2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010025**

參展科別　數學

作品名稱　圓例覺醒

得獎獎項　大會獎 三等獎

突尼西亞I-FEST2正選代表

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　周洺朱

作者姓名　張竣為、陳竹欣

關鍵詞　三線性坐標、不等式、三角函數

作者簡介

我是張竣為(左)，就讀師大附中數理資優班，從小喜歡邏輯思考，對益智遊戲特別富有熱情，上了高中以後選擇做數學專題，熱衷於觀察、發現、證明新性質，也努力練習有條理地表達自己的想法與作品。

我是陳竹欣(右)，今年就讀師大附中 1482 數理資優班三年級，剛進數資班時，我就毫不猶豫地選擇了數專。我們每天都認真的練習，只為了呈現更好的作品，為台灣的學界灌注一份新的力量。經過日日夜夜的努力，我和我的好夥伴也取得了不錯的成績。謝謝老師的辛勤指導，使我們的作品更加優秀，更加充實，日後我也會繼續努力，做出更多好的作品。

摘要

平面上，P點為$\triangle ABC$內部任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$這三個三角形的外接圓於A'、B'、C'。若$\triangle ABC$為銳角三角形，則$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形，此外，並以三角形的三內角來表示$P$點為費馬點、外心、內心、垂心、重心時的確切比值；接下來推廣至n維空間，當P為任意n維$n-$單體$A_1A_2...A_{n+1}$內任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n$維$n-$單體$P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2...A_n$的外接$n$維球交於$A_1'$、$A_2'$、⋯、$A_{n+1}'$，滿足$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$k=1,2,...,n+1$，其中$n\ge 2$。再藉由任意點的結論，可以應用於直接生成或快速解出許多特殊類型的三角函數不等式。此外，從主要的不等式還可以得到$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$，此時$P$點為$n$維空間中任意一點，最後，我們把圓改為圓錐曲線，再進行線段比值的探討。

Abstract

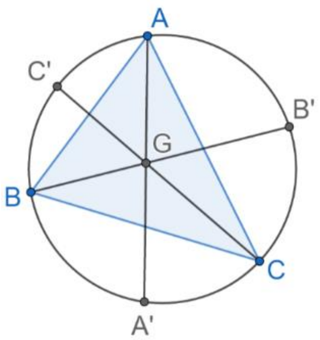
On the plane, point P lies inside the triangle ABC. $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$ relatively cross the circumcircles of triangles BPC, CPA, APB at A', B', C'. If triangle ABC is an acute triangle, $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$, and the equation holds if and only if the triangle ABC is an equilateral triangle. Besides, we use the interior angles of the triangle to show the real ratios when point P is Fermat point, circumcenter, incenter, orthocenter, and centroid. Next, we extend the consequence to n-dimensional space. When point P lies inside n-simplex $A_1A_2...A_{n+1}$, $\overleftrightarrow{A_1P}$, $\overleftrightarrow{A_2P}$, ⋯, $\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$ relatively cross the n-circumscribed spheres of n-simplex $P-A_2A_3...A_{n+1}, P-A_1A_3...A_{n+1},\cdots, P-A_1A_2...A_n$ at $A_1', A_2', \cdots$, A_{n+1}', $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$, and the equation holds if and only if $\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$, $k=1,2,...,n+1$, and $n\ge 2$. From the conclusion on any points, we can easily produce or finish many types of inequality. In addition,

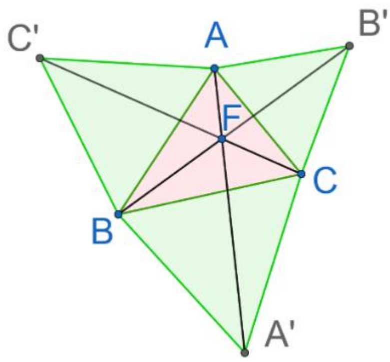
we can get $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k}'}=1$ from the main inequality, and point P is a random point in the n-dimensional space. Last, we turn circle into Conic section and discuss the ratio of segments.

一、前言

(一)研究動機

於 2017 年國際科展[1](石博允、錢昀，2017)提到「任意給定$\triangle ABC$與其外接圓O和重心G，若$\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$分別交O於A'、B'、C'，則$\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。讓我們很驚艷三角形的衍生線段有如此特殊的比值相加關係，恰巧當時數學課在介紹費馬點，費馬點、兩個頂點和衍生點有著四點共圓的關係，於是我們用 GGB 觀察，並更改比值為「相乘」關係，發現任意給定三內角都小於120°的$\triangle ABC$，透過算幾不等式可得$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，這引起了我們很大的好奇，其他特殊點是否也有這個不等式。

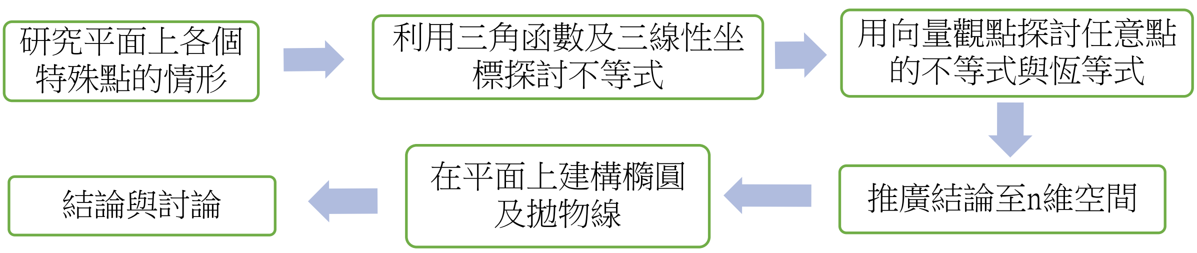




(二)研究目的

1. 嘗試用多種方法來探討當三角形內的點為費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點時之比值與極值為何？並將範圍延伸至任意點。
2. 將二維延伸至三維、n 維空間，並探討其特性。
3. 找出其他特殊比值的極值，並證明之。

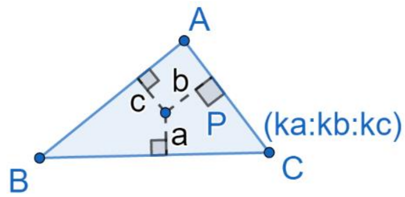
(三)研究流程



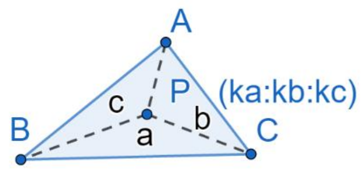
(四)研究設備：紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體。

(五)定義與預備定理：

<Definition 1>[2](趙文敏，1997)給定平面上任意$\triangle ABC$和一點P，若點P至$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的有向距離分別為a、b和c，則對每個非零實數k，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為P對$\triangle ABC$的一組齊次三線性坐標。

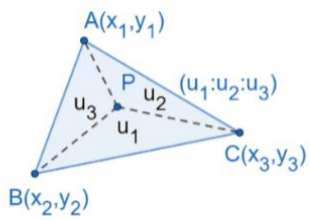


<Definition 2>[2](趙文敏) 給定平面上任意$\triangle ABC$和一點P，若$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的有向面積分別為a、b和c，則對每個非零實數k，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為點P對$\triangle ABC$的一組齊次面積坐標。

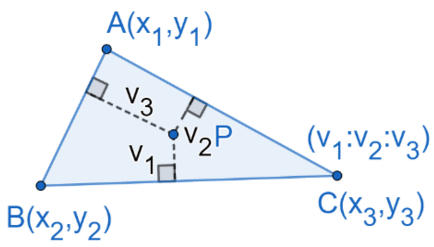


<Definition 3>令$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^n$，若$\overrightarrow{a}=k\cdot\overrightarrow{b}$，$k\in\mathbb{R}$，則定義$\dfrac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}\equiv k$。

<Lemma 1>[2](趙文敏)若$(u_1:u_2:u_3)$是點P對$\triangle ABC$的一組面積坐標，A、B、C的直角坐標分別為(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，則點P的直角坐標(x,y)可表示為$\left(\dfrac{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3}{u_1+u_2+u_3},\dfrac{u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3}{u_1+u_2+u_3}\right)$。



<Lemma 2>[2](趙文敏)若$(v_1:v_2:v_3)$是點P對$\triangle ABC$的一組三線性坐標，A、B、C的直角坐標分別為(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，則點$P$的直角坐標$(x,y)$可表示為$\left(\dfrac{av_1x_1+bv_2x_2+cv_3x_3}{av_1+bv_2+cv_3},\dfrac{av_1y_1+bv_2y_2+cv_3y_3}{av_1+bv_2+cv_3}\right)$。



<Lemma 3>[2](趙文敏)設$\triangle ABC$、P、Q、R皆在同一平面上且$\overrightarrow{PR}=r\cdot\overrightarrow{RQ}$，若$P$、$Q$對$\triangle ABC$的規範化面積坐標為$(p_1:p_2:p_3)$、$(q_1:q_2:q_3)$，則$R$對$\triangle ABC$的規範化面積坐標為$\left(\dfrac{p_1+rq_1}{1+r}:\dfrac{p_2+rq_2}{1+r}:\dfrac{p_3+rq_3}{1+r}\right)$。

註：任選一點 P 對 $\triangle ABC$ 的一組面積坐標為 $(u_1 : u_2 : u_3)$ ，令 $\lambda_i = \dfrac{u_i}{u_1+u_2+u_3}, i=1,2,3$ ，則 $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$ 是點 P 對 $\triangle ABC$ 的規範化面積坐標，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。

<Lemma 4>[2](趙文敏)設 $O(x_0, y_0)$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心， A 、 B 、 C 的直角坐標分別為 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，若有一點 P (x, y) 在外接圓上，且對 $\triangle ABC$ 的面積坐標為 $(u_1 : u_2 : u_3)$ ，則 $a^2u_2u_3+b^2u_3u_1+c^2u_1u_2=0$。

