方形的處理手法，把原來討論的

正方形放在平面  $y=0$  上。取  $xz$  平面上  $S_1(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$  與  $S_2(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ 。所求軌

$$\text{跡方程式即曲線 } \Gamma_5 : \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \theta \\ y = 0 \\ z = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \theta \end{cases}, \frac{17\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{25\pi}{12} \text{ 繞直線 } \vec{OA}_5 \text{ 旋轉 } 2\pi \text{ 所得之曲面}$$



方程式。如圖 55。此時移動  $E$  點，可以看到  $R$  點都在這個曲面上。如圖 56。

接著考慮求解  $R$  點所在的曲面方程式，因為旋轉軸是傾斜時不易計算，所以我將整個圖形旋轉，使得旋轉軸落在  $x$  軸上。我考慮將  $\overline{OA_5}$  以  $O$  為圓心， $y$  軸當旋轉軸，沿著  $xz$  平面，將  $A_5$  轉  $-\frac{\pi}{4}$  到  $x$  軸上  $A_5'(\sqrt{2}, 0, 0)$ ，如圖 57。也就是說我先求出對稱軸在  $x$  軸上的曲面方程式，再將其旋轉  $\frac{\pi}{4}$  即為所求，如圖 58。

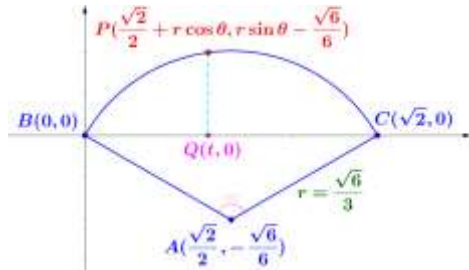


圖 59：平面結構 1

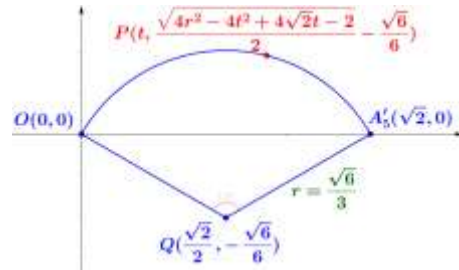


圖 60：平面結構 2

首先考慮平面的情形。我們知道單位正方形時，圓弧的半徑  $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ 。

取圓心  $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ ， $B(0,0)$ ， $C(\sqrt{2}, 0)$ ，取圓弧上一點  $P(r \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2}, r \sin \theta - \frac{\sqrt{6}}{6})$ ，取  $P$

對  $x$  軸的垂足  $Q(t, 0)$ ，如圖 59。我們想以參數  $t$  代替參數  $\theta$ 。故  $t = \frac{\sqrt{2}}{2} + r \cos \theta$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{t - \frac{\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{2t - \sqrt{2}}{2r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{4r^2 - (4t^2 - 4\sqrt{2}t + 2)}}{2r} = \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2r}$$

$$\Rightarrow r \sin \theta - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}。可得 P(t, \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6})，如圖 60。$$

接著我想對應到正立方體的情形，所以將對應的點改名稱。設旋轉半徑

$$r' = \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{2}t + \frac{2}{3}}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}，故此時 R 點所在的圓方程式為：$$

$$\begin{cases} x = t \\ (x-t)^2 + y^2 + z^2 = (r')^2 \end{cases}，此時曲面之參數式為：\Phi_1: \begin{cases} x = t \\ y = r' \cos \beta，0 \leq t \leq \sqrt{2}, 0 \leq \beta < 2\pi， \\ z = r' \sin \beta \end{cases}$$

如圖 61。此時不論  $E$  點在  $\overline{OA_1}$  上如何移動， $R$  點所在的圓皆在曲面  $\Phi$  上。如圖 62 與圖

63。最後考慮將圖 60 以  $y$  軸為對稱軸旋轉  $-\frac{\pi}{4}$  還原至圖 64。考慮旋轉矩陣

$$R_{(y\text{-Axis}, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ 取 } \theta = -\frac{\pi}{4}, \text{ 得 } R_{(y, -\frac{\pi}{4})} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{。將 } \Phi_1 \text{ 代入得：}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ r' \cos \phi \\ r' \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}r' \sin \phi \\ r' \cos \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}r' \sin \phi \end{bmatrix}, \text{ 故可得曲面方程式：}$$

$$\Phi_1' = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}r' \sin \phi \\ r' \cos \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}r' \sin \phi \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi, \text{ 如圖 64。}$$

