2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010041

參展科別　數學

作品名稱　賽事公平性分析

就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　陳保伶、邱柏翰

作者姓名　彭建廷

關鍵詞　賽事、排列組合、公平性

作者簡介

我就讀臺北市立永春高中數理資優班，對於數學非常有興趣，也喜歡在生活中尋找並探索相關的數學問題，此外我非常喜歡打羽球，也時常會報名民間的各種羽球競賽，也因為對於比賽有經驗，以及在比賽的過程中發現因賽程編排的問題，促成我製作這個專題研究，我希望可以利用所學的數學內容、建立數學模型，找出最適合的賽程，提供給各種比賽的主辦單位使用。

一、摘要

在比賽時看到許多選手，雖然本身實力不差，卻因為賽制的編排而無緣晉級決賽，因此本研究透過數學分析單淘汰賽（可以很快的找出勝負）、單循環賽（大部分是使用在人數較少時，但是每位選手都會交手到）、雙淘汰賽（可以讓選手有輸一次的機會，選手就算輸一場還是有機會得到冠軍）、循環賽（主辦單位會融合單淘汰賽、單循環賽、雙淘汰賽來衍生出新的賽制），得到可以選出與實力相當的前三名（準確找出前三名）機率，並且將所有機率加以比較，分析出何種賽制準確找出前三名的機率最高，並且利用比較後的結果，製作一個新的賽程。經過分析得到混和賽的機率與單淘汰賽差不多，但考慮場次的使用並沒有優於單淘汰賽，因此並未符合主辦單位採用此種賽程的依據。但雙淘汰賽卻相反，機率偏高且使用的場次適中，符合主辦單位採用的依據。

I competed with a lot of players in the competition. Although I had confidence in my ability, I still missed the finals because of the arrangement of the system. Therefore, this study aims to select the top three players accurately and compare all the odds through the mathematical analysis of the following methods:

1. the single elimination game, which can quickly find out the outcome;
2. the single round robin, mostly used when there are not so many competitors but each player will hand in;
3. the double playoffs, in which players will have a chance to win the championship even if they lose a game;
4. the round robin, in which the organizer will merge single eliminations, single round robins, and double playoffs to derive a new system; The elimination tournament will be used to derive a new system.

Also, this study expects to analyze which system has the highest probability of finding the top three accurately, and use the comparison solution to make a new schedule. After the analysis, the probability of the mixed game is similar to that of the single elimination game. However, considering the use of the game is not superior to the single elimination game, it does not meet the basis for the organizer to adopt such a schedule. On the other hand, the double elimination tournament is the opposite—the probability is high and the used time is moderate, which is in line with the basis adopted by the organizer.

二、前言

（一）動機

我多次參加羽球比賽，在參加每一場比賽之前，我習慣搜尋該場比賽的歷年得獎名單以及試著尋找對手的資料，讓我有機會掌握對手的訊息。由於每場比賽都是隨機抽籤，且並沒有種子選手的情況，當我在比較這些資料的同時，發現許多場比賽中，發生過類似的情況：去年的冠軍及亞軍在今年的小組賽被分配在同一組。每次看到這樣的情況時，就引發我一個想法：這名亞軍選手既然在去年的比賽中取得第二名，那麼他的實力應當優秀於其他參賽者，這名選手在初賽時如果被分配到不同的小組，憑著他本身的實力，在這場比賽中是否就有機會打敗其他選手進入決賽，就不會在初賽時就因為隨機抽籤，和冠軍的選手被編排在同一組，而遭到淘汰，如果能夠將上述的情況降低，並且讓選手中實力較強者在初賽時被分開編排的情況提升，也許能夠讓該場比賽的結果與參賽者實力的相關性提升，讓每位選手都能夠在比賽中獲得其實力所應該對應的名次，藉此彰顯比賽的公平性。

比較參加的各賽程，以及各項國際型賽事，我發現在國際賽中，主辦單位很常使用單淘汰賽以及先循環後淘汰賽，且幾乎所有都會搭配種子選手的組合，推測就是為了安排去年的前幾名選手在初賽或小組賽時為種子選手，使他們不會在一開始就對上，也藉此提升比賽的公平性。由此，我覺得單淘汰賽以及先循環後淘汰賽本身的賽程編排方式，會容易讓實力較強的選手在初賽時被編排在一起，因此主辦單位才需要使用種子選手的措施。

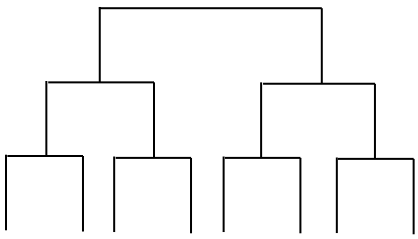
經過這些詳細的觀察及思考，我也翻閱了《運動競賽制度之比較研究》，發現書中利用各種賽程圖介紹了每種賽程的編排方式以及簡單比較各賽程的優劣程度，因此我也想利用賽程圖，並透過數學分析建立數學模型，分析各種不同賽程在參賽者人數不同時，比賽中實力很強的幾名選手在初賽時較不容易被編排在一起的機率最高，藉此提升比賽的公平性。

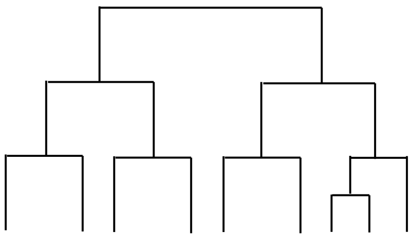
在一些書籍、網路資料及論文當中，皆有依據各個賽程的編排方式，考慮各賽程使用的場次和時間，比較各個賽程的優劣關係(單淘汰賽適用於參賽人數較多，可以以最快的速度完成比賽；雙淘汰賽可以讓選手有多一次比賽的機會；單循環賽每位

