2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010029

參展科別　數學

作品名稱　覆蓋格子點之最佳化問題

就讀學校　臺北市立大直高級中學

指導教師　劉繕榜、胡裕仁

作者姓名　蔡雨哲

關鍵詞　集合覆蓋、格子點

Abstract

This research was published by the "Exploratory Mathematics Column-"Two Days Off Weekly"" on the website of the Museum of Science and Education. Let's describe the generalized problem: If in the consecutive "k"-day vacation, in any consecutive m days, just study for “n” days, how many days are the reading days in the consecutive k days? And at least a few days? This research tried to bring the original topic rules from the relevant literature, extended to two-dimensional space and found its application, but unexpectedly found that it is actually a set coverage problem. Therefore, we proceeded to extend the one-dimensional problem to the lattice points on the plane, in order to propose the optimized results and find the rules.

中文摘要

本研究由科教館的網站上科學研習月刊第 54 卷第 3 期探索數學專欄─「周休二日」進行發想。我們進行一般化的問題描述：假如在連假 k 天當中，任意連續 m 天之中，剛好要讀 n 天書，則在連假 k 天當中的讀書日最多有幾天？以及最少有幾天？本研究嘗試從相關文獻帶入原來的題目規則中，延伸至二維空間並找到其應用，卻意外地發現它其實是一個集合覆蓋的問題。於是，我們便著手進行將一維問題延伸至平面上格子點，以期能提出最佳化的結果，並找出其規律。

壹、 前言

一、 研究動機

春節連假期間，我在科教館的網站上科學研習月刊第 54 卷第 3 期上發現一個有趣的題目，題目大意敘述如下[1]：

> 有一次放了星期五、六、日，一共三天連假，放假前老師叮嚀：「放假要每連續兩天之中，要剛好讀一天書。認真的同學小志說：「我可以星期五讀書，星期六玩，星期日讀書，這樣就連續兩天之中剛好讀一天書。」另一位同學小定說：「哎呀，我才不要這樣。我打算星期五玩，星期六讀書，星期日玩，這樣也連續兩天之中剛好讀一天的書。」小志和小定雖然都符合老師的規定，但是讀書的天數就硬是相差了一天。
>
> 問題 1：假如有一次連續放了七天的假。老師說：「每連續五天要剛好讀三天書啊！」，請問在小志與小定的讀書天數最多可以相差幾天？
>
> 問題 2：今年寒假放了三十五天，老師說：「每連續十天要剛好讀六天書啊！」，請問在小志與小定的讀書天數最多可以相差幾天？

我嘗試著解決問題 1，並將題目的敘述用圖來表示：

假如在 7 天中，每連續 5 天要剛好讀 3 天書，從圖 1-1 當中可以歸納出讀書總天數最多為 5 天，但從圖 1-2 當中可以得知讀書總天數最多為 3 天，這兩種情形相差 2 天。

日	一	二	三	四	五	六
1 讀	2 讀	3 讀	4 玩	5 玩	6 讀	7 讀

圖 1-1　7 天中讀書最多的情況

日	一	二	三	四	五	六
1 玩	2 玩	3 讀	4 讀	5 讀	6 玩	7 玩

圖 1-2　7 天中讀書最少的情況

假如在 35 天中，每連續 10 天要剛好讀 6 天書，從圖 2-1 當中可以歸納出讀書天數最多為 23 天，但從圖 2-2 當中可以得知讀書總天數最多為 19 天，這兩種情形相差 4 天。

日	一	二	三	四	五	六
1 讀	2 讀	3 讀	4 讀	5 讀	6 讀	7 玩
8 玩	9 玩	10 玩	11 讀	12 讀	13 讀	14 讀
15 讀	16 讀	17 玩	18 玩	19 玩	20 玩	21 讀
22 讀	23 讀	24 讀	25 讀	26 讀	27 玩	28 玩
29 玩	30 玩	31 讀	32 讀	33 讀	34 讀	35 讀

圖 2-1　35 天中讀書最多的情況

日	一	二	三	四	五	六
1 玩	2 玩	3 玩	4 玩	5 讀	6 讀	7 讀
8 讀	9 讀	10 讀	11 玩	12 玩	13 玩	14 玩
15 讀	16 讀	17 讀	18 讀	19 讀	20 讀	21 玩
22 玩	23 玩	24 玩	25 讀	26 讀	27 讀	28 讀
29 讀	30 讀	31 玩	32 玩	33 玩	34 玩	35 讀

圖 2-2　35 天中讀書最少的情況

由此可知，即使在相同的規則上讀書的天數也可以有所不同。因此我們想要將問題一般化，也就是在連假 k 天當中，任意連續 m 天之中，剛好要讀 n 天書，則在連假 k 天當中的讀書日最多有幾天？以及最少有幾天？

本研究將進一步延伸至平面座標圖形。也就是將一維延伸至二維。利用文獻[2]，為架構發想的新問題，我們可以將格子標示在 XY 直角坐標平面上，形成一些格子點。再以一個矩形區域覆蓋的方式以探討最大及最小值的問題。正好這個學期我們數學課程已經教到集合單元[3]，因此本研究嘗試地朝集合覆蓋的角度思考。

二、 研究目的與問題

本研究是由科學研習月刊中「周休二日」的問題出發，我們嘗試著以數線討論集合 A 滿足 (k,m,n) 情形以及以 XY 直角坐標上討論集合 A 滿足 $(k\times l,\,p\times q,\,n)$ 情形。

(一) 符號及名詞定義

1. 一維集合覆蓋格子點的假設

根據研究動機及問題描述，我們令連假 k 天為集合 $S_k=\{1,2,3,\cdots,k\}$，A 表在連假 k 天當中的讀書日所成集合(亦即 $A\subseteq S_k$)，$P_i=\{\,i,i+1,i+2,\cdots,i+m-1\,\}$ 表在連假 k 天中任意連續的 m 天，其中 i=1, 2, …, $k+1-m$。若任意連續 m 天之中，剛好