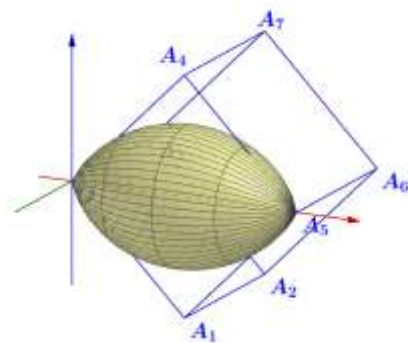


圖 61：曲面  $\Phi$

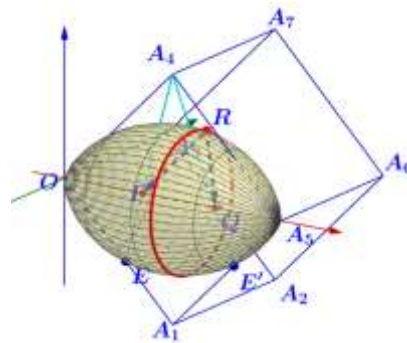


圖 62：檢查軌跡 1

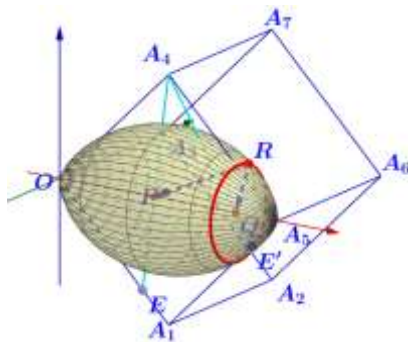


圖 63：檢查軌跡 2

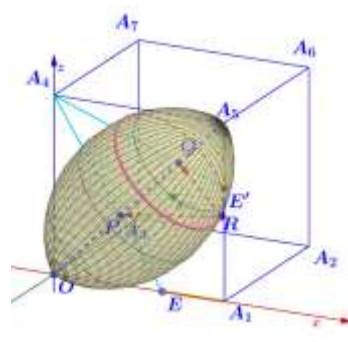


圖 64：還原成原正立方體位置

## (二) 正立方體頂點構成的矩形

如圖 65 是我們考慮正立方體軌跡的第二種情形。設正立方體的邊長為 1。此時  $E$  與  $E'$  分別在  $\overline{OA_2}$  與  $\overline{A_2A_6}$  上，且  $\frac{\overline{A_2E}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{A_6E'}}{\overline{E'A_2}}$ ， $\overline{A_4E}$  與  $\overline{A_4E'}$  分別交  $\overline{OA_6}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點。 $R$  點滿足  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{A_6Q} = \overline{QR}$ ，則  $\angle R = 60^\circ$ 。考慮這個長寬比為  $\sqrt{2}:1$  的矩形的架構，再投影至 3 維中討論。我們發現  $R$  點的軌跡也在一個  $120^\circ$  的圓弧繞此弧所在的弦旋轉  $2\pi$  的曲面上。

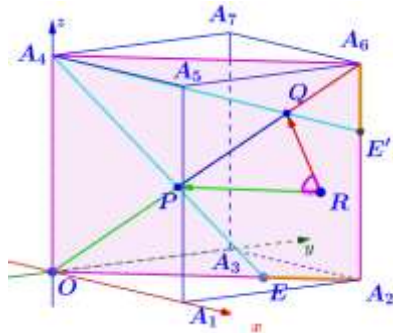


圖 65：矩形  $R$  點軌跡證明

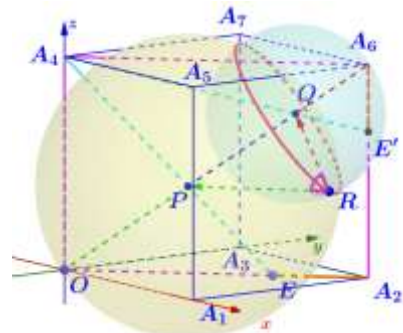


圖 66：矩形  $R$  點軌跡證明

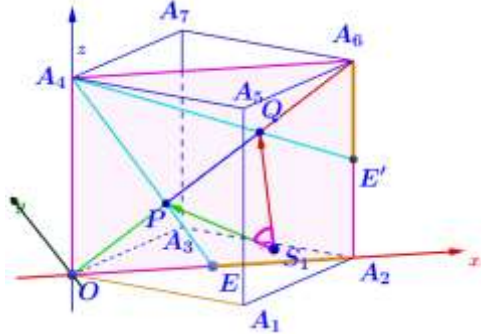


圖 67：旋轉正立方體 1

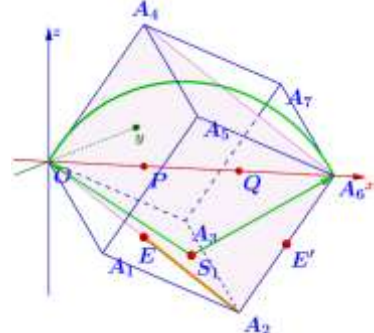


圖 68：旋轉正立方體 2

且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令這兩點為  $S_1$  與  $S_2$ 。接著考慮將圖 66 以  $O$  點為旋轉中心， $z$  軸當旋轉軸，旋轉  $-\frac{\pi}{4}$  得圖 67。再將圖 67 以  $O$  點為旋轉中心， $y$  軸當旋轉軸，旋轉  $-\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$  得圖 68。此時  $A_6(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $S_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ 。