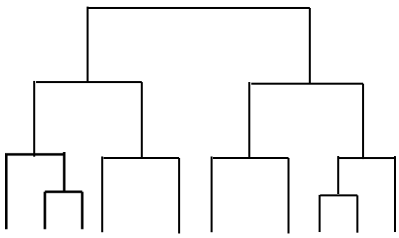
選手都可以和其他選手有對戰的經驗)，探討在參賽者人數不同的情況下，何種賽程最適合被使用。然而，並沒有文獻考慮到可能會有實力不錯的選手因為賽程編排而被埋沒的情況，因此本研究想將這個因素納入考慮，重新比較各賽事，探討在不同的情況下，何種賽程最適合被主辦單位使用。在研究中分析的賽程有下列五種賽程。

1.單淘汰賽

此賽制的編排分成完整型和不完整型，完整型是參賽人數為 2^n，如圖(1)，賽程簡單明瞭，因此很容易編排，不完整型則是不足於 2^n，此時就會出現輪空的現象，如圖(2)、圖(3)，而編排輪空的順序是依序由外而內，加入適當的輪空人數來符合參賽人數。

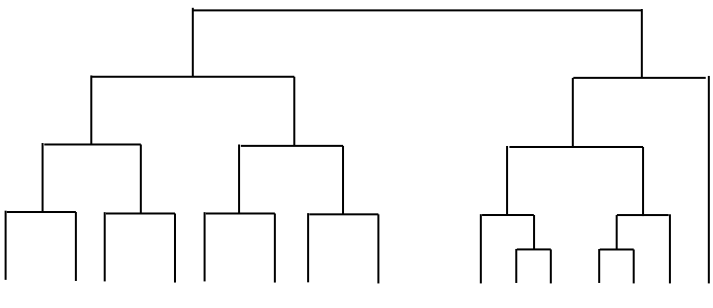

圖(1)


圖(2)


圖(3)

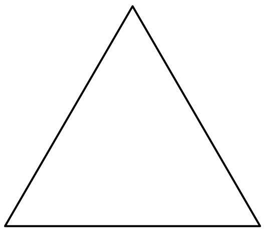
2.雙淘汰賽

此種賽制會讓選手多一次的復活機會，如圖(4)，如果選手在第一輪賽事中不慎輸掉了，還可以到第二輪(敗部復活區)進行比賽，選手如果有一定的實力，在第二輪擊敗其他選手，還是能夠有取得第一名的機會。

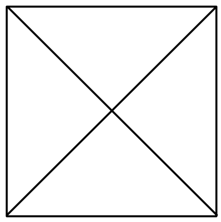

圖(4)

3.單循環賽

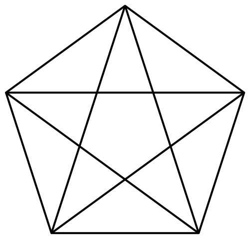
此賽制會依選手人數不同，畫出不一樣的賽程形狀，讓所有選手都會有相遇一次的機會，並將比賽結束後每個人的勝場數統計，依照其高低排出名次，圖(5)~圖(7)為不同人時的單循環賽程圖。



圖(5)



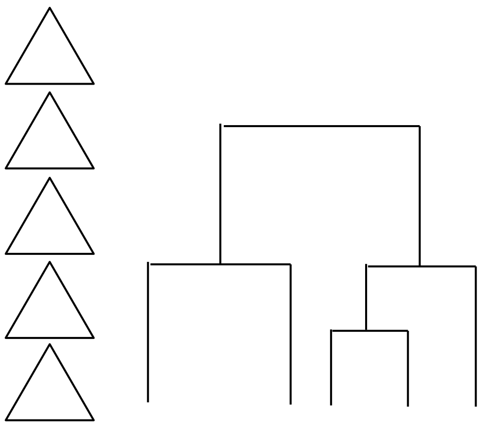
圖(6)



圖(7)

4.混合賽-先循環後淘汰賽

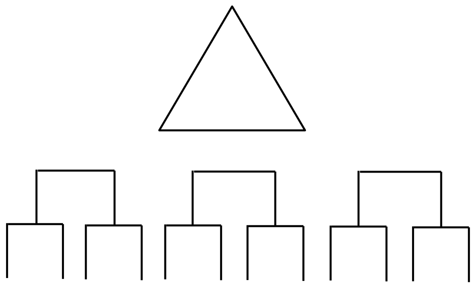
此賽制為混合賽的其中一種，主辦單位在初賽時使用循環賽，每組各取一名選手進行複賽，而複賽則使用單淘汰賽進行，如圖(8)，此圖為參賽選手 15 人的先循環後淘汰賽賽程圖，將每三個人一組進行小組對戰(每位選手為三角形中的一個頂點位置)，每組取最強的一名(共會有 5 名)選手進行複賽(單淘汰賽)，再由複賽中取出名次。



圖(8)

5.混合賽-先淘汰後循環賽

如圖(9)，此賽制為混和賽的其中一種，將參賽者分成3組(如果人數不為3的倍數，則將其中一組或兩組人數增加一)單淘汰賽進行初賽，每組各取一名(共三名選手)進行單循環賽的複賽，再由複賽中取出名次。



圖(9)

（二）目的

1.計算單淘汰賽找出「與實力相符的前三名」、「實力最堅強的三名」的機率。

2.計算雙淘汰賽找出「與實力相符的前三名」、「實力最堅強的三名」的機率。

3.計算單循環賽找出「與實力相符的前三名」、「實力最堅強的三名」的機率。

4.計算混合賽-先循環後淘汰賽找出「與實力相符的前三名」、「實力最堅強的三名」的機率。

5.計算混合賽-先淘汰後循環賽找出「與實力相符的前三名」、「實力最堅強的三名」的機率。

三、研究過程及方法

（一）研究假設：

1.參賽者實力可被量化

2.任 2 位參賽者的實力不相等，必有強弱之分

3.任一場賽事，實力較強的一方必勝

4.將參賽者依實力排序，序位 1 是實力最強的

（二）明確問題：

1.與實力相符的前三名的編排方法

若該賽事能選出「與實力相符的前 n 名」的機率越高，則公平性越高。舉例來說，選出「與實力相符的前 3 名」意指，實力序位 1、2、3 的選手，分別得到第 1、2、3 名。