要讀 n 天書，也就是對所有的 i，滿足 $\left|P_i \cap A\right| = n$，則我們稱 $\boldsymbol{A}$ 為 $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$-可覆蓋。

2. 二維集合覆蓋格子點的假設

若集合 $S_{k,l} = \left\{(x, y) \middle| 1 \le x \le k, 1 \le y \le l, x, y \in \square \right\}$，$A$ 為 $S_{k,j}$ 之一部分集合，$P_{i,j} = \left\{(x, y) \middle| i \le x \le i + p - 1, j \le y \le j + q - 1 \right\}$，其中 i=1, 2, …, $k+1-p$ 且 j=1, 2, …, $l+1-q$。對所有的 i，滿足 $\left|P_{i,j} \cap A\right| = n$，則我們稱 $\boldsymbol{A}$ 為 $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{l}, \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n})$-可覆蓋。

(二) 研究問題

根據研究動機，我們嘗試探討以下四個問題：

1.若集合 A 滿足 (k, m, n) 情形，則 $|A|$ 的上界與下界

2.探討數線上 (k, m, n) 的相關性質。

3.若集合 A 滿足 $(k \times l,\ p \times q, n)$ 情形，則 $|A|$ 的上界與下界。

4.探討平面上 $(k \times l,\ p \times q, n)$ 的相關性

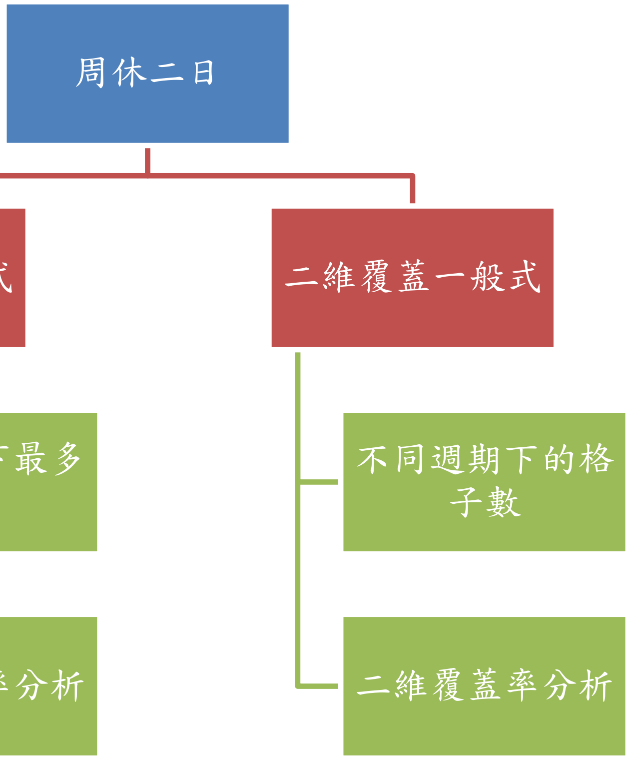
貳、 研究過程與結果

一、 文獻探討

集合覆蓋問題是典型的整數規劃問題[2][4]。舉例來說，假如我們準備蓋一間學校(其空間以集合 S 表示)，在這過程中我們會思考燈日光燈該在哪裡及該有多少盞這類的問題。如果今天你再加上一些條件：燈光 i 的照明範圍(集合 A_i)是 30 公尺內，為了有足夠的光線，需要多少盞日光燈，那這就能變成一個典型的集合覆蓋問題。

根據前面的假設，本研究的問題是一種集合覆蓋的問題。但本研究所提及的集合覆蓋問題，和典型的集合覆蓋問題有些不一樣。典型的集合覆蓋問題是要求用最少的集合 A_i 覆蓋整個集合 S，而其整體覆蓋上限集合與整個集合的比值上限希望可逼近 1[5]。而本研究的集合覆蓋問題以前面的例子來說，假如教室的範圍是集合 P_j，則 P_j 要涵蓋剛好 n 個燈泡。因此可視為在一個完全集 X 中，它的若干子集的集合為 S，是一種**精確覆蓋**。也就是指，S 的子集 S^*，在滿足 X 中的每一個元素在 S^* 中恰好出現一次。

二、 研究流程



▲研究流程圖

三、 研究過程

一維集合覆蓋問題一般化

科教研習月刊中游森棚教授提出的問題為：在7天連假中每連續五天要剛好讀三天的書，最多和最少會相差幾天[1]。我們將題目用數線表示，馬上就得到結果。再試試改變k的大小畫折線圖去探討相關性質。

k不被m整除時求最多覆蓋數

定理 1-1：當A為(k,m,n)-可覆蓋且$k \not\equiv 0 (mod\, m)$ 又 $k - m \times \left[\frac{k}{m}\right] < n$時，$|A|$上界之一般式為$k - (n - m) \times \left[\frac{k}{m}\right]$，其中$[x]$為不大於 x 之最大整數。

[範例]

觀察圖 5-1 後發現 k 並不能被 m 整除，後面會剩下 3 天，因為3<6後面剩下的天數小於讀書天數，也就是$k - m \times \left[\frac{k}{m}\right] < n$時，其中$[x]$不大於$x$之最大整數，所以最多天數有 21 天。

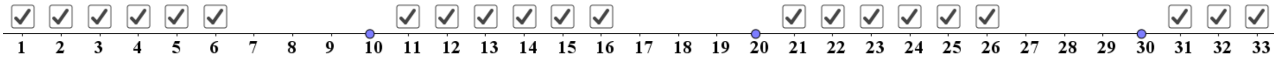


圖 5-1：$(33,10,6)$-可覆蓋之上界

[證明]

如圖所示，得出$k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]<n$時，$|A|$之上界的一般式為 $k-(n-m)\times\left[\frac{k}{m}\right]$。