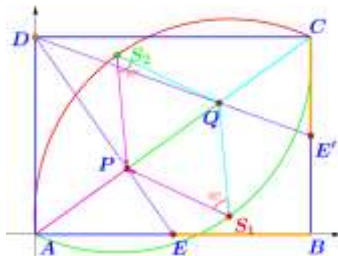


圖 69：矩形  $R$  點軌跡證明

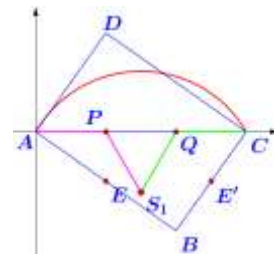


圖 70：以原點為中心旋轉矩形

我們轉換成二維時的情形，如圖 69。設  $A(0,0)$ 、 $B(\sqrt{2},0)$ 、 $C(\sqrt{2},1)$  與  $D(0,1)$ ，取  $\overline{AB}$  之中點  $E(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ，此時  $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC} = \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。此時  $r = \overline{S_1A} = 1$ 。將圖 69 中的矩形旋轉  $-\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，得圖 70。此時  $A(0,0)$ ， $C(\sqrt{3}, 0)$ ， $P(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ ， $Q(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ ， $S_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 。故

$$\text{此圓弧之參數式為 } \Gamma_6 : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \\ y = -\frac{1}{2} + \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}。$$

$$\text{令 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = t - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2t - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2}, \text{ 故在此弧上任一點可表成 } (t, \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2}), 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

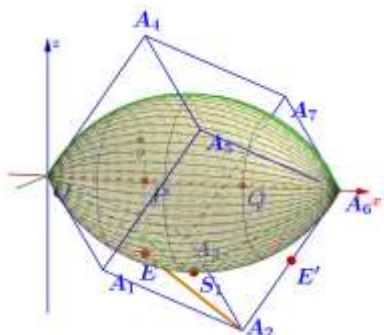


圖 71：曲面  $\Phi$

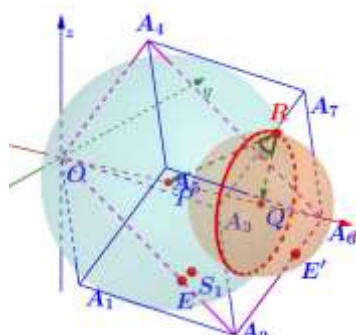


圖 72：R 點在兩球交圓上

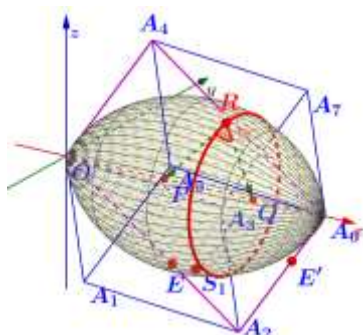


圖 73：檢查結構

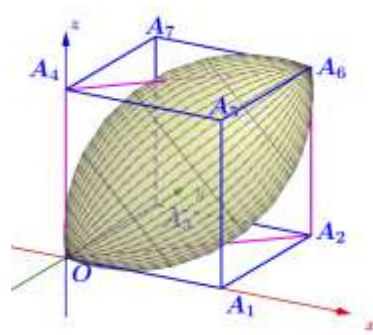


圖 74：還原原圖形

再將此點轉回 3 維，如圖 71。此時  $O(0,0,0)$ ， $A_6(\sqrt{3},0,0)$ ， $P(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$ ， $Q(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0)$ ，

$$S_1(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2})，R(t, \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2} \cos \beta, \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2} \sin \beta)，\text{ 其中 } 0 \leq t \leq \sqrt{3}，$$

$$0 \leq \beta \leq 2\pi。$$

$$\text{故曲面 } \Phi \text{ 之參數式為：} \Phi_2: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2} \cos \beta, 0 \leq t \leq \sqrt{3}, 0 \leq \beta < 2\pi, \text{圖 71。} \\ z = \frac{\sqrt{-4t^2 + 4\sqrt{3}t + 1} - 1}{2} \sin \beta \end{cases}$$

在圖 72 中可以看出  $\overline{OP} = \overline{PR}$ ， $\overline{QR} = \overline{QA_6}$ 。我們在圖 73 中移動 E 點觀察，確定我們的計算與證明無誤。最後再將此正立方體與曲面還原至原位置，如圖 74 所示。

### (三) 正立方體其中兩頂點與邊上兩點構成的平行四邊形 1

如圖 75 是我們考慮正立方體軌跡的第三種情形。我們注意到這個平行四邊形的對角線  $\overline{OA_5}$  長度為  $\sqrt{2}$ ，根據平面中平行四邊形的經驗，R 點的軌跡應該也在一個  $120^\circ$  的圓弧繞此

弧所在的弦旋轉  $2\pi$  的曲面上。且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令此時這兩點為  $S_1$  與  $S_2$ 。