2.與實力相符的前三名機率

依據排列組合，$\frac{\text{與實力相符的前三名編排方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}$=與實力相符的前三名機率。

3.實力最堅強的三名選手的編排方法

若該賽事能選出「實力最堅強的 n 名」的機率越高，則公平性越高。舉例來說，選出「實力最堅強的 3 名」意指，實力序位 1、2、3 的選手，分別得到 1、2、3 名或 1、3、2 名。

4.實力最堅強的三名選手機率

依據排列組合，$\frac{\text{選拔團體中前三名方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}$=選拔團體中前三名的機率。

（三）建立模型：

因應不同賽制，建立不同的數學模型，在依照參賽者人數計算出對應的機率。

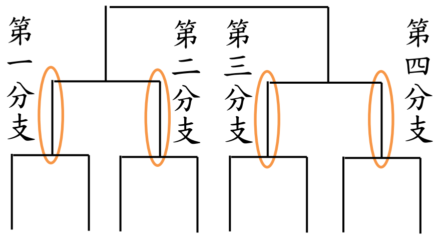
1、單淘汰賽

(1)與實力相符的前三名機率

模型 1：$\frac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$

創建過程：

如圖(10)，設為四強賽從左到右四個分支點依序為第一、第二、第三、第四分支，每個分支所對應到的選手人數，e_1、e_2、e_3、e_4。



圖(10)

一開始選手被編排的位置相當重要，如果任兩位選手落在同一分支，就會發生還沒到決賽就被淘汰的情況，僅有一人能進入四強賽。如果兩名選手同時落在 e_1、e_2 或是 e_3、e_4，僅有一人能進入二強賽。

依據上述規則，找出能夠讓此三名選手分別獲得 1、2、3 名的編排方法，必須讓三名選手在一開始就被編排在不同的分支，且 1、2 不可同時在第一及第二分支內，因此可得到 4 種編排組合，進行整理後可得與實力相符的前三名可能的所有編排方式為 $4e_1e_2e_3$。從四個分支中任取三個分支，如圖(11)，同樣都可以得到四種可能，會得到 $4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4$。

第一分支					3	2	3	1	3	2	3	1	2	1	1	2
第二分支	2	1	1	2	2	3	1	3	2	3	1	3				
第三分支	3	3	2	1	1	1	2	2					3	3	2	1
第四分支	1	2	3	3					1	1	2	2	1	2	3	3

圖(11)

列出所有參賽選手可以被編排的所有可能，依據排列組合，在所有初賽選手位置中任取其中三個(考慮原先預設實力為前三名的選手)，$C_3^{e_1+e_2+e_3+e_4}$，化作式子表示，可得 $(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)$。

結合上述所有的推論，$\dfrac{\text{與實力相符的前三名編排方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}$ = 與實力相符的前三名機率。可得到以下式子：$\dfrac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$。

性質 1：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 25%。

證明：

$$f(e_1,e_2,e_3,e_4)=\frac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$$

當 $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = t$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{4t^3+4t^3+4t^3+4t^3}{4t(4t-1)(4t-2)} = \lim_{t\to\infty}\frac{[4t^3+4t^3+4t^3+4t^3]/t^3}{[4t(4t-1)(4t-2)]/t^3}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{4+4+4+4}{4\times\frac{(4t-1)}{t}\times\frac{(4t-2)}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{16}{4\times(4-\frac{1}{t})\times(4-\frac{2}{t})}$$

$$= \frac{16}{4\times(4-0)(4-0)} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 25\%$$

當 $e_2 = e_3 = e_4 = t, e_1 = t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{4(t+1)t^2+4(t+1)t^2+4(t+1)t^2+4t^3}{4t(4t+1)(4t-1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{[4(t+1)t^2+4(t+1)t^2+4(t+1)t^2+4t^3]/t^3}{[4t(4t+1)(4t-1)]/t^3}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{4\times\frac{(t+1)}{t}+4\times\frac{(t+1)}{t}+4\times\frac{(t+1)}{t}+4}{4\times\frac{(4t+1)}{t}\times\frac{(4t-1)}{t}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{4\times(1+\frac{1}{t})+4\times(1+\frac{1}{t})+4\times(1+\frac{1}{t})+4}{4\times(4+\frac{1}{t})\times(4-\frac{1}{t})}$$

$$= \frac{4\times(1-0)+4\times(1-0)+4\times(1-0)+4}{4\times(4+0)\times(4-0)} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 25\%$$

當 $e_2 = e_3 = t, e_1 = e_4 = t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{4(t+1)t^2+4t(t+1)^2+4t(t+1)^2+4(t+1)t^2}{4t(4w+2)(4w+1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{[4(t+1)t^2+4t(t+1)^2+4t(t+1)^2+4(t+1)t^2]/t^3}{[4t(4w+2)(4w+1)]/t^3}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{4\times\frac{(t+1)}{t}+4\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+4\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+4\times\frac{(t+1)}{t}}{4\times\frac{(4t+2)}{t}\times\frac{(4t+1)}{t}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{4\times(1+\frac{1}{t})+4\times(1+\frac{1}{t})^2+4\times(1+\frac{1}{t})^2+4\times(1+\frac{1}{t})}{4\times(4+\frac{2}{t})\times(4+\frac{1}{t})}$$

$$= \frac{4\times(1+0)+4\times(1+0)^2+4\times(1+0)^2+4\times(1+0)}{4\times(4+0)(4+0)} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 25\%$$