<Lemma 5>單體體積公式

假設由兩兩相互垂直的 $t_1, t_2, t_3 \ldots, t_d$ 坐標軸所構築之 $\mathbb{R}^d$ 中，有一個 $d-$單體。 $d+1$ 個頂點座標分別為： $v_1(t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1} \ldots, t_{d,1}), v_2(t_{1,2}, t_{2,2}, t_{3,2} \ldots, t_{d,2}), \ldots, v_{d+1}(t_{1,d+1}, t_{2,d+1}, t_{3,d+1} \ldots, t_{d,d+1})$ ，可推導出其體積為：

$$V_d = \left| \frac{1}{d!} \begin{vmatrix} 1 & t_{1,1} & t_{2,1} & t_{3,1} & \cdots & t_{d,1} \\ 1 & t_{1,2} & t_{2,2} & t_{3,2} & \cdots & t_{d,2} \\ 1 & t_{1,3} & t_{2,3} & t_{3,3} & \cdots & t_{d,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{1,d} & t_{2,d} & t_{3,d} & \cdots & t_{d,d} \\ 1 & t_{1,d+1} & t_{2,d+1} & t_{3,d+1} & \cdots & t_{d,d+1} \end{vmatrix} \right|$$

。

<Lemma 6>

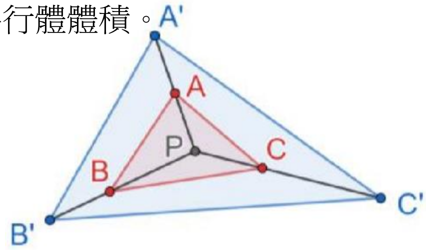
我們定義 ${}_a\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面積，$V_{A_1A_2\cdots A_{n+1}}$ 表示 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的超體積。

(1) 對於 $\triangle ABC$ 內部一點任意一點 P ，存在實數 l 、 m 、 n 使得 $l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $l:m:n={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$。

(2) 在三維空間中，對於四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 內部任意一點 P ，存在實數 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 使得 $a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:a_3:a_4=V_{PA_2A_3A_4}:V_{PA_1A_3A_4}:V_{PA_1A_2A_4}:V_{PA_1A_2A_3}$。

(3) 在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，對於 n 維 $n-$單體 $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ 內部任意一點 P ，存在實數 a_1 、$\cdots$、 a_{n+1} 使得 $a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+\ldots+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:\ldots:a_{n+1}=V_{PA_2A_3\ldots A_{n+1}}:V_{PA_1A_3\ldots A_{n+1}}:\ldots:V_{PA_1A_2\ldots A_n}$。

符號定義：$|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{a_1}\\ \overrightarrow{a_2}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_n}\end{pmatrix}|$表示$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、⋯、$\overrightarrow{a_n}$所圍成的$n$維平行體體積。



< proof of Lemma 5(1)>

設P為$\triangle A'B'C'$的重心，其中$\overrightarrow{PA'}=l\cdot\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB'}=m\cdot\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC'}=n\cdot\overrightarrow{PC}$，

$\because\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{0}$，$\therefore l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$。$\because {}_a\triangle B'PC'={}_a\triangle A'PC'={}_a\triangle A'PB'$，

$\therefore\dfrac{{}_a\triangle PBC}{{}_a\triangle PB'C'}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\det|\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}{\frac{1}{2}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB'}\\ \overrightarrow{PC'}\end{pmatrix}|}=\dfrac{|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}{|\det\begin{pmatrix}m\cdot\overrightarrow{PB}\\ n\cdot\overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}=\dfrac{1}{|mn|}$，又$P$在$\triangle ABC$內部，$\dfrac{1}{|mn|}=\dfrac{1}{mn}$，

同理，$\dfrac{1}{ln}=\dfrac{{}_a\triangle PAC}{{}_a\triangle PA'C'}$，$\dfrac{1}{lm}=\dfrac{{}_a\triangle PAB}{{}_a\triangle PA'B'}$，故$l:m:n=\dfrac{1}{mn}:\dfrac{1}{ln}:\dfrac{1}{lm}={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$。#

< proof of Lemma 5(2)>

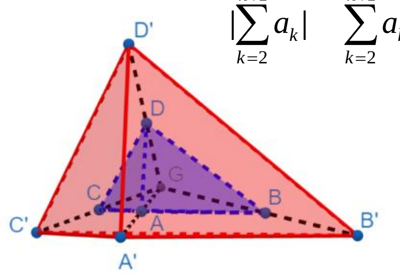
由於此處的證明和以下類似，故省略。

< proof of Lemma 5(3)>

設P為n維$n-$單體$A_1'A_2'\ldots A_{n+1}'$的重心，其中$a_k\cdot\overrightarrow{PA_k}=\overrightarrow{PA_k'}$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，

$\because\overrightarrow{PA_1'}+\overrightarrow{PA_2'}+\ldots+\overrightarrow{PA_{n+1}'}=\overrightarrow{0}$，$\therefore a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+\ldots+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$。因超體積$V_{PA_2'A_3'\ldots A_{n+1}'}=V_{PA_1'A_3'\ldots A_{n+1}'}=\ldots=V_{PA_1'A_2'\ldots A_n'}$，

$\dfrac{V_{PA_2A_3\ldots A_{n+1}}}{V_{PA_2'A_3'\ldots A_{n+1}'}}=\dfrac{\frac{1}{n}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2}\\ \overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}{\frac{1}{n}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2'}\\ \overrightarrow{PA_3'}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}'}\end{pmatrix}|}=\dfrac{|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2}\\ \overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}{|\det\begin{pmatrix}a_2\,\overrightarrow{PA_2}\\ a_3\,\overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ a_{n+1}\,\overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}=\dfrac{1}{|\prod_{k=2}^{n+1}a_k|}$，因為$P$在$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內部，$\dfrac{1}{|\prod_{k=2}^{n+1}a_k|}=\dfrac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}a_k}$



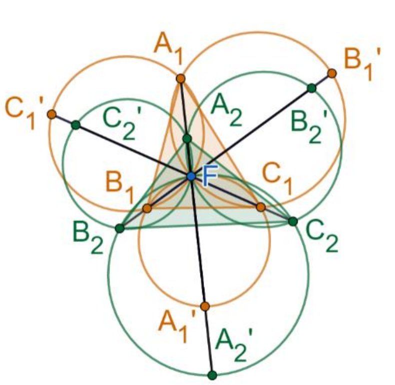
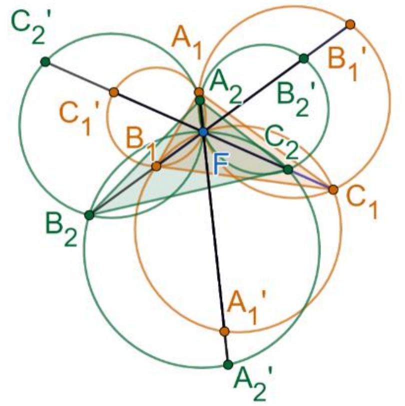
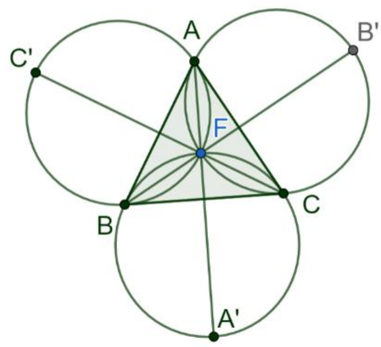
故$a_1:a_2:\ldots:a_{n+1}=V_{PA_2A_3\ldots A_{n+1}}:V_{PA_1A_3\ldots A_{n+1}}:\ldots:V_{PA_1A_2\ldots A_n}$。#

二、研究方法與過程

(一)利用三角函數及三線性坐標探討 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$

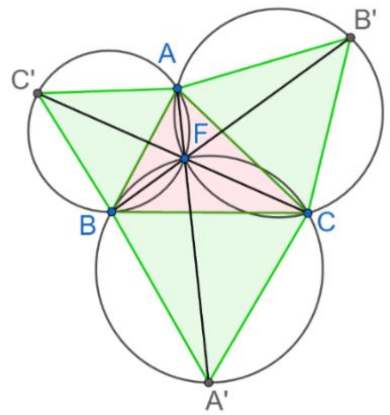
1. 費馬點

<GGB 測試結果>猜測：任意給定$\triangle ABC$滿足費馬點F在其內，則$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$。

銳角$\triangle ABC$，比值恆≥ 8。	$90^\circ\leq\angle A<120^\circ$，比值恆$\geq 8$。	正三角形時等號成立。
		
$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 8.53332\geq 8$ $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 10.11297\geq 8$	$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 12.11885\geq 8$ $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 10.86134\geq 8$	$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=8$

<Theorem 1>任意給定最大內角$\leq 120^\circ$的$\triangle ABC$，F為其費馬點，A'、B'、C'為以三邊向外做正三角形的頂點，滿足$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof>



$\because \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$，

$\therefore$ 由算幾不等式得 $\begin{cases}\overline{FA'}=\overline{FB}+\overline{FC}\geq 2\sqrt{\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\\ \overline{FB'}=\overline{FC}+\overline{FA}\geq 2\sqrt{\overline{FC}\cdot\overline{FA}}\\ \overline{FC'}=\overline{FA}+\overline{FB}\geq 2\sqrt{\overline{FA}\cdot\overline{FB}}\end{cases}$，

