2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010052

參展科別　數學

作品名稱　網路時代的訊息傳播結構研究

就讀學校　臺北市立大直高級中學

指導教師　劉繕榜、胡裕仁

作者姓名　謝向芊、鄭聿喬

關鍵詞　訊息傳遞、共同朋友、傳遞範圍

作者簡介

我是鄭聿喬(左)熱舞社的，大家都認為熱舞社是只會跳舞的壞小孩，但是我不是，我也會彈鋼琴，在學校是數理資優班。

我是謝向芊(右)。平時喜歡數學和物理，所以選擇數學作為專題研究的主題。而在做數學專題的過程中，我收穫了很多，也學到許多在課堂內無法獲得的知識，如教深入的數學觀念及製作報告的技巧。

摘要

本研究的目的在於探討在社群網路發達時代中，資訊的傳播範圍之可能性。我們將的智慧上網裝置視為節點，以圖論方式分析節點到另一個節點的訊息傳遞模式。我們研究在傳遞訊息對象人數不同時，及在不同共同朋友數量的網路圖中找出其傳播範圍的關係式。最後我們找到不同結點數與傳遞次數、發源點之關係式，並進行一般化論證。並提出定理以供探討不同節點訊息傳遞時，其網路傳播範圍之關係，應用於社群網路分析參考。

Abstract

The purpose of this study is to explore the possibility of information spreading in the internet age. We regard the mobile device as a node and analyze the information transmission mode from one node to another node in the way of graph theory. We study the relationship between the number of messages and mutual friends. Finally, we find the relationship between the number of nodes, transmission, and the origin point, and make a general demonstration. Besides, a theorem is proposed to explore the relationship between the spreading range of messages in different nodes, which can be used as a reference for social network analysis.

壹、 研究動機

近年來由於資訊網路發展快速，各種訊息的傳播已非昔日，用單純的口耳相傳來進行。往往有人在自己的社群網路發一訊息，便可告知在其同一社群網路的朋友，此時其朋友如果再自己的社群網路轉發出去，便會造成一傳多的傳遞。因此我們很好奇此一現象是否可以數學建模方式來評估其傳播範圍中節點數的上界？

在網路中，每一個人或電腦（手持式可上網裝置）都可視一個節點，從一個電腦到另一個電腦的連結則是這個網路的邊[1]。假如電腦 A 及電腦 B 有連結，我們以 A~B 表示。如圖 1 所示，在圖中可看到三群資料分別由 A、H、P 為中心。若此時由 A 發一訊息，因為 A~B, A~C, A~D, A~E, A~F, A~G, A~H，所以 B, C, D, E, F, G, H 可以馬上收到 A 所發的訊息。假設關係不變，且 A 跟 H 比較親近之外，其他人的親密程度相同，因此把 A 和 H 的連接加粗結果（如圖 2），此時可產生一加權無向圖，下表一為加權無向圖權值示意表，由於 A,P,H 為三群的主結點，第一次傳遞訊息要此三群的主結點收到，才會繼續傳遞下去，例如：A 與 P 皆傳遞給 H，H 才能繼續傳遞下去，而同時 A 也傳遞至 B,C,D,E,F,G。我們特別將權重最大的連結，以粗邊來表示（圖 2）。我們發現 A 和 H 皆為許多節點之共同的朋友，因此本研究以此來深化網路訊息傳遞範圍的邊界分析，研究可能結構，找出訊息最大傳遞範圍。

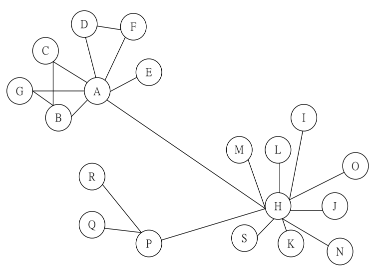


圖 1：社群網路虛擬無向圖

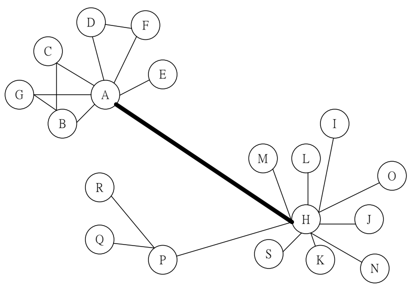


圖 2：社群網路虛擬局部加權無向圖

因此，本研究設定網路上的每個人為一節點(node)，透過節點對節點的連結方式生成一實對稱矩陣，由於特徵向量可視為矩陣的線性不變量[2]。因此其方向上變換矩陣可以拉伸向量而不必扭曲，可使得計算不同節點的關係程度成為可行。由於特徵向量中心性僅以矩陣呈現，我們在一篇論文[4]中看到，有關另一種加權方法，我們以此概念進行延伸探討。

貳、 研究目的

一、 相關名詞解釋

(一) 節點(node)：

社會網路的組成包含了節點(node)與連結(link)。就社會學而言，節點為社會中具有行動能力的個體，例如家庭成員或公司職員等[3]。在本研究中，節點即為接收或發送訊息的點。