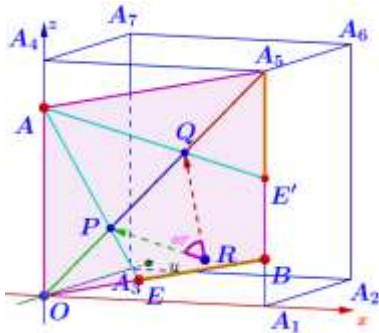


圖 75：正立方體中的平行四邊形 1

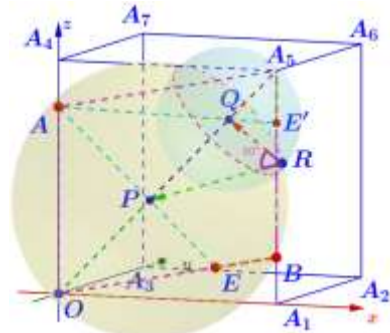


圖 76：根平面上  $R$  點軌跡

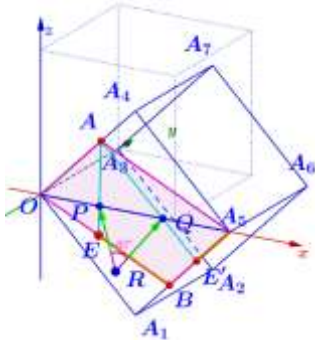


圖 77：旋轉正立方體 1

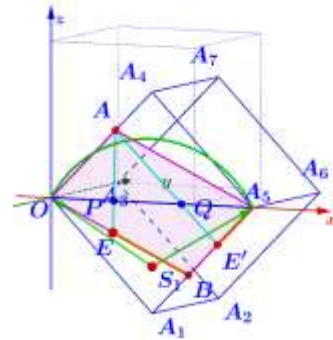


圖 78：旋轉正立方體 2

我們將圖 76 以  $O$  點為旋轉中心， $y$  軸當旋轉軸，旋轉  $-\frac{\pi}{4}$  得圖 77。此時  $A_5(\sqrt{2}, 0, 0)$ ，

$S_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ 。其實這組數據與之前第一組數據完全相同，故此時  $R$  點所在曲面之參數式

$$\text{亦為：}\Phi_3:\begin{cases} x=t \\ y=(\frac{\sqrt{4r^2-4t^2+4\sqrt{2}t-2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6})\cos\beta, & 0\leq t\leq\sqrt{2}, 0\leq\beta<2\pi \\ z=(\frac{\sqrt{4r^2-4t^2+4\sqrt{2}t-2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6})\sin\beta \end{cases}, \text{如圖 79 與 80。}$$

我們在圖 80 中移動  $E$  點觀察，確定我們的計算與證明無誤。

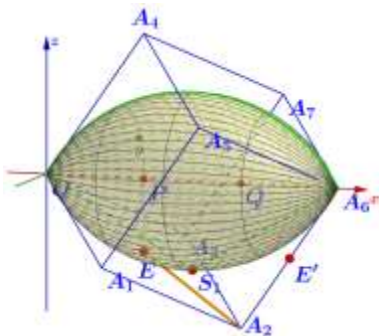


圖 79：曲面  $\Phi$

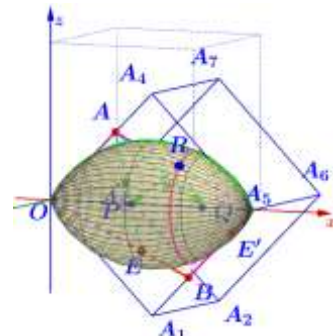


圖 80：以  $y$  軸為旋轉軸旋轉矩形



(四) 正立方體其中兩頂點與邊上兩點構成的平行四邊形 2

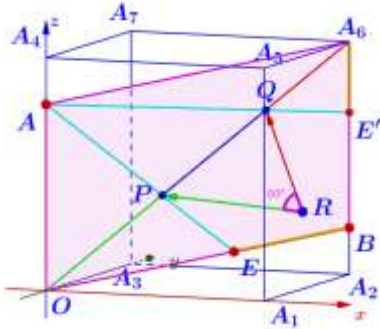


圖 81：正立方體中的平行四邊形 2

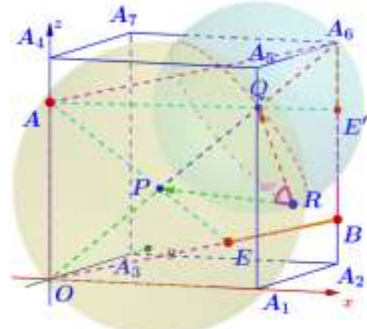


圖 82：根平面上 R 點軌跡

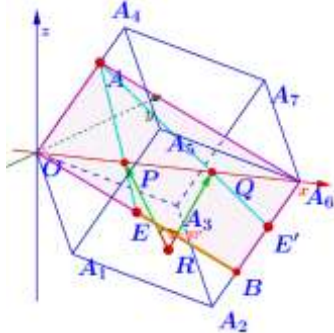


圖 83：旋轉正立方體 1

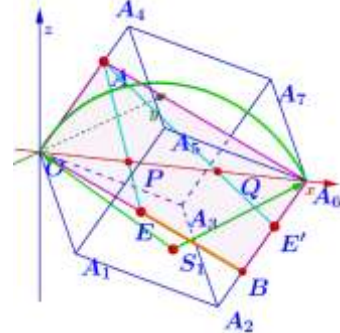


圖 84：旋轉正立方體 2

如圖 81 是我們考慮正立方體軌跡的第四種情形。我們注意到這個平行四邊形的對角線  $\overline{OA_6}$  長度為  $\sqrt{3}$ ，根據平面上在平行四邊形的經驗， $R$  點的軌跡應該也在一個  $120^\circ$  的圓弧繞此弧所在的弦旋轉  $2\pi$  的曲面上。且此圓弧的圓心在當  $E$  為  $\overline{AB}$  之中點時， $R_1$  與  $R_2$  的所在位置，我們令此時這兩點為  $S_1$  與  $S_2$ 。我們將圖 82 以  $O$  點為旋轉中心， $y$  軸當旋轉軸，旋轉  $-\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$  得圖 83。此時  $A_6(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $S_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ 。此時  $R$  點所在曲面之參數式亦為：

$$\Phi_4: \begin{cases} x = t \\ y = \left( \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \cos \beta, & 0 \leq t \leq \sqrt{2}, 0 \leq \beta < 2\pi, \text{ 如圖 85 與 86。} \\ z = \left( \frac{\sqrt{4r^2 - 4t^2 + 4\sqrt{2}t - 2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \sin \beta \end{cases}$$

