2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010035**

參展科別　數學

作品名稱　原始畢氏數組數與質數分布關係之探討

就讀學校　國立中興大學附屬高級中學

指導教師　許志農、許庭彰

作者姓名　陳全億

關鍵詞　原始畢氏數、π 函數、Möbius μ 函數

作者簡介

我是陳全億，就讀於國立中興大學附屬高級中等學校數理資優班二年級，在國三時，因緣際會踏入了數學研究之路，從研究原始畢氏數組數逐漸擴展至對於質數分布與黎曼猜想的研究，自那時起，便深深被數論世界的神奇與數學研究得到的成就感吸引，著迷於研究的過程與得到成果的喜悅，無論最後得到了好的成果，抑或只是白忙一場，都樂在其中。這次很榮幸能進入台灣國際科展決賽，未來，我將持續致力於數論方面的研究，享受數學帶來的種種驚喜感。

以下是我的電子郵件:

a0974002542@gmail.com

若是對我的研究有任何疑問或有錯誤的部分，歡迎不吝賜教通知我。

摘要

本研究從原始畢氏數組數函數探討質數在整數間的分布密度，我利用質因數個數、通式、座標軸上面積導出原始畢氏數組數函數(最小數字不大於自變數的原始畢氏數組數，我視(A, B, C)和(B, A, C)為相同的原始畢氏數)，參考其他文獻之後，我得到組數函數可以寫成以下形式:$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x) c \in \mathbb{R}$，此推測將在此研究中進行證明。因此我可以依此計算$\pi$函數近似值，在進行初步計算後，我亦利用差分法算出較為準確的c值，並以此c值估算更為準確的π函數近似值。

Abstract

In this research, I estimate the density of prime numbers in positive integers through Primitive Pythagorean triples array number function. I calculate the value of Primitive Pythagorean triples array number function, defined by the number of Primitive Pythagorean triples with the shortest arm less than or equal to the variable factor, and (A, B, C) and (B, A, C) are considered the same Primitive Pythagorean triples, through several ways, including the number of prime factors, the general formula of Primitive Pythagorean triples, and the area of the correspond area on a coordinate system. After reading some relevant references, I findthat

Primitive Pythagorean triples array number function is probable to be formed in the following format:

$$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

The nature will be proved in this research. Hence, I can estimate pi function through Primitive Pythagorean triples array number function. After thepreliminary estimate is conducted, I calculate the much more accurate value of c through Difference, and use it to get a much more accurate estimate of pi function.

前言

壹、研究動機:

在先前的研究當中，我定義原始畢氏數組數函數$f(x)$為:

$$\#\{(a,b,c) | a^2+b^2=c^2，a,b,c\in\mathbb{N}，\gcd(a,b,c)=1，\min(a,b)\leq x\}$$

計算原始畢氏數組數函數值，並發現其與質數在整數間的分布密度有密切的關係，因此，此次研究中，我將算出更準確的原始畢氏數組數函數值，並透過原始畢氏數組數函數對不大於某數之質數個數(即π函數值)進行估計。

貳、研究問題:

本研究針對以下兩個方向進行探討:

一、透過各種方式計算原始畢氏數組數函數值:

(一)初步原始畢氏數組數函數。

(二)以質因數個數導出之原始畢氏數組數函數。

(三)以通式導出之原始畢氏數組數函數。

(四)計算原始畢氏數組數函數在座標系上的相對應面積。

二、由原始畢氏數組數函數對π函數值進行估計:

(一)初估π函數近似值。

(二)以坐標系上相對應面積導出之c值進行估計:

(三)以差分法估計較準確的π函數近似值。

參、研究設備與器材:

紙、筆、電腦、c++ online compiler、geogebra

研究方法與過程

壹、名詞解釋:

一、原始畢氏數組數函數:

$$\#\{(a,b,c)\big|a^2+b^2=c^2\text{，}a,b,c\in\mathbb{N}\text{，}\gcd(a,b,c)=1\text{，}\min(a,b)\le x\}$$

在此，我視兩股調換為相同的原始畢氏數。

二、ω函數:

$$\omega(x)=\ \#\{a|x\equiv 0(\mathrm{mod}a)\text{，}a\in\mathrm{prime}\}$$

三、Möbius μ函數:

$$\mu(x)=\begin{cases}(-1)^{\omega(x)}\mathrm{if}x\mathrm{issquarefree}\\ 0\quad \mathrm{if}x\text{ is notsquarefree}\end{cases}$$

四、π函數:

$$\pi(x)=\ \#\{a|a\le x\text{，}a\in\mathrm{prime}\}$$

五、高斯符號:

$\lfloor x\rfloor=\{a\big|a\in\mathbb{Z}\text{，}0\le x-a<1\}$，$\lceil x\rceil=\{a\big|a\in\mathbb{Z}\text{，}0\le a-x<1\}$

六、大O符號:

若某正值函數$f(x)$存在某一與x無關之數A使得$|f(x)|\le A\cdot\varphi(x)$($\varphi(x)$為一正值函數），則$f\ll\varphi$，若存在函數g使$f-g\ll\varphi$，記為$f=g+O(\varphi)$。

七、#{ }:

代表某集合內元素個數。

貳、研究過程:

一、透過各種方式計算原始畢氏數組數函數值:

(一)初步原始畢氏數組數函數:

首先，我計算由

對於不小於 3 的奇數k存在 $(k，\frac{k^2-1}{2}，\frac{k^2+1}{2})$為原始畢氏數

對於大於 2 的偶數k存在 $(2k，k^2-1，k^2+1)$為原始畢氏數

兩種尋找畢氏數之方法所導出初步原始畢氏數組數函數$f_1(x)$

(二)以質因數個數導出之原始畢氏數組數函數:

由於上述兩種導出原始畢氏數的方式僅能導出極少部分的原始畢氏數，$f_1(x)$會嚴重低估原始畢氏數組數函數值，因此我以固定股的質因數個數對於原始畢氏數組數函數進行探討。

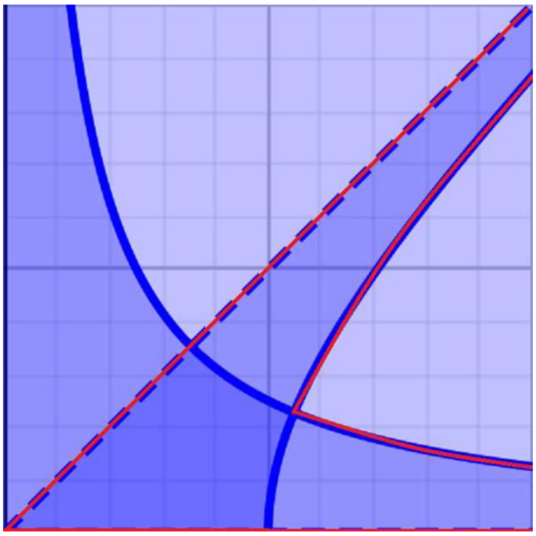
(三)以通式導出之原始畢氏數組數函數:

原始畢氏數存在以下通式:

$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$在m、$n\in\mathbb{N}$，$m>n$，m、n奇偶性不同，$\gcd(m,n)=1$時，可以導出原始畢氏數，因此，原始畢氏數組數函數的值即為符合$\min(m^2-n^2, 2mn)\le x$ 的(m,n)解組數。

(四) 計算原始畢氏數組數函數在座標系上的相對應面積。

我在一篇論文中，發現可以利用座標上格子點數對應原始畢氏數通式，導出原始畢氏數組數函數，原始畢氏數組數函數值即為下圖中格子點個數，為方便計算，我直接計算其面積。



左圖為第一象限，原點位於左下角，橫軸為m、縱軸為n，圖中兩曲線與斜直線皆為無限延伸，與m軸相交的曲線為$m^2-n^2=x$，另一條曲線為$2mn=x$，斜直線為$m=n$，紅線圍出之區塊即為需計算的面積。

二、由原始畢氏數組數函數對π函數值進行估計:

由於原始畢氏數組數函數可寫成$f(x)=c\cdot x\cdot \ln x+O(x)$，$c\in\mathbb{R}$的形式，我將其除以$c\cdot(\ln x)^2$，即可得到$\frac{f(x)}{c\cdot(\ln x)^2}=\frac{x}{\ln x}+\frac{O(x)}{c\cdot(\ln x)^2}$，其值較現今所用的$\pi(x)$近似值大，而$\frac{x}{\ln x}$又較$\pi(x)$實際值小，因此可以導出更為準確的$\pi(x)$近似值。

（一）初估π函數近似值:

由$f(x)=c\cdot x\cdot \ln x+O(x)$可知，$c=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\cdot \ln x}$，因此我將質因數導出之原始畢氏數組數函數的值與$x\cdot \ln x$相除，在數字大時可以導出$c$的近似值，由於質因數導出之原始畢氏數組數函數的值僅能以電腦算至$f(46340)$，以此值對於c和$\pi(x)$值進行計算，為$\pi(x)$近似值的初估。

（二）以差分法估計較準確的π函數近似值:

在以差分法計算出更準確的c值之後，我依此計算出更準確的$\pi(x)$近似值。

研究結果與討論

壹、 研究結果:

一、透過各種方式計算原始畢氏數組數函數值:

(一)初步原始畢氏數組數函數:

【探究過程一】

首先，我計算由

對於不小於 3 的奇數k存在 $(k，\frac{k^2-1}{2}，\frac{k^2+1}{2})$為原始畢氏數

對於大於 2 的偶數k存在 $(2k，k^2-1，k^2+1)$為原始畢氏數

兩種尋找畢氏數之方法所導出之初步原始畢氏數組數函數$f_1(x)$

【定理一】

證明下式成立:

對於不小於 3 的奇數k存在 $(k，\frac{k^2-1}{2}，\frac{k^2+1}{2})$為原始畢氏數

對於大於 2 的偶數k存在 $(2k，k^2-1，k^2+1)$為原始畢氏數

【證明】

由於$k^2+(\frac{k^2-1}{2})^2=\frac{k^4+2k+1}{4}=(k^2+1)^2$， k為不小於 3 的奇數

時，$\frac{k^2-1}{2}$為正整數且$\frac{k^2-1}{2}$，$\frac{k^2+1}{2}$兩者差 1 互質，因此

對於不小於 3 的奇數k存在 $(k，\frac{k^2-1}{2}，\frac{k^2+1}{2})$為原始畢氏數

為原始畢氏數

上式乘 2 得到$(2k，k^2-1，k^2+1)$，k^2-1，k^2+1不可為偶數， k必為偶數，k^2-1，k^2+1兩者為差 2 的奇數互質，因此，

對於大於 2 的偶數k存在 $(2k，k^2-1，k^2+1)$為原始畢氏數

，得證

【定理二】

上述兩種方法導出的原始畢氏數除(3, 4, 5)之外不存在其他重複:

【證明】

明顯可見，在k為大於 1 的奇數時，$k < \frac{k^2-1}{2} < \frac{k^2+1}{2}$，在$k$為大於 2 的偶數時，$2k < k^2 - 1 < k^2 + 1$，因此當兩股調換時，不會重複計算，但當$k = 2$時，$(2k，k^2 - 1，k^2 + 1)$=(4, 3, 5)與$k = 3$時導出的原始畢氏數(3, 4, 5)重複，得證

小結[1]:

對於不小於 3 的奇數k存在 $(k，\frac{k^2-1}{2}，\frac{k^2+1}{2})$為原始畢氏數

對於大於 2 的偶數k存在 $(2k，k^2 - 1，k^2 + 1)$為原始畢氏數

小結[2]:

以上兩種尋找原始畢氏數方式導出初步原始畢氏數組數函數如下:

$$\frac{3x-7}{4} \leq f_1(x) = x - \#\{a | a \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)，0 < a \leq x\} - 2$$

$$= x - \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor - 2 \leq \frac{3x-10}{4}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 1 if\ x\ is\ odd \\ \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 2\ \ if\ x\ is\ even \end{cases}$$

(二)以質因數個數導出之原始畢氏數組數函數:

【探究過程二】

接著，我探討是否所有原始畢氏數皆可由上述兩種型式表示:

【定理三】

上述兩種原始畢氏數的尋找方式無法得到所有原始畢氏數:

【證明】

在找到初步原始畢氏數組數函數之後，我找到了上述兩種形式的例外:(20, 21, 29)，因此得知上述兩種原始畢氏數的尋找方式無法找出所有原始畢氏數，而就原始畢氏數通式的觀點而言，上述兩種原始畢氏數的尋找方式僅侷限於通式$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$當中$n=1$的情況，故無法得到所有原始畢氏數，得證。

小結[3]:

由上述兩種原始畢氏數的尋找方式無法找到所有原始畢氏數。

【探究過程三】

為保證算出所有原始畢氏數，在此我透過質因數個數計算原始畢氏數組數函數，我先固定一股為x，另一股為y，斜邊為z，併計算固定一股為x後可以導出之原始畢氏數組數:

【定理四】

$$\forall x \in \text{odd}，\gcd(z+y, z-y)=1$$

【證明】

$$\because x^2=(z+y)(z-y)，x,y,z \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}\therefore \gcd(z+y, z-y) &= \gcd(x, z+y, z-y)\\ &= \gcd\left(x, \frac{(z+y)-(z-y)}{2}, \frac{(z+y)+(z-y)}{2}\right)\\ &= \gcd(x,y,z)=1\end{aligned}$$

得證

【定理五】

$\forall x \equiv 2 \pmod 4$，無法導出原始畢氏數

【證明】

$$\because \frac{(z+y)-(z-y)}{2} = y, \frac{(z+y)+(z-y)}{2} = z \text{，} x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{，} x^2 = (z+y)(z-y) \equiv 4 \pmod{16}$$

$$\therefore x, z+y, z-y \in \text{even} \text{，} \frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2} \in \text{odd} \text{，} \gcd(x,y,z) = 2$$

(x, y, z)非原始畢氏數，得證。

【定理六】

$\forall x \equiv 0 (\text{mod} 4)$，$z+y$、$z-y$其中一者$\equiv 2 (\text{mod} 4)$而另一者$\equiv 0 (\text{mod} 4)$:

【證明】

$$\because \frac{(z+y)-(z-y)}{2} = y, \frac{(z+y)+(z-y)}{2} = z \text{，} x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{，} x^2 = (z+y)(z-y) \equiv 0 \pmod{16}$$

$$\therefore x, z+y, z-y \in \text{even}$$

$$\because \gcd(x,y,z) = 1$$

$\therefore z+y$、$z-y$其中一者$\equiv 2 (\text{mod} 4)$而另一者$\equiv 0 (\text{mod} 4)$:

得證。

【定理七】

根據$\omega(z+y)$值進行分類，導出的原始畢氏數組數為$C_{\omega(z+y)-1}^{\omega(x)-1}$，

固定一股為x時，可導出$2^{\omega(x)-1}$組原始畢氏數。

【證明】

在經過計算後，我發現根據$\omega(z+y)$值進行分類，導出的原始畢氏數組數為$C_{\omega(z+y)-1}^{\omega(x)-1}$。

以下我以數學歸納法對此進行證明:

1、 x為奇數時:

x^2=$p_1{}^{2a_1}\times p_2{}^{2a_2}\times p_3{}^{2a_3}\ldots\times p_k{}^{2a_k}$=$(z+y)(z-y)$

根據【定理四】證明，此時集合$\{p_b{}^{2a_b}|b\in N^+,1\le b\le k\}$當中一個元素只能選擇置於$z+y$或$z-y$其中一個，$x$所導出的原始畢氏數組數即為$z+y>z-y$時數字擺放方法的數量

當x=$p_1{}^{a_1}$時:

x^2=$(z+y)(z-y)$=$p_1{}^{2a_1}$，此時$z+y=p_1{}^{2a_1},z-y=1$

當x=$p_1{}^{a_1}$且$\omega(z+y)=1$時，導出 1=C_0^0組原始畢氏數

假設x由k個元素相乘組成時，當$z+y$為k個元素相乘、$k-1$個元素相乘、$k-2$個元素相乘……1 個元素時，導出原始畢氏數組數分別為C_0^{k-1}、C_1^{k-1}、C_2^{k-1}、……C_{k-1}^{k-1}，證明當x由$k+1$個元素相乘組成時，當$z+y$為$k+1$個元素相乘、k個元素相乘、$k-1$個元素相乘……1 個元素時，導出原始畢氏數組數分別為C_0^k、C_1^k、C_2^k……C_k^k:

假設當x為$k+1$個元素相乘時較x為k個元素相乘時多乘了一個元素 A

則以上導出之所有原始畢氏數之$z+y$乘 A 或導出之所有原始畢氏數之$z-y$乘 A 皆可導出新的原始畢氏數，故當$z+y$為$k+1$個元素相乘、k個元素相乘、$k-1$個元素相乘……1 個元素時，導出原始畢氏數組數分別為C_0^k 、C_1^k 、C_2^k……C_k^k:

得證

2、 x為 4 的倍數時:

x^2=$2^{2a_0} \times {p_1}^{2a_1} \times {p_2}^{2a_2} \times {p_3}^{2a_3} \ldots \times {p_k}^{2a_k}$=$(z+y)(z-y)$

根據【定理六】證明，此時集合$\{p^{2a_b} | b \in N, 0 \le b \le k\}$當中除了$2^{2a_0}$之外一個元素只能選擇置於$z+y$和$z-y$其中一個，且$z+y$和$z-y$其中一個$\equiv 2(\mathrm{mod}4)$，另一個$\equiv 0(\mathrm{mod}4)$，原始畢氏數組數即為$z+y > z-y$時數字擺放方法的數量。

當x=2^{a_0}時:

$x^2=(z+y)(\ z-y)$=2^{2a_0}，此時$z+y=2^{2a_0-1}, z-y=2$

當x=2^{a_0}且$\omega(z+y)=1$時導出 1=C_0^0組原始畢氏數

假設x由k個元素相乘組成時，$z+y$為k個元素相乘、$k-1$個元素相乘、$k-2$個元素相乘……1 個元素相乘時，所對應的原始畢氏數組數分別為C_0^{k-1} 、C_1^{k-1} 、C_2^{k-1}……C_{k-1}^{k-1} ，證明當x由$k+1$個元素相乘組成時，當$z+y$為$k+1$個元素相乘、k個元素相乘、$k-1$個元素相乘……1 個元素時，所對應的原始畢氏數組數分別為C_0^k 、C_1^k 、C_2^k……C_k^k。

假設當x為$k+1$個元素相乘時較x為 k 個元素相乘時多乘了一個元素 A

則以上導出之所有原始畢氏數之$z+y$乘 A 或導出之所有原始畢氏數之$z-y$乘 A 皆可導出新的原始畢氏數，故當$z+y$為$k+1$個元素相乘、k個元素相乘、$k-1$個元素相乘……1 個元素時，導出原始畢氏數組數分別為C_0^k、C_1^k、C_2^k……C_k^k:

得證

由以上可以證明 4 的倍數x由k個元素相乘組成時，當$z+y$為k個元素相乘、$k-1$個元素相乘、$k-2$個元素相乘……1 個元素相乘時，所對應的原始畢氏數組數分別為C_0^{k-1}、C_1^{k-1}、C_2^{k-1}……C_{k-1}^{k-1}

因此固定一股為x之時可導出的原始畢氏數組數為

$C_0^{\omega(x)-1}+C_1^{\omega(x)-1}+C_2^{\omega(x)-1}\ldots\ldots+C_{\omega(x)-1}^{\omega(x)-1}=2^{\omega(x)-1}$組，得證。

【定理八】

由【定理七】的結果寫出之原始畢氏數組數函數上界如下:

$$f_U(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}2^{\omega(2n+1)-1}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-1} & if x\ is\ odd\\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\frac{x}{2}}2^{\omega(2n-1)-1}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-1} & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

【證明】

由【定理七】的結果可以$\forall k \equiv 1 or 3 or 4 \pmod 4$，可導出$2^{\omega(k)-1}$組原始畢氏數，而將一股固定為 1、2、3⋯$x$，再分別算出導出之原始畢氏數組數，最後再將其加總即可得到原始畢氏數組數函數

固定股為不大於x的奇數所導出之原始畢氏數組數函數如下:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} 2^{\omega(2n+1)-1} & if x\ is\ odd \\ \sum_{n=2}^{\frac{x}{2}} 2^{\omega(2n-1)-1} & if\ x\ is\ even \end{cases}$$

固定股為不大於x的 4 之倍數所導出之原始畢氏數組數函數如下:

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor} 2^{\omega(4k)-1}$$

原始畢氏數組數函數上界如下:

$$f_U(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} 2^{\omega(2n+1)-1} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor} 2^{\omega(4k)-1} & if x\ is\ odd \\ \sum_{n=2}^{\frac{x}{2}} 2^{\omega(2n-1)-1} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor} 2^{\omega(4k)-1} & if\ x\ is\ even \end{cases}$$

得證

小結[4]:

當固定一股為k時，所導出之原始畢氏數組數為$2^{\omega(k)-1}$組，根據$\omega(z+y)$值進行分類，導出之原始畢氏數組數為$C_{\omega(z+y)-1}^{\omega(k)-1}$組。

小結[5]:

由質因數探討得到之原始畢氏數組數函數上界為:

$$f_U(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}2^{\omega(2n+1)-1}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-1} & if x\ is\ odd\\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\frac{x}{2}}2^{\omega(2n-1)-1}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-1} & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

【探究過程四】

質因數個數得到之原始畢氏數組數函數上下界與程式計算出之實際值三者進行比較:

【定理九】

由質因數個數計算之原始畢氏數組數函數下界探討:

【證明】

本篇研究當中，我視兩股調換為相同的原始畢氏數，但原始畢氏數組數函數上界將某些兩組調換的狀況視為兩組，例如:固定股為 3 時，導出 1 組原始畢氏數(3, 4. 5)，固定股為 4 時，導出 1 組原始畢氏數(4, 3, 5)，兩者是相同的原始畢氏數，但卻將其重複計算為兩組，因此我在假設所有原始畢氏數接重複計算之下，將上界除 2，得到原始畢氏數組數函數下界如下:

$$f_L(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}2^{\omega(2n+1)-2}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-2} & if x\ is\ odd\\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\frac{x}{2}}2^{\omega(2n-1)-2}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-2} & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

並且，我可以由參考文獻二的結果得到:

$$f(x) \approx f_U(x) - \#\{(A,B,C) \middle| A^2+B^2=C^2，A,B,C \in \mathbb{Z}^+，\gcd(A,B,C)=1，A,B \le x\}$$

$$= f_U(x) - \#\{(A,B,C) \middle| A^2+B^2=C^2，A,B,C \in \mathbb{Z}^+，\gcd(A,B,C)=1，A,B < x+1\}$$

$$= f_U(x) - 2\ln(1+\sqrt{2})x \cdot \pi^{-2} - 2\ln(1+\sqrt{2}) \cdot \pi^{-2} - O(\sqrt{x})$$