(二) 發源點：

第一個發送訊息的點。在本研究中，以紅色節點來表示發源點或傳送訊息的點，若是第 1 個發送訊息的點就是發源點，而如圖 3，A 點即為發源點。

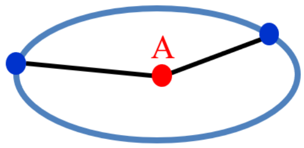


圖 3：A 點為發源點的情形

(三) 共同朋友(f)：

根據交通大學黃全榮的研究[5]，共同朋友表示兩個不同的節點，向外走一步可到達的節點（與該個節點間無任何節點）為同一點，則該節點為他們的共同朋友。

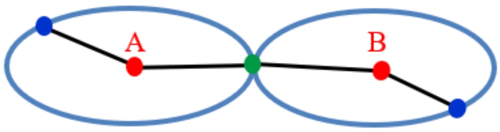


圖 4：共同朋友示意圖

如圖 4，A、B 點為發源點，A、B 點向外走一步皆可到達綠色節點，因此綠色節點為 A、B 的共同朋友。

(四) 訊息傳遞層(次)(n)：

定義發源點所在之層(次)數為 0，而向外傳送一次的點即為第一層(次)，以此類推，從第一層(次)節點所發送出去的點為第二層(次)，以此類推。

(五) 傳遞訊息的傳播範圍：

在本研究中，我們將發送或接收訊息的人之裝置視為節點，以圖形表示人與人

（裝置與裝置）之間傳遞情形。

二、 研究問題

(一) 當由一個發源點向外傳送訊息，發送訊息的共同朋友上界與節點數量之關係式為何？

(二) 當由一個發源點向外傳送訊息，無共同朋友時訊息的傳播範圍為何？

(三) 當由一個發源點向外傳送訊息，有共同朋友時訊息的傳播範圍為何？

(四) 當固定訊息傳播的範圍，發源點個數與傳遞訊息的最少次數之關係式為何？

參、 研究設備及器材

硬體部分：紙、筆、電腦。

軟體部分：文書處理軟體 *Word*、方程式編輯器 *MathType*、幾何圖形 *GeoGebra*。

肆、 研究過程或方法

一、 名詞解釋及符號定義

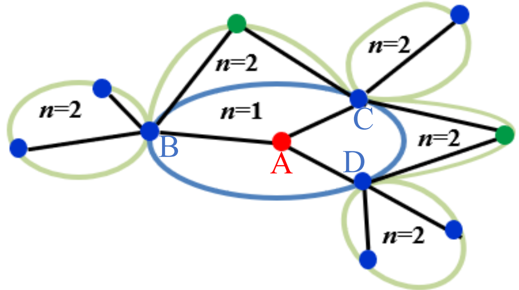


圖 5:由 A 出發分別同時給 B、C、D 三個群示意圖

n：向外傳遞的層數，定義發源點(如圖5紅點為第零層，即 n=0為第0層)，由第0層向外傳遞訊息後，接收到的點為第一層，（如圖5，藍色圓圈上的點為第一層，即 n=1）

L_n：第 n 層的點集合（如圖5，第0層(n=0)的點集合為 A，定義 $L_0=\{A\}$ ）

$|L_n|$：第 n 層的節點數（如圖5，第0層(n=0)的節點個數即為1，定義$|L_0|=1$ ）

$L_0\cup L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n$：訊息傳遞到第 n 層的點集合（如圖5，由$L_0=\{A\}$,$L_1=\{B,C,D\}$可得$L_0\cup L_1=\{A,B,C,D\}$）

$|L_0\cup L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n|$：傳遞訊息到 n 層的總節點數（如圖5，由於$L_0\cup L_1=\{A,B,C,D\}$，因

此$L_0 \cup L_1$的點個數為4，即$|L_0 \cup L_1| = 4$），為方便表示，定義 *s* 為接收及發送訊息範圍的總節點數。

a：發源點個數(發源點計算在總點數內，故恆有($a \leq |L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n|$)

k：每次向外傳給 *k* 人（如圖5，*A* 點向外傳遞給三個人，我們以節點表示人數，即 *k*=3）

t：傳遞次數

f：共同朋友個數（如圖5，由第1層向外傳遞訊息至第2層後，接收到的節點中有共同的即為共同朋友，即綠色節點，即 *f*=2）

(一) 傳遞層次及範圍的假設與解釋

本研究假設訊息傳播出去的點，也就是發源點，所成集合為L_0。在圖 6 中假設有一訊息由 *A* 傳播出去（*A* 為發源點），則$L_0 = \{A\}$。

本研究定義對所有非負整數 n，$L_{n+1} = \{x | x \sim y\,, x \notin L_k, k \leq n, y \in L_n\}$。例如：若直接由 *A* 發送到訊息的點所成集合稱為L_1，如圖 6 中的紅色方框部分，$L_1 = \{B, C, D, K\}$。接下來訊息由L_1內的點傳播出去，而接收到的點所成集合為L_2。

明顯地，若L_n為被傳播出去第 *n* 次所成的集合，則表示一個訊息被傳播出去 *n* 次，而所有接收到訊息的節點所成集合為$L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$，且$L_i \cap L_j = \{\ \}$($i \neq j$ 且 $i,j \in \mathbb{Z}$)。

定義：發源點所成集合為L_0。若$L_0 = \{A\}$，為$|L_0| = 1$，以總節點個數為單位。發源點能發布訊號。設此圖形為$L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$範圍圖，而將其圖形之範圍節點數記為$|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n| = \sum_{i=0}^{n} |L_i|$，稱其接收及發送範圍節點數，亦即圖形開始下一層傳遞前，所呈現的基礎圖形。

舉例來說：

當發源點向外傳遞，本研究假設有一訊息由 *A* 傳播出去（*A* 為發源點），如下圖，*A* 傳遞給 *C,K,B,D*，$L_0 = \{A\}$，$L_1 = \{C, K, B, D\}$ ，總節點數記為$|L_0 \cup L_1| = \sum_{i=0}^{1} |L_i| = 5$，而圖6紅色方框部分稱為$L_0 \cup L_1$的範圍圖。

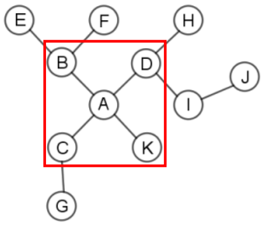


圖6：傳遞範圍示意圖

(二) 訊息傳遞定義：

1. 傳遞範圍：

(1) 限制傳遞次數：一個節點只可傳遞一次訊息

(2) 無限制性傳送：一次可傳至多個點

(3) 多對節點可同步傳遞，且彼此互不干擾

(4) 僅一個發源點

2. 最少傳遞次數：

(1) 不限制傳遞次數：一個節點可傳遞多次訊息

(2) 有選擇性傳送：一次只可將訊息向外傳至一個節點

(3) 所有點個數恆大於或等於發源點總數

(4) 發源點個數可以改變

(5) 多對節點可同步傳遞，且彼此互不干擾

(6) 一個節點不可同時進行互換或向外傳出給其他節點

(三) 最大範圍圖

定義：發源點所成集合為L_0。若$L_0=\{A\}$，最大範圍為$|L_0|$=1，以總節點個數為單位。發源點能發布訊號。設此圖形為$L_0\cup L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n$範圍圖，而將其圖形之最大範圍節點數記為$|L_0\cup L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n|=\sum_{i=0}^{n}|L_i|$，稱其最大接收及發送範圍節點數，亦即圖形開始下一層傳遞前，所呈現的基礎圖形。

舉例來說：當發源點向外傳遞，我們假設有一訊息由 A 傳播出去（A 為發源點），如下圖，A 傳遞給 C,K,B,D，$L_0=\{A\}$，$L_1=\{C,K,B,D\}$，最大範圍節點數記為$|L_0\cup L_1|=\sum_{i=0}^{n}|L_i|=5$，而下圖稱為$L_0\cup L_1$的最大範圍圖，如圖8。