定理1-2：當A為(k,m,n)-可覆蓋且$k\not\equiv 0(mod\ m)$ 又 $k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\geq n$時，$|A|$上界之一般式為$\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\right]+\boldsymbol{n}$，其中$[x]$為不大於$x$之最大整數。

[範例]

觀察圖 5-2 後發現 k 並不能被 m 整除，後面會剩下 7 天的連假，但只需要讀 6 天書，因為 7>6後面剩下的天數大於讀書天數，也就是$k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\geq n$時，其中$[x]$不大於$x$之最大整數，所以最多天數有 24 天。

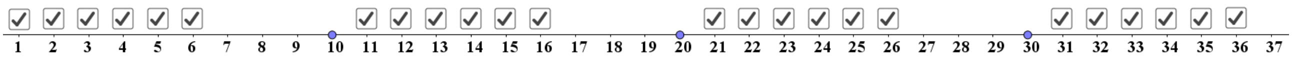


圖 5-2：$(37,10,6)$-可覆蓋之上界

[證明]

如圖所示，得出$k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\geq n$時，$|A|$之上界的一般式為 $\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\right]+\boldsymbol{n}$。

k不被m整除時求最少覆蓋數

定理2-1：當A為(k,m,n)-可覆蓋且$k\not\equiv 0(mod\ m)$ 又 $k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\leq m-n$ 時，$|A|$下界之一般式為$\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\right]$，其中$[x]$為不大於$x$之最大整數。

[範例]

觀察圖 6-1 後發現 k 並不能被 m 整除，後面會剩下 7 天的連假，但只休息 4 天後還需要讀 3 天書，因為後面剩下的天數大於休息天數，就是 $k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\leq m-n$時，所以最少天數有 21 天，其中$[x]$不大於$x$之最大整數。

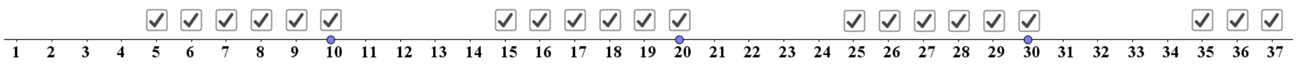


圖 6-1：$(37,10,6)$-可覆蓋之下界

[證明]

如圖所示，得出$k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]\leq m-n$時，$|A|$之下界的一般式為$n\times\left[\frac{k}{m}\right]+n$。

定理2-2：當A為(k,m,n)-可覆蓋且$k\not\equiv 0(mod\ m)$ 又 $k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]>m-n$時，$|A|$下界之一般式為$k-(n-m)\times(\left[\frac{k}{m}\right]+1)$，其中$[x]$為不大於$x$之最大整數。

[範例]

觀察圖 6-2 後發現 $\boldsymbol{k}$ 並不能被 m 整除，後面會剩下 3 天的連假，但還沒休息到第 4 天連假就結束了，就是 $k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]>m-n$時，所以最少天數有 18 天，其中$[x]$不大於$x$之最大整數。

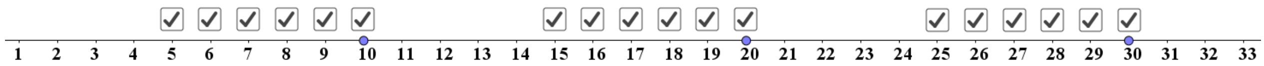


圖 6-2：$(33,10,6)$-可覆蓋之下界

[證明]

如圖所示，得出$k-m\times\left[\frac{k}{m}\right]>m-n$時，$|A|$之下界的一般式為$k-(n-m)\times(\left[\frac{k}{m}\right]+1)$。

k被m整除時求最多最少覆蓋數

定理3：當A為(k,m,n)-可覆蓋且$k\equiv 0(mod\ m)$ 時，$|A|$上下界之一般式為$\boldsymbol{n}\times\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}$，其中$[x]$為不大於$x$之最大整數。

[範例]

觀察圖 7-1、7-2 後發現 k 能被 m 整除，就是$k\equiv 0(mod\ m)$時，所以最少天數有 18 天，其中$[x]$不大於x之最大整數。

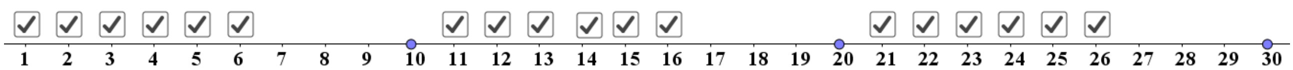


圖 7-1：$(30,10,6)$-可覆蓋

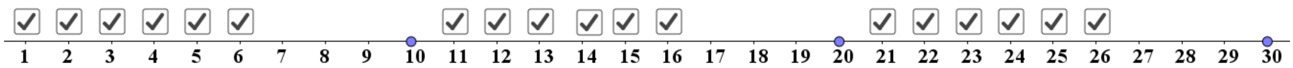


圖 7-2：$(30,10,6)$-可覆蓋

[證明]

如圖所示，當$k \equiv 0(mod\ m)$時，得出一般式為$\boldsymbol{n} \times \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}$。