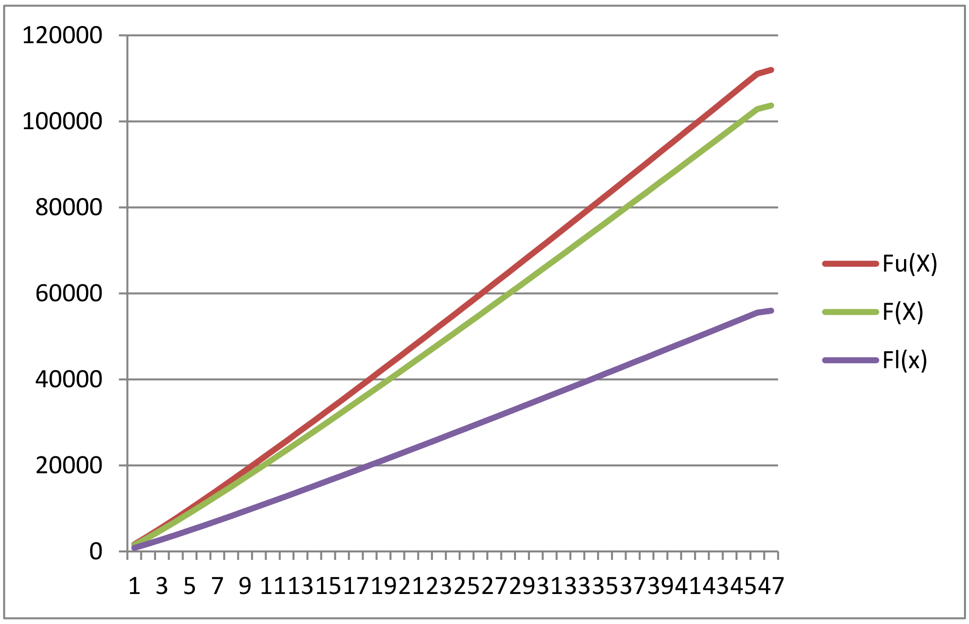
【定理十】

將質因數計算出之原始畢氏數組數函數上下界與程式計算出之實際值三者進行比較:

【證明】

在程式當中我加入了固定股必須是原始畢氏數中最小數的條件，確保不會重複計算，再將其計算結果與質因數計算出之原始畢氏數組數函數上下界進行比較後結果如下

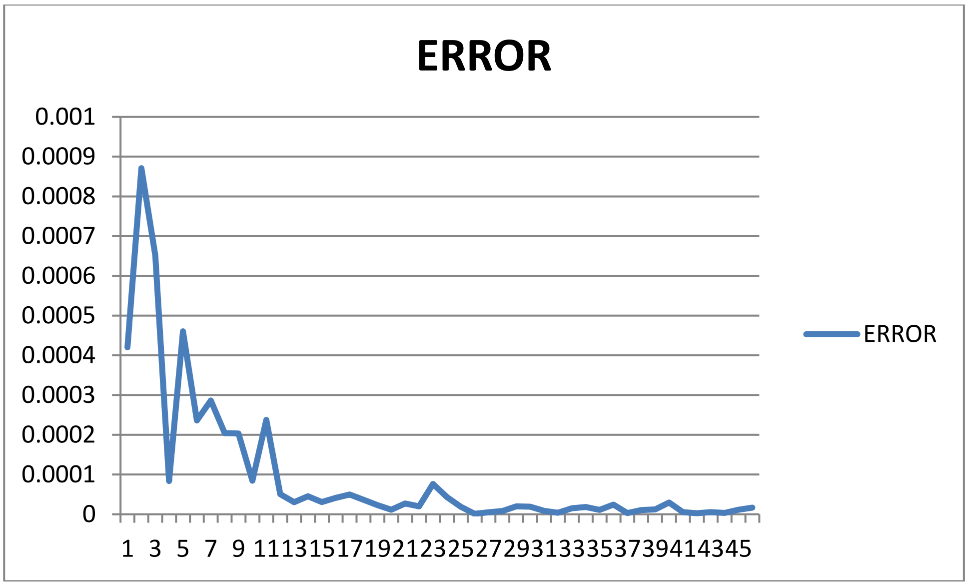
(橫軸x單位為千，縱軸誤差單位為%):



$f_U(x) - 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)x \cdot \pi^{-2} - 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \pi^{-2} - O\left(\sqrt{x}\right)$誤差百分率

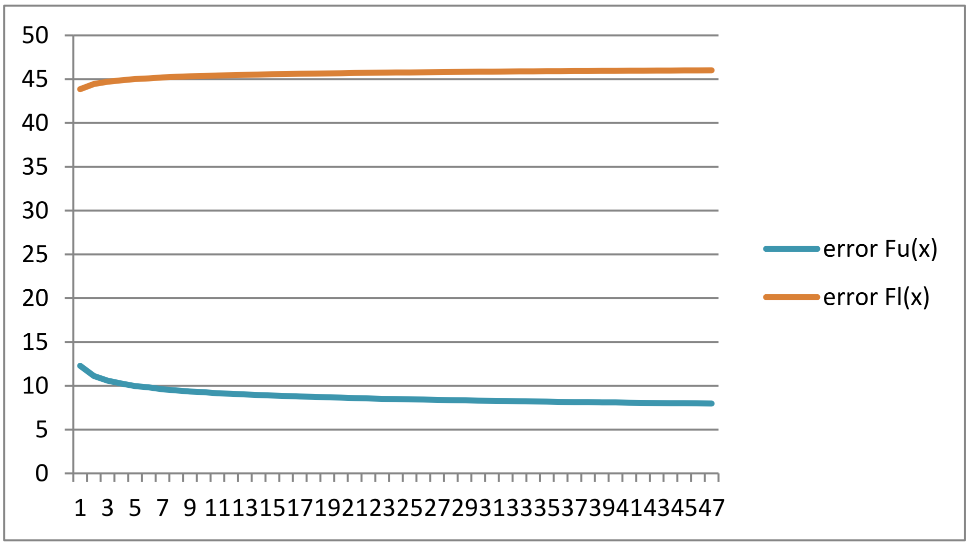
如下:

(橫軸x單位為千，縱軸誤差單位為%):



原始畢氏數組數函數上下界誤差百分率如下

(橫軸x單位為千，縱軸誤差單位為%):



由此可知當x值逐漸上升時，上界誤差百分比越來越小，可寫成

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f_U(x)} = 1$$

得證

小結[6]:

由質因數計算之原始畢氏數組數函數下界如下:

$$f_L(x)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}2^{\omega(2n+1)-2}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-2} & if x\ is\ odd\\ \sum_{n=2}^{\frac{x}{2}}2^{\omega(2n-1)-2}+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}2^{\omega(4k)-2} & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

小結[7]:

$$f(x)\approx f_U(x)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x})$$

小結[8]:

當x值逐漸上升時，上界誤差百分比會越來越小，可寫成:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f_U(x)}=1$$

【探究過程五】

將原始畢氏數組數函數以Möbius μ函數表示:

【定理十】

以Möbius μ函數對質因數計算出之原始畢氏數組數函數上下界進行改寫後如下:

$$f_U(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|\right) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|\right) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

$$f_L(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|\right) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|\right) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

【證明】

１、若Ａ、Ｂ質因數次方皆為１，則$|\mu(\mathrm{A})|=|\mu(\mathrm{B})|=1$，由於Ａ、Ｂ互質，ＡＢ質因數次方皆為１，因此$|\mu(\mathrm{AB})|=|\mu(\mathrm{A})||\mu(\mathrm{B})|=1$

２、若Ａ、Ｂ質因數次方並非皆為１，則$|\mu(\mathrm{A})|$和$|\mu(\mathrm{B})|$至少一者為0，而ＡＢ質因數次方並非皆為１，因此$|\mu(\mathrm{AB})|=|\mu(\mathrm{A})||\mu(\mathrm{B})|=0$

由上得知Möbius μ函數為可積函數。

令$n = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \ldots \times {p_k}^{a_k}$

$$2^{\omega(n)} = (1+|\mu(p_1)|+|\mu({p_1}^2)|+|\mu({p_1}^3)| \cdots + |\mu({p_1}^{a_1})|)$$

$$(1+|\mu(p_2)|+|\mu({p_2}^2)|+|\mu({p_2}^3)| \cdots + |\mu({p_2}^{a_2})|)$$

$$(1+|\mu(p_3)|+|\mu({p_3}^2)|+|\mu({p_3}^3)| \cdots + |\mu({p_3}^{a_3})|)$$

$$\vdots$$

$$(1+|\mu(p_k)|+|\mu({p_k}^2)|+|\mu({p_k}^3)| \cdots + |\mu({p_k}^{a_k})|)$$

$$= \sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$$

由上可得到ω函數與Möbius μ函數的關係式如下:

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$$

我依此對於質因數算出之原始畢氏數組數函數的上下界進行改寫，結果如下所示:

$$f_U(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{x}{4}\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{x}{4}\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

$$f_L(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{x}{4}\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{x}{4}\rfloor}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

再根據以下關係式:

$$f(x)\approx f_U(x)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x})$$

我得知:

$$f(x)\approx\begin{cases}\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{[\frac{x}{4}]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x}) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{[\frac{x}{4}]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x}) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

小結[9]:

質因數計算出之原始畢氏數組數函數以Möbius μ函數表示為:

$$f_U(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{[\frac{x}{4}]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if x\ is\ odd\\ \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{[\frac{x}{4}]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|) & if\ x\ is\ even\end{cases}$$

$$f_L(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{4}\right]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)\ if x\ is\ odd\\ \frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{4}\right]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)\quad if\ x\ is\ even\end{cases}$$

小結[10]:

$$f(x)\approx\begin{cases}\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n+1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{4}\right]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x})\quad if x\ is\ odd\\ \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}}\sum_{d_1|2n-1}|\mu(d_1)|+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{4}\right]}\sum_{d_2|4k}|\mu(d_2)|)-2\ln(1+\sqrt{2})x\cdot\pi^{-2}-2\ln(1+\sqrt{2})\cdot\pi^{-2}-O(\sqrt{x})\quad if\ x\ is\ even\end{cases}$$

(四)以通式導出之原始畢氏數組數函數:

【探究過程六】

以原始畢氏數的通式計算原始畢氏數組數函數:

原始畢氏數存在一通式$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$,在m、$n\in\mathbb{N}$,$m>n$,m,n coprime,m、n奇偶性不同的前提之下,可以導出原始畢氏數

在此,我假設原始畢氏數數函數之自變數為x

我令$m=n+k$,在k為與n互質的奇數之下,會符合上述條件,因此我將上述之原始畢氏數通式改寫為:

$$(2nk+k^2,2n^2+2nk,2n^2+2nk+k^2)$$

,在n、$k\in\mathbb{N}$,n、k coprime,$k\in$ odd之下可以導出原始畢氏數

則原始畢氏數組數函數即為符合$\min(2nk+k^2,2n^2+2nk)\leq x$之$(n,k)$解的組數,而我計算原始畢氏數組數函數的方法,即令

$k=1$、3、5 ...，分別計算(n,k)解的組數，再將其加總。

【定理十一】

給定原始畢氏數組數函數自變數為x時，在所有 (n,k)解當中，k之最大值為$\begin{cases} \left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor & if x \equiv 0 or 1 \pmod 4 \\ \left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor - 1 & if x \equiv 2 or 3 \pmod 4 \end{cases}$