當 $e_3 = t, e_1 = e_2 = e_4 = t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{4t(t+1)^2+4(t+1)^3+4t(t+1)^2+4t(t+1)^2}{(4t+3)(4t+2)(4t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[4t(t+1)^2+4(t+1)^3+4t(t+1)^2+4t(t+1)^2]/t^3}{[(4t+3)(4t+2)(4t+1)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+4\frac{(t+1)^3}{t^3}+4\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+4\times\frac{(t+1)^2}{t^2}}{\frac{(4t+3)}{t}\times\frac{(4t+2)}{t}\times\frac{(4t+1)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\times(1+\frac{1}{t})^2+4\times(1+\frac{1}{t})^3+4\times(1+\frac{1}{t})^2+4\times(1+\frac{1}{t})^2}{(4+\frac{3}{t})\times(4+\frac{2}{t})\times(4+\frac{1}{t})}$$

$$=\frac{4\times(1+0)^2+4\times(1+0)^3+4\times(1+0)^2+4\times(1+0)^2}{(4+0)\times(4+0)\times(4+0)}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}=25\%$$

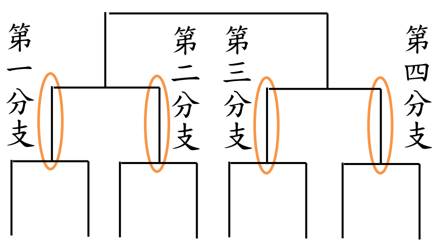
□

(2)實力最堅強的三名機率

模型 2： $\dfrac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$

創建過程：

此創建過程之想法如模型 1，考慮選手的排序問題，而做模型的微調。如圖(12)，若要找出選出團體中最堅強的三名選手，在一開始編排時，如果同時將這三名選手放在 e_1 和 e_2，就會有一位選手無法進入前三名的位置，選拔團體中前三名可能就不成立，此時三名選手在該分支中隨機挑一個位置，進行整理後可得選出團體中最堅強的三名選手的所有排序方式為 $6e_1e_2e_3$。



圖(12)

依據上述的方法，從四個任取三個分支，如圖(13)，共可得到 24 種可能，因此會得到$6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4$ 。

第一分支	1	1	2	2	3	3								1	1		2	2	3	3	1	1	2	2	3	3
第二分支	3	2	1	3	1	2	1		1	2	2	3	3								3	2	1	3	1	2
第三分支	2	3	3	1	2	1	3		2	1	3	1	2	3	2		1	3	1	2						
第四分支							2		3	3	1	2	1	2	3		3	1	2	1	2	3	3	1	2	1

圖(13)

列出所有參賽選手可以被編排的所有可能，依據排列組合，在所有初賽選手位置鍾任取其中三個(考慮原先預設實力為前三名的選手)，$C_3^{e_1+e_2+e_3+e_4}$ ，化作式子表示，可得$(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)$

結合上述所有的推論：

$\dfrac{\text{與實力相符的前三名編排方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}$=與實力相符的前三名機率。

可得到以下式子：$\dfrac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$ 。

性質 2：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 37.5%。

$$f(e_1,e_2,e_3,e_4)=\frac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$$

證明：

當$e_1=e_2=e_3=e_4=t$時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6t^3+6t^3+6t^3+6t^3}{4t(4t-1)(4t-2)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[6t^3+6t^3+6t^3+6t^3]/t^3}{[4t(4t-1)(4t-2)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6+6+6+6}{4\times\dfrac{(4t-1)}{t}\times\dfrac{(4t-2)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24}{4\times(4-\dfrac{1}{t})\times(4-\dfrac{2}{t})}$$

$$=\frac{24}{4\times(4-0)(4-0)}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}=37.5\%$$

當 $e_2=e_3=e_4=t, e_1=t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6(t+1)t^2+6(t+1)t^2+6(t+1)t^2+6t^3}{4t(4t+1)(4t-1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[6(t+1)t^2+6(t+1)t^2+6(t+1)t^2+6t^3]/t^3}{[4t(4t+1)(4t-1)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times\frac{(t+1)}{t}+6\times\frac{(t+1)}{t}+6\times\frac{(t+1)}{t}+6}{4\times\frac{(4t+1)}{t}\times\frac{(4t-1)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times(1+\frac{1}{t})+6\times(1+\frac{1}{t})+6\times(1+\frac{1}{t})+6}{4\times(4+\frac{1}{t})\times(4-\frac{1}{t})}$$

$$=\frac{6\times(1-0)+6\times(1-0)+6\times(1-0)+6}{4\times(4+0)\times(4-0)}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}=37.5\%$$

當 $e_2=e_3=t, e_1=e_4=t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6(t+1)t^2+6t(t+1)^2+6t(t+1)^2+6(t+1)t^2}{4t(4w+2)(4w+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[6(t+1)t^2+6t(t+1)^2+6t(t+1)^2+6(t+1)t^2]/t^3}{[4t(4w+2)(4w+1)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times\frac{(t+1)}{t}+6\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+6\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+6\times\frac{(t+1)}{t}}{4\times\frac{(4t+2)}{t}\times\frac{(4t+1)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times(1+\frac{1}{t})+6\times(1+\frac{1}{t})^2+6\times(1+\frac{1}{t})^2+6\times(1+\frac{1}{t})}{4\times(4+\frac{2}{t})\times(4+\frac{1}{t})}$$

$$=\frac{6\times(1+0)+6\times(1+0)^2+6\times(1+0)^2+6\times(1+0)}{4\times(4+0)(4+0)}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}=37.5\%$$