(四) 最大範圍圖訊息傳遞定義：

1. 「無選擇性」傳送：一個發源點每次可將訊息傳至多個點。
2. 點個數隨發源點之層數而改變。
3. 所有點個數恆大於或等於發源點總數。
4. 「單點傳輸」：當發源點僅有 1 個時，亦即只有一種訊號進行傳遞(本身具備所有訊號)故其他未有訊號的點，一旦獲得訊號，即可向外傳遞，可不需交換訊息後再傳。
5. 多對節點可同步傳遞，且彼此互不干擾。
6. 內部傳遞（內傳）：發源點內互相傳遞（類似交換訊息），之間不額外進行延伸（點個數不變，除非點已獲得所有訊號且不協助傳遞訊號的狀態下，才會增加），以達成所有點獲得全部訊息。

二、 研究過程

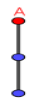
本研究模擬訊息的傳遞，在不同條件下找出訊息傳遞的範圍，並提出了以下定理：

(一) 共同朋友上界與發送訊息的節點數量之關係

在模擬訊息傳遞前須先找出共同朋友數量的限制，本研究先討論固定一個發源點時，列出訊息傳遞給不同人數時，共同朋友數量的上界以及共同朋友和訊息傳遞範圍的關係。

1. 當 k=1 時

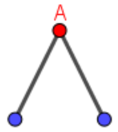
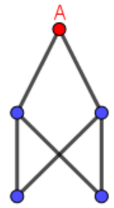
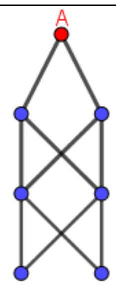
表 1：一個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞訊息給 1 個人，即 k=1

		
$\lvert L_1\rvert=1,\lvert L_0\cup L_1\rvert=2$	$\lvert L_2\rvert=1,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\rvert=3$	$\lvert L_3\rvert=1,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\rvert=4$

在訊息每次只傳遞給 1 人時，不會有共同朋友，因此第二層最多可以有$\left\lfloor\frac{1\times1}{2}\right\rfloor=0$個共同朋友。

2. 當 k=2 時

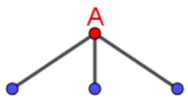
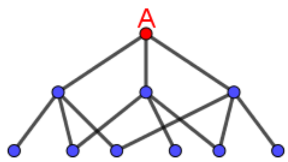
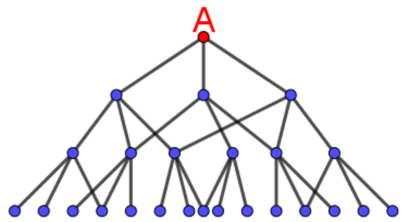
表 2：一個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞訊息給 2 個人，即 *k*=2：

		
$\lvert L_1\rvert=2,\lvert L_0\cup L_1\rvert=3$	$\lvert L_2\rvert=2,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\rvert=5$	$\lvert L_3\rvert=2,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\rvert=7$

在訊息每次傳遞給 2 人時，若無共同朋友，訊息傳遞至第二層的總節點數$|L_2|=2\times2=4$，由圖可知第二層最多可以有$\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor$=2=$\left\lfloor\frac{2\times2}{2}\right\rfloor$=2 個共同朋友。

3. 當 *k*=3 時

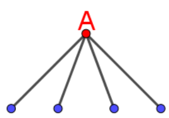
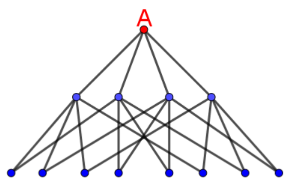
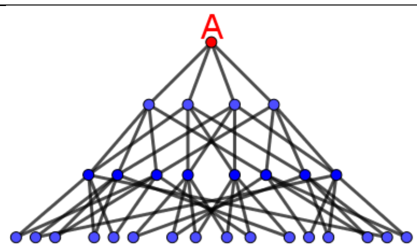
表 3：一個發源點，每次傳遞訊息給三個人，即 *k*=3：

		
$\lvert L_1\rvert=3,\lvert L_0\cup L_1\rvert=4$	$\lvert L_2\rvert=5,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\rvert=9$	$\lvert L_3\rvert=11,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\rvert=20$

在訊息每次傳遞給 3 人時，若無共同朋友$|L_2|=3\times3=9$，所以第二層最多可以有$\left\lfloor\frac{9}{2}\right\rfloor$=4 個共同朋友。

4. 當 *k*=4 時

表 4：一個發源點，每次傳遞訊息給四個人，即 *k*=4：

		
$\lvert L_1\rvert=4,\lvert L_0\cup L_1\rvert=5$	$\lvert L_2\rvert=8,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\rvert=13$	$\lvert L_3\rvert=16,\lvert L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\rvert=29$

在訊息傳遞每次給 4 人時，若無共同朋友$|L_2|=4\times4=16$，所以第二層最多

可以有$\left\lfloor\frac{16}{2}\right\rfloor = 8$個共同朋友。

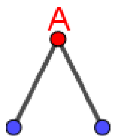
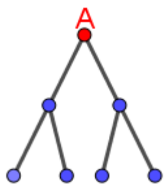
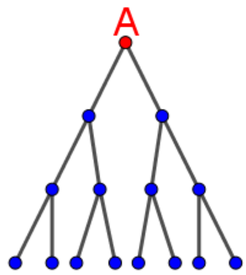
5. 一個發源點，每次傳遞訊息給 k 個人，即 k=k：

從以上例子可知傳遞訊息時的共同朋友上界由 k 值決定，由於共同朋友從第二層開始出現，且$|L_i| \le |L_{i+1}|$，故在L_2的傳遞範圍內為有共同朋友中最少節點的層數，中 f 的最大值為整個傳遞範圍中 f 的最大值。當訊息傳遞給 k 人時，在無共同朋友時，$|L_2| = k \times k = k^2$，$\boxed{傳遞範圍最多可以有\left\lfloor\frac{k^2}{2}\right\rfloor個共同朋友}$。

(二) 模擬無共同朋友時網路傳遞訊息的傳播範圍

例如當 k=2 時，無共同朋友時網路傳遞訊息的傳播範圍如下(表 5)

表 5：當有 1 個發源點，每個節點一次向外傳遞給 k 個節點，傳遞至 n 層

		
$\lvert L_1\rvert = 2, \lvert L_0 \cup L_1\rvert = 3$	$\lvert L_2\rvert = 4, \lvert L_0 \cup L_1 \cup L_2\rvert = 7$	$\lvert L_3\rvert = 8, \lvert L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3\rvert = 15$