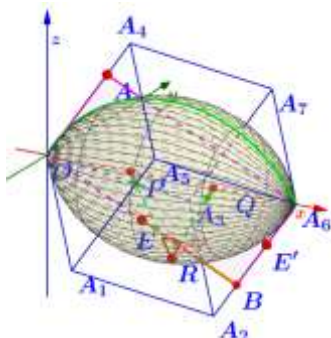


圖 85：曲面  $\Phi$

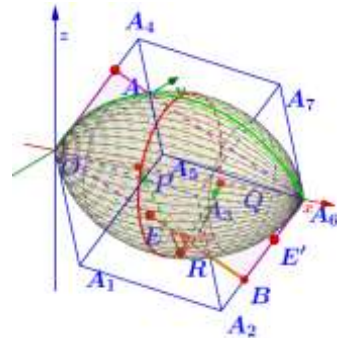


圖 86：曲面  $\Phi$



我們在圖 86 中移動  $E$  點觀察，確定我們的計算與證明無誤。

(五) 正立方體中一頂點邊上兩點與第四點構成的菱形

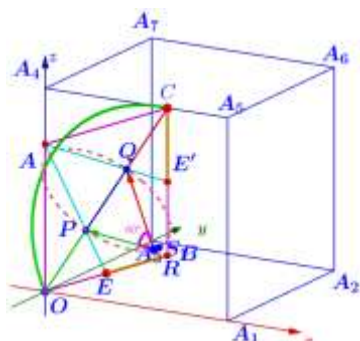


圖 87：正立方體中的菱形

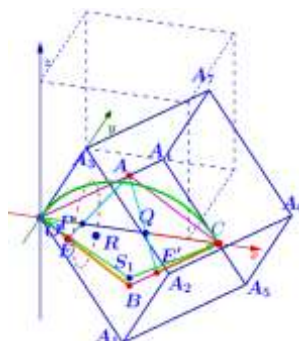


圖 88：旋轉正立方體

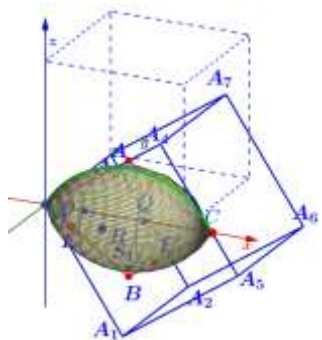


圖 89：曲面  $\Phi$

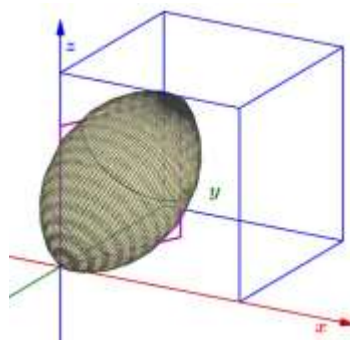


圖 90：還原曲面  $\Phi$

最後我們討論菱形。菱形  $OACB$  中， $A$  點在  $\overline{OA_4}$  上， $C$  點在  $\overline{A_4A_5}$  上， $B$  點在平面  $y=0$  上，如圖 87。我們將此正立方體以  $y$  軸當旋轉軸順時針旋轉  $\tan^{-1} \angle COA_1$ ，即  $C$  點在  $x$  軸上，如圖 88。設  $\overline{OC} = \ell$ ，即  $C(\ell, 0, 0)$ 。依據先前討論，弧  $OC$  的圓心為  $S(\frac{\ell}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}\ell}{6})$ ，半徑

$$r = \frac{\sqrt{3}\ell}{3} \text{，此圓弧之參數式為 } \Gamma_9 : \begin{cases} x = \frac{\ell}{2} + \frac{\sqrt{3}\ell}{3} \cos \theta \\ y = 0 \\ z = -\frac{\sqrt{3}\ell}{6} + \frac{\sqrt{3}\ell}{3} \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \text{。令 } t = \frac{\ell}{2} + \frac{\sqrt{3}\ell}{3} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}t - \sqrt{3}\ell}{2\ell} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{-12t^2 + 12\ell t + \ell^2}}{2\ell} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{-36t^2 + 36\ell t + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell}{6} \text{，故在此}$$

弧上任一點可表成  $(t, \frac{\sqrt{-36t^2 + 36\ell t + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell}{6})$ ， $0 \leq t \leq \ell$ 。  $R$  點所在曲面之參數式亦為：

$$\Phi_5 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{-36t^2 + 36\ell t + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell}{6} \cos \beta, \quad 0 \leq t \leq \ell, 0 \leq \beta < 2\pi \\ z = \frac{\sqrt{-36t^2 + 36\ell t + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell}{6} \sin \beta \end{cases} \text{，如圖 89，再還原至圖 90。}$$