【證明】

為求出k的最大值，我先令$n=1$，則此時原始畢氏數通式變為$(2k+k^2, 2+2k, 2+2k+k^2)$，當k為奇數之下可導出原始畢氏數。

當$2k+k^2 \leq x$ 時，k的最大解為$\left\lfloor \sqrt{x+1}-1 \right\rfloor$

當$2+2k \leq x$ 時，k的最大解為$\left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor$

顯然的，在$x > 3$之下$\left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \sqrt{x+1}-1 \right\rfloor$，而本研究注重於$x$較大時原始畢氏數組數函數的值，故$k$的最大值為$\left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor$，由於$k$為奇數，因此$k$的最大值為:

$\begin{cases} \left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor & if x \equiv 0 or 1 \pmod 4 \\ \left\lfloor \frac{x-2}{2} \right\rfloor - 1 & if x \equiv 2 or 3 \pmod 4 \end{cases}$ 得證

【定理十二】

由通式導出之原始畢氏數組數函數為:

$$f_G(x) = \sum_{\substack{k \in odd \\ \sqrt{(\sqrt{2}-1)x} \geq k \geq 1}} \left\lfloor \left\lfloor \frac{x-k^2}{2k} \right\rfloor \cdot \prod_{\substack{p|k \\ p \in prime}} \frac{p-1}{p} \right\rfloor + \sum_{\substack{k \in odd \\ \frac{x}{2}-1 \geq k \geq \sqrt{(\sqrt{2}-1)x}}} \left\lfloor \left\lfloor \frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2} \right\rfloor \cdot \prod_{\substack{p|k \\ p \in prime}} \frac{p-1}{p} \right\rfloor$$

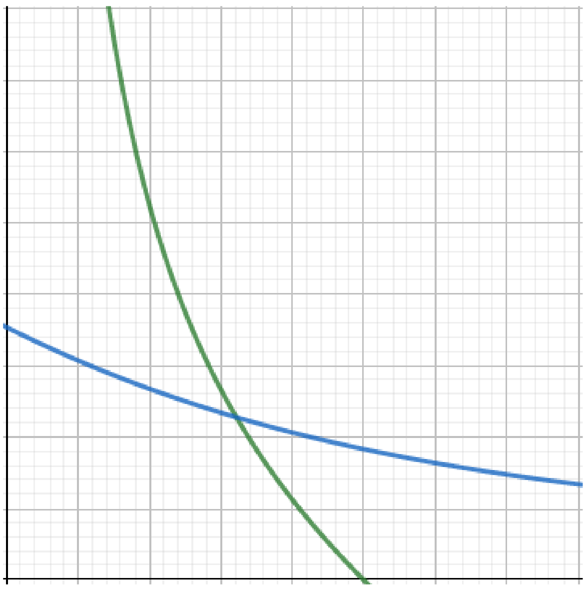
【證明】

當$2nk+k^2\leq x$時，n的解為$1\leq n\leq\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor$，由於$n$、$k$互質，導出之原始畢氏數組數如下所示：

$$\left\lfloor\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\p\in\text{prime}}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$

當$2n^2+2nk\leq x$時，n的解為$1\leq n\leq\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor$，由於$n$、$k$互質，導出之原始畢氏數組數如下所示：

$$\left\lfloor\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\p\in\text{prime}}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$



左圖當中：
橫軸為k、縱軸為n(第一象限)
藍色曲線之方程式為：

$$n=\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}$$

綠色曲線方程式為：

$$n=\frac{x-k^2}{2k}$$

上圖當中，藍綠曲線交叉點之k座標為以下方程式之解：

$$\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}=\frac{x-k^2}{2k}$$

解得$k=\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}$，得知:

$$\max\left(\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor\right)$$

$$=\begin{cases}\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor & if\ \sqrt{(\sqrt{2}-1)x}\geq k\geq 0\\ \left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor & if\ \ k\geq\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}\end{cases}$$

藍綠曲線交叉點之k座標為:

$$\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1)x},\frac{-\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}+\sqrt{(\sqrt{2}+1)x}}{2}\right)$$

$$\because\forall x>2+2\sqrt{2}\ \frac{-\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}+\sqrt{(\sqrt{2}+1)x}}{2}>1$$

$$\therefore\forall x>2+2\sqrt{2}\ \left\lfloor\frac{x-2}{2}\right\rfloor>\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}>\left\lfloor\sqrt{x+1}-1\right\rfloor$$

因此，我得到由通式推導出之原始畢氏數組數函數為:

$$f_G(x)=\sum_{\substack{k\in odd\\ \frac{x}{2}-1\geq k\geq 1}}\left\lfloor\left\lfloor\max\left(\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2},\frac{x-k^2}{2k}\right)\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$

$$=\sum_{\substack{k\in odd\\ \frac{x}{2}-1\geq k\geq 1}}\left\lfloor\max\left(\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor\right)\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$

$$=\sum_{\substack{k\in odd\\ \sqrt{(\sqrt{2}-1)x}\geq k\geq 1}}\left\lfloor\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor+\sum_{\substack{k\in odd\\ \frac{x}{2}-1\geq k\geq\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}}}\left\lfloor\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$

得證

小結[11]:由通式推導出之原始畢氏數組數函數為:

$$f_G(x)=\sum_{\substack{k\in odd\\ \sqrt{(\sqrt{2}-1)x}\geq k\geq 1}}\left\lfloor\left\lfloor\frac{x-k^2}{2k}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor+\sum_{\substack{k\in odd\\ \frac{x}{2}-1\geq k\geq\sqrt{(\sqrt{2}-1)x}}}\left\lfloor\left\lfloor\frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2}\right\rfloor\cdot\prod_{\substack{p|k\\ p\in prime}}\frac{p-1}{p}\right\rfloor$$

(四)計算原始畢氏數組數函數在座標系上的相對應面積

【探究過程七】

以座標上面積導出原始畢氏數組數函數:

在參考文獻二$<PythagoreanTrianglesLegsLessthanN>$當中,將座標的橫軸定為$m$、縱軸定為$n$,以其代表原始畢氏數通式$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$當中的$m$、$n$

利用了計算座標上的面積估算出

$$\#\{(A,B,C)|A,B,C\in\mathbb{N},A^2+B^2=C^2,A,B\leq x\}$$

因此,我也以座標上的面積估算

$$\#\{(A,B,C)|A,B,C\in\mathbb{N},A^2+B^2=C^2,\min(A,B)\leq x\}$$

以下,我定義畢氏數組數函數為

$$F(x)=\#\{(m,n)|m,n\in\mathbb{N},\gcd(m,n)=1,\min(m^2-n^2,2mn)\leq x\}$$

$$F_1(x)=\#\{(m,n)|m,n\in\mathbb{N},m>n,\min(m^2-n^2,2mn)\leq x\}$$

輔助計算。

先前,我定義原始畢氏數組數函數$f(x)$如下:

$$\#\{(m,n)|m,n\in\mathbb{N},\gcd(m,n)=1,\min(m^2-n^2,2mn)\leq x,opposite\ parity\}$$

【定理十四】

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot F(\frac{x}{2^k})$$

【證明】

此時，我重新定義$f(x)$如下:

$\#\{(m,n)\big| m,n \in \mathbb{N}$，$m > n$，$\gcd(m,n) = 1$，$\min(m^2 - n^2, 2mn) \leq x$，opposite parity$\}$

對於所有的符合$F(x)$條件的(m,n)，分為兩類:

奇偶性不同:亦符合$f(x)$條件，共$f(x)$個。

奇偶性相同:不符合$f(x)$條件，共$F(x) - f(x)$個

然而，在奇偶性相同之中，由於$\gcd(m,n) = 1$，因此

$\gcd(m^2 - n^2, 2mn) = 2$，除以 2 之後符合$f\left(\frac{x}{2}\right)$的條件，共有$f\left(\frac{x}{2}\right)$個。

因此，我得到: $F(x) = f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right)$並進一步得知:

$$f(x) = F(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2^2}\right) \dots$$
$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot F\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

得證。

【定理十五】

$$F_1(x) = \sum_{x \geq k \geq 1} F\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$F(x) = \sum_{x \geq k \geq 1} \mu(k) \cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$(x \in \mathbb{R})$$

【證明】

此處，我再導入一函數$F_1(x)$，其定義如下:

$F_1(x) = \#\{(m,n)\big| m,n \in \mathbb{N}，m > n，\min(m^2-n^2, 2mn) \leq x\}$

首先，顯而易見的，$\forall x < 1$，$F_1(x) = 0$

對於所有的符合$F_1(x)$條件的(m,n)，分為兩類:

$\gcd(m,n) = 1$:亦符合$F(x)$條件，共$F(x)$個。

$\gcd(m,n) \neq 1$:不符合$F(x)$條件，共$F_1(x) - F(x)$個。

若$\gcd(m,n) \neq 1$，我令$\gcd(m,n) = k$，其數量與$\left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}\right)$相同，且

$\gcd\left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}\right) = 1$，符合$F\left(\frac{x}{k}\right)$條件，共$F\left(\frac{x}{k}\right)$個。

$\because$當x不大於 1 時不存在正整數點

$$\therefore \forall x \leq 1 F(x) = F_1(x) = 0$$

因此我得到以下式子:

$$F_1(x) = \sum_{x \geq k \geq 1} F\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{k}\right)$$

根據Möbius轉換可知:

$$F(x) = \sum_{x \geq k \geq 1} \mu(k) \cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)$$

得證

【定理十六】

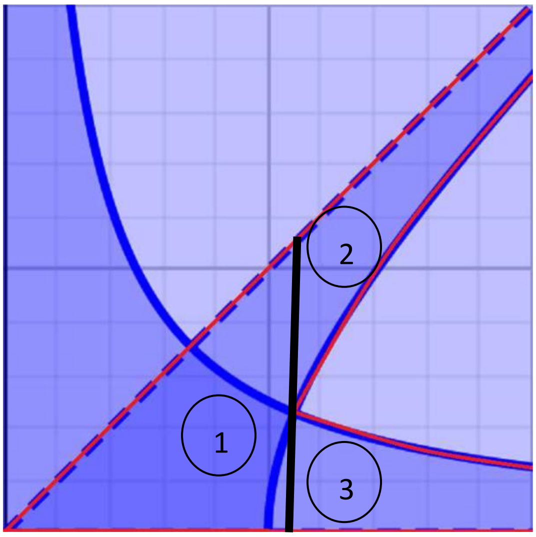
$$F_1(x) \approx F_{area}(x) = \frac{2x+1+2x\cdot\ln\left(\frac{x}{2+\sqrt{2}}\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x\cdot \ln x + \frac{\left(2-2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right)x+1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}x\cdot \ln x + O(x)$$

【證明】

我將$F_1(x)$之條件呈現於座標上如下紅色圍出之區域，此區域中的格子點數即為$F_1(x)$之值，此時，我定義$F_{area}(x)$為紅色區域之面積，$F_1(x) \approx F_{area}(x)$



左圖為第一象限，原點位於左下角，橫軸為m、縱軸為n，圖中兩曲線與斜直線皆為無限延伸，與m軸相交的曲線為$m^2-n^2=x$，與n軸相交的曲線為$2mn=x$，斜直線為$m=n$，紅線圍出之區塊即為需計算的面積。