猜想：

第 n 層的節點數量：

因為只有一個發源點，$|L_0| = 1$，訊息往外傳遞至 k 個節點，$|L_1| = k$，L_1的每個節點將訊息傳遞至 k 個節點，$|L_2| = k^2$，L_2的每個節點再將訊息傳遞至 k 個節點，$L_3 = k^3$，以此類推，$|L_4| = k^4, L_n = k^n$。

訊息傳遞到第 n 層時，傳遞範圍內有接收到訊息的所有節點數量：

第 0 層節點數：$|L_0| = 1$

訊息傳至第 1 層節點總數：$|L_0 \cup L_1| = k + 1$

訊息傳至第 2 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2| = k^2 + k + 1$

訊息傳至第 3 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3| = k^3 + k^2 + k + 1$

訊息傳至第 n 層的節點總數：$\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = k^n + k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^0 =$

$\frac{k^{n+1}-1}{k-1}, n \geq 0, k \geq 0$

因此我們得到，每次向外發送訊息的節點數量與訊息傳遞範圍的關係式

> **定理一：當有1個發源點，每個節點一次向外傳遞給 k 個節點，傳遞至 n 層，則**
>
> $\boldsymbol{|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}, n \geq 0, k \geq 0}$

證明：

當層數為 1 時，

$\left|\bigcup_{i=0}^{1} L_i\right| = \sum_{i=0}^{1}|L_i| = k + 1 = \frac{(k+1)(k-1)}{k-1} = \frac{k^2-1}{k-1} = \frac{k^{1+1}-1}{k-1}$ ，成立

設層數為 n 時，$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$成立，$n \geq 0$

當層數為 n+1 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{n+1} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n+1}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| + |L_{n+1}| = \frac{k^{n+1}-1}{k-1} + k^n \cdot k =$

$\frac{k^{n+1}-1+k^{n+1}-k^n}{k-1}$

$= \frac{k^{n+1}-1+k^{n+2}-k^{n+1}}{k-1} = \frac{k^{n+2}-1}{k-1} = \frac{k^{(n+1)+1}-1}{k-1}$，成立。

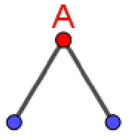
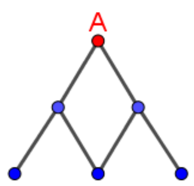
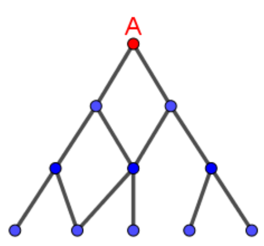
因此由數學歸納法得知$\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$對於所有非負整數 n 皆成立。■

(三) 模擬有共同朋友時網路傳遞訊息的傳播範圍

1. 當有一位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式

例如當 k=2 時，一位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式如下(表 6)

表 6：當有 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 k 個節點，但從第二層開始每層都有一位共同朋友，傳遞至 n 層

		
$\|L_1\| = 2, \|L_0 \cup L_1\| = 3$	$\|L_2\| = 3, \|L_0 \cup L_1 \cup L_2\| = 6$	$\|L_3\| = 5, \|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3\| = 11$

第 n 層的節點數量：因為只有一個發源點，$|L_0| = 1$，訊息往外傳遞至 k 個節點，$|L_1| = k$，L_1的每個節點將訊息傳遞至 k 個節點，有一個共同朋友，節點數要-1，$|L_2| = k^2 - 1$，L_2 的每個節點再將訊息傳遞至 k 個節點，因為有一個共同朋友，所以節點數為$|L_3| = (k^2 - 1)k - 1 = k^3 - k - 1$，以此類推，$|L_n| = -(\sum_{m=0}^{n-2} k^m) + k^n = -\frac{k^{n-1}-1}{k-1} + k^n, n \geq 2$。

訊息傳遞到第 n 層時，傳遞範圍內有接收到訊息的所有節點數量：

第 0 層節點數：$|L_0| = 1$

訊息傳至第 1 層節點總數：$|L_0 \cup L_1| = k + 1$

訊息傳至第 2 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2| = k^2 + k$

訊息傳至第 3 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3| = k^3 + k^2 - 1$

訊息傳至第 4 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4| = k^4 + k^3 - k - 2$

訊息傳至第 n 層的節點總數：$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -[\sum_{m=0}^{n-3}(m+1)\, k^{n-m-3}] + k^n + k^{n-1}, n \geq 3, k \geq 2$

一般式猜想：

由$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -[\sum_{m=0}^{n-3}(m+1)\, k^{n-m-3}] + k^n + k^{n-1}$得

$\Rightarrow |\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -[k^{n-3} + 2k^{n-4} + 3k^{n-5} + \cdots + (n-3)k^1 + (n-2)k^{n-n}] + k^n + k^{n-1}$

令$S_n = k^{n-3} + 2k^{n-4} + 3k^{n-5} + \cdots + (n-3)k^1 + (n-2)k^{n-n}$

$\Rightarrow S_n = \frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}$代回原式

$\Rightarrow |\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}$

因此$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -[\sum_{m=0}^{n-3}(m+1)\, k^{n-m-3}] + k^n + k^{n-1}, n \geq 3, k \geq 2$

$$= -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 3, k \geq 2$$

定理二：當有 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 $\boldsymbol{k}$ 個節點，但從第二層開始每層都有一位共同朋友，傳遞至 $\boldsymbol{n}$ 層，則

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 3, k \geq 2$$

證明：

由於 $n \geq 3$ 時才成立，所以這裡我們從 n=3 開始證明。

當層數為 3 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{3} L_i\right| = \sum_{i=0}^{3}|L_i| = -1 + k^2 + k^3 = -\left(\frac{k-1}{k-1}\right) + k^2 + k^3$

$= -\left(\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k-1}\right) + k^2 + k^3 = -\left[\frac{k(k-1)}{(k-1)^2} - \frac{1}{k-1}\right] + k^3 + k^2$

$= -\left[\frac{k(k^{3-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{3-2}{k-1}\right] + k^3 + k^{3-1} = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}$

設層數為 n 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}$成立

則層數為 n+1 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{n+1} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n+1}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1} + |L_{n+1}|$

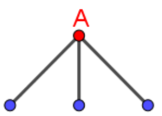
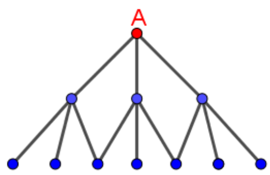
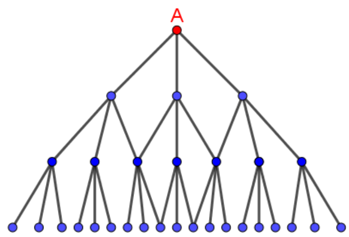
$= -\left[\frac{k(k^{n-1}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n+1-2}{k-1}\right] + (k^{n+1} + k^n)$成立，因此由數學歸納法得知，