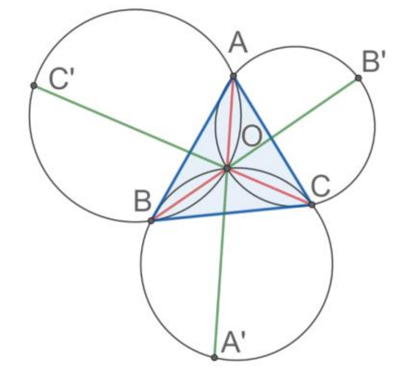
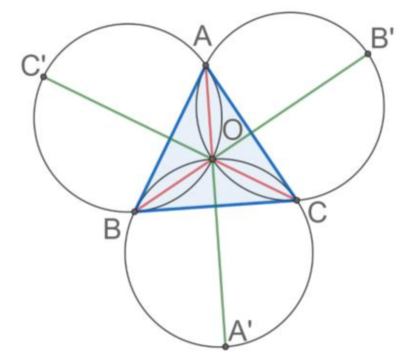
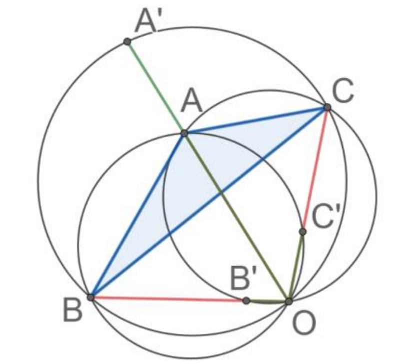
三式相乘得$\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}\geq 8\cdot\sqrt{\overline{FA}^2\cdot\overline{FB}^2\cdot\overline{FC}^2}=8\cdot\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}$，

故$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，且在等號成立時$\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FC}\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形。#

2. 外心

在討論完費馬點的比值之後，由於 $FBCA'$ 四點共圓，我們自然會想將費馬點轉換成外心，發現只有在 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時才會成立。

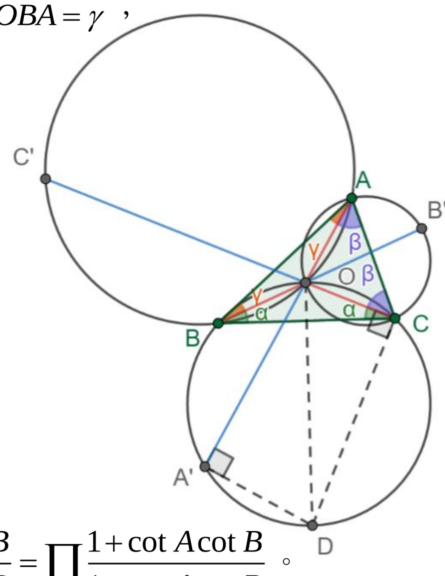
<GGB 測試結果>猜測：任意給定銳角 $\triangle ABC$ ，O 為其外心，恆滿足 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\geq 8$ 。

銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 ≥ 8 。	正三角形時等號成立。	鈍角 $\triangle ABC$ ，比值不恆 ≥ 8 。
		
$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 8.05229\geq 8$	$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=8$	$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.11935<8$

<Theorem 2>任意給定銳角 $\triangle ABC$ ，O 為其外心，$\overleftrightarrow{AO}$ 、$\overleftrightarrow{BO}$ 、$\overleftrightarrow{CO}$ 分別交 $\triangle BOC$ 、$\triangle AOC$ 、$\triangle AOB$ 的外接圓於 A' 、B' 、C'，滿足 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof>

1° 令 $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$ ，$\angle OCA=\angle OAC=\beta$ ，$\angle OAB=\angle OBA=\gamma$ ，



$\because \overline{BC}\perp\overline{OD}$ ，$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=90^{\circ}\\ \alpha+\angle DOC=90^{\circ}\end{cases}\Rightarrow \angle BAC=\angle DOC$ ，

$$\overline{OA'}=\overline{OD}\times\cos\angle A'OD=R\cdot\frac{\cos\angle A'OD}{\cos\angle COD}=R\cdot\frac{\cos(\angle C-\angle B)}{\cos A}$$

$$=R\cdot\frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C}{\sin B\sin C-\cos B\cos C}=R\cdot\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\ ,$$

同理，$\overline{OB'}=R\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}$ ，$\overline{OC'}=R\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$ ，

故 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$ 。

2° 令 $x=\cot B\cot C$ ， $y=\cot A\cot C$ ， $z=\cot A\cot B$

$$\Rightarrow x+y+z=\cot C\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B=-\cot\left(\angle A+\angle B\right)\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B$$

$$=-\frac{\cot B\cot A-1}{\cot B+\cot A}\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B=1 ，$$

$\because \triangle ABC$ 為銳角三角形，$\therefore x+y$ 、 $y+z$ 、 $z+x$ 大於 0 ，

由算幾不等式得
$$\begin{cases}\overline{OA'}=\overline{OA}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}=\overline{OA}\cdot\dfrac{(x+y)+(x+z)}{y+z}\geq\overline{OA}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}{y+z}\\ \overline{OB'}=\overline{OB}\cdot\dfrac{1+y}{1-y}=\overline{OB}\cdot\dfrac{(y+x)+(y+z)}{x+z}\geq\overline{OB}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(y+x)\cdot(y+z)}}{x+z}\\ \overline{OC'}=\overline{OC}\cdot\dfrac{1+z}{1-z}=\overline{OC}\cdot\dfrac{(z+x)+(z+y)}{x+y}\geq\overline{OC}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(z+x)\cdot(z+y)}}{x+y}\end{cases} ，$$

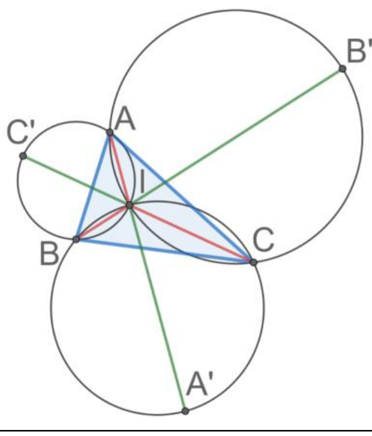
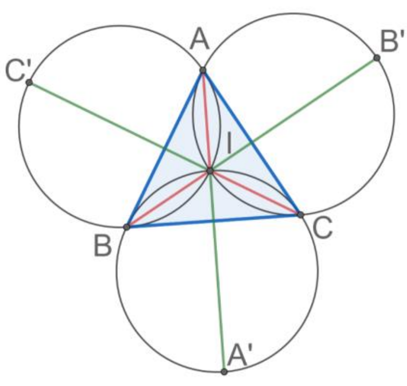
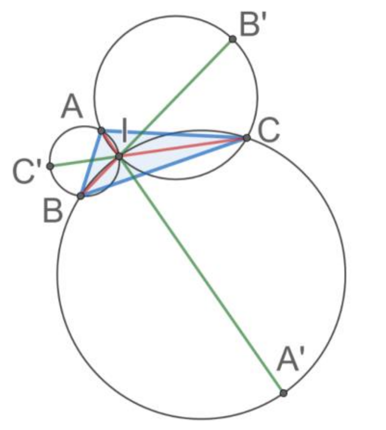
故 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\geq\dfrac{8\cdot\sqrt{(x+y)^2\cdot(y+z)^2\cdot(z+x)^2}}{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}=8$ ，

等號成立時 $x+y=y+z=z+x$ ， $x=y=z$ ， $\cot A=\cot B=\cot C$ ， $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$ 。

由 $1^\circ, 2^\circ$ 得 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$ ，且在等號成立時 $\triangle ABC$ 為正三角形。#

3. 內心

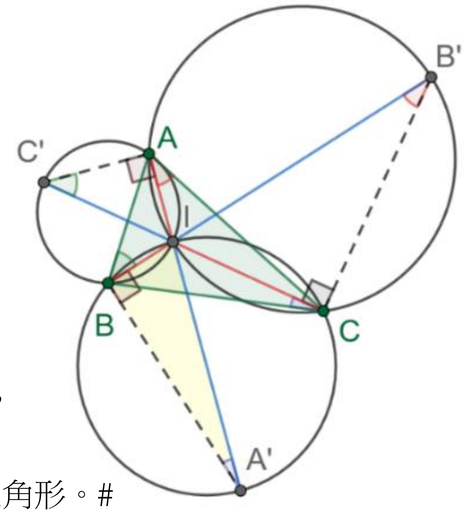
<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$ ， I 為其內心，恆滿足 $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 8$ 。

銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 ≥ 8 。	正三角形，等號成立。	鈍角 $\triangle ABC$ ，比值恆 ≥ 8 。
		
$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 9.67233\geq 8$	$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=8$	$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 14.71705\geq 8$

<Theorem 3>任意給定$\triangle ABC$，I為其內心，$\overleftrightarrow{AI}$、$\overleftrightarrow{BI}$、$\overleftrightarrow{CI}$分別交$\triangle BIC$、$\triangle CIA$、$\triangle AIB$的外接圓於A'、B'、C'，滿足$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof>

$$\because\begin{cases}\overline{IB}=\overline{IA'}\cdot\sin\frac{C}{2}\\ \overline{IC}=\overline{IB'}\cdot\sin\frac{A}{2}\\ \overline{IA}=\overline{IC'}\cdot\sin\frac{B}{2}\end{cases}，\therefore\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}，$$



由三角不等式得$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$，故$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 8$，

且在等號成立時，$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形。#

4. 垂心

我們透過 GGB 的觀察，發現當$\triangle ABC$為銳角三角形時，H為其垂心，恆滿足$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 8$。因為$\overleftrightarrow{AP}\perp\overline{BC}$，所以使用三線性坐標(Definition 1)來證明。

<Theorem 4>任意給定銳角$\triangle ABC$，H為其垂心，$\overleftrightarrow{AH}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$分別交$\triangle BHC$、$\triangle CHA$、$\triangle AHB$的外接圓於A'、B'、C'，滿足$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

註：外心和垂心比值相等的幾何意義在 p.27 討論。

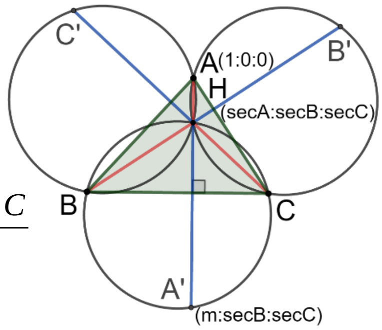
<proof>1°令A、B、C的直角坐標為(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，