當 $e_3=t, e_1=e_2=e_4=t+1$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6t(t+1)^2+6(t+1)^3+6t(t+1)^2+6t(t+1)^2}{(4t+3)(4t+2)(4t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[6t(t+1)^2+6(t+1)^3+6t(t+1)^2+6t(t+1)^2]/t^3}{[(4t+3)(4t+2)(4t+1)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+6\frac{(t+1)^3}{t^3}+6\times\frac{(t+1)^2}{t^2}+6\times\frac{(t+1)^2}{t^2}}{\frac{(4t+3)}{t}\times\frac{(4t+2)}{t}\times\frac{(4t+1)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times(1+\frac{1}{t})^2+6\times(1+\frac{1}{t})^3+6\times(1+\frac{1}{t})^2+6\times(1+\frac{1}{t})^2}{(4+\frac{3}{t})\times(4+\frac{2}{t})\times(4+\frac{1}{t})}$$

$$=\frac{6\times(1+0)^2+6\times(1+0)^3+6\times(1+0)^2+6\times(1+0)^2}{(4+0)\times(4+0)\times(4+0)}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}=37.5\%$$

□

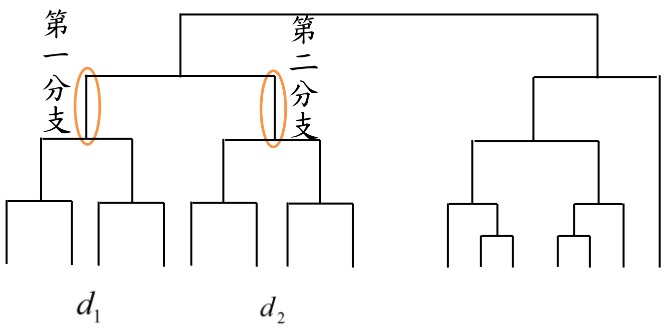
2、雙淘汰賽

(1)與實力相符的前三名機率

模型 3：$\dfrac{3d_1d_2(d_1-1)+3d_1d_2(d_2-1)}{(d_1+d_2)(d_1+d_2-1)(d_1+d_2-2)}$

創建過程：

如圖(14)，設第一輪二強賽的分支所對應到的選手人數為 d_1、d_2，。



圖(14)

依照賽程的編排，實力為第一名的一定不需經過敗部復活區，可以直接到決賽，而第二名和第三名都會先後到敗部復活區，如果要將第二名和第三名兩位選手在敗部復活區的決賽時遇到，必須讓其中一人進入第一輪的決賽，就可使第二和第三名的選手分開。

依照上述想法將與實力相符的前三名可能列出來，共可得 6 種編排方式，如圖(15)，將這 6 種可能分成上下各 3 組討論，上面 3 組的編排方式，整理後可得$3d_1d_2(d_1-1)$；下面 3 組的編排方式，整理後可得$3d_1d_2(d_2-1)$，將所有相加就可得出找到與實力相符的前三名的所有可能，可得$3d_1d_2(d_1-1)+3d_1d_2(d_2-1)$。

第一分支	1 2	1 3	2 3	1	3	2
第二分支	3	2	1	2 3	1 2	1 3

圖(15)

列出所有參賽選手可以被編排的所有可能，依據排列組合，在所有初賽選手位置中任取其中三個(考慮原先預設實力為前三名的選手)，$C_3^{d_1+d_2}$，化作式子表示，可得$(d_1+d_2)(d_1+d_2-1)(d_1+d_2-2)$。

結合上述所有的推論，

$$\frac{\text{與實力相符的前三名編排方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}=\text{與實力相符的前三名機率。}$$

可得到以下式子：$\dfrac{3d_1d_2(d_1-1)+3d_1d_2(d_2-1)}{(d_1+d_2)(d_1+d_2-1)(d_1+d_2-2)}$。

性質 3：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 75%。

證明：

$$f(d_1,d_2)=\frac{3d_1d_2(d_1-1)+3d_1d_2(d_2-1)}{(d_1+d_2)(d_1+d_2-1)(d_1+d_2-2)}$$

當$d_1=d_2=t$時

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2(t-1)+3t^2(t-1)}{2t(2t-1)(2t-2)}=\lim_{t\to\infty}\frac{[3t^2(t-1)+3t^2(t-1)]/t^3}{[2t(2t-1)(2t-2)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\times\frac{t-1}{t}+3\times\frac{t-1}{t}}{2\times\frac{2t-1}{t}+\frac{2t-2}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3-\frac{3}{t}+3-\frac{3}{t}}{2\times(2-\frac{1}{t})(2-\frac{2}{t})}$$

$$=\frac{3-0+3-0}{2\times(2-0)(2-0)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=75\%$$

當 $d_1=t, d_2=t+1$ 時

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t(t+1)(t-1)+3t^2(t+1)}{2t(2t+1)(2t-1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{[3t(t+1)(t-1)+3t^2(t+1)]/t^3}{[2t(2t+1)(2t-1)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\times\frac{t+1}{t}\times\frac{t-1}{t}+3\times\frac{t+1}{t}}{2\times\frac{2t+1}{t}\times\frac{2t-1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\times(1+\frac{1}{t})(1-\frac{1}{t})+3\times(1+\frac{1}{t})}{2\times(2+\frac{1}{t})(2-\frac{1}{t})}$$

$$=\frac{3\times(1+0)\times(1+0)+3\times(1+0)}{2\times(2+0)(2-0)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=75\%$$

(2)實力最堅強的三名機率

模型：$\frac{3d_1d_2(d_1-1)+3d_1d_2(d_2-1)}{(d_1+d_2)(d_1+d_2-1)(d_1+d_2-2)}$ (同模型 3)。

推論：

承圖(14)，若要找出選出團體中最堅強的三名選手的可能，第二名及第三名的選手一定會到敗部復活區，而比賽結果前三名的選手必定會取得其所對應的名次，此種狀況與準確找出前三名可能的情況相同，因此可將準確找出前三名機率的公式套用到選出團體中最堅強的三名選手機率中。

性質：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 75%(同性質 3)。

3 單循環賽

(1)與實力相符的前三名機率

此賽程在進行比賽的時候，每位參賽選手都會和其他參賽選手進行對戰，因此在比賽結束時，可以依照每位參賽者的勝場數排列名次順序，而原先設定的所有參賽者中實力為前三名的三位選手，也一定會取得其該有的名次，因此能夠找出與實力相符的前三名機率為 100%