$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}$對於所有 $n \geq 3$ 之整數皆成立。■

2.當有兩位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式

例如當 k=3 時，有兩位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式如下(表 7)

表 7：當有 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 $\boldsymbol{k}$ 個節點，但從第二層開始每層都有兩位共同朋友，傳遞至 $\boldsymbol{n}$ 層

		
$\lvert L_1\rvert = 3, \lvert L_0 \cup L_1\rvert = 4$	$\lvert L_2\rvert = 7, \lvert L_0 \cup L_1 \cup L_2\rvert = 11$	$\lvert L_3\rvert = 19, \lvert L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3\rvert = 30$

第 n 層的節點數量：

因為只有一個發源點，$|L_0| = 1$，訊息往外傳遞至 k 個節點，$|L_1| = k$，L_1的每個節點將訊息傳遞至 k 個節點，有兩個共同朋友，節點數要-2，$|L_2| = k^2 - 2$，L_2的每個節點再將訊息傳遞至 k 個節點，因為有兩個共同朋友，所以節點數為

$|L_3| = (k^2 - 2)\,k - 2 = k^3 - 2k - 2$，$L_2$每個節點再將訊息傳遞至 k 個節點，因為有兩個共同朋友，所以節點數為$|L_4| = [(k^2 - 2)]k - 2 = k^4 - 2k - 2$以此類推，$|L_n| = k^n - 2\left(\frac{k^{n-1}-1}{k-1}\right), k \geq 2$。

訊息傳遞到第 n 層時，傳遞範圍內有接收到訊息的所有節點數量：

訊息傳至第 0 層節點總數：$|L_0| = 1$

訊息傳至第 1 層節點總數：$|L_0 \cup L_1| = k + 1$

訊息傳至第 2 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2| = k^2 + k - 1$

訊息傳至第 3 層節點總數：$|L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3| = k^3 + k^2 - k - 3$

訊息傳至第 n 層的節點總數：

$$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n} |L_i| = -\left[\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1)k^{n-m-2}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq 2$$

一般式猜想：

由$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n} |L_i| = -\left[\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1)k^{n-m-2}\right] + k^n + k^{n-1}$得

$\Rightarrow |\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n} |L_i| = -[k^{n-2} + 3k^{n-3} + 5k^{n-4} + \cdots + (2n-5)k^1 + (2n-3)k^{n-n}] + k^n + k^{n-1}$

令$S_n = k^{n-2} + 3k^{n-3} + 5k^{n-4} + \cdots + (2n-5)k^1 + (2n-3)k^{n-n}$

$\Rightarrow S_n = \frac{k^{n-1}}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right] - \frac{2n-3}{k-1} = \frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]$帶回原式

$\Rightarrow |\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n} |L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}$

因此$|\bigcup_{i=0}^{n} L_i| = \sum_{i=0}^{n} |L_i| = -\left[\sum_{m=0}^{n-2} (2m+1)k^{n-m-2}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq 2$

$$= -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq 2$$

定理三：當有 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 k 個節點，但從第二層開始每層都有兩位共同朋友，傳遞至 n 層，則

$$\boldsymbol{\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq 2}$$

證明：

由於 $n \geq 2$ 時才成立，所以這裡我們從 n=2 開始證明。

當層數為 2 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{2} L_i\right| = \sum_{i=0}^{2}|L_i| = -\left\{\frac{k^{2-1}-2\cdot 2+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{2-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^2 + k^{2-1} = -1 + k^1 + k^2$成立。

設層數為 n 時，$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}$成立。

則當層數為 n+1，$\left|\bigcup_{i=0}^{n+1} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n+1}|L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1} + |L_{n+1}| = -\left[\frac{k^{n}-2(n+1)+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n+1-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right] + (k^n + k^{n+1})$成立。

因此由數學歸納法得知，$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}$ 對於所有 $n \geq 2$ 之整數皆成立。■

3.當有 f 個共同朋友($f \geq 2$)，訊息傳遞範圍的關係式？

推論：當有 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 k，但從第二層開始每層都有 f 個共同朋友，傳遞至 n 層：

由前面論證猜想

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\sum_{m=0}^{n-2}(fm+1)k^{n-m-2}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq f$$

$$= -\left\{\frac{(f-1)k^{n-1}-fn+4}{k-1} + f\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq f$$

本研究已完成基礎條件限制及定義，之後將對三大研究目標進行一般式的論證，並分析訊息可能的最大傳播範圍。另外，如何探討在不同節點數量的網路圖中如何找出其傳播上界的關係式，並提出一個可驗證模式，來判定最大的訊息傳播範圍。

(四) 當固定訊息發送的範圍，發源點個數與傳遞訊息的最少次數的關係式

固定訊息發送範圍的節點數量與邊個數，並找出其關係式，以下為圖形傳遞達最大範圍時（意即 s 取最大）之結果，且發源點多個的狀況。

本研究將發源點數量增加，每個發源點帶著不同訊息，以最快速度將所有訊息向外傳遞，研究猜想總結點數(s)與傳遞次數(t)、發源點(a)之關係式為$s=2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$，以下我們開始證明：

1. 當發源點個數為奇數

(1) 當有一個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最少次數

定理四：當有 1 個發源點(a=1)，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則 **當 $t\geq 1$ 時，$s=2^t$**

證明:

當 t=1 時，$s=2^1=2$ 成立。如圖 7，發源點 A 傳訊息給 B。

當 t=2 時，$s=2^2=4$ 成立。如圖 8，發源點 A 與 B 傳訊息給鄰近 2 點。

當 t=3 時，$s=2^3=8$ 成立。如下圖 9，發源點 A 與 B 再傳訊息給鄰近 2 點，而第 2 次（圖 8）延伸之兩點亦可向外傳訊給鄰近 2 點。

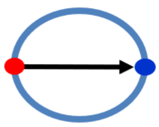


圖 7:t=1

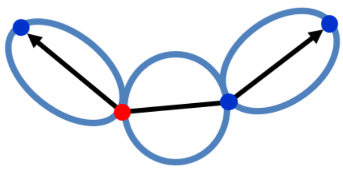


圖 8:t=2

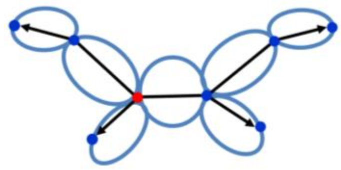


圖 9:t=3

設 $t=p$ 時，$s=2^p$ （其中 $p\in\mathbb{N}$）成立。

則 $t=p+1$ 時，$s=2^p\times 2=2^{p+1}$亦成立(由於點個數為2^p，而下一次的圖形為前一次的 2 倍，即2^{p+1}）

由數學歸納法可知：$\forall\ t\in\mathbb{N}$，當 a=1 時，圖形之節點數等於 $s=2^t$。■

(2) 當有三個發源點時，所有節點皆接可收到訊息最少次數

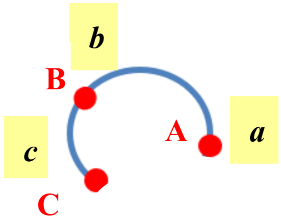


圖 10:t=0

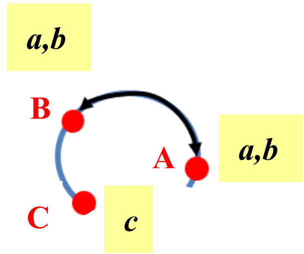


圖 11: t=1

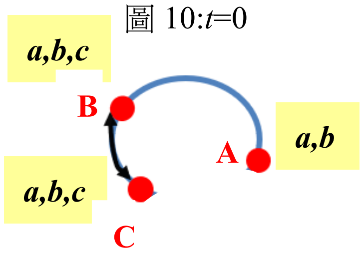


圖 12: t=2

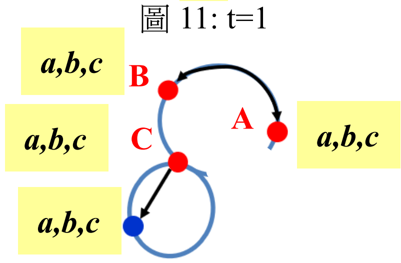


圖 13: t=3

A,*B*2 點互換訊息(*a* 與 *b* 訊息互傳)，*C* 點不做任何變化，如圖 11。

A,*B* 點具有 *a*,*b* 訊息，*B*,*C* 2 點互換訊息(*a*,*b* 與 *c* 訊息互傳)，A 點不做任何變化，如圖 12。

B,*C* 點具有 *a*,*b*,*c* 所有訊息，*B* 給 *A* 點 *c* 訊息，*C* 點因擁有所有訊息，且不需協助其他點傳遞，即向外傳遞產生新點 *D*。

所有點均具有所有訊息，即可於下一次後開始 2 倍傳輸，如圖 13。

定理五：當有 3 個發源點(a=3)，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則 當 **t≥3 時，$s=2^{t-1}$**

證明：

(t≤2 時，任一點訊息未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊，如上圖 11、12)

當 t=3，$s=2^{3-1}=4$ 成立，如圖 11。

設 t=p 時，$s=2^{p-1}$（其中 p∈ℕ）成立。

則 t=p+1 時，$s = 2^{p-1} \times 2 = 2^p$亦成立。

由數學歸納法可知：∀t∈ℕ 且 t≥3，當 a=3 時，圖形之節點數等於 $s=2^{t-1}$。■

(3) 當有 *a* 個發源點時(*a* 為偶數)，所有節點皆接收到訊息的最少次數 $T \geq a$

當有 a 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則 $s=2^{t-\frac{a-1}{2}}(t\geq a)$

$T\geq a$ 當 t=a 時，令 $a=2b-1$

當 $b=1$ 時，$s=2^1=2^{2-1-\frac{(2-1)-1}{2}}$成立

設 $b=m$ 時，$s=2^{(2m-1)-\frac{(2m-1)-1}{2}}$（其中 $m\in\mathbb{N}$）成立

則 $b=m+1$ 時，$s=2^{(2m-1)-\frac{(2m-1)-1}{2}}\times 2=2^{m+1}=2^{2(m+1)-1-\frac{2(m+1)-2}{2}}$亦成立

利用數學歸納法原理得知$s=2^{(2b-1)-\frac{(2b-1)-1}{2}}=2^{t-\frac{a-1}{2}}$■

2.當發源點個數為奇數

(1) 當有兩個發源點時($a=2$)，所有節點皆接收到訊息的最少次數

定理六：當有 2 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則
當 $t\geq 2$ 時，$s=2^t$

證明：

$t=1$ 時，$s=2^1=2$ 成立。如圖 14，發源點 A,B 帶有不同訊息，兩者相互傳遞訊息。

$t=2$ 時，$s=2^2=4$ 成立。如圖 15，A,B 皆具完整的訊息，即可向外傳遞至鄰近的點。

$t=3$ 時，$s=2^3=8$ 成立。

設 $t=p$ 時，$s=2^p$（其中 $p\in\mathbb{N}$）成立。

則 $t=p+1$ 時，$s=2^p\times 2=2^{p+1}$亦成立。

由數學歸納法可知：∀ $t \in \mathbb{N}$，當 a=2 時，圖形之邊數等於 $s=2^t$。■

（備註：當每個點獲得所有訊息後，點個數將以 2 的倍數增加、延伸）

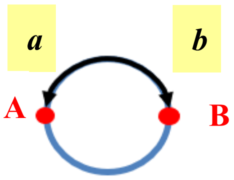


圖 14:t=1

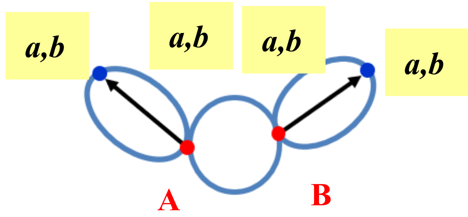


圖 15:t=2

舉例：以圖 14 而言，由於 A,B 2 點在此時皆具所有訊息，而到下 1 次（如圖 15）即可向外傳遞，點個數為 4 個，為前 1 次的 2 倍，以此類推，圖形再經過 1 次，即可變為 8 個點，點個數仍為其前 1 次的 2 倍。

(2) 當有四個發源點時(a=4)，所有節點皆接收到訊息的最少次數

定理七：當有 4 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則
當 $t \geq 4$ 時，$s=2^{t-1}$