A、H、A'的三線性座標為$(1:0:0)$、$(\sec A:\sec B:\sec C)$、$(m:\sec B:\sec C)$，

$\triangle ABC$之三邊長為a、b、c，由 Lemma1 得H、A'的直角坐標為

$$\left(\frac{ax_1\sec A+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C},\frac{ay_1\sec A+by_2\sec B+cy_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}\right)$$、

$$\left(\frac{ax_1m+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C},\frac{ay_1m+by_2\sec B+cy_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C}\right)$$，



$$\because x_A-x_H=\frac{b\sec B\cdot(x_1-x_2)+c\sec C\cdot(x_1-x_3)}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}$$，

又 $$x_H-x_{A'}=\frac{ax_1\sec A+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}-\frac{ax_1m+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C}$$

$$=\frac{\left[b\sec B\cdot(x_1-x_2)+c\sec C\cdot(x_1-x_3)\right]\cdot\left(a\sec A-am\right)}{\left(a\sec A+b\sec B+c\sec C\right)\cdot\left(am+b\sec B+c\sec C\right)}$$，

$$\therefore \overline{AH}\cdot\frac{\sec A\cdot a-m\cdot a}{m\cdot a+\sec B\cdot b+\sec C\cdot c}=\overline{A'H}$$，

$$\because\begin{cases}\overline{A'B}\cdot\sin\angle CBA'=\overline{AB}\cdot\sin B=-m\\ \overline{A'B}\cdot\sin\angle DBA'=\overline{AB}\cdot\sin(180^\circ-2\angle B)=\sec C\end{cases}$$，$$\therefore m=\frac{-\sin B\cdot\sec C}{\sin(180^\circ-2\angle B)}=\frac{-\sin B\cdot\sec C}{\sin 2B}=\frac{-\sec C}{2\cos B}$$

$$\Rightarrow\frac{a\sec A-am}{am+b\sec B+c\sec C}=\frac{\sin A\cdot(\sec A+\dfrac{\sec C}{2\cos B})}{-\dfrac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A+b\sec B+c\sec C}$$，

$$\because-\frac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A=-\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{2\cos B\cos C}=-\left(\frac{\tan B+\tan C}{2}\right)$$，

$$\therefore\frac{\sin A\cdot(\sec A+\dfrac{\sec C}{2\cos B})}{-\dfrac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A+b\sec B+c\sec C}=\frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}{\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}$$，

$$\because\tan\left(\angle B+\angle C\right)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan A$$，$$\tan B+\tan C=\tan A\cdot\left(\tan B\tan C-1\right)$$，

$$\therefore\frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}{\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}=\frac{\tan A\cdot\left(\tan B\tan C+1\right)}{\tan A\cdot\left(\tan B\tan C-1\right)}=\frac{\tan B\tan C+1}{\tan B\tan C-1}=\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$$，

故 $\overline{AH}\cdot\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}=\overline{A'H}$，同理 $\overline{BH}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}=\overline{B'H}$，$\overline{CH}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\overline{C'H}$，

得 $$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$$。

2° 由於 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$，故 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 8$。#

5. 重心

我們透過 GGB 的觀察，發現任意給定$\triangle ABC$，G 為其重心，恆滿足$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}\ge 8$。證明時，我們嘗試了許多不同的方法，包括前面使用過的幾何觀點與三線性坐標，但都沒有好的結果，而重心有三塊面積相等的特性，最終使用面積坐標(Definition2)完成證明。

<Theorem 5>任意給定$\triangle ABC$，G 為其重心，$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 分別交$\triangle BGC$、$\triangle CGA$、$\triangle AGB$ 的外接圓於 A'、B'、C'，滿足

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\ge 8$$

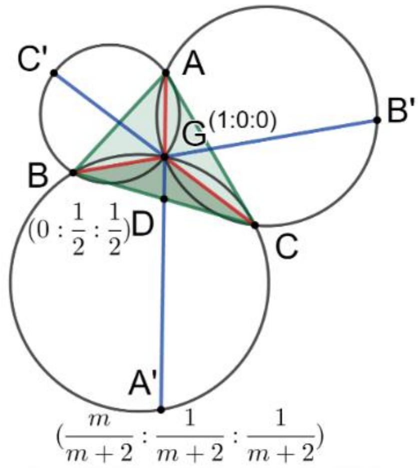
，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof>

1° 令 G、D、A' 對$\triangle GBC$ 的規範化面積坐標為$(1:0:0)$、$\left(0:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{2}\right)$、$\left(\dfrac{m}{m+2}:\dfrac{1}{m+2}:\dfrac{1}{m+2}\right)$，

由 Lemma3，設$\dfrac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{DA'}}=p$，$0=\dfrac{1+p\cdot\dfrac{m}{m+2}}{1+p}$ 且$\dfrac{1}{2}=\dfrac{p\cdot\dfrac{1}{m+2}}{1+p}$，$p=\dfrac{\overline{GD}}{\overline{DA'}}=-\dfrac{m+2}{m}\Rightarrow\overline{GA'}=\dfrac{\overline{GA}}{m+2}$，

又由 Lemma4 得$\overline{BC}^2+\left(\overline{GB}^2+\overline{GC}^2\right)\cdot m=0$，$m=\dfrac{-\overline{BC}^2}{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}$



$$\Rightarrow\frac{1}{m+2}=\frac{1}{\dfrac{-\overline{BC}^2}{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}+2}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{2\cdot\overline{GB}^2+2\cdot\overline{GC}^2-\overline{BC}^2},$$

由中線定理得$\begin{cases}\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2\cdot\left(\overline{GD}^2+\overline{BD}^2\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\overline{GA}^2+\overline{BC}^2\right)\\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\cdot\left(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2\right)\end{cases}$，

$$\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{2\cdot\overline{GB}^2+2\cdot\overline{GC}^2-\overline{BC}^2}=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\overline{GA}^2+\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC}^2}{\overline{GA}^2}=\frac{2\cdot\overline{GD}^2+2\cdot\overline{BD}^2}{\overline{GA}^2}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\Rightarrow\overline{GA'}=\overline{GA}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2},$$

同理，$\overline{GB'}=\overline{GB}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}$，$\overline{GC'}=\overline{GC}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}$，

得 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}$ ，

$\because \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ，$\therefore \overline{GA}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)$ ，

同理，$\overline{GB}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos B\right)$ ，$\overline{GC}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos C\right)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\text{。}$$

2° 由算幾不等式得

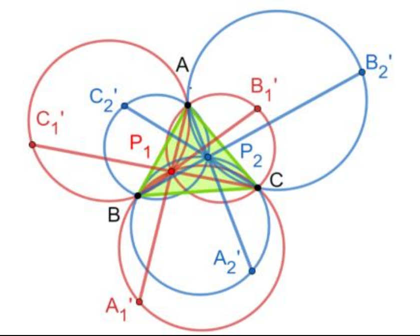
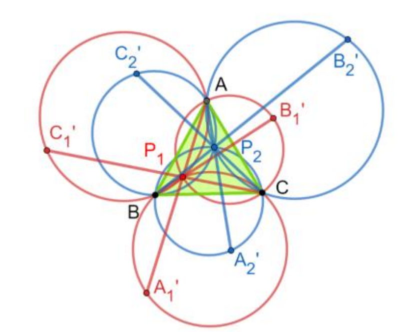
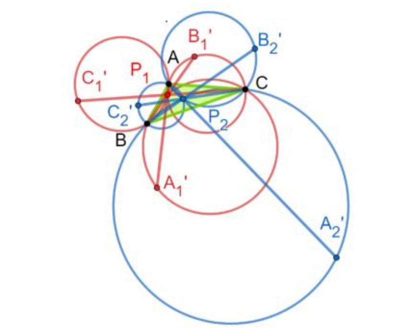
$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GB}^2\cdot\overline{GC}^2}{\overline{GA}^4}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GA}^2\cdot\overline{GC}^2}{\overline{GB}^4}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GA}^2\cdot\overline{GB}^2}{\overline{GC}^4}}=8\text{，}$$

故 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}\geq 8$ ，且等號成立時滿足 $\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}\Leftrightarrow \triangle ABC$ 為正三角形。#

6. 任意點

探討完特殊點的情況後，我們想把定理推廣到任意點在三角形內部的情形。證明時，因為圖形中沒有特殊的幾何性質，我們很難透過三角函數及解析幾何完成證明，再觀察到重心的三塊面積相同，自然而然地去觀察 P 與三邊圍成的面積，最後引入了向量的證明手法完成證明。

<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$ 及其內一點 P ，恆滿足 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$ 。

當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形且 P 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。	當 $\triangle ABC$ 為正三角形且 P 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。	當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形且 P 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。
		
$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 8.14328\geq 2^3$ $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 8.06391\geq 2^3$	$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 8.50781\geq 2^3$ $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 8.08883\geq 2^3$	$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 13.07403\geq 2^3$ $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 15.50069\geq 2^3$

<Theorem 6>任意給定三角形$\triangle ABC$，P為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於A'、B'、C'，則$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，且當等號成立時若且唯若$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。

<proof>由 Lemma6(1)得知對於$\triangle ABC$內部一點任意一點P，存在實數l、m、n使得

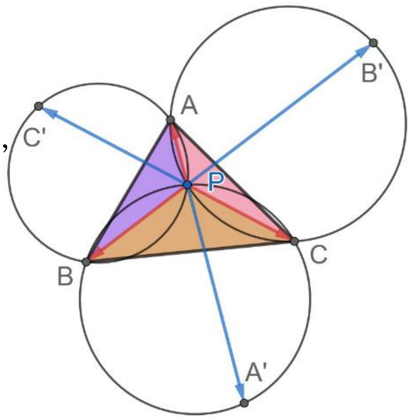
$l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中$l:m:n={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$。