一維覆蓋率分析

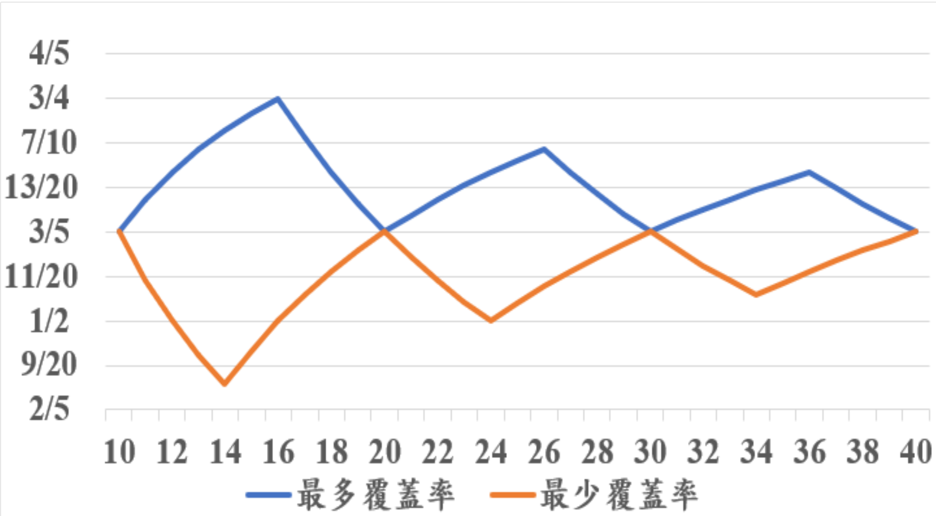


圖8：一維覆蓋率折線圖

我們將一維的覆蓋率做成折線圖(圖8)，改變k的大小就能得到上面所有條件。縱軸為覆蓋率，橫軸是k的大小。當兩條折線有交點時，就是最大最小覆蓋率相等。與定理3結果相符。

二維集合覆蓋問題一般化

我們依照一維的思路進行二維的假設，用GeoGebra畫出大矩形中覆蓋一個矩形並用類似一維的假設進行格子的覆蓋。

k 不被 p 整除且 l 被 q 整除時求最多格子數

定理 4-1：當A為$(k \times l, p \times q, n)$-可覆蓋 $k \not\equiv 0(mod\ p)$且$l \equiv 0(mod\ q)$又

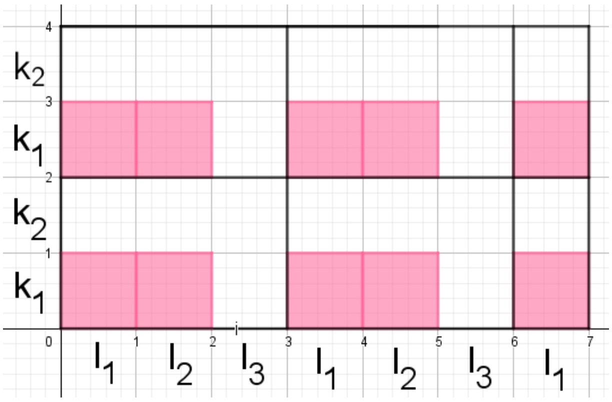
$q \times \left(k - p \times \left[\frac{k}{p}\right]\right) \geq n$，$|A|$上界之一般式為$n \times \left[\frac{l}{q}\right] \times \left(\left[\frac{k}{p}\right] + 1\right)$，其中$[x]$為不大於 x 之最大整數

[範例]

觀察圖 9-1 後發現 k 並不能被 p 整除且 l 能被 q 整除，後面會剩下 3 天的連假，但還沒休息到第 4 天連假就結束了，就是 $k - m \times \left[\frac{k}{m}\right] > m - n$時，所以最少天數有 18

天，其中$[x]$不大於x之最大整數。

從定理2得知$k>2p$或$l>2q$時，集合$|A|$中格子在x軸或y軸的分布會至少有兩個以上的週期，觀察圖11-1、圖11-2後發現直行每2格為一週期，共會有$t_2=\left[\frac{5}{2}\right]=2$個週期。其中$[x]$不大於$x$之最大整數。完整週期後多出了一列，最多有10格，最少有8格。



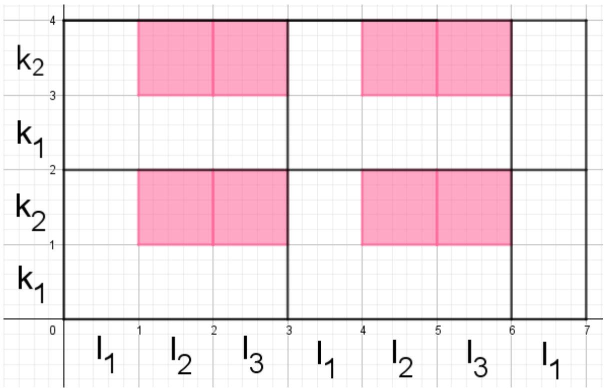


圖11-1：表示最多格子數$\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$　　圖11-2：表示$\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$最少格子數

[證明]

利用前面一維的一般式求出k_1、k_2、$k_3\cdots k_q$的數量乘上t_2再加上多出的k_1、k_2、$k_3\cdots k_q$。得到一般式$t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$。

橫列週期剩餘求最多最少格子數

定理 15：$S_{k,l}=\{(x,y)|1\le x\le k,1\le y\le l,x,y\in□\}\left(A\subseteq S_k\right)$

$P_{i,j}=\{(x,y)|\ i\le x\le i+p-1,\ j\le y\le j+q-1\}$，

其中i=1, 2, …, $k+1-p$且j=1, 2, …, $l+1-q$。$\left|P_{i,j}\cap A\right|=n$，

$|A|$上下界之一般式皆為$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$，

其中$[x]$為不大於x之最大整數。

[範例]

從定理2得知$k>2p$或$l>2q$時，集合$|A|$中格子在x軸或y軸的分布會至少有兩個以上的週期，觀察圖12-1、圖12-2後發現直行每2格為一週期，共會有$t_2=\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$個週期。其中$[x]$不大於$x$之最大整數。完整週期後多出了一列，最多有12格，最少有8格。