證明：

($t \leq 2$ 時，任一點訊息尚未能向外傳遞、延伸，未獲得完整訊息或仍須協助傳訊）

當 t=3，$s=2^{3-1}$=4 成立。

如圖 16，最快 3 次 A,B,C,D 4 個點才可獲得全部訊息，以 A 點為例，當它傳遞訊息到 D 點時，需經 3 次才可完成。

t=4，$s=2^{4-1}$=8。

由於 A,B,C,D 4 個點皆獲得全部訊息，即可向外延伸，傳遞至鄰近的點。

t=5，$s=2^{5-1}=16$。

設 $t=p$ 時，亦即 $s=2^{p-1}$（其中 $p\in\mathbb{N}$）成立。

則 $t=p+1$，$s=2^{p-1}\times 2=2^{p}$亦成立。

由數學歸納法可知：∀ $t\in\mathbb{N}$ 且 $t\geq 3$，當 a=4 時，圖形之節點數等於 $s=2^{t-1}$。■

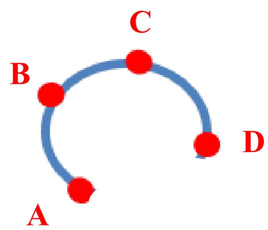


圖 16:t=4

(3) 當有 a 個發源點時(a 為偶數)，所有節點皆接收到訊息的最少次數 T≥a

當有 a 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則 $s=2^{t-\frac{a-2}{2}}$(t≥a)

$t=a$ 時，令 $a=2b$

當 b=1 時，$s=2^2=2^{2-\frac{2-2}{2}}$

設 $b=m$ 時，$s=2^{2m-\frac{2m-2}{2}}$（其中 $m\in\mathbb{N}$）成立

則 $b=m+1$ 時，$s=2^{2m-\frac{2m-2}{2}}\times 2=2^{m+2}=2^{2(m+1)-\frac{2(m+1)-2}{2}}$亦成立

利用數學歸納法原理得知$s=2^{2b-\frac{2b-2}{2}}=2^{t-\frac{a-2}{2}}$■

3. 當發源點個數為任意正整數

當有 a 個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最少次數

定理八：當有 *a* 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 *s* 與訊息傳遞次數 *t* 之關係式，則

當 $t \geq a$ 時，$s = 2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$

證明:

a 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 *s* 與訊息傳遞次數 *t* 之關係式：

由上得知，在 $t=a$ 時，總結點數(s)與傳遞次數(t)、發源點(a)之關係式：

奇數 $s=2^{\frac{a+1}{2}} = 2^{t-\frac{a-1}{2}}$

偶數 $s=2^{\frac{a+2}{2}} = 2^{t-\frac{a-2}{2}}$

在 $t>a$ 時，總結點數(s)與傳遞次數(t)、發源點(a)之關係式，我們分 *a* 為奇數、*a* 為偶數來證明，以下為證明：

(1) *a* 為奇數 $s=2^{t-\frac{a-1}{2}}$(t≥a)

當 $t=1$、$a=1$ 時，$s=2^{1-\frac{1-1}{2}}=2^1$

設 $t=a$ 時，$s=2^{a-\frac{a-1}{2}}$成立

則 $t=a+2$ 時，$s=2^{a-\frac{a-1}{2}} \times 2^2 = 2^{a+2-\frac{a-1}{2}} = 2^{t-\frac{a-1}{2}}$ 亦成立

利用數學歸納法原理得知 $s=2^{t-\frac{a-1}{2}}$■

(2) *a* 為偶數 $s=2^{t-\frac{a-2}{2}}$(t≥a)

當 t=2、a=2 時，s=$2^{2-\frac{2-2}{2}}=2^2$

設 t=a 時，s=$2^{t-\frac{a-2}{2}}$成立

則 t=a+2 時，s=$2^{a-\frac{a-2}{2}}\times 2^2=2^{(a+2)-\frac{a-2}{2}}=2^{t-\frac{a-2}{2}}$亦成立

利用數學歸納法原理得知 s=$2^{t-\frac{a-2}{2}}$ ■

由上得知我們的猜想$s=2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$為總結點數($s$)與傳遞次數($t$)、發源點($a$)之關係式正確

伍、 研究結果

一、 共同朋友上界與發送訊息的節點數量之關係

1 個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞給 k 個節點，傳遞範圍內的共同朋友上界：

傳遞範圍內最多可以有$\left\lfloor\frac{k^2}{2}\right\rfloor$個共同朋友

二、 模擬無共同朋友時網路傳遞訊息的傳播範圍

每次向外發送訊息的節點數量與訊息傳遞範圍的關係式：

定理一：當有 1 個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞給 k 個節點，傳遞至 n 層，則

$$\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}, n \geq 0, k \geq 0$$

三、 模擬有共同朋友時網路傳遞訊息的傳播範圍

(一) 當有一位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式

定理二：當有 1 個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞給 k 個節點，但從第二層開始每層都有一位共同朋友，傳遞至 n 層，則

$$\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2} - \frac{n-2}{k-1}\right] + k^n + k^{n-1}, n \geq 3, k \geq 2$$

(二) 當有兩位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式

定理三：當有 1 個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞給 k 個節點，但從第二層開始每層都有兩位共同朋友，傳遞至 n 層，則

$$\bigcup_{i=0}^{n}|L_i| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{k^{n-1}-2n+3}{k-1} + 2\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq 2$$

(三) 當有 f 位共同朋友，訊息傳遞範圍的關係式

推論：當有 1 個發源點，每個節點一次將訊息向外傳遞給 k 個節點，但從第二層開始每層都有 f 個共同朋友，傳遞至 n 層，則

$$\bigcup_{i}^{n}|L_i| = \sum_{i}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{(f-1)k^{n-1}-fn+4}{k-1} + f\left[\frac{k(k^{n-2}-1)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq f$$

四、 發源點個數與傳遞訊息的最少次數之關係式

(一) 根據定理四、定理五我們得知，當有奇數個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最短時間、發源點次數與節點個數關係式為：$s=2^{t-\frac{a-1}{2}}(t\geq a)$：

定理四：當有 1 個發源點(*a*=1)，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則

當 $t \geq 1$ 時，$s=2^t$

定理五：當有 3 個發源點(*a*=3)，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則

當 $t \geq 3$ 時，$s=2^{t-1}$

(二) 根據定理六、定理七我們得知，當有偶數個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最短時間、發源點次數與節點個數關係式為：$s=2^{t-\frac{a-2}{2}}(t\geq a)$

定理六：當有 2 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則

當 $t \geq 2$ 時，$s=2^t$

定理七：當有 4 **個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給** 1 **個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則**

當 $t \geq 4$ **時，**$s=2^{t-1}$

(三) $s=2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$為總結點數($s$)、傳遞次數($t$)與發源點($a$)之關係式

定理八：當有 *a* 個發源點，每次所有擁有訊息的節點向外傳遞給 1 個節點，傳遞範圍內總節點數 s 與訊息傳遞次數 t 之關係式，則當 $t \geq a$ 時，$s=2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$