令$\overrightarrow{AP}=\lambda_A\cdot\overrightarrow{PA'}$，則$-\lambda_A l\cdot\overrightarrow{PA'}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow -\lambda_A l\cdot\overrightarrow{OA'}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}=\left(-\lambda_A l+m+n\right)\cdot\overrightarrow{OP}$，$O$、$R$分別為$\triangle BPC$的外接圓圓心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_A l\cdot\left|\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_A l\cdot\overline{OA'}^2-\lambda_A l\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_A l\cdot\left(\overrightarrow{OA'}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(1)\\ m\cdot\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right|^2=m\cdot\overline{OB}^2+m\cdot\overline{OP}^2-2m\cdot\left(\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(2)\\ n\cdot\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right|^2=n\cdot\overline{OC}^2+n\cdot\overline{OP}^2-2n\cdot\left(\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(3)\end{cases}$$

，



由$(1)+(2)+(3)$得$-\lambda_A l\cdot\overline{PA'}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2$

$$=-\lambda_A l\cdot\overline{OA'}^2+m\cdot\overline{OB}^2+n\cdot\overline{OC}^2+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_A l\cdot\overrightarrow{OA'}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)-2R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)=0，$$

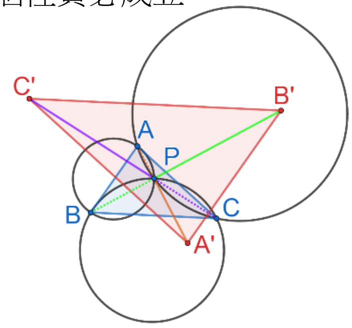
$$\therefore\lambda_A=\frac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA'}^2}\Rightarrow\frac{1}{\lambda_A}=\frac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{m\cdot\overline{PB}^2\cdot n\cdot\overline{PC}^2}{l^2\cdot\overline{PA}^4}}，$$

同理，$\dfrac{1}{\lambda_B}\ge 2\cdot\sqrt{\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2\cdot n\cdot\overline{PC}^2}{m^2\cdot\overline{PB}^4}}$，$\dfrac{1}{\lambda_C}\ge 2\cdot\sqrt{\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2\cdot m\cdot\overline{PB}^2}{n^2\cdot\overline{PC}^4}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda_A}\cdot\dfrac{1}{\lambda_B}\cdot\dfrac{1}{\lambda_C}\ge 8$，$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，

且當等號成立時$l\cdot\overline{PA}^2=m\cdot\overline{PB}^2=n\cdot\overline{PC}^2\Rightarrow\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。#

討論 1 $\triangle ABC$ 中，P 為其內一點滿足 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$，則下列兩個性質必成立。



(1) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ 、 $\overline{BC}//\overline{B'C'}$ 、 $\overline{AC}//\overline{A'C'}$ 。

(2) $\overline{PA}\sin\angle BPC=\overline{PB}\sin\angle APC=\overline{PC}\sin\angle APB$ 。

<proof>

(1) $\because \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=2$，又 $\because \angle APB=\angle A'PB'$ (對頂角) $\therefore \triangle APB \sim \triangle A'PB'$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \overline{A'B'}=2\overline{AB}$ 且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$，同理，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$ ，$\overline{A'C'}=2\overline{AC}$ ，

得 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$(SSS 相似)且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ 、 $\overline{BC}//\overline{B'C'}$ 、 $\overline{AC}//\overline{A'C'}$ 。#

(2)由 $l\cdot\overline{PA}^2=m\cdot\overline{PB}^2=n\cdot\overline{PC}^2$ ，

得 $\overline{PA}^2\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\sin\angle BPC=\overline{PA}\cdot\overline{PB}^2\cdot\overline{PC}\sin\angle APC=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}^2\sin\angle APB$ ，

$\therefore \overline{PA}\sin\angle BPC=\overline{PB}\sin\angle APC=\overline{PC}\sin\angle APB$ 。#

討論 2 僅當 $\triangle ABC$ 為正三角形且 P 在四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$。也就是說，當 $\triangle ABC$ 不為正三角形或 P 不在正三角形四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}>8$ 。

<說明>由於 P 是 $\triangle ABC$ 內任意一點，所以也須滿足特殊點的情況，而當 P 為特殊點時，等式成立的條件為 $\triangle ABC$ 是正三角形，故 $\triangle ABC$ 必為正三角形，P 在四心共點的位置。#

討論 3 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}$ 、 $\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$ 、 $\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 三段比值不會同時大於 2 。

<proof>

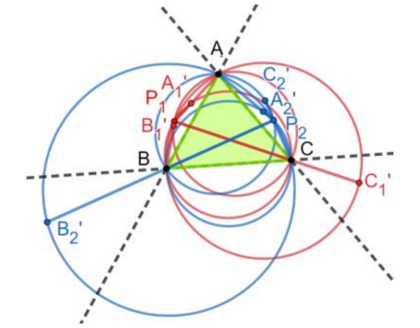
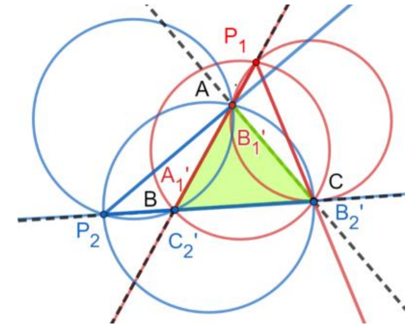
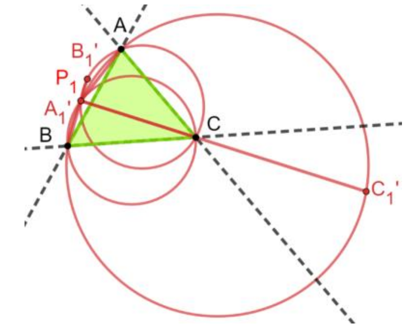
由任意點結論，設 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}>2$ ，$m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2>2l\cdot\overline{PA}^2$ ...(1) ，

同理，$l\cdot\overline{PA}^2+n\cdot\overline{PC}^2>2m\cdot\overline{PB}^2$ ...(2) ，$l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2>2n\cdot\overline{PC}^2$ ...(3) ，

由於三式相加後顯然矛盾，故三段比值不會同時大於 2 。#

$\boxed{\text{討論 4}}$ P 點在三角形外部時，不會恆滿足 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$ 。

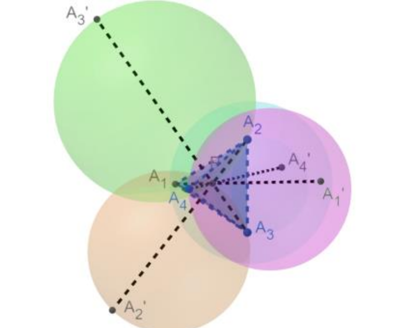
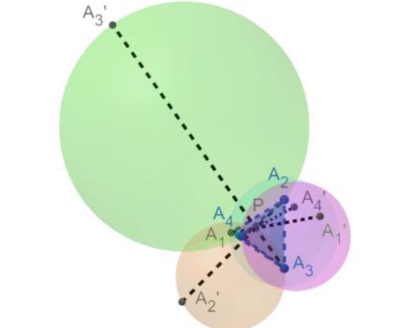
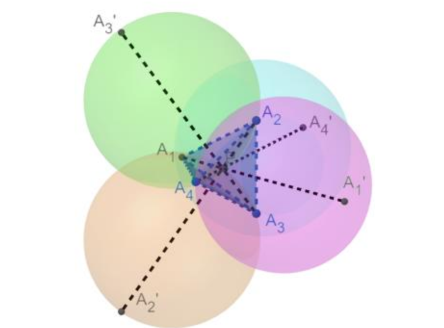
由 GGB 的觀察，當 P 點在三角形外部時，比值可以為任意非負實數。

P 與 A' 、 B' 、 C' 其中一點很靠近時，比值趨近於 0。	P 與 $\triangle ABC$ 三邊的直線非常靠近時，比值趨近於 ∞ 。	P 與 A' 、 B' 、 C' 其中一點重合，比值等於 0。
		
$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 0.05579$ $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 0.19506$	$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 334.58021$ $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 108.32088$	$\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}=0$

(二)在三維、n 維空間中探討線段比值關係

我們想將任意點結論推廣至三維空間，把三角形和圓分別換成四面體和球。

<GGB 測試結果>猜測：當 P 在四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 內，滿足 $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq 81$ 。

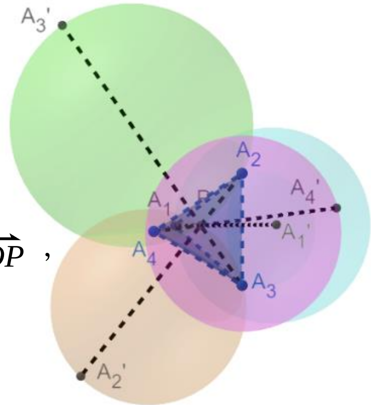
測試一	測試二	正四面體 $A_1A_2A_3A_4$ ，P 為四心
		
$\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\approx 88.08>81$	$\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\approx 108.76>81$	$\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=81$

<Theorem 7>在空間中，任意給定四面體 $A_1A_2A_3A_4$ ，P 為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別與四面體 $P-A_2A_3A_4$ 、$P-A_1A_3A_4$ 、$P-A_1A_2A_4$ 、$P-A_1A_2A_3$ 的外接球交於 A_1' 、A_2' 、A_3' 、A_4' ，滿足 $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq 81$ ，且當等號成立時若且唯若 $\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=3$ ，$\forall k\in\{1,2,3,4\}$ 。

<proof>

由 Lemma 6(2)得知對於四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 內部任意一點 P，存在實數 a_1、a_2、a_3、a_4 使得

$a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\vec{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:a_3:a_4=V_{PA_2A_3A_4}:V_{PA_1A_3A_4}:V_{PA_1A_2A_4}:V_{PA_1A_2A_3}$。



令 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{PA_1}'$，

則 $-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}'+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\vec{0}$

$\Rightarrow-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1}'+a_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{OA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{OA_4}=\left(-\lambda_1\cdot a_1+a_2+a_3+a_4\right)\cdot\overrightarrow{OP}$，