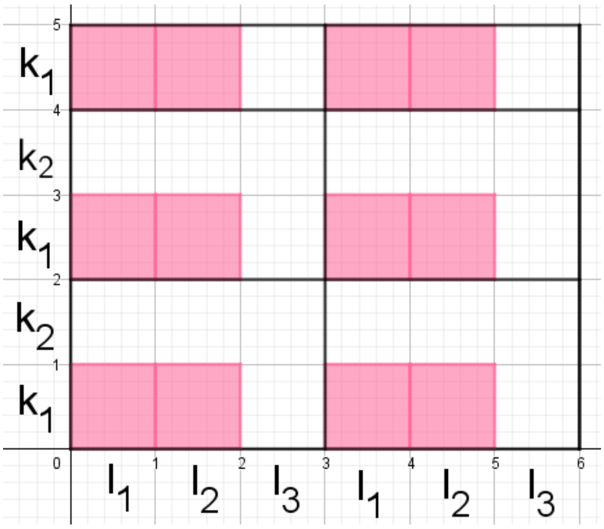


圖11-1：表示最多格子數$(S_{6,5},(3,2),2)$

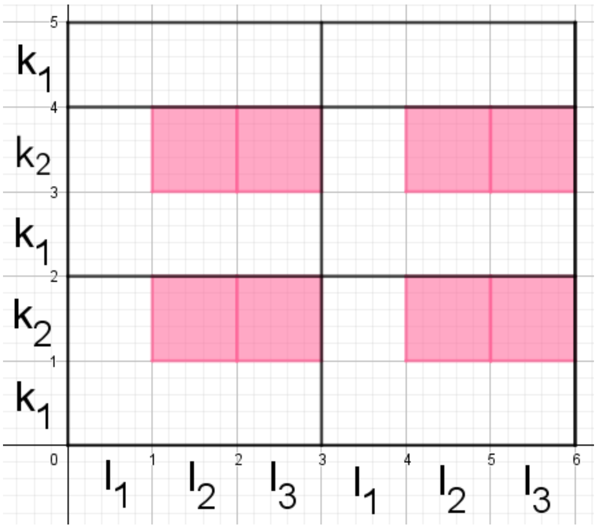


圖11-2：表示$(S_{6,5},(3,2),2)$最少格子數

利用前面一維的一般式求出l_1、l_2、$l_3\cdots l_q$的數量乘上t_1再加上多出的l_1、l_2、$l_3\cdots l_q$。得到一般式$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$。

直行橫列皆週期剩餘求最多最少格子數

[範例]

從定理2得知 $k>2p$ 或 $l>2q$ 時，集合 $|A|$ 中格子在x軸或y軸的分布會至少有兩個以上的週期，觀察圖11-1、圖11-2後發現直行與橫列皆是上述的週期剩餘，直行每2格為一週期，共會有 $t_2=\left[\frac{5}{2}\right]=2$ 個週期，橫列每2格為一週期，共會有 $t_2=\left[\frac{5}{2}\right]=2$ 個週期，其中 $[x]$ 不大於 x 之最大整數。完整週期後各多出了一列，最多有15格，最少有4格。

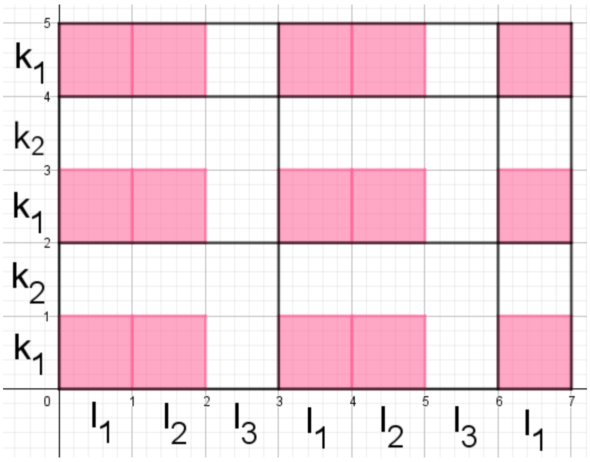


圖11-1：表示最多格子數 $\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$

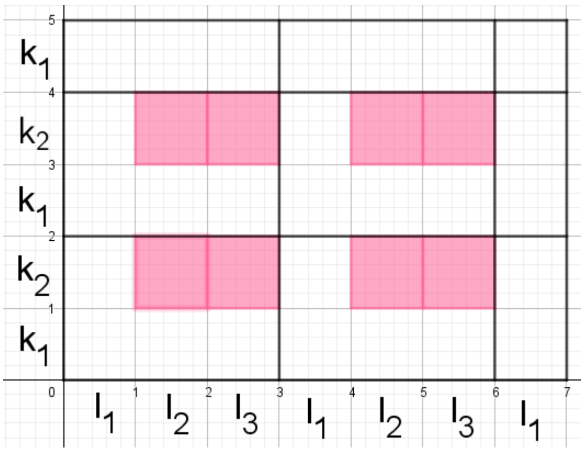
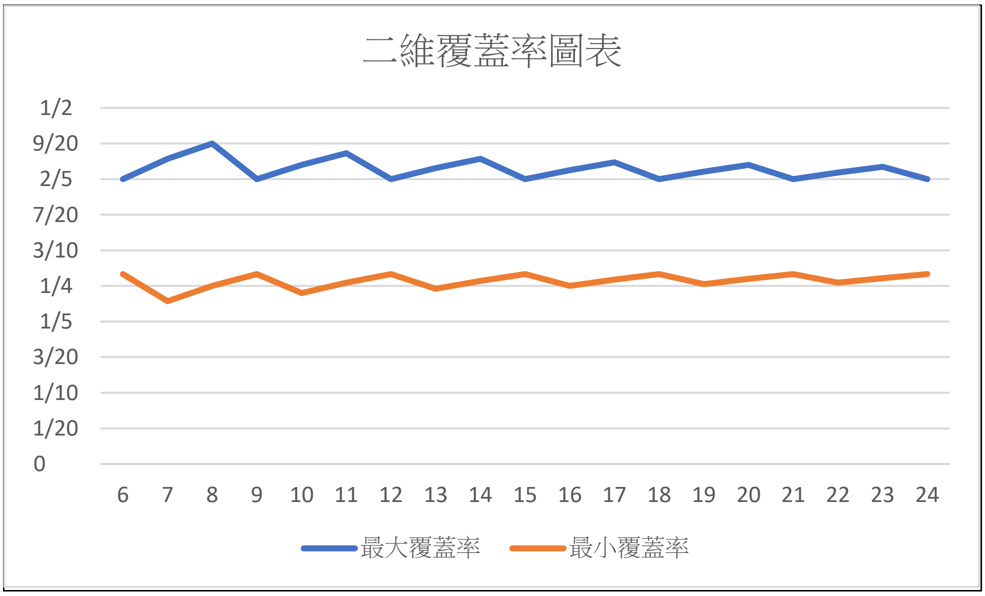