## 肆、討論

- (一) 在邊長相同的正方形與菱形中，構造  $\angle PRQ = 60^\circ$  時，我們使用了分別在  $\overline{AB}$  與  $\overline{BC}$  上，各找一點  $E$  與  $E'$ ，且  $\overline{BE} = \overline{CE'}$ ，再取  $\overline{DE}$  與  $\overline{AC}$  之交點  $P$ ， $\overline{DE'}$  與  $\overline{AC}$  之交點  $Q$ ，當  $\overline{AP} = \overline{PR}$  且  $\overline{CQ} = \overline{QR}$  時原命題成立。但在建構鄰邊不等長的矩形與平行四邊形中，我們發現原命題需修正成  $\overline{BE} : \overline{BA} = \overline{CE'} : \overline{CB}$ 。換句話說在上述這四個圖形中，不管邊長是否相等，只要滿足  $\overline{BE} : \overline{BA} = \overline{CE'} : \overline{CB}$ ，皆可求出  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。
- (二) 在證明保角性時，我們發現兩種方法：第一種是在邊長相等的正方形與菱形中可以利用角平分線長公式與餘弦定理求出  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。第二種是不管邊長是否相等，在正方形、菱形、矩形與平行四邊形中，皆可先證明兩組三角形相似，再用餘弦定理證明出  $\angle PRQ = 60^\circ$ 。在正立方體的四個情形，只要多證一組三角形全等也可以用這種方法證明。
- (三) 不管在平面上還是空間中，這四種圖形的  $R$  點軌跡只與對角線長有關，與形狀、邊長皆無關。如圖 91 與 92 所示，換句話說對角線等長的正方形、菱形、矩形與平行四邊形中，將對角線放在原點與  $x$  軸正向，則  $R$  點軌跡式皆相同，所在位置為一個  $\frac{1}{3}$  圓弧，如圖 91；或是此圓弧繞該弧所在之弦旋轉一圈的曲面上，如圖 92。

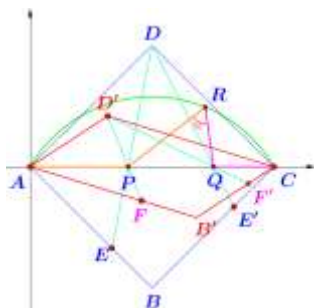


圖 91：相同對角線的平行四邊形與正方形

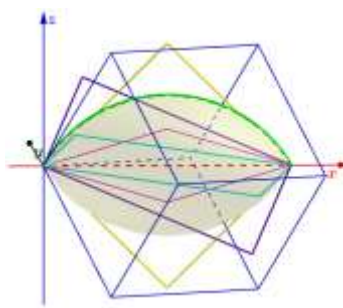


圖 92：相同對角線的平行四邊形與正方形

### (四) 平面中 $R$ 點軌跡的一般化：

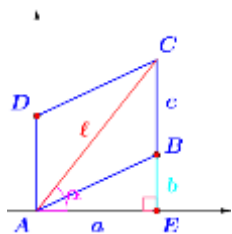


圖 93：平行四邊形設定

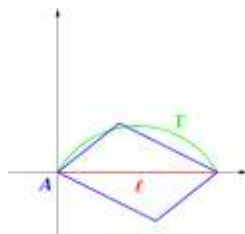


圖 94：平行四邊形中軌跡

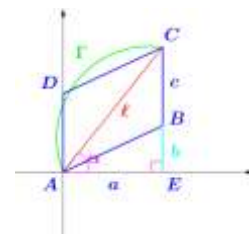


圖 95：平行四邊形中軌跡

如圖 93，先討論對邊平行的平行四邊形，當然也包含正方形與矩形。將平行四邊形的一邊放在  $y$  軸上。取  $A(0,0)$ ， $E(a,0)$ ， $D(0,c)$ ， $B(a,b)$ ， $C(a,b+c)$ ， $\alpha = \tan^{-1} \frac{b+c}{a}$ 。

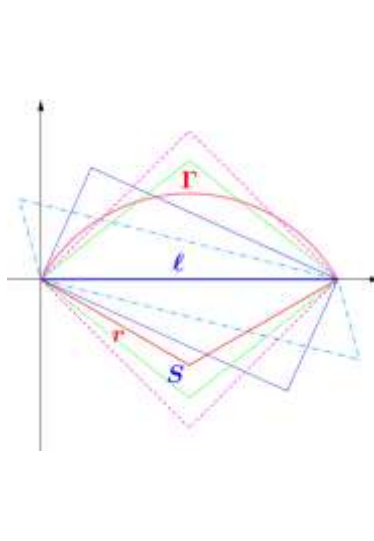
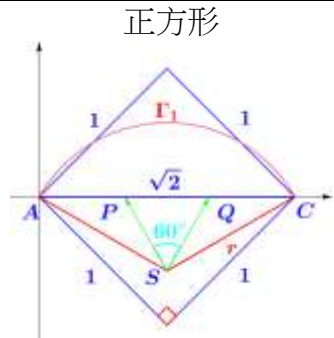
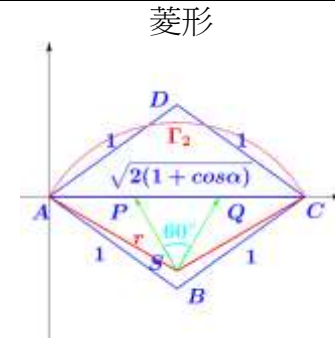
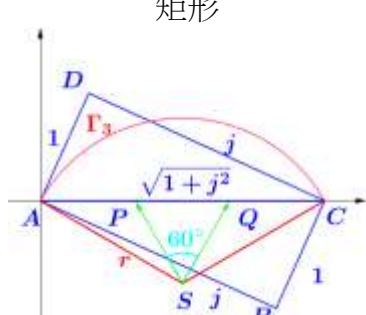
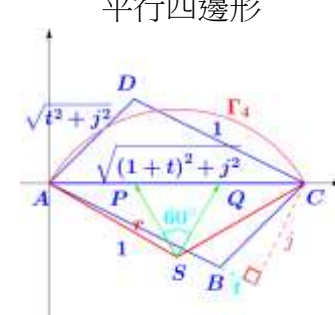
設對角線  $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \ell$ ，如圖 94，由先前研究可得：