O、R 分別為四面體 $P-A_2A_3A_4$ 的外接球球心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_1a_1\cdot\left|\overrightarrow{OA_1}'-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1}'^2-\lambda_1a_1\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_1a_1\cdot\left(\overrightarrow{OA_1}'\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(1)\\ \sum_{k=2}^{4}\left(a_k\cdot\left|\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OP}\right|^2\right)=\sum_{k=2}^{4}\left(a_k\cdot\overline{OA_k}^2+a_k\cdot\overline{OP}^2-2a_k\cdot\left(\overrightarrow{OA_k}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\right)\ldots(2)\end{cases},$$

由 $(1)+(2)$ 得 $-\lambda_1a_1\cdot\overline{PA_1}'^2+\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overline{PA_k}^2$

$$=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1}'^2+\left(\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overline{OA_k}^2\right)+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1}'+\left(\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overrightarrow{OA_k}\right)\right)$$

$$=R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)-2\cdot R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)=0，$$

$$\therefore\lambda_1=\frac{\sum_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}'^2}\Rightarrow\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\sum_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\geq3\cdot\sqrt[3]{\frac{\prod_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^3\cdot\overline{PA_1}^6}}=3\cdot\sqrt[3]{\frac{\prod_{i=1}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^4\cdot\overline{PA_1}^8}},$$

同理，$\dfrac{1}{\lambda_k}\geq3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\prod_{i=1}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_k^4\cdot\overline{PA_k}^8}}$，得 $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{1}{\lambda_k}\geq81\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k}'}{\overline{PA_k}}\geq81$，

且當等號成立時，$a_k\cdot\overline{PA_k}^2$ 為定值 $\Rightarrow\lambda_k=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{\overline{PA_k}'}{\overline{PA_k}}=3$，$\forall k\in\{1,2,3,4\}$，故得證。#

$\boxed{\text{推廣}}$由二維平面以及三維空間的結論，我們想推廣至 n 維空間，並推論 $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$。

<Corollary 1>在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，任意給定 n 維 $n-$單體 $A_1A_2...A_{n+1}$，P 為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$ 分別與 n 維 $n-$單體 $P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2...A_n$ 的外接 n 維球交於 A_1'、A_2'、⋯、A_{n+1}'，滿足 $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$，等號成立時若且唯若 $\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。

<proof>由 Lemma 6(3)得知對於 n 維 $n-$單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 內部任意一點 P，存在實數 a_1、⋯、a_{n+1} 使得 $a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+...+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:...:a_{n+1}=V_{PA_2A_3...A_{n+1}}:V_{PA_1A_3...A_{n+1}}:...:V_{PA_1A_2...A_n}$。

令 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{PA_1'}$，則 $-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{PA_1'}+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{PA_i}\right)=\overrightarrow{0}\Rightarrow-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1'}+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{OA_i}=\left(-\lambda_1\cdot a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)\cdot\overrightarrow{OP}$，

O、R 分別為 n 維 $n-$單體 $P-A_2A_3...A_{n+1}$ 的外接 n 維球體的球心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_1a_1\cdot\left|\overrightarrow{OA_1'}-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2-\lambda_1a_1\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_1a_1\cdot\left(\overrightarrow{OA_1'}\bullet\overrightarrow{OP}\right)...(1)\\ \sum_{i=2}^{n+1}\left(a_i\cdot\left|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OP}\right|^2\right)=\sum_{i=2}^{n+1}\left(a_i\cdot\overline{OA_i}^2+a_i\cdot\overline{OP}^2-2a_i\cdot\left(\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\right)...(2)\end{cases},$$

由 $(1)+(2)$ 得 $-\lambda_1a_1\cdot\overline{PA_1'}^2+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2$

$$=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{OA_i}^2\right)+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1'}+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)\right)$$

$$=R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)-2\cdot R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)=0,$$

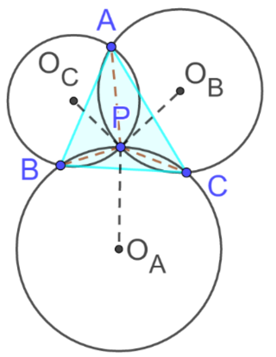
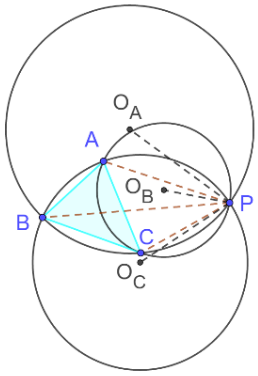
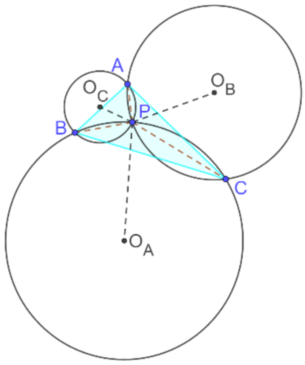
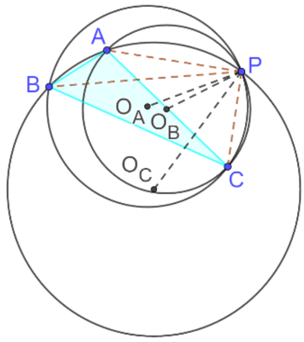
$$\therefore\lambda_1=\frac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1'}^2}\Rightarrow\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^{\,n}\cdot\overline{PA_1}^{2n}}}=n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^{\,n+1}\cdot\overline{PA_1}^{2n+2}}},$$

同理，$\frac{1}{\lambda_k}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_k^{\,n+1}\cdot\overline{PA_k}^{2n+2}}}\Rightarrow\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\lambda_k}\geq n^{n+1}$，$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$，

當等號成立時，$a_k\cdot\overline{PA_k}^2$ 為定值 $\Rightarrow\lambda_k=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。#

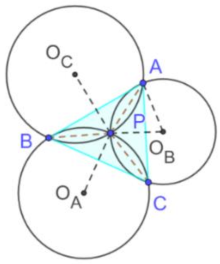
(三)利用三角函數探討 $\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\ge 1$

<GGB 測試結果>猜測：任意給定$\triangle ABC$及一點P，$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓半徑分別為r_A、r_B、r_C，恆滿足$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\ge 1$。

任意銳角$\triangle ABC$， P在$\triangle ABC$內。	任意銳角$\triangle ABC$， P在$\triangle ABC$外。	任意鈍角$\triangle ABC$， P在$\triangle ABC$內。	任意鈍角$\triangle ABC$， P在$\triangle ABC$外。
			
$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\approx 1.23>1$	$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\approx 0.35<1$	$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\approx 1.52>1$	$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\approx 0.49<1$

< Theorem 8>任意給定$\triangle ABC$及一點P，$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓半徑分別為r_A、r_B、r_C，滿足$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\ge 1$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形，$P$為其內心。

<proof>



$\because \frac{r_B}{\sin\angle PAO_B}=\frac{\overline{AP}}{\sin\angle AO_BP}$，$\therefore \frac{r_B}{\overline{AP}}=\frac{1}{2\sin\angle PCA}$，

同理，$\frac{r_C}{\overline{BP}}=\frac{1}{2\sin\angle PAB}$，$\frac{r_A}{\overline{CP}}=\frac{1}{2\sin\angle PBC}$，

$\because \frac{r_B}{\sin\angle PCO_B}=\frac{\overline{CP}}{\sin\angle CO_BP}$，$\therefore \frac{r_B}{\overline{CP}}=\frac{1}{2\sin\angle PAC}$，同理，$\frac{r_C}{\overline{AP}}=\frac{1}{2\sin\angle PBA}$，$\frac{r_A}{\overline{BP}}=\frac{1}{2\sin\angle PCB}$，

得$\left(\frac{r_A\cdot r_B\cdot r_C}{\overline{AP}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{CP}}\right)^2=\frac{1}{64\cdot\sin\angle PCA\cdot\sin\angle PAB\cdot\sin\angle PBC\cdot\sin\angle PAC\cdot\sin\angle PBA\cdot\sin\angle PCB}$，

由琴生不等式得$\left(\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\right)^2\ge 1$，$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\ge 1$，

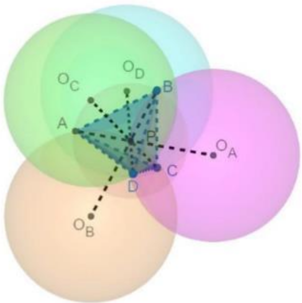
且在等號成立時，$\sin\angle PCA=\sin\angle PAB=\sin\angle PBC=\sin\angle PAC=\sin\angle PBA=\sin\angle PCB$

$\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形，$P$為內心。#

推廣我們除了能透過琴生不等式完成 Thm.8 的證明，也可以透過 Thm.6 的結果完成，甚至利用 Thm.7 及 Corollary 1 推廣至三維、n 維空間。

<Corollary 2>在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定n維$n-$單體$A_1A_2...A_{n+1}$，P為其內部任意一點，n維$n-$單體$P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2...A_n$的外接n維球球半徑分別為r_1、r_2、…、r_{n+1}，則$\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{PA_k}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\overline{PA_k'}=2r_k,\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。

<proof>



$\because\overline{PA_k'}\leq 2r_k,\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$，$\displaystyle\therefore\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{PA_k}\geq\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{2\cdot PA_k}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，

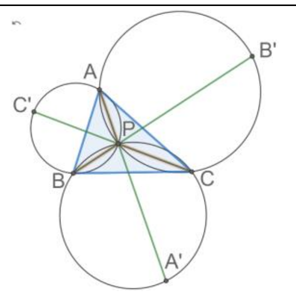
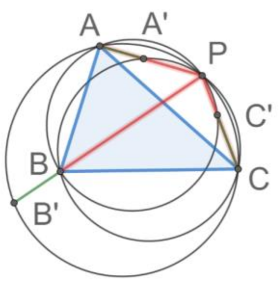
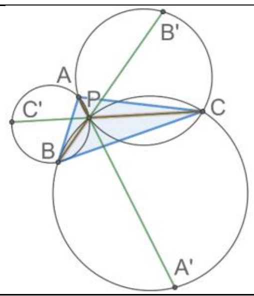
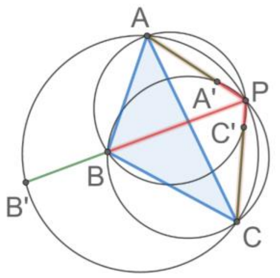
且在等號成立時，$\overline{PA_k'}=2r_k$，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。#