以上，我將圖分為三個部分並分別對其面積進行計算:

1:$m^2-n^2=x$與$2mn=x$兩線交點之m_0座標:

$$n_0 = \frac{x}{2m_0} = \sqrt{{m_0}^2 - x}$$

$$\frac{x^2}{4{m_0}^2} = {m_0}^2 - x$$

$$4{m_0}^4 - 4x{m_0}^2 - x^2 = 0$$

$$m_0{}^2 = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 16x^2}}{8} = \frac{4x + \sqrt{16x^2 + 16x^2}}{8} (m_0{}^2 > 0)$$

$$= \frac{x + x\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}}$$

三角形面積為:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}}\right)^2}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})x}{4}$$

2:對於$m > m_1$不存在正整數點:

$$\sqrt{m_1{}^2 - x} = m_1 - 1$$

$$m_1{}^2 - x = m_1{}^2 - 2m_1 + 1$$

$$x = 2m_1 - 1$$

$$m_1 = \frac{x+1}{2}$$

面積為:

$$\int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}} m - \sqrt{m^2 - x}\,dm$$

$$= \left(\frac{m^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}}\right) - \int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}} \sqrt{m^2 - x}\,dm$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{4} - \frac{(1+\sqrt{2})x}{2}\right) - \int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}} \sqrt{m^2 - x}\,dm$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - (2+2\sqrt{2})x}{8} - \int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}} \sqrt{m^2 - x}\,dm$$

$$=\frac{x^2-2\sqrt{2}x+1}{8}-\int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}}\sqrt{m^2-x}dm$$

$$=\frac{x^2-2\sqrt{2}x+1}{8}-\int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}}\sqrt{m^2-x}dm$$

$$\int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}}\sqrt{m^2-x}dm=$$

$$\frac{1}{2}\left(m\sqrt{m^2-x}-x\cdot\ln\left(m+\sqrt{m^2-x}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x+1}{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{4}\right)\sqrt{\frac{x^2+2x+1-4x}{4}}-\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+2x+1-4x}{4}}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x-x}$$

$$+\frac{x}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x-x}\right)$$

$$=\frac{x^2-1}{8}-\frac{x}{2}\ln(x)-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}x}{4}+\frac{x}{4}\ln\left(\left(\sqrt{2\sqrt{2}}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2-(\ln\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2+\sqrt{2}})x-1-2x\ln x}{8}$$

$$\frac{x^2-2\sqrt{2}x+1}{8}-\frac{x^2-(\ln\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2+\sqrt{2}})x-1-2x\ln x}{8}$$

$$=\frac{\left(\ln\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2+\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\right)x+2+2x\ln x}{8}$$

3:對於$m > m_2$不存在正整數點:

$$\frac{x}{2m_2} = 1 \quad m_2 = \frac{x}{2}$$

面積為:

$$\int_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}}^{\frac{x}{2}} \frac{x}{2m} dm = \frac{x}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}x}\right)\right)$$

$$= \frac{x}{2} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{x}{2+2\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{x}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{2+2\sqrt{2}}\right)$$

加總得到

$$F_1(x) \approx F_{area}(x) = \frac{2x + 1 + 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2+\sqrt{2}}\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln x + \frac{\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{12+8\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 3\right)}{8} x + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \ln x + O(x)$$

得證

【定理十七】

$$F(x) = \frac{3}{\pi^2} x \cdot \ln x + O(x)$$

【證明】

由上可知:

$$F(x)=\sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)\cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\forall x=t^2$$

$$A=\frac{\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{12+8\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2+\sqrt{2}}+3\right)}{8}$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\cdot F_2\left(\frac{t}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\cdot\left(\frac{t^2}{k^2}\ln\frac{t}{k}+\frac{At^2}{k^2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=(t^2\ln t+At^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}+t^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)$$

$$=(t^2\ln t+At^2)\cdot\zeta(2)+t^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)$$

$$=\frac{6\left(x\ln\sqrt{x}+Ax\right)}{\pi^2}+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+\frac{1}{4}\sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)$$

$$=\frac{3}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{6Ax}{\pi^2}+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+\frac{1}{4}\sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)$$

$$\because\sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)=O(\sqrt{x})$$

$$\because\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}=1$$

$$\therefore\frac{3}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{6Ax}{\pi^2}-x+O(\sqrt{x})<F(x)<\frac{3}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{6Ax}{\pi^2}+x+O(\sqrt{x})$$

$$F(x)=\frac{3}{\pi^2}x\cdot\ln x+O(x)\text{得證}$$

【定理十八】

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+O(x)$$

【證明】

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot F\left(\frac{x}{2^k}\right)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\left(\frac{3}{2^k\pi^2}x\cdot\ln\frac{x}{2^k}+O\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

$$=\frac{3x\cdot\ln x}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^k-\frac{3x\cdot\ln 2}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot O\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$\because\sum_{k\geq 0}k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{2}{9},\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot O\left(\frac{1}{2^k}\right)\text{之值收斂}$$

$$\therefore-\frac{3x\cdot\ln 2}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot O\left(\frac{x}{2^k}\right)=O(x)$$

則$f(x)$之值如下:

$$f(x)=\frac{3x\cdot\ln x}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^k+O(x)=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+O(x)$$

得證

小結[12]:

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot F\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

小結[13]:

$$F_1(x)=\sum_{x\geq k\geq 1}F\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}F\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$F(x)=\sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)\cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\cdot F_1\left(\frac{x}{k}\right)$$

小結[14]:

$$F_1(x) \approx F_{area}(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln x + \frac{\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{12+8\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 3\right)}{8} x + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \ln x + O(x)$$

小結[15]:

$$F(x) = \frac{3}{\pi^2} x \cdot \ln x + O(x)$$

小結[16]:

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} x \cdot \ln x + O(x)$$

【探究過程八】

對於面積與整數點個數之差進行扣除，並寫出更準確的原始畢氏數組數函數。

【定理十九】

面積與整數點個數之差$= \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4} \pm 1$

【證明】

首先，明顯的，上述兩次函數間的變換皆具有可加性，因此，以下我計算出面積與整數點個數之差，只須先行轉換之後再扣除即可。

在此，我以整數點左下方的單位正方形代表該一整數點進行計數:

圖形中會導致面積和整數點個數的差值:

$m = n$左側:

$m=n$左側多算之面積皆為股為 1 之等腰直角三角形，由於計算

面積時，只積分至$m=\frac{x}{2}$，再計算前後差距之誤差(1 個三角形)，

多算之面積為:$\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\pm\frac{1}{2}=\frac{x}{4}\pm\frac{1}{2}$。

$2mn=x$上方:

多計算面積為$\frac{x}{2m}-\left\lfloor\frac{x}{2m}\right\rfloor$，因此我視其為多個底為 1 的三角形面積，由於計算面積時，只積分至$m=\frac{x}{2}$，再計算前後差距之誤差(1 個三角形)，多算之面積為:$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}}\right)\pm\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4}\pm\frac{1}{2}$。

面積與整數點個數之差即為: $\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4}\pm 1$。

【定理二十】

$$f_{area}(x)-f(x)=\frac{30x}{\pi^4}-\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}+O(\sqrt{x})$$

【證明】

經由以上的計算，面積與整數點個數的差值如下:

$$\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4}\pm 1$$

此差值必須經過兩次函數變換，在將面積導出之原始畢氏數組數函數減去其差值，才能得到修正過後的原始畢氏數組數函數值。

第一次函數變換:

$$\forall t^4 = x$$

$$\frac{t^4}{2} - \frac{t^2\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)}}{4} \pm 1$$

$$\sum_{k\geq 1}\mu(k)\cdot\left(\frac{t^4}{2k^4} - \frac{t^2\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)}}{4k^2} \pm 1\right)$$

$$= \frac{t^4}{2}\sum_{k\geq 1}\mu(k)\cdot\left(\frac{1}{k^4}\right) - \frac{t^2\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)}}{4}\sum_{k\geq 1}\mu(k)\cdot\left(\frac{1}{k^2}\right) \pm \sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)$$

$$= \frac{t^4}{2}\cdot\frac{1}{\zeta(4)} - \frac{t^2\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)}}{4}\cdot\frac{1}{\zeta(2)} \pm \sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)$$

$$= \frac{t^4}{2}\cdot\frac{90}{\pi^4} - \frac{t^2\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)}}{4}\cdot\frac{6}{\pi^2} \pm \sum_{x\geq k\geq 1}\mu(k)$$

$$= \frac{45x}{\pi^4} - \frac{3\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)x}}{2\pi^2} + O\left(\sqrt{x}\right)$$

第二次函數變換:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\left(\frac{45x}{2^k\pi^4} - \frac{3\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)\frac{x}{2^k}}}{2\pi^2} + O\left(\sqrt{\frac{x}{2^k}}\right)\right)$$

$$= \frac{45x}{\pi^4}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{-1}{2}\right)^k - \frac{3\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)x}}{2\pi^2}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^k + O(\sqrt{x})$$

$$= \frac{45x}{\pi^4}\cdot\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{\left(2+2\sqrt{2}\right)x}}{2\pi^2}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right) + O(\sqrt{x})$$

$$= \frac{30x}{\pi^4} - \frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\sqrt{x} + O(\sqrt{x})$$

【定理二十一】

經修正後的原始畢氏數組數函數如下:

$$f_{revised}(x)$$

$$=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{2\ln2\pi^2+12\pi^2A+90}{3\pi^4}x+\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\sqrt{x}$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}x+O(\sqrt{x})$$

【證明】

計算以上由面積導出之原始畢氏數組數函數當中x的一次方項:

$$F(x)=\frac{3}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{6Ax}{\pi^2}+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+O(\sqrt{x})$$

$$f(x)=\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot F\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$=\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot\left(\frac{3}{2^k\pi^2}x\cdot\ln\frac{x}{2^k}+\frac{6Ax}{\pi^2 2^k}+\frac{x}{2^k}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+O(\sqrt{\frac{x}{2^k}})\right)$$

$$=\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot\frac{3}{2^k\pi^2}x\cdot\ln x-\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot\frac{3}{2^k\pi^2}x\cdot k\cdot\ln2$$

$$+\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot\frac{6Ax}{\pi^2 2^k}+\sum_{k\geq0}(-1)^k\cdot\frac{x}{2^k}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}+O\left(\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{2\ln2+12A}{3\pi^2}x+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}x+O\left(\sqrt{x}\right)$$

將面積導出之原始畢氏數組數函數扣除面積與整數點各數差值:

$$f_{revised}(x)=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{2\ln2+12A}{3\pi^2}x+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}x+O\left(\sqrt{x}\right)$$

$$-\left(\frac{30x}{\pi^4}-\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\sqrt{x}+O(\sqrt{x})\right)$$

$$=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{2\ln(2\pi^2)+12\pi^2A+90}{3\pi^4}x+\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\sqrt{x}$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}x+O(\sqrt{x})$$

小結[17]:

面積與整數點個數之差$=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4}\pm 1=\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{(2+2\sqrt{2})x}}{4}\pm O(1)$

小結[18]:

修正原始畢氏數組數函數須扣除之值$=\frac{30x}{\pi^4}-\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}+O(\sqrt{x})$

小結[19]:

經修正後的原始畢氏數組數函數如下:

$$f_{revised}(x)$$

$$=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+\frac{2\ln(2\pi^2)+12\pi^2A+90}{3\pi^4}x+\frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2}\sqrt{x}$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)\cdot\ln k}{k^2}x+O(\sqrt{x})$$

$$A=\frac{\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{12+8\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2+\sqrt{2}}+3\right)}{8}$$

二、由原始畢氏數組數函數對π函數值進行估計:

【探究過程九】

證明由原始畢氏數組數函數導出之π函數近似值較$\frac{x}{\ln x}$更為準確:

【定理二十二】

$$\pi(x) \geq \frac{f(x)}{c \cdot (\ln x)^2} = \frac{x}{\ln x} + \frac{O(x)}{c \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$$

【證明】

由於$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x)\ \ c \in \mathbb{R}$，我將其除以$c \cdot (\ln x)^2$得到$\pi$函數近似值。

目前所用之π函數近似值為$\frac{x}{\ln x}$，此近似值會低估π函數之實際值，以原始畢氏數組數函數算出之π函數近似值為:

$$\pi(x) \approx \frac{f(x)}{c \cdot (\ln x)^2} = \frac{x}{\ln x} + \frac{O(x)}{c \cdot (\ln x)^2}$$

$\pi(x) \geq \frac{f(x)}{c \cdot (\ln x)^2} = \frac{x}{\ln x} + \frac{O(x)}{c \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$因此可以算出更準確$\pi$函數近似值，質數定理當中描述$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{\pi(x)} = 1$，但在$x$值小時，$\frac{x}{\ln x}$誤差仍大，以原始畢氏數組數函數導出的$\pi(x)$近似值即能解決此問題。

小結[20]:

$$\pi(x) \geq \frac{f(x)}{c \cdot (\ln x)^2} = \frac{x}{\ln x} + \frac{O(x)}{c \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$$

(一)初估π函數近似值:

【探究過程十】

初步利用先前的質因數個數導出之原始畢氏數組數函數估計質數計量函數π函數:

【定理二十三】

原始畢氏數組數函數與π函數的關係式如下:

$$f_U(x) \approx 0.225 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

$$f(x) \approx 0.208 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

$$f_L(x) \approx 0.1125 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

【證明】

由先前可知$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x \cdot \ln x} = c$，因此我由電腦可計算之最大值

$f(46340)$，初步估計$c = \frac{f(46340)}{x \cdot \ln x}$，再將$f(x)$除以$c \cdot (\ln x)^2$得到

$\pi(x)$近似值，進而寫出原始畢氏數組數函數與$\pi(x)$關係式如下:

$$f_U(x) \approx 0.225 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

$$f(x) \approx 0.208 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

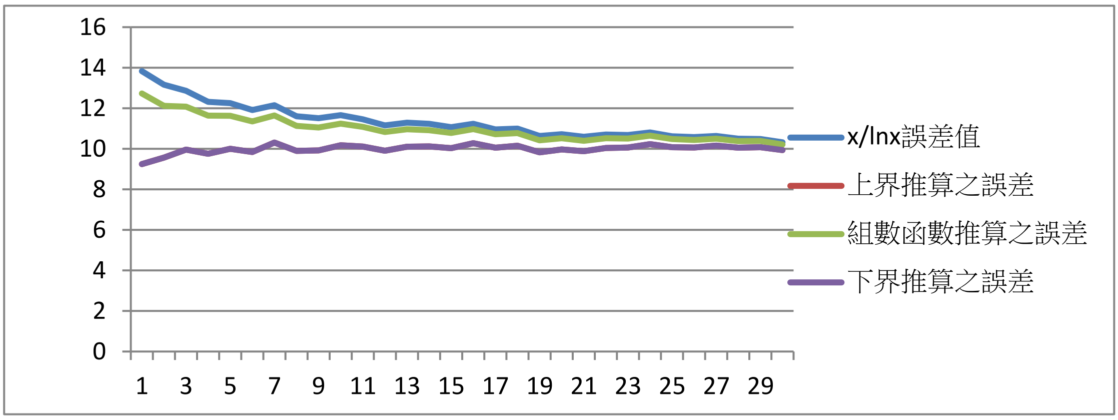
$$f_L(x) \approx 0.1125 \cdot \pi(x) \cdot (\ln x)^2$$

得證

我進一步將其推算出之$\pi(x)$近似值與$\frac{x}{\ln x}$兩者誤差比例進行比較得

到下圖:

(橫軸為x單位為千，縱軸為誤差值單位為%):



由此可見雖然原始畢氏數組數函數導出之$\pi(x)$近似值較$\frac{x}{\ln x}$準確，

但誤差仍大。

小結[21]:

原始畢氏數組數函數與π函數的關係式如下:

$$f_U(x) \approx 0.225 \cdot \pi(x) \cdot (ln\,x)^2$$

$$f(x) \approx 0.208 \cdot \pi(x) \cdot (ln\,x)^2$$

$$f_L(x) \approx 0.1125 \cdot \pi(x) \cdot (ln\,x)^2$$

小結[22]:

原始畢氏數組數函數初步導出之$\pi(x)$近似值較$\frac{x}{\ln x}$準確，但誤差仍大。

（二） 以坐標系上相對應面積導出之c值進行估計:

【探究過程十一】

以坐標系上整數點個數導出之c值估算π函數之值。

【定理二十四】

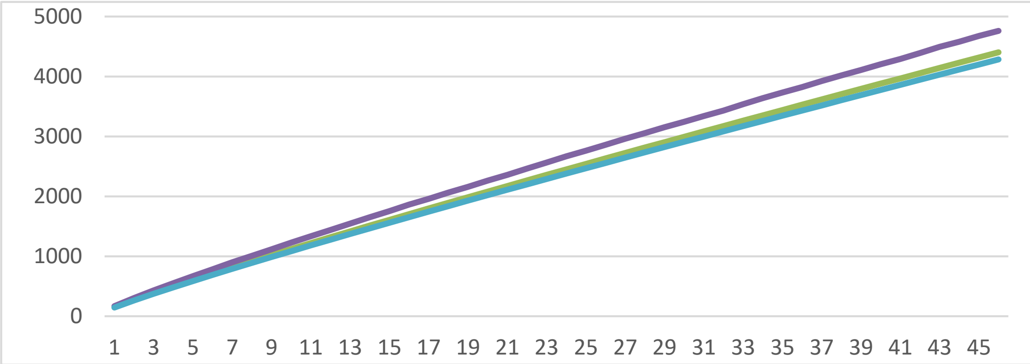
$$\pi(x) \approx \frac{\pi^2 \cdot f(x)}{2 \cdot (\ln x)^2}$$

【證明】

由於先前以坐標系上整數點個數計算原始畢氏數組數函數得到$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x)$中 的$c = \frac{2}{\pi^2}$，因此，我代入此$c$值進行$\pi$函數的估算，得到$\pi$函數的近似值為$\frac{\pi^2 \cdot f(x)}{2 \cdot (\ln x)^2}$。

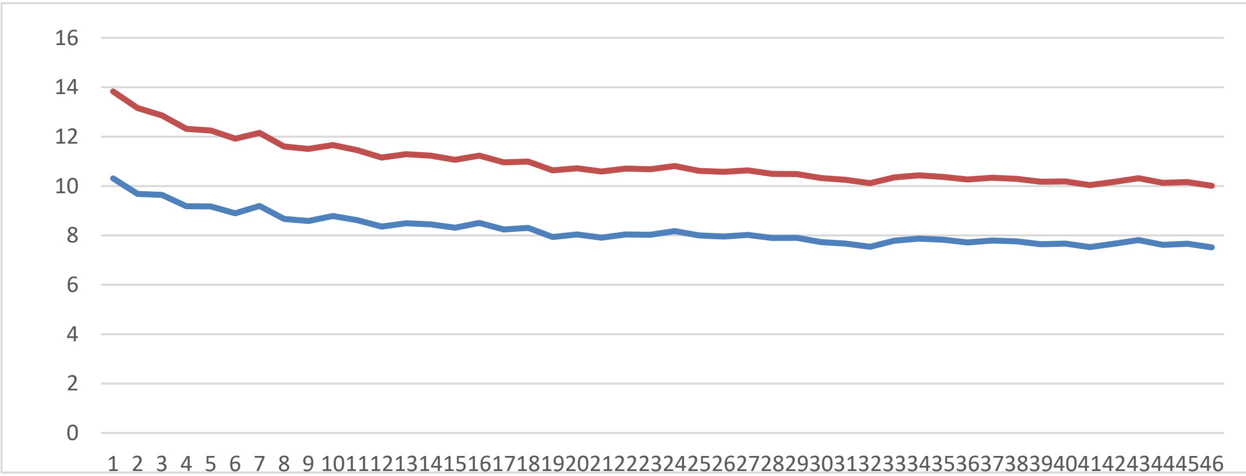
計算結果:(橫軸為x單位為萬，縱軸為$\pi(x)$值)

(藍線為$\frac{x}{\ln x}$值，紫線為$\pi(x)$實際值，綠線為我的方法導出近似值)



誤差比例如下:(橫軸為x單位為萬，縱軸為誤差值單位為%)

(紅線為$\frac{x}{\ln x}$誤差值，藍線為我的方法導出之近似值的誤差值)



小結[24]:

原始畢氏數組數函數$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x)$中$c \approx 0.189$。

(三)以差分法估計較準確的π函數近似值:

【探究過程十二】

以數值資料探討$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x)$之$c$值

【定理二十五】

$$c \approx 0.189$$

$$f(x) \approx 0.189 \cdot x \cdot \ln x + O(x) \approx 0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x$$

【證明】

在此，我視$f(x)$之趨勢函數為可微函數(此時我計算$f(x)$趨勢函數之c值)。

先前將x以 1000 為間距得到$f(x)$值，我為計算其斜率，將其相鄰的$f(x)$相減再除以 1000，得到其斜率與x的關係式為

$f'(x) \approx 0.189 \cdot \ln x + 1.711$，由於我對於$0.189 \cdot \ln x + 1.711$與$f'(x)$實際值之差進行探討，得到其縮減速率約為 0.5，因此

$\lim_{x \to \infty} |0.189 \cdot \ln x + 1.711 - f'(x)| = 0$，則

$$c = \lim_{x \to \infty} x \cdot f''(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot (0.189 \cdot \ln x + 1.711)'$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{0.189}{x} = 0.189$$

$$f(x) = 0.189 \cdot x \cdot \ln x + O(x)$$

$$f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x \ll x$$

$$|f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x| \leq Ax \text{，} A \in \mathbb{R}$$

$$\because f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x \geq 0$$

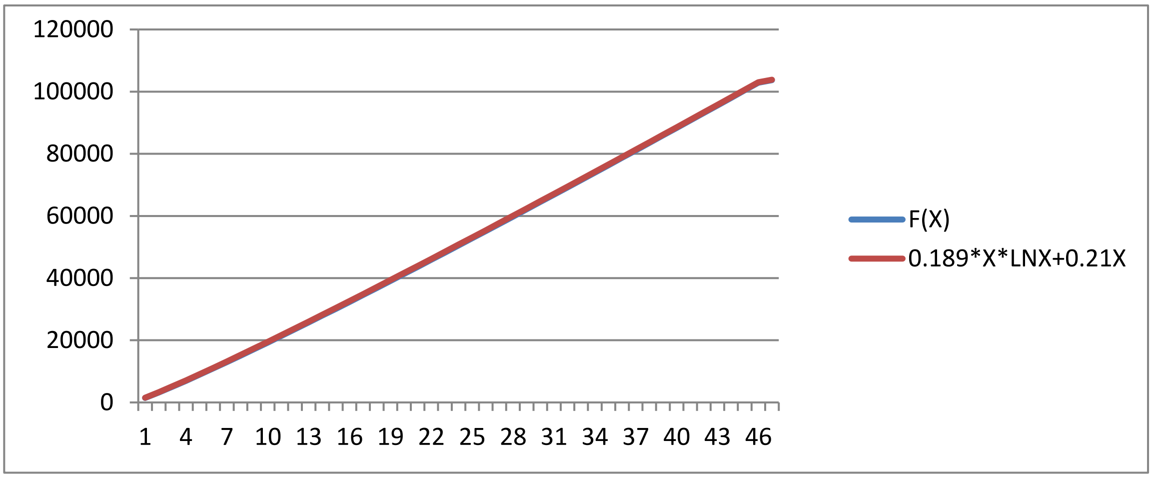
$\therefore A \geq \frac{f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x}{x}$且根據大$O$符號的性質:在自變數趨近無窮時等號成立，得知$A = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x}{x}$，經計算後得知