(2)實力最堅強的三名機率

此賽制的比賽名次會依實力排序，因實力最堅強的三名機率等同於與實力相符的前三名機率。

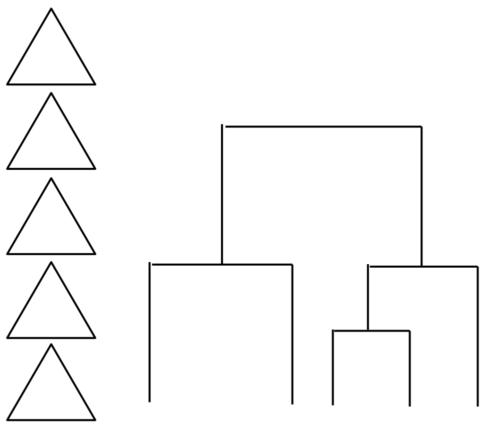
4 先循環後淘汰賽

(1)與實力相符的前三名機率

模型：$\dfrac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$(同模型 1)。

創建過程：

如圖(16)，此賽制使用單循環賽為初賽，原先設定實力為所有參賽者中前三名的選手如果要順利晉級複賽，需被分別排在不同組即可(由於每組取一位最強的選手，如果同時其中兩位或三位選手在同一組，實力為第二或第三名的選手就會在初賽時被淘汰，找出與實力相符的前三名編排可能便不成立)，而複賽為單淘汰賽的賽程，當選手各由初賽進入到複賽時，可視為單淘汰賽的賽程。



圖(16)

結合初賽及複賽，單循環賽找出與實力相符的前三名機率為 100%，單淘汰賽找出與實力相符的前三名機率為，

$$\frac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$$

依據排列組合將兩者機率相乘可得先循環後單淘汰賽找出與實力相符的前三名機率，可得到以下式子：

$$1\times\frac{4e_1e_2e_3+4e_1e_2e_4+4e_1e_3e_4+4e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}。$$

性質：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 37.5%(同性質 1)。

(2)實力最堅強的三名機率

模型：$\dfrac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$ (同模型 2)。

創建過程

承圖(16)，若要選出團體中最堅強的三名選手的可能，依據賽程的編排方式，原先設定實力為所有參賽者中前三名的選手如果要順利晉級複賽，需被分別排在不同組，而複賽為單淘汰賽的賽程，當選手各由初賽進入到複賽時，可視為單淘汰賽的賽程。

結合初賽及複賽，單循環賽選出團體中最堅強的三名選手的機率為 100%，

單淘汰賽選出團體中最堅強的三名選手的機率為，

$$\frac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}$$

依據排列組合將兩者機率相乘可得先循環後單淘汰賽找出與實力相符的前三名機率，可得到以下式子：

$$1\times\frac{6e_1e_2e_3+6e_1e_2e_4+6e_1e_3e_4+6e_2e_3e_4}{(e_1+e_2+e_3+e_4)(e_1+e_2+e_3+e_4-1)(e_1+e_2+e_3+e_4-2)}。$$

5 先淘汰後循環賽

(1)與實力相符的前三名機率

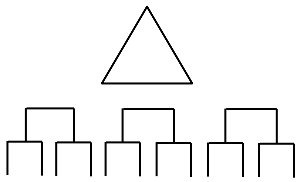
模型 4：$\begin{cases}\dfrac{2n^2}{9(n-1)(n-2)}，當 n=3k(k 為整數)\\[2ex]\dfrac{2(n-1)(n+2)}{9n(n-2)}，當 n=3k+1(k 為整數)\\[2ex]\dfrac{2(n+1)^2}{9n(n-1)}，當 n=3k+2(k 為整數)\end{cases}$

此賽制將人數分成三個小組，在初賽時利用單淘汰賽，取出各組的第一名利用循環賽進行複賽，設人數為 n，初賽的三組分別為 1、2、3 組，要使可以找到準確前三名的可能成立，前三名的選手在初賽時需編排在三個不同的組

別。當人數為 $n=3k$(k為整數)的倍數時，每組人數可用 $\frac{n}{3}$ 表示，三位選手分別被編排在三組的所有可能為 6，因此可寫成 $6(\frac{n}{3})^3$；當人數 $n=3k+1$(k為整數)時其中一個組別用 $\frac{n-1}{3}+1$ 表示，另外兩組則以 $\frac{n-1}{3}$ 表示，三位選手分別被編排在三組的所有可能為 6，因此可寫成 $6(\frac{n-1}{3})^2(\frac{n-1}{3}+1)$;當人數 $n=3k+2$(k為整數)時，其中二個組分別用 $\frac{n-2}{3}+1$ 表示，另外一組則以 $\frac{n-2}{3}$ 表示，三位選手分別被編排在三組的所有可能為 6，可寫成 $6(\frac{n-2}{3})(\frac{n-2}{3}+1)^2$。

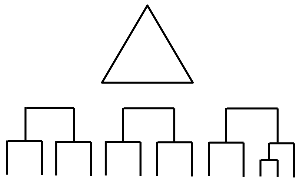
列出所有參賽選手可以被編排的所有可能，依據排列組合，在所有初賽選手位置中任取其中三個(考慮原先預設實力為前三名的選手)，C_3^n，化作式子表示，可得 $n(n-1)(n-2)$。

結合上述所有的推論，$\frac{\text{與實力相符的前三名編排方法}}{\text{所有選手可被編排的方法}}$=與實力相符的前三名機率，可得到三種不同情況下對應到的式子(圖(17)~圖(19))：



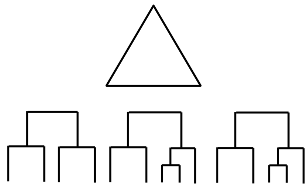
$$\frac{6(\frac{n}{3})^3}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2n^2}{9(n-1)(n-2)}$$