(四)利用向量探討 $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$

1. 任意點

我們好奇在任意點的情況，是否滿足恆等式，我們引入向量的觀點，發現不論P點在三角形內部或外部，都能滿足恆等式，推廣到三維，甚至n維空間中都成立。

<GGB 測試結果>推測：平面上任意給定$\triangle ABC$與一點P，恆滿足$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$

當$\triangle ABC$是銳角三角形且P在$\triangle ABC$內。	當$\triangle ABC$是銳角三角形且P在$\triangle ABC$外。	當$\triangle ABC$是鈍角三角形且P在$\triangle ABC$內。	當$\triangle ABC$是鈍角三角形且P在$\triangle ABC$外。
			
$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 0.28503+0.25199$ $+0.46497=1$	$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 2.33571-3.06389$ $+1.72819=1$	$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 0.18098+0.28543$ $+0.59559=1$	$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 1.40675-1.68903$ $+1.28229=1$

<Corollary 3>任意給定$\triangle ABC$，P為其內任意一點，$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$這三個三角形的外接圓於A'、B'、C'，則$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。

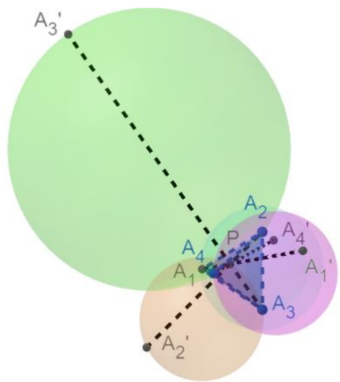
<proof>∵ 在 Thm.6 的證明中，得$\overrightarrow{PA'}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\cdot\overrightarrow{AP}$，

$\therefore \overrightarrow{AA'}=\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\cdot\overrightarrow{AP}$，$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}=\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，

同理，$\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，$\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=\dfrac{n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，得$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。#

2. n維

<Corollary 4>在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定n維$n-$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$與P，$\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overrightarrow{A_{n+1}P}$. 分別與$n$維$n-$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n$維球交於$A_1'$、$A_2'$、⋯、$A_{n+1}'$，恆滿足$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$。



<proof> 因為在 Corollary 1 的證明中，得$\overrightarrow{PA_1'}=\dfrac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\cdot\overrightarrow{A_1P}$，

$\therefore \overrightarrow{A_1A_1'}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\cdot\overrightarrow{A_1P}\Rightarrow\dfrac{\overrightarrow{A_1P}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}=\dfrac{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}$

同理，$\dfrac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=\dfrac{a_k\cdot\overline{PA_k}^2}{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，得$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$#

討論 5 在 2008 年的 BAMO 試題中[4](*10th Bay Area Mathematical Olympiad*，2008)有和此處類似的性質，比較兩者間的差異，特別的是，我們可以將結論推廣至$\mathbb{R}^n$空間。

	BAMO 2008	Corollary 3-4
P點位置	P在$\triangle ABC$內	P為任意一點
比值表示法	線段比值	向量係數積

維度	僅限於二維平面	任意$\mathbb{R}^n$空間
證明手法	反演	向量面積比性質

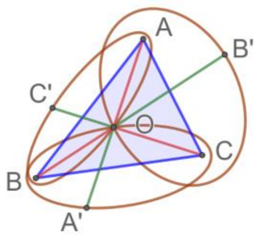
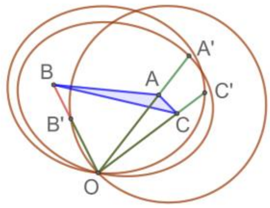
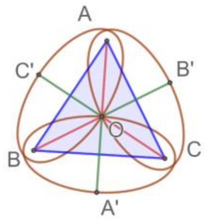
(五)將圓轉換成橢圓探討其比值關係

1. 以三邊為焦距、取三角形內一點屬於橢圓

任意給定$\triangle ABC$與一點P，分別以三邊為焦距與其上一點P建構橢圓Γ_A、Γ_B、Γ_C，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交Γ_A、Γ_B、Γ_C於A'、B'、C'，並觀察$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$的範圍。

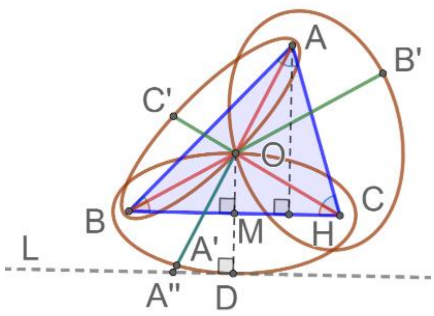
(1)外心

<GGB 測試結果>猜測：O為外心且$\triangle ABC$為銳角三角形時，恆滿足$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$。

銳角$\triangle ABC$，比值恆≤ 1。	鈍角$\triangle ABC$，比值不恆≤ 1。	正三角形，等號成立。
		
$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.89856\le 1$	$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 1.24636>1$	$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=1$

<Theorem 9>任意給定$\triangle ABC$，O為其外心，以三邊為焦距，O為橢圓上一點建構橢圓Γ_A、Γ_B、Γ_C，$\overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BO}$、$\overleftrightarrow{CO}$分別交Γ_A、Γ_B、Γ_C於A'、B'、C'，滿足$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof> 假設M為$\overline{BC}$中點，H為A在$\overline{BC}$上的垂足，



$\overrightarrow{OM}$交以B、C為焦點，O為橢圓上一點的橢圓於D，

過D做L且平行$\overline{BC}$，$\overrightarrow{OA}$交L於$A"$，

則$\overline{OM}=\overline{OC}\sin\gamma=R\sin\left(90^\circ-A\right)=R\cos A$，

$\overline{AH}=b\sin C=c\sin B=2R\sin B\sin C$，$\overline{OD}=2\overline{OM}=2R\cos A$

$$\Rightarrow\frac{\overline{OA"}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{AH}-\overline{OM}}=\frac{2R\cos A}{\overline{AH}-R\cos A}=\frac{2\cos A}{2\sin B\sin C-\cos A}=\frac{2\sin B\sin C-2\cos B\cos C}{\sin B\sin C+\cos B\cos C}=2\cdot\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}，$$

同理，$\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}=2\cdot\dfrac{1-\cot A\cot C}{1+\cot A\cot C}$，$\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=2\cdot\dfrac{1-\cot A\cot B}{1+\cot A\cot B}$，得 $\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=8\cdot\prod_{cyc}\dfrac{1-\cot A\cot B}{1+\cot A\cot B}\le 1$，

等號成立時 $\cot A=\cot B=\cot C$ ， $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC$ 為正三角形，

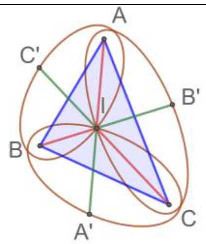
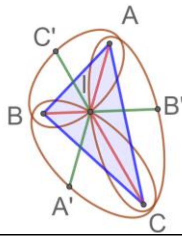
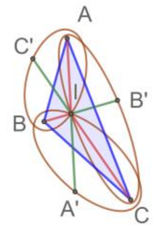
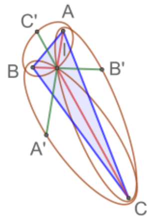
又顯然 $\overline{OA'}\le\overline{OA''}$ ，故 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}\le 1$ ，

且當 $\triangle ABC$ 為正三角形時， A' 與 A'' 重合，

$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=1$ ，得 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$ 。#

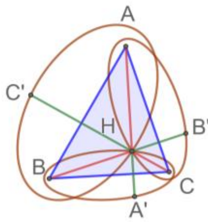
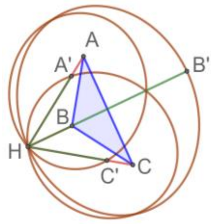
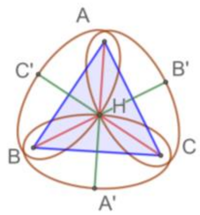
(2)內心

<GGB 測試結果> 猜測： I 為內心時，沒有特殊的性質。

銳角三角形一	銳角三角形二	鈍角三角形一	鈍角三角形二
			
$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 0.98\le 1$	$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 1.03>1$	$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 0.88\le 1$	$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 1.07>1$

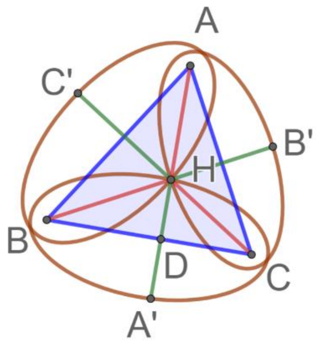
(3)垂心

<GGB 測試結果> 猜測： H 為垂心且 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，恆滿足 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$ 。

銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 ≤ 1 。	鈍角 $\triangle ABC$ ，比值不恆 ≤ 1 。	正三角形，等號成立。
		
$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 0.76734\le 1$	$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 2.12402>1$	$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=1$

<Theorem 10>任意給定 $\triangle ABC$ ，H 為其垂心，以三邊為焦距，H 為橢圓上一點建構橢圓 Γ_A 、Γ_B 、Γ_C ，$\overrightarrow{AH}$ 、$\overrightarrow{BH}$ 、$\overrightarrow{CH}$ 分別交 Γ_A 、Γ_B 、Γ_C 於 A' 、B' 、C' ，則 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$ ，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof>