陸、 討論

一、 本研究定義了傳遞訊息之條件並利用共同朋友與訊息傳遞層數作為我們探討人與人之間傳遞訊息的傳遞範圍。

二、 本研究討論了傳遞訊息之共同朋友數量最大值，當由一個發源點傳遞訊息至 k 個節點，在由此 k 個節點分別向外發送 k 個訊息，從第二層開始每層最多可以有$\left\lfloor\frac{k^2}{2}\right\rfloor$個共同朋友。

三、 本研究討論了共同朋友數量與每次傳遞訊息範圍之範圍，提出了定理一、定理二、定理三。

四、 我們找到共同朋友數量與每次傳遞訊息範圍之一般化的結果並證明，我們發現其結果與等比數列有關，且提出之定理中 k、n 係數、常數有其規律性。

五、 我們發現提出之節點總數公式中皆有兩項k^n及k^{n-1}。

六、 探討在不同節點數量的網路圖中如何找出其傳播上界的關係式，並提出一個可以驗證模式來判定訊息傳播的最大上界範圍。

七、 找到總結點數(s)與傳遞次數(t)、發源點(a)之關係式，並進行一般化。

柒、 結論

本研究在傳遞訊息對象人數不同時及在不同共同朋友數量的網路圖中，找出其傳播範圍：

一、當由一個發源點傳遞訊息至 k 個節點，在由此 k 個節點分別向外發送 k 個訊息，從第二層開始每層最多可以有$\left\lfloor\frac{k^2}{2}\right\rfloor$個共同朋友，我們可以找到在有共同朋友最多的情況下，找到其訊息傳播的最大值。

二、由定理一、定理二、定理三，我們討論了共同朋友數量與每次傳遞訊息範圍之範圍

三、們找到共同朋友數量與每次傳遞訊息範圍之一般化的結果並證明，我們發現其結果與等比數列有關，且提出之定理中 k、n 係數、常數有其規律性。

在 1 個發源點，每個節點向外傳遞給 k，但從第二層開始每層都有 f 位共同朋友，傳遞至 n 層為：$\left|\bigcup_{i=0}^{n} L_i\right| = \sum_{i=0}^{n}|L_i| = -\left\{\frac{(f-1)k^{n-1}-fn+4}{k-1} + f\left[\frac{k\left(k^{n-2}-1\right)}{(k-1)^2}\right]\right\} + k^n + k^{n-1}, n \geq 2, k \geq f$

四、我們找到總結點數(s)與傳遞次數(t)、發源點(a)之關係式，並一般化。我們得到定理四、定理五、定理六、定理七、定理八，當固定訊息傳播的範圍，發源點個數與傳遞訊息的最少次數之關係式為

$s = 2^{t-\left\lfloor\frac{a-1}{2}\right\rfloor}$ $(t \geq a)$

在奇數個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最短時間、發源點次數與節點個數關係式為：$s=2^{t-\frac{a-1}{2}}(t \geq a)$

在偶數個發源點時，所有節點皆接收到訊息的最短時間、發源點次數與節點個數關係式為：$s= 2^{t-\frac{a-2}{2}}(t \geq a)$

捌、 未來展望

一、探討在不同節點數量的網路圖中如何找出其傳播最大範圍的關係式。

二、探討在一個發源點時，有不同節點數量的網路圖中如何找出其傳播範圍的關係式。

試著求出 1 個發源點的網路圖中，每個節點向外傳給任意個節點數，此節點集合總數(不包含發源點)為 $s_{(i)}$，在傳遞 t 次後我們以 $s^{(t)}{}_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} a_i \ (a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_j)$

例如：$s_{(1)}=1=a_1$、$s_{(2)}=3=a_2$、$s_{(3)}=5=a_3$、$s_{(4)}=7=a_4$(如圖 17)

傳遞兩次(t=2)時，$s^{(2)}{}_{(4)} = \sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$

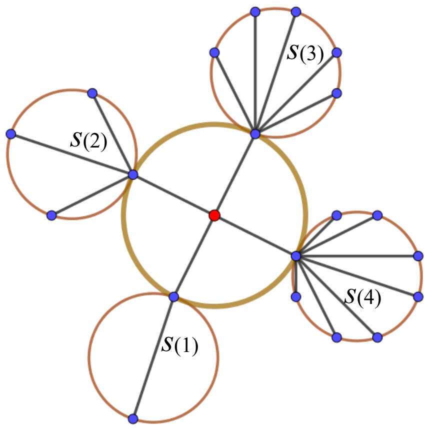


圖 17:當 t=2 時，傳播範圍圖

玖、 參考資料及其他

[1] S. P. Borgatti, A. Mehra, D. J. Brass, G. Labianca(2009). Network Analysis in the Social Sciences. Science 323, 892-895.

[2] 張鎮華（2017）。演算法觀點的圖論。臺北市︰國立台灣大學出版中心。

[3] 圖書館學與資訊科學大辭典-節點定義 http://terms.naer.edu.tw/detail/1678858/

[4] 複雜網路中橋接式與強鍵式連結之偵測、分析與應用。取自 2020 年 7 月 30 日 https://etd.lib.nctu.edu.tw/cgibin/gs32/tugsweb.cgi?o=dnctucdr&s=id=%22GT079757532%22.&searchmode=basic

[5] 呂名祺、林冠伶、吳雨靜、陳世勳(2010)。居然是「e」。中華民國第 50 屆全國中小學科學展覽會。

[6] Hathout, L.（黃俊瑋、邱珮瑜譯，2009）。數學偵探物語。台北市：書泉出版社。

[7] 單維彰、鄭惟厚主編(2017)。高級中學數學課本第二冊。臺北市：三民書局。

[8] Wan, Y., & Tong, H. (2008). URL assignment algorithm of crawler in distributed system based on hash. In *IEEE international conference on networking, sensing and control, 2008. ICNSC 2008* (pp. 1632–1635).

[9] 最小廣播圖設計(2000)。*http://wenku.baidu.com/view/5e698b39580216fc700afde9.html*

【評語】010052

在網路的世代，本作品研究主題探討訊息傳播的範圍。作者先定義一個數學模式，也就是每一層的訊息傳遞有固定的共同朋友數，給出模式條件去估算「共同朋友」的最大數量，利用歸納法去證明其公式，整個作品內容稍嫌單薄，主要是利用等比級數和。至於比較有趣的特徵向量中心性計算收斂性卻未深入探討，是比較可惜之處。其實一般訊息覆蓋範圍，有很多討論方式，比較常用的是利用 entropy，或 KLdivergence 等等，建議同學可以試著去參考理解。