圖(17)



$$\frac{6(\frac{n-1}{3})^2(\frac{n-1}{3}+1)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2(n-1)(n+2)}{9n(n-2)}$$

圖(18)



$$\frac{6(\frac{n-2}{3})(\frac{n-2}{3}+1)^2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2(n+1)^2}{9n(n-1)}$$

圖(19)

性質 4：當參賽者人數眾多，此通式機率趨近於 22%。

證明：

$$f(n)=\frac{6(\frac{n}{3})^3}{n(n-1)(n-2)}$$ ，n 為參賽選手人數。

當 $n=t$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6(\frac{t}{3})^3/t^3}{[t(t-1)(t-2)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{6(\frac{t}{3})^3}{t^3}}{\frac{(t-1)}{t}\times\frac{(t-2)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\times\frac{1}{27}}{(1-\frac{1}{t})(1-\frac{2}{t})}$$

$$=\frac{\frac{2}{9}}{(1-0)(1-0)}=\frac{2}{9}\approx 22\%$$

當 $n=t$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6(\frac{t-1}{3})^2(\frac{t-1}{3}+1)/t^3}{[t(t-1)(t-2)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\frac{(\frac{t-1}{3})^2}{t^2}\frac{(\frac{t-1}{3}+1)}{t}}{\frac{(t-1)}{t}\times\frac{(t-2)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6(\frac{1}{3}-\frac{1}{3t})^2(\frac{1}{3}-\frac{1}{3t}+\frac{1}{t})}{(1-\frac{1}{t})(1-\frac{2}{t})}$$

$$=\frac{6(\frac{1}{3}-0)^2(\frac{1}{3}-0+0)}{(1-0)(1-0)}$$

$$=\frac{2}{9}$$

當 $n=t$ 時，則

$$\lim_{t\to\infty}\frac{6(\frac{t-2}{3})(\frac{t-2}{3}+1)^2/t^3}{[t(t-1)(t-2)]/t^3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6\frac{(\frac{t-2}{3})}{\mathrm{n}}\frac{(\frac{t-2}{3}+1)^2}{t^2}}{\frac{(t-1)}{t}\times\frac{(t-2)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6(\frac{1}{3}-\frac{2}{3t})(\frac{1}{3}-\frac{2}{3t}+\frac{1}{t})^2}{(1-\frac{1}{t})(1-\frac{2}{t})}$$

$$=\frac{6(\frac{1}{3}-0)(\frac{1}{3}-0+0)^2}{(1-0)(1-0)}$$

$$=\frac{2}{9}$$

(2)實力最堅強的三名機率

承圖(15)~圖(17)，若要選出團體中最堅強的三名選手的可能，前三名的選手在初賽時需編排在三個不同的組別，分別成為三個組別的冠軍，當三位選手進入複賽後，三名的選手必定會取得其所對應的名次，此種狀況與準確找出前三名可能的情況相同，因此可將準確找出前三名機率的公式套用到選出團體中最堅強的三名選手機率中。