$\because \triangle AFH \sim \triangle ADB$，$\therefore \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AH}\cdot\overline{AD}=\overline{AF}\cdot\overline{AB}=b\cos A\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AH}=\dfrac{bc\cos A}{c\sin B}=\dfrac{b\left(\sin B\sin C-\cos B\cos C\right)}{\sin B}$，

又 $\overline{AD}=b\sin C \Rightarrow \overline{HA'}=2\left(\overline{AD}-\overline{AH}\right)=\dfrac{2b\cos B\cos C}{\sin B}$，

$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=\dfrac{2\cos B\cos C}{\sin B\sin C-\cos B\cos C}=2\cdot\dfrac{\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\le 2\cdot\dfrac{\cot B\cot C}{\sqrt{\cot C\cot A+\cot A\cot B}}$

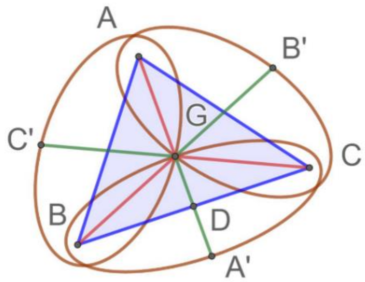
同理，$\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\le 2\cdot\dfrac{\cot A\cot B}{\sqrt{\cot A\cot B+\cot B\cot C}}$，$\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 2\cdot\dfrac{\cot C\cot B}{\sqrt{\cot B\cot C+\cot C\cot A}}$，

$\therefore \dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}2\cdot\dfrac{\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\le 1$。#

(4)重心

<Theorem 11>任意給定$\triangle ABC$，G 為其重心，以三邊為焦距，G 為橢圓上一點建構橢圓Γ_A、Γ_B、Γ_C，$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 分別交Γ_A、Γ_B、Γ_C於 A'、B'、C'，則 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$且 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。

<proof>



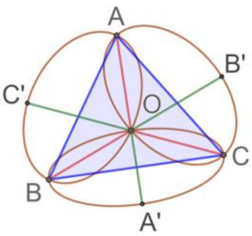
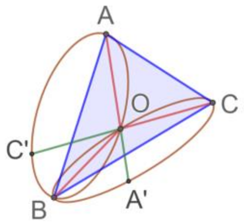
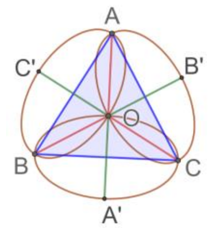
$\because \overline{AG}=2\cdot\overline{GD}$，又 D 為橢圓中心，$\therefore \overline{GD}=\overline{GA'} \Rightarrow \overline{GA}=\overline{GA'}$，

同理，$\overline{GB}=\overline{GB'}$，$\overline{GC}=\overline{GC'}$，故 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。#

2. 以三邊為長軸，取三角形內一點屬於橢圓

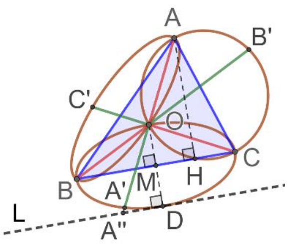
此處的規則我們改分別以三邊為長軸與其上一點 P 建構橢圓Γ_A、Γ_B、Γ_C，發現大部分的性質和前面一樣，唯一不同的地方在於橢圓存在的條件。

(1)外心 <GGB 測試結果> 猜測：O 為外心且三內角皆在 45° 和 90° 之間時，恆滿足 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$。(Remark: 三內角皆在 45° 和 90° 之間時，橢圓長軸才會大於短軸。)

$45^\circ <$ 三內角 $<90^\circ$，比值 ≤ 1	當其中一或二內角 $<45^\circ$	正三角形，等號成立
		
$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.95156<1$	短軸比長軸長，比值未定義	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=1$

<Theorem 12>任意給定 $\triangle ABC$，O 為其外心，以三邊為長軸，O 為橢圓上一點建構橢圓 Γ_A、Γ_B、Γ_C，$\overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BO}$、$\overleftrightarrow{CO}$ 分別交 Γ_A、Γ_B、Γ_C 於 A'、B'、C'，則當三內角皆在 45° 和 90° 之間時，$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，且等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof> 1° $\because$ 橢圓存在的條件為 $\overline{BM}\ge\overline{OM}$，



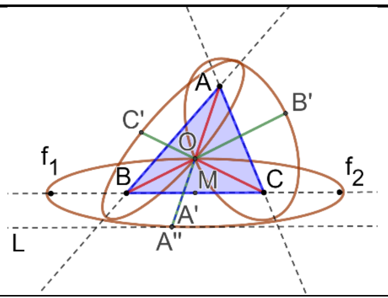
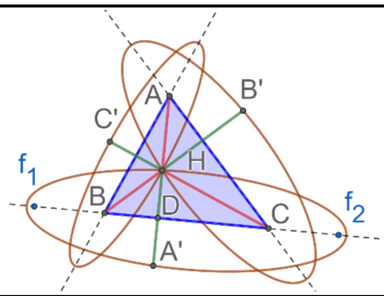
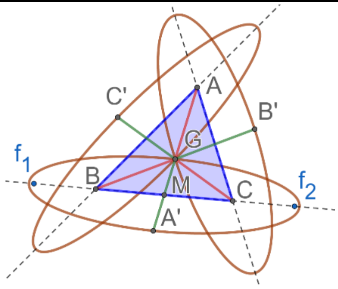
$\therefore \overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=R\sin A\ge\overline{OM}=R\sin\beta=R\sin\left(90^\circ-A\right)=R\cos A$

$\Rightarrow \tan A\ge 1$，$45^\circ\le\angle A<90^\circ$，同理，$45^\circ\le\angle B<90^\circ$，$45^\circ\le\angle C<90^\circ$。

2° 可以用與 Thm 8 相同方法證出 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，且當等號成立時，$\triangle ABC$ 為正三角形。#

推廣 兩焦點在三邊延長直線上任意移動，性質依然會成立。

在外心的情況，由於 M 為橢圓中心，O 是外心，所以橢圓的短軸是固定的，A'' 的位置也不會變，我們可以將橢圓的兩焦點在三邊延長之直線上任意移動，都滿足 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，唯一不同的是能否建構出橢圓。而垂心、重心也有類似的情形。

外心	垂心	重心
		

三、研究結果與討論

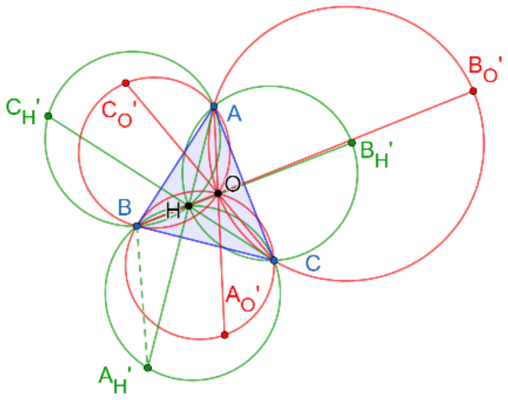
(一)研究結果

<定理 1-5>	任意給定$\triangle ABC$，P為其內一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於A'、B'、C'，滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。	
P為特殊點	線段比值	前提條件
F費馬點	$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot\left(\sqrt{3}\sin A-\sin 2A\right)}{\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)}\ge 2^3$	三內角小於120°
O外心	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$	銳角三角形
I內心	$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\times\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}}\ge 2^3$	任意三角形
H垂心	$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$	銳角三角形
G重心	$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\ge 2^3$	任意三角形
<定理 6>	任意給定三角形$\triangle ABC$，P為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於A'、B'、C'，滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。	
<系 1>	在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定n維$n-$單體$A_1A_2...A_{n+1}$，P為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、…、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n$維$n-$單體$P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2...A_n$的外接$n$維球交於$A_1'$、$A_2'$、…、$A_{n+1}'$，滿足$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$，等	

	號成立時若且唯若 $\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,\dots,n+1\}$。
<系 2>	在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，任意給定 n 維 n－單體 $A_1A_2\dots A_{n+1}$ 及其內一點 P，若 n 維 n－單體 $P-A_2A_3\dots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\dots A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2\dots A_n$ 的外接 n 維球球半徑分別為 r_1、r_2、⋯、r_{n+1}，則 $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{\overline{PA_k}}\ge\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，等號成立時若且唯若 $\overline{PA_k'}=2r_k$，$\forall k\in\{1,2,\dots,n+1\}$。
<系 3>	任意給定 $\triangle ABC$，P 為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$ 的外接圓於 A'、B'、C'，則 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。
<系 4>	在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，任意給定 n 維 n－單體 $A_1A_2\dots A_{n+1}$，P 為其內任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$ 分別與 n 維 n－單體 $P-A_2A_3\dots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\dots A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2\dots A_n$ 的外接 n 維球交於 A_1'、A_2'、⋯、A_{n+1}'，滿足 $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$。
<定理 9>	任意給定 $\triangle ABC$，O 為其外心，以三邊為焦距，O 為橢圓上一點建構橢圓，$\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BO}$、$\overrightarrow{CO}$ 分別交橢圓於 A'、B'、C'，滿足 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。
<定理 10>	任意給定 $\triangle ABC$，H 為其垂心，以三邊為焦距，H 為橢圓上一點建構橢圓，$\overrightarrow{AH}$、$\overrightarrow{BH}$、$\overrightarrow{CH}$ 分別交橢圓於 A'、B'、C'，滿足 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。
<定理 11>	任意給定 $\triangle ABC$，G 為其重心，以三邊為焦距，G 為橢圓上一點建構橢圓，$\overrightarrow{AG}$、$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{CG}$ 分別交橢圓於 A'、B'、C'，滿足 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ 且 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。

(二)討論

1. 外心和垂心比值相等的幾何意義



在外心和垂心的證明，我們發現不但整組比值 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}$ 相同，且這三組比值 $\dfrac{\overline{OA_O'}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{HA_H'}}{\overline{HA}}$、$\dfrac{\overline{OB_