圖11-2：表示 $\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$ 最少格子數

覆蓋率分析



[推論]

若直行與橫列皆為週期剩餘時，皆可用上述兩種一般式得出最多最少解，且最大最小覆蓋率不會有重疊，也就是最多和最少不會有一樣的結果，最大最小覆蓋率相減會先遞增再遞減，相差最小時為一個週期。

直行完整週期求最多最少格子數

定理 16：$S_{k,l}=\{(x,y)|1\le x\le k,1\le y\le l,x,y\in\square\}$，$(A\subseteq S_k)$

$P_{i,j}=\{(x,y)|\,i\le x\le i+p-1,\ j\le y\le j+q-1\}$，其中$i$=1, 2, …,

$k+1-p$ 且 j=1, 2, …, $l+1-q$ 。$|P_{i,j}\cap A|=n$，若$k>2p$且$l=2q$時，

$|A|$上界之一般式為$t_2(k_1+k_2+\cdots+k_q)$

[證明]

定理2得知$k>2p$或$l>2q$時，集合$|A|$中格子在x軸或y軸的分布會至少有兩個以上的週期，$t_1=\left[\frac{8}{3}\right]=2$，其中$[x]$不大於$x$之最大整數。因為$l=2q$所以如圖12-1不會有多出來的橫列，

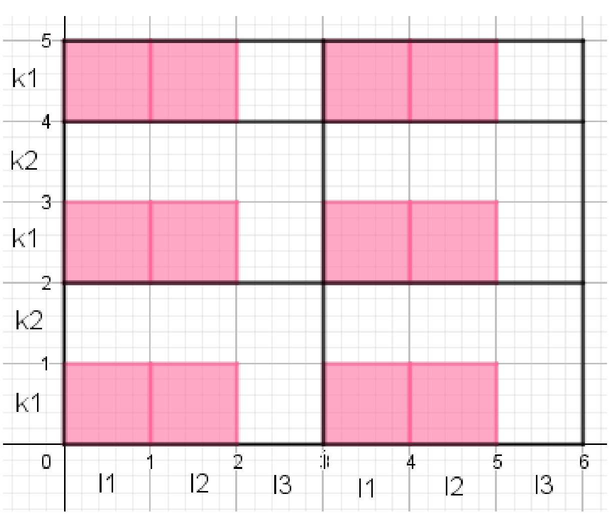


圖11-1：表示$(S_{6,5},(3,2),2)$最多格子數

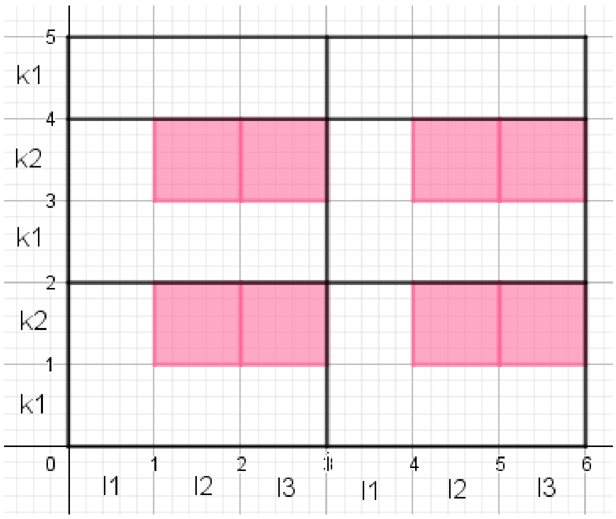


圖11-2：表示$(S_{6,5},(3,2),2)$最少格子數

[證明]

利用前面一維的一般式算出k_1、k_2、$k_3\cdots k_q$的數量，t_2乘上k_1、k_2、$k_3\cdots k_q$就求出來了。得出一般式$t_2(k_1+k_2+\cdots+k_q)$。

橫列完整週期求最多最少格子數

定理 17：$S_{k,l}=\{(x,y)|1\le x\le k,1\le y\le l,x,y\in\mathbb{N}\}$，$(A\subseteq S_k)$

$P_{i,j}=\{(x,y)|\ i\le x\le i+p-1,\ j\le y\le j+q-1\}$，其中$i$=1, 2, …, $k+1-p$ 且 j=1, 2, …, $l+1-q$。$|P_{i,j}\cap A|=n$，若$k>2p$且$l=2q$時，$|A|$下界之一般式為

$t_1(l_1+l_2+\cdots+l_p)$

[證明]

定理2得知$k>2p$或$l>2q$時，集合$|A|$中格子在 x 軸或 y 軸的分布會至少有兩個以上的週期，$t_1=\left[\frac{8}{3}\right]=2$，其中$[x]$不大於$x$之最大整數。若要求最少格只要將格子如圖12-2往中間放，因為$l=2q$所以如圖12-2不會有多出來的橫列，