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 0.189 \cdot x \cdot \ln x}{x} \approx 0.21$$

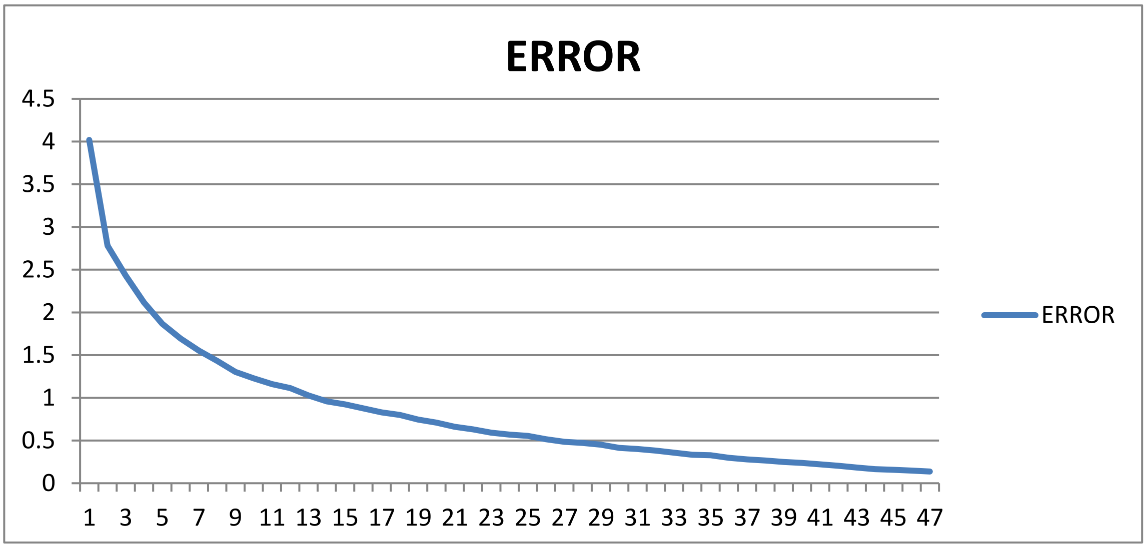
因此$f(x) \approx 0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x$，我計算其與實際值之誤差，發現誤差會收斂至 0，因此

$\lim_{x \to \infty} |0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x - f(x)| = 0$並以此進行計算之後得到結果與誤差值如下所示:

計算結果(橫軸為x之單位為千，縱軸為$f(x)$值):



誤差值(x之單位為千，誤差值單位為%)



由此可發現由$0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x$算出的值誤差較先前的函數而言非常小，從$x = 1000$時的 4%，到$x = 46000$時已經降低至 0.137%。

小結[24]:

原始畢氏數組數函數$f(x) = c \cdot x \cdot \ln x + O(x)$中c ≈ 0.189。

小結[25]:

$$f(x) \approx 0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x$$

$$\lim_{x \to \infty} |0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x - f(x)| = 0。$$

【探究過程十三】

進一步以$c \approx 0.189$對於$\pi(x)$近似值進行探討

【定理二十六】

$$\pi(x) > \frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$$

且可由$\frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2}$算出更為準確的$\pi(x)$近似值

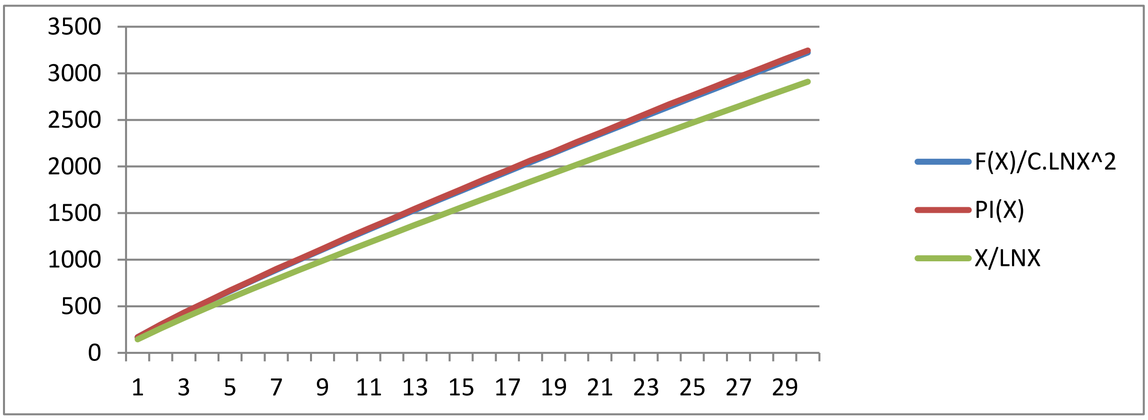
【證明】

由$f(x) \approx 0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x$且

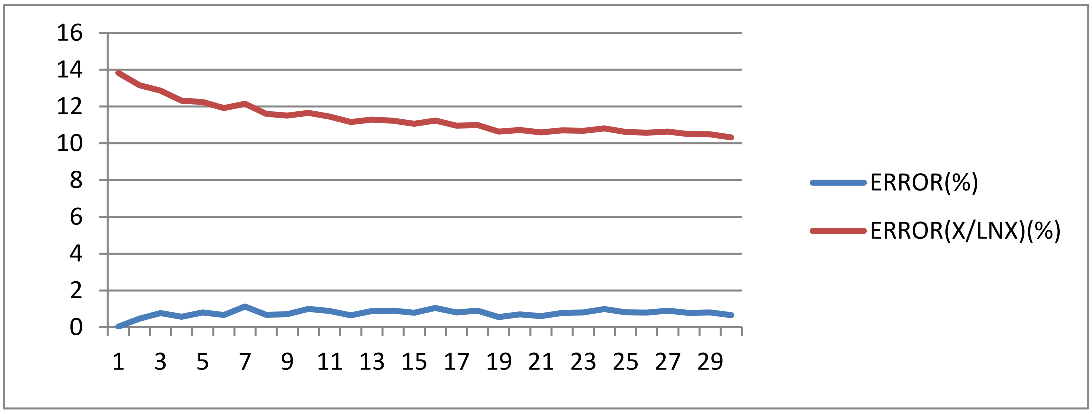
$$\lim_{x \to \infty} |0.189 \cdot x \cdot \ln x + 0.21x - f(x)| = 0$$

可知$\frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2} \geq \frac{x}{\ln x} + \frac{0.21x}{0.189 \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$，且發現$\pi(x) > \frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2}$，因此得知$\pi(x) > \frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2} > \frac{x}{\ln x}$三者之比較與誤差如下所示:

計算結果:(橫軸為x單位為千，縱軸為$\pi(x)$值)



誤差值:(橫軸為x單位為千，縱軸為誤差值單位為%)



可發現由原始畢氏數組數推算出之π函數實際值較目前普遍被使用

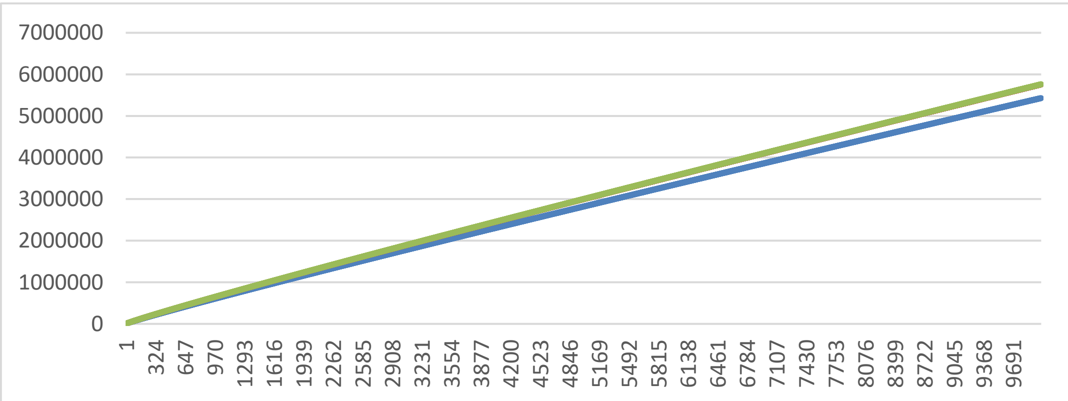
的$\frac{x}{\ln x}$更準確，且由於$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}}{\pi(x)}=1$，因此$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{f(x)}{0.189\cdot(\ln x)^2}}{\pi(x)}=1$

以下，我算至$x=10^8$，並將三者進行比較得到:

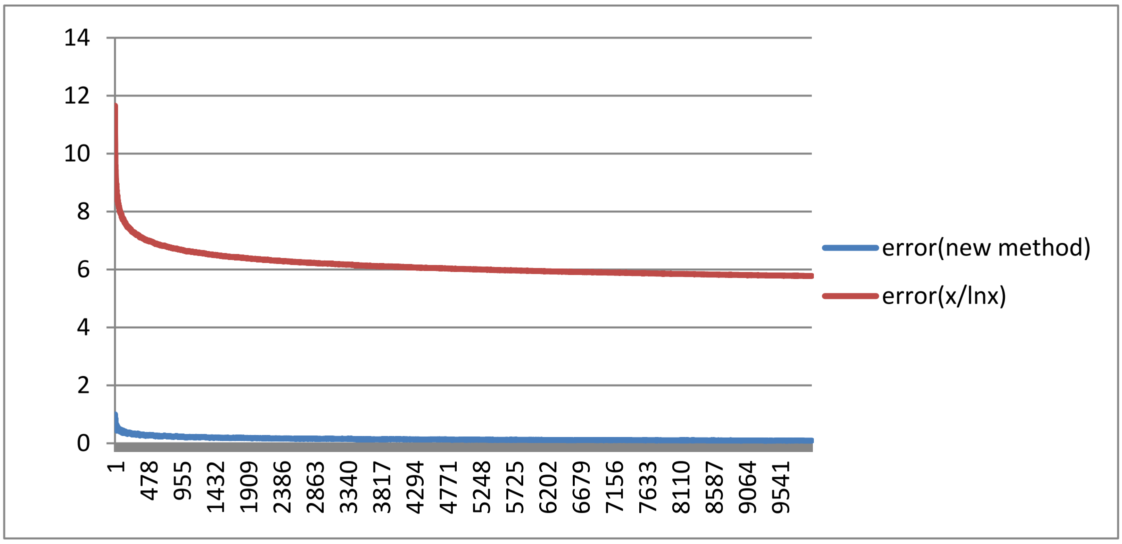
計算結果:(橫軸為x單位為萬，縱軸為$\pi(x)$值)