$$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ y = -\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \text{。再將圖 94 中 } \Gamma \text{ 旋轉 } \alpha \text{ 得：}$$

$$\Gamma': \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ -\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) - \sin \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \\ \sin \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) + \cos \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma': \begin{cases} x = \cos \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) - \sin \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \\ y = \sin \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) + \cos \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \text{。我們將點軌跡整理於表 1。}$$

表 1：平面上  $R$  點軌跡方程式

	與邊長無關	對角線長為 $l$
		半徑 $\frac{l}{\sqrt{3}}$
	$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ y = -\frac{\sqrt{3}l}{6} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ $\Gamma': \begin{cases} x = \cos \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) - \sin \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \\ y = \sin \alpha (\frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \theta) + \cos \alpha (-\frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \theta) \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$	
	$\alpha$ 為平行四邊形對角線與 $x$ 軸夾角	
<p>正方形</p> 	<p>菱形</p> 	
<p>矩形</p> 	<p>平行四邊形</p> 	

(五) 空間中  $R$  點軌跡的一般化：

在此我們討論平行四邊形的情形，如圖 96。若  $0 \leq a \leq 1$ ， $0 \leq b \leq 1$ ， $0 \leq c \leq 1$ ， $0 \leq d \leq 1$ 。我們將平行四邊形的一邊放在原點  $O$  與  $z$  軸正向上一點  $R(0,0,c)$ ，在正立方體的底部取一點  $A(a,b,0)$ ，與其上方一點  $P(a,b,d)$ ，可得第四個頂點  $Q(a,b,c+d)$ ，即平行四邊形  $OPQR$ 。

並取其對角線  $\overline{OQ} = j$ ，並設  $\omega = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ ， $\theta = \tan^{-1} \frac{c+d}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，如圖 97。

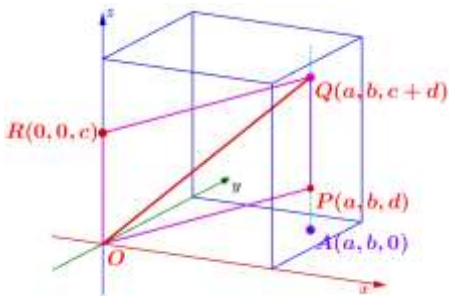


圖 96：建構平行四邊形

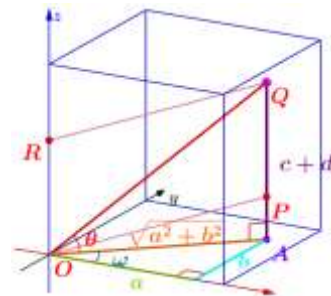


圖 97：找出旋轉角

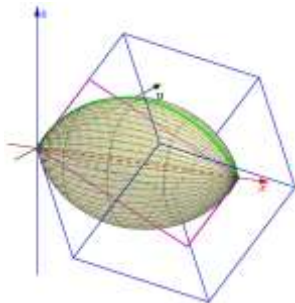


圖 98：一般化證明

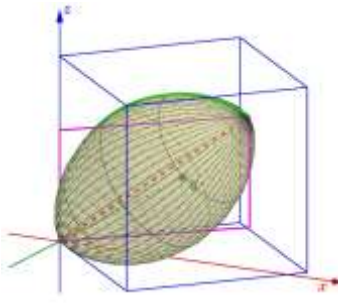


圖 99：一般化證明

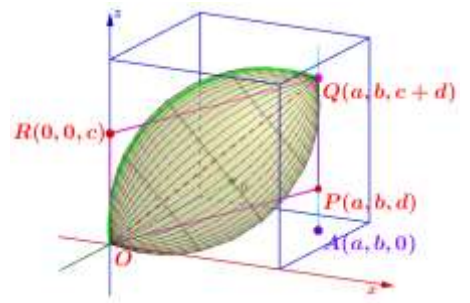


圖 100：一般化證明

故可得圖 98 中之圓心為  $(\frac{j}{2}, 0, -\frac{j}{2\sqrt{3}})$ ，半徑為  $\frac{j}{\sqrt{3}}$ 。故依前述討論可得曲面

$$\Phi: \begin{cases} x = t \\ y = r \cos \phi, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = r \sin \phi \end{cases}, \text{ 其中 } r = \frac{\sqrt{j^2 + 12jt - 12t^2}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6}j. \text{ 我們開始逆推。將}$$

圖 98 以  $y$  軸當旋轉軸，旋轉  $\theta$ ：

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \\ t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix},$$