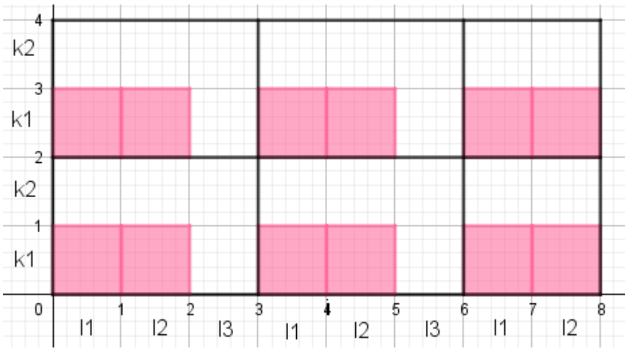


圖11-1：表示$(S_{6,5},(3,2),2)$最多格子數

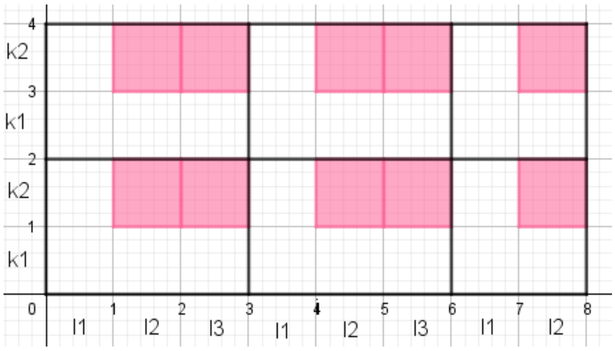


圖11-2：表示$(S_{6,5},(3,2),2)$最少格子數

[證明]

利用前面一維$k-mt<m-n$時一般項為nt。算出k_1、k_2的數量，t_2乘上k_1、k_2就求出來了。得出一般式$t_2(k_1+k_2+\cdots+k_q)$。因為$t_1>2$也可以用t_1去乘上l_1、l_2、l_3再加上多出的l_1、l_2亦得出一般式$t_1(l_1+l_2+\cdots+l_p)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$。

橫列完整週期求最多最少格子數

定理 17：$S_{k,l}=\{(x,y)|1\le x\le k,1\le y\le l,x,y\in\mathbb{N}\}$，$(A\subseteq S_k)$

$P_{i,j}=\{(x,y)|\ i\le x\le i+p-1,\ j\le y\le j+q-1\}$，其中$i$=1, 2, …, $k+1-p$ 且 j=1, 2, …, $l+1-q$。$|P_{i,j}\cap A|=n$，若$k>2p$且$l=2q$時，$|A|$下界之一般式為

$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)$

[證明]

定理2得知 $k>2p$ 或 $l>2q$ 時，集合 $|A|$ 中格子在 x 軸或 y 軸的分布會至少有兩個以上的週期，$t_1=\left[\dfrac{8}{3}\right]=2$，其中 $[x]$ 不大於 x 之最大整數。若要求最少格只要將格子如圖12-2往中間放，因為 $l=2q$ 所以如圖12-2不會有多出來的橫列，

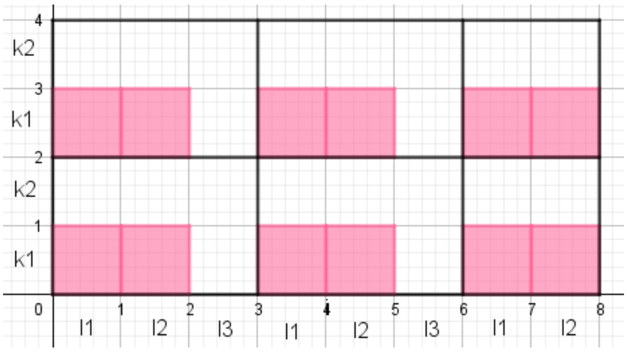


圖11-1：表示 $\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$ 最多格子數

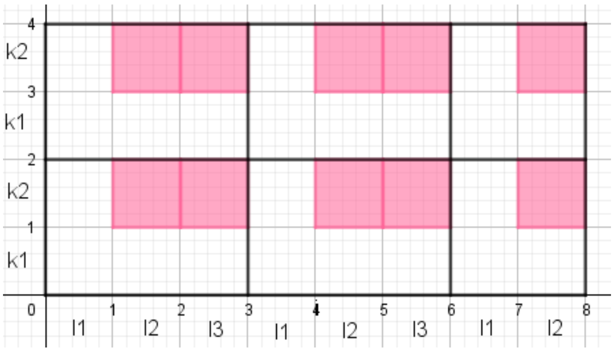
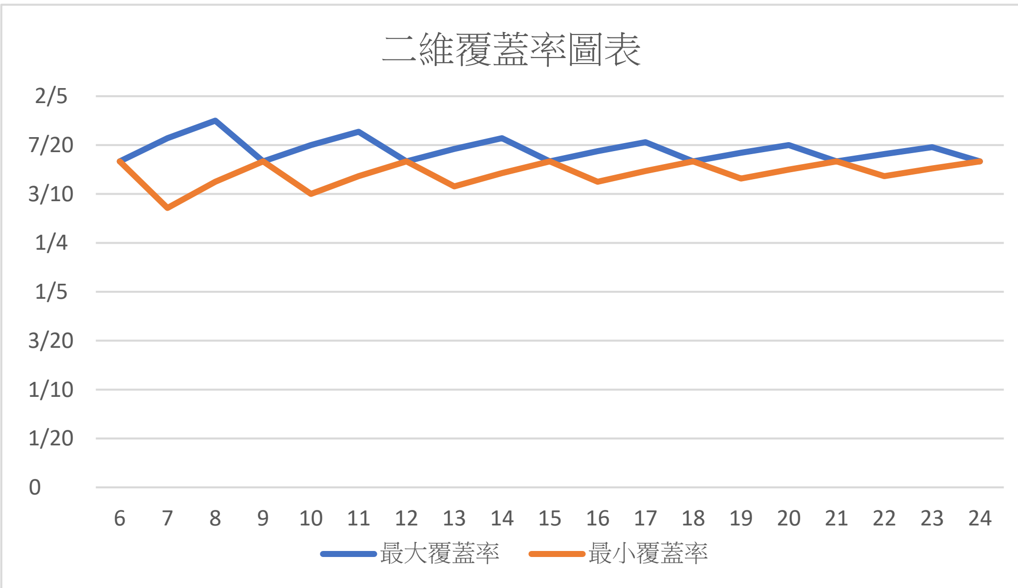