(藍線為$\frac{x}{\ln x}$值，綠線為$\pi(x)$實際值，橘線為我的方法導出之$\pi(x)$近

似值)

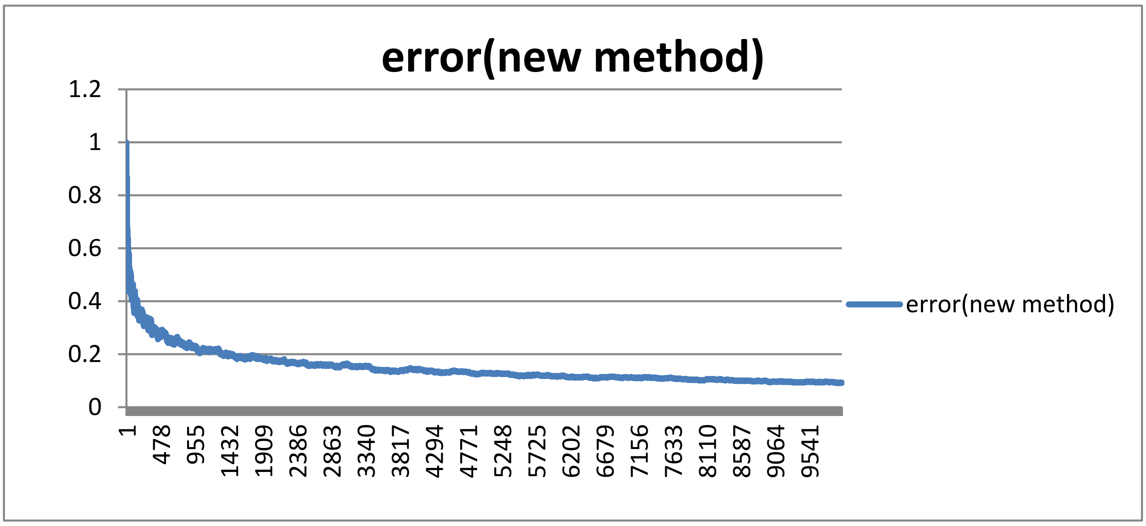


誤差比例如下:(橫軸為x單位為萬，縱軸為誤差值單位為%)



以下為我的方法導出之$\pi(x)$近似值之誤差比例:

(橫軸為x單位為萬，縱軸為誤差值單位為%)



小結[26]:

由$\frac{f(x)}{0.189\cdot(\ln x)^2}$推算出之$\pi$函數近似值之誤差低於 1.5%，且收斂較$\frac{x}{\ln x}$更快，誤差值明顯較$\frac{x}{\ln x}$更小，能算出更準確的$\pi(x)$近似值。

貳、 討論:

本研究透過多種方法導出原始畢氏數組數函數值，並創先例將其用來對於質數在整數之間的分布密度進行探討，也有所成果，透過原始畢氏數組數函數計算出相較$\frac{x}{\ln x}$更為準確的π函數的近似值。

首先，我計算由兩種特殊方法生成之初步原始畢氏數組數函數，但此種方法僅能導出極少數的原始畢氏數，即是在以下原始畢氏數通式當中$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$，$n=1$的情況。之後，我以質因數個數計算原始畢氏數組數，發現固定一股為x，並根據另一股y與斜邊z之和的質因數個數進行分類，可以導出$C_{\omega(y+z)-1}^{\omega(x)-1}$組原始畢氏數。我再利用原始畢氏數通式 $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$計算原始畢氏數組數函數，我令$m-n=k$，根據k值將原始畢氏數進行分類，得到由通式導出之原始畢氏數組數函數。並且，我藉由計算座標系上相對應的面積，在經過函數轉換之後，得到了原始畢氏數組數函數值，相較於先前的函數仍以許多難以計算的函數進行表示，此方法導出之原始畢氏數組數函數極為容易進行計算，此原始畢氏數組數函數的形式易使我發現可以藉由原始畢氏數組數函數對於值數在整數間的分布密度進行探討。

我以原始畢氏數組數函數對質數在整數間分布密度進行探討(計算π函數近似值)，首先，我從程式算出之原始畢氏數組數函數初估c值，再將其用來計算π函數近似值，計算出更準確的π函數近似值，但誤差仍大，因此我以坐標系上相對應面積導出之c值進行估計，最後，再以差分法計算更準確的c值，計算相較$\frac{x}{\ln x}$準確許多的π函數近似值。

結論與應用

壹、 結論:

(一)　初步原始畢氏數組數函數如下:

$$\frac{3x-7}{4} \le f_1(x) = x - \#\{a|a \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)\text{，}0 < a \le x\} - 2$$

$$= x - \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor - 2 \le \frac{3x-10}{4}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 1 if\ x\ is\ odd \\ \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 2\ \ if\ x\ is\ even \end{cases}$$

(二)　由質因數個數算出之原始畢氏數組數函數如下:

$$f_U(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} 2^{\omega(2n+1)-1} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} 2^{\omega(4k)-1} & if x\ is\ odd \\ \sum_{n=2}^{\frac{x}{2}} 2^{\omega(2n-1)-1} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} 2^{\omega(4k)-1} & if\ x\ is\ even \end{cases}$$

$$f_L(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} 2^{\omega(2n+1)-2} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} 2^{\omega(4k)-2} & if x\ is\ odd \\ \sum_{n=2}^{\frac{x}{2}} 2^{\omega(2n-1)-2} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} 2^{\omega(4k)-2} & if\ x\ is\ even \end{cases}$$

$$f(x) \approx f_U(x) - 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)x \cdot \pi^{-2} - 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \pi^{-2} - O\left(\sqrt{x}\right)$$

(三)　由Möbius μ函數表示之原始畢氏數組數函數如下:

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} \sum_{d_1|2n+1} |\mu(d_1)| + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} \sum_{d_2|4k} |\mu(d_2)|\right) & if x\ is\ odd \\ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} \sum_{d_1|2n-1} |\mu(d_1)| + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} \sum_{d_2|4k} |\mu(d_2)|\right) & if\ x\ is\ even \end{cases}$$

$$f_L(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} \sum_{d_1|2n+1} |\mu(d_1)| + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} \sum_{d_2|4k} |\mu(d_2)|) \; if x \; is \; odd \\ \frac{1}{4}(\sum_{n=1}^{\frac{x-1}{2}} \sum_{d_1|2n-1} |\mu(d_1)| + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor} \sum_{d_2|4k} |\mu(d_2)|) \quad if \; x \; is \; even \end{cases}$$

（四） 由原始畢氏數通式導出之原始畢氏數組數函數如下:

$$f_G(x) = \sum_{\substack{k \in odd \\ \sqrt{(\sqrt{2}-1)x} \geq k \geq 1}} \left| \left\lfloor \frac{x-k^2}{2k} \right\rfloor \cdot \prod_{\substack{p|k \\ p \in prime}} \frac{p-1}{p} \right| + \sum_{\substack{k \in odd \\ \frac{x}{2}-1 \geq k \geq \sqrt{(\sqrt{2}-1)x}}} \left| \left\lfloor \frac{-k+\sqrt{k^2+2x}}{2} \right\rfloor \cdot \prod_{\substack{p|k \\ p \in prime}} \frac{p-1}{p} \right|$$

（五） 計算相對應面積得到的原始畢氏數組數函數如下:

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} x \cdot \ln x + O(x)$$

經修正後的原始畢氏數組數函數如下:

$$f_{revised}(x)$$

$$= \frac{2}{\pi^2} x \cdot \ln x + \frac{2\ln(2\pi^2) + 12\pi^2 A + 90}{3\pi^4} x + \frac{(3\sqrt{2}-3)\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\pi^2} \sqrt{x}$$

$$+ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k) \cdot \ln k}{k^2} x + O(\sqrt{x})$$

$$A = \frac{\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{12+8\sqrt{2}} \right) - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 3 \right)}{8}$$

（六） 由原始畢氏數組數函數初估之π函數近似值如下:

$$\pi(x) \approx \frac{f_U(x)}{0.225 \cdot (\ln x)^2} \approx \frac{f(x)}{0.208 \cdot (\ln x)^2} \approx \frac{f_L(x)}{0.208 \cdot (\ln x)^2}$$

（七） 以坐標系上相對應面積導出之c值進行估計得到π函數的近似值為 $\frac{\pi^2 \cdot f(x)}{2 \cdot (\ln x)^2}$。

（八） 進一步以差分法估算出之更準確π函數近似值如下:

$$\pi(x) \approx \frac{f(x)}{0.189 \cdot (\ln x)^2}$$

貳、 應用:

本研究透過一種新的方法計算π函數近似值(透過原始畢氏數組數函數)，也算出了更精確的近似值，再算出準確的π函數近似值後，不論對數論或密碼學上都能有所貢獻。

一、我寫出原始畢氏數組數函數與Möbius μ函數的關係式，又由於Möbius μ函數與黎曼ζ函數存在一關係式，我可以由此找到原始畢氏數組數函數與黎曼ζ函數的關係式，再透過$f(x)=\frac{2}{\pi^2}x\cdot\ln x+O(x)$將原始畢氏數組數函數定義域延伸至複平面上，進一步對黎曼ζ函數非平凡零點實部範圍進行探討。

二、我亦希望未來將本研究延伸至多個維度的原始畢氏數組數函數值（${A_1}^2+{A_2}^2+{A_3}^2\ldots{A_n}^2=B^2$正整數解），並仿造 2 維度的原始畢氏數組數函數，對於質數分布進行進一步部探討。

三、目前，我將原始畢氏數組數函數之誤差項寫為$O(x)$，希望未來能將誤差項縮小至$O(\sqrt{x})$，其中$x^{\frac{1}{2}}$即為黎曼猜想的一種特殊情況。

參考文獻

一、賴昱維（民 106）。最簡勾股差。**數學傳播，41(1)**，50-60.

二、M.Benitoand J.L.Varona（2002）Pythagorean triangles with legs less than n, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *143(1)*, 117 – 126.

三、J. Lambek and L. Moser(1955)
On the distribution of Pythagorean triangles,
Pacific Journal of Mathematics 5, 73 – 83.

四、R. A. Beauregardand E. R. Suryanarayan（2001）
Pythagorean boxes, *Mathematics Magazine, 74(3)*, 222 – 227.

五、陳揚叡(2008） N 元二次不定方程式的整數解探討，2008 臺灣國際科展。

六、Bernhard Riemann（1859） On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity , *Monatsber Berlin Akad.*

七、陳**(2020） 原始畢氏數與巴斯卡三角形，2020 臺灣國際科展。

八、Olivier Bordell‘es(2015) Some Explicit Estimates for theMöbius Function, *Journal of Integer Sequences, Vol. 18*

【評語】010035

此作品討論畢氏數組數與質數在整數間分布的關係,透過多種方法導出原始畢氏數組數函數值,討論質數在整數之間的分布密度,計算出更準確的ｐ函數近似值,並運用程式協助分析,有不錯的成果,但集合符號處理與畢氏數組數函數值的精確性須加強.