四、研究結果與討論

(一)單淘汰賽

1.與實力相符前三名機率介於 25%~33%。

2.實力最堅強三名機率介於 37.5%~49%。

(二)雙淘汰賽

1.與實力相符前三名機率介於 75%~80%。

2.實力最堅強三名機率介於 75%~80%。

(三)單循環賽

1.與實力相符前三名機率為 100%。

2.實力最堅強三名機率為 100%。

(四)先循環後淘汰賽

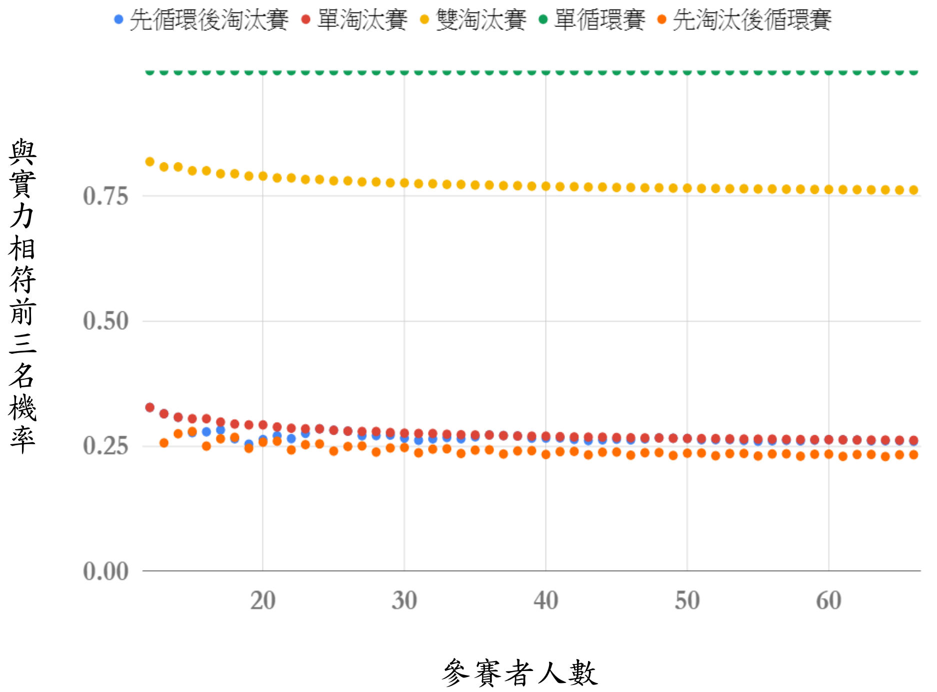
1.與實力相符前三名機率介於 25%~33%。

2.實力最堅強三名機率介於 37.5%~49%。

(五)先淘汰後循環賽

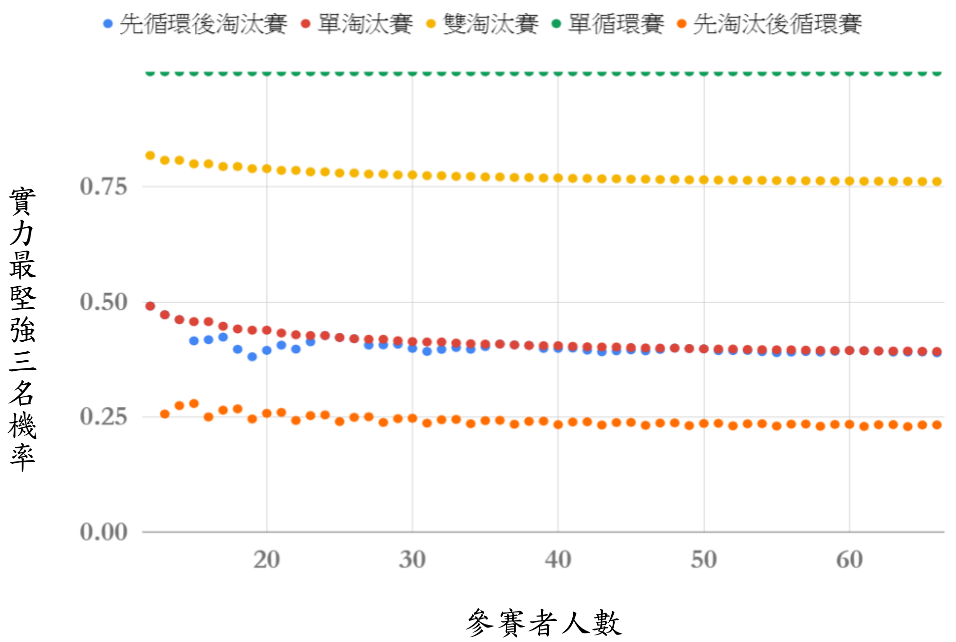
1 與實力相符前三名機率介於 22%~27%。

2 實力最堅強三名機率介於 22%~27%。



圖(20)

綠線是單循環賽的機率，黃線為雙淘汰賽的機率，紅線為單淘汰賽的機率，橘線為先淘汰後循環的機率，藍線為先循環後淘汰賽的機率，x 軸代表參賽人數，y 軸代表能與實力相符的前三名機率。



圖(21)

綠線是單循環賽的機率，黃線為雙淘汰賽的機率，紅線為單淘汰賽的機率，橘線為先淘汰後循環的機率，藍線為先循環後淘汰賽的機率，x 軸代表參賽人數，y 軸代表能與實力相符的前三名機率。

五、結論與應用

(一)結論

1.若只以機率大小作為依據，建議球賽優先採用的賽制為「單循環賽」及「雙淘汰賽」，因為其機率為最高兩名，分別是 100%和 75%~80%。如果考慮現實問題，除非人數極少，否則「單循環賽」需耗費過多資源，因此中和兩種考量因素，「雙淘汰賽」是比較適合被使用的賽程。

2.如果主辦單位資源非常有限，可考慮使用「單淘汰賽」。因為在選最堅強三名的情況下，機率由 25%~33%提升到 37%~49%。

3.混合兩種賽制不能提高公平性。雖然「單循環賽」機率為 100%，但將「單淘汰賽」和「單循環賽」混合，反而會造成機率不升反降。

4.本研究提供賽制穩定性的量化分析。對於「單淘汰賽」、「雙淘汰賽」、「先淘汰後循環賽」、「先循環後淘汰賽」，當參賽人數增加，會導致機率小幅降低，並穩定趨近於定值。

(二)未來展望

考慮到國手選拔或者校內選拔都希望能夠選出實力最強的選手，且因應不同比賽需要找出不同名次的狀況，本研究建立數學模型去計算準確選拔出實力前 n 名的機率，提供給主辦單位做參考，做出有效的選拔，增加選拔出的選手為最頂尖的可能性，因此想研究探討「選出與實力相符前 n 名機率」、「實力最堅強的 n 名機率」，初步研究發現，單淘汰賽取各名次的情況有規律可循，預計將此規律以通式表示，並持續探討其他不同賽程的規律，將各賽程的通式帶入人數加以比較，探討在主辦單位選拔 n 名的情況下，使用何種賽程能夠使選拔出來的選手為最頂尖，最有資格為國家爭光。

六、引註資料

[1] VICTOR 羽球比賽賽制介紹－混合制。2014 年 12 月 14 日，取自 https：//www.victorsport.com.tw/badmintonaz/8504/Tournament-System-Introduction-Mixed-System

[2] VICTOR 羽球比賽賽制介紹－單淘汰。2014 年 11 月 21 日，取自 https：//www.victorsport.com.tw/badmintonaz/8323/Tournament-System-Introduction-Single-Elimination

[3] VICTOR 羽球比賽賽制介紹－雙淘汰賽制。2014 年 12 月 04 日，取自 https：//www.victorsport.com.tw/badmintonaz/8421/Tournament-System-Introduction-Double-Eliminatio

[4] 葛登能（2001）。啊哈！有趣的推理（1）·台北市：天下遠見出版股份有限公司。

[5] 黃國義（1985。運動競賽制度之比較研究·台北市：體育出版社。

【評語】010041

本作品討論運動競賽賽制 (單淘汰賽、單循環賽、雙淘汰賽、循環賽)，或混合賽制是否能經由賽制明確選出(1)前三名為真正實力的前三名、(2)前三名為實力前三名的集合 兩種狀況的機率，利用排列組合與機率的細緻分析，經由代數運算，對於每種賽制與前述兩種目標分別得到能達成的機率，是有意思的結果。然數學結論部分敘述結果不夠精確，問題的本身難度較為不足，是不足之處。本文為理論上的分析，建議可以往建模的方向發展，引入真實的國際賽事程序，比較各種賽制的利弊，供賽事進行的參考，整體作品會更有參考價值。