圖11-2：表示 $\left(S_{6,5},(3,2),2\right)$ 最少格子數

[證明]

利用前面一維 $k-mt<m-n$ 時一般項為 nt。算出 k_1、k_2 的數量，t_2 乘上 k_1、k_2 就求出來了。得出一般式 $t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)$。因為 $t_1>2$ 也可以用 t_1 去乘上 l_1、l_2、l_3 再加上多出的 l_1、l_2 亦得出一般式 $t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$。



參、 研究結果與討論

研究結果

一、數線上的$\left(S_k, m, n\right)$

1. $k-mt<n$時，利用週期性求上界一般項為$nt+\left(k-mt\right)$。

2. $k-mt>n$時，利用週期性求上界一般項為$n\left(t+1\right)$。

3. $k-mt>m-n$時，利用週期性求下界一般項為$n+\left(k-2m+n\right)$。

4. $k-mt<m-n$時，利用週期性求下界一般項為$t\times n$。

5. $k=mt$時，上下界一般項皆為$t\times n$。

二、平面上的$\left(S_{k,l}, (p,q), n\right)$

（一） $k>2p$且$l>2q$時：上下界之一般式為

$t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$或$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

（二） $k>2p$且$l=2q$時：上下界之一般式為$t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)$或

$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

（三） $k>2p$且$l<2q$時：上下界之一般式為$k_1+k_2+\cdots+k_q+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$或

$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

（四） $k=2p$且$l>2q$時：上下界之一般式$t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$

或$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)$

（五） $k=2p$且$l=2q$時：上下界之一般式為nt_1t_2、$t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_p\right)$或

$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)$

（六） $k=2p$且$l<2q$時：上下界之一般式為$k_1+k_2+\cdots+k_q+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$或

$t_1\left(l_1+l_2+\cdots+l_p\right)$

（七）　$k<2p$ 且 $l>2q$ 時：上下界之一般式 $t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$

或 $l_1+l_2+\cdots+l_p+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

（八）　$k<2p$ 且 $l=2q$ 時：上下界之一般式為 $t_2\left(k_1+k_2+\cdots+k_q\right)$ 或

$l_1+l_2+\cdots+l_p+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

（九）　$k<2p$ 且 $l<2q$ 時：上下界之一般式為 $k_1+k_2+\cdots+k_q+k_1+k_2+\cdots+k_{l-t_2q}$ 或

$l_1+l_2+\cdots+l_p+l_1+l_2+\cdots+l_{k-t_1p}$

綜合討論

一、一維、二維覆蓋問題一般化：

1. 從原本周休二日的題目延伸至 7 天連假甚至是 30 多天的寒假，我們利用了圖像化解答出答案後，嘗試將其放到數線上去討論。在數線上展開後，我們發現$\left(S_k, m, n\right)$會以 m 為間隔表示出週期性。
2. 本研究利用數線化、圖像化探討一維二維覆蓋集合排列情況，並求出一般化結果，即利用週期性來將其一般化
3. 在二維我們發現可以先利用一維所得出的一班式將直行或橫列的格子數先算出來再乘上週期，即可得到二維覆蓋的上下界一般式。

肆、 未來展望與相關應用

本研究討論覆蓋的性質尚屬初探階段，未來將進一步朝下列方向進行研究。對於科教館科學研習月刊第 54 卷第 3 期上的周休二日題目，目前已經觀察出其週期性，並且求出其一般項，也在進一步的觀察出二維覆蓋問題其週期性，並且求出其一般項。在接下來的研究希望能夠更進一步的找出二維平面中的特殊性質，與三維立方中圖形的上下界，並希望能應用在建築、經濟學等領域，加入最大產能[7]等限制去做出建模。有待我們進一步研究。

伍、 參考資料

[1] 游森棚(2018)。周休二日。科學研習月刊，54(3)，p.48。

[2] 陳宗霆(2015)。怎麼蓋才划算？—集合覆蓋問題 https://ntuimiedo.wordpress.com/2015/02/07/%E6%80%8E%E9%BA%BC%E8%93%8B-%E6%89%8D%E5%88%92%E7%AE%97%EF%BC%9F-%EF%BC%8D%E9%9B%86%E5%90%88%E8%A6%86%E8%93%8B%E5%95%8F%E9%A1%8C/

[3] 許志農主編(2019)。高級中學數學課本第二冊。新北市：龍騰文化。

[4] Cardoso, Nuno; Abreu, Rui (2014), An Efficient Distributed Algorithm for Computing Minimal Hitting Sets, Graz, Austria.

[5] Karpinski, Marek; Zelikovsky, Alexander (1998), A Threshold of ln n for Approximating Set Cover, Journal of the ACM, Vol. 45, No. 4, July, pp. 634 –652.

[6] Weng-Long Chang, Minyi Guo(2003), Solving the set cover problem and the problem of exact cover by 3-sets in the Adleman–Lipton model, BioSystems 72, PP. 263–275.

[7] 謝佳吟(2015)。The Maximal Covering Location Problem (MCLP) with Capacity on Total Workload https://ntuimiedo.wordpress.com/2015/04/22/the-maximal-covering-location-problem-mclp-with-capacity-on-total-workload/

【評語】010029

本文主要在研究：假如在連假 k 天當中，任意連續 m 天之中，剛好要讀 n 天書，則在連假 k 天當中的讀書日最多有幾天？以及最少有幾天？本研究嘗試從相關文獻帶入原來的題目規則中，延伸至二維空間並找到其應用，是一個有趣的題目。整體結果不難。