可得曲面方程式  $\Phi'$ ：

$$\begin{cases} x = t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi \\ y = r \cos \phi \\ z = t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{cases}, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi, \text{ 即圖 99。再將圖 99 以 } z$$

軸當旋轉軸，旋轉  $\omega$  得圖 100，即：

$$\begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \\ t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) - r \sin \omega \cos \phi \\ \sin \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) + r \cos \omega \cos \phi \\ t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix}, \text{ 可得}$$

$$\text{曲面方程式 } \Phi'' : \begin{cases} x = \cos \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) - r \sin \omega \cos \phi \\ y = \sin \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) + r \cos \omega \cos \phi, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{cases}$$

$\Phi'$  即為平行四邊形在空間中  $R$  點軌跡的一般式。表 2 為空間中  $R$  點軌跡方程式。

表 2：空間中  $R$  點軌跡方程式

	與邊長無關	對角線長為 $j$
		半徑 $\frac{j}{\sqrt{3}}$
	$\text{曲線方程式 } \Gamma : \begin{cases} x = \frac{j}{2} + \frac{j}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ y = 0 \\ z = -\frac{\sqrt{3}j}{6} + \frac{j}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$	
	當 $x = t$ 時，旋轉半徑 $r = \frac{\sqrt{j^2 + 12jt - 12t^2}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} j$	
	$\text{曲面方程式 } \Phi : \begin{cases} x = t \\ y = r \cos \phi, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = r \sin \phi \end{cases}$	
	$\Phi' : \begin{cases} x = t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi \\ y = r \cos \phi, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{cases}$	
	$\Phi'' : \begin{cases} x = \cos \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) - r \sin \omega \cos \phi \\ y = \sin \omega(t \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) + r \cos \omega \cos \phi, 0 \leq t \leq j, 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = t \sin \theta + r \cos \theta \sin \phi \end{cases}$	
<p style="text-align: center;">正方形</p>	<p style="text-align: center;">菱形</p>	
<p style="text-align: center;">矩形</p>	<p style="text-align: center;">平行四邊形</p>	



## 伍、 結論與未來展望

- (一) 在本研究中，我們將原題討論等長性質推廣成**等比例性質**：四邊形  $ABCD$  滿足  $E$  在  $\overline{AB}$  上， $E'$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BE} : \overline{BA} = \overline{CE'} : \overline{CB}$ 。若  $\overline{DE}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $P$  且  $\overline{DE'}$  交對角線  $\overline{AC}$  於  $Q$ ，則存在點  $R$ ，使得  $\overline{AP} = \overline{PR}$ ， $\overline{CQ} = \overline{QR}$ 。我們證明在二維與三維中，當四邊形  $ABCD$  為正方形、菱形、矩形與平行四邊形時， $\angle PRQ$  的角度為一定值，都是  $60^\circ$ 。不禁使我們思考，何種幾何圖形也會有類似的保角性質，影響的因素只與某邊長度有關，而與圖形其他邊長無關。
- (二) 我們進一步此性質推廣到三維空間。在空間的正立方體中滿足等比例性質的正方形、菱形、矩形與平行四邊形的  $R$  點軌跡跟紡垂體的結構很類似，即圖 101 的基本結構。紡垂體是真核細胞有絲分裂或減數分裂過程中形成的結構，如圖 102。我們查了生物課本，也請教了教授。我們感興趣的是否因為這種幾何結構比較穩定，所以在細胞分裂時會是這種形狀。
- (三) 未來展望：我們目前找尋一些有特別角或性質的四邊形，希望找到固定角度為其他角度的情形。

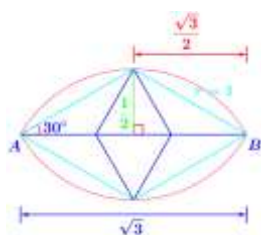


圖 101：基本結構

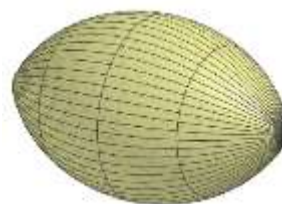


圖 102：紡垂體

## 陸、 參考資料

- [1] MA3(2019). *CruX Mathematicorum*, 45(6), 308-309.
- [2] 李哲宇。(2011)。破解軌跡－凸多邊形頂點與邊之連線交點軌跡之探討。高雄市第 51 屆國中數學組第二名。
- [3] 項武義、張海潮、姚珩。(2010)。千古之謎。台灣商務印書館。
- [4] 倫迪、薩頓。(2002)。典雅的幾何。天下文化。



## 【評語】 010028

本份幾何作品，研究平面上給定的正方形、菱形、矩形與平行四邊形的某一特定保角(60度)性質，並推廣此保角性質到三度空間。這個保角性質在平面上，是一個簡單的相似形關係即可求得。滿足此保角性質的R點軌跡，是一個圓心角為120度的圓弧軌跡，就需要一些計算才可以推得。當這個性質推廣到三度空間時，雖然還不是太難，但需要求出空間中兩球交圓上的部分軌跡。這些公式可以被推導出來，就需要有比較好的空間解析與計算能力，作者在這一部分做的不錯，是值得鼓勵的地方。建議作者可以考慮不是等比例的狀況，以產生其他非為60度的保角公式與軌跡，讓作品的內容更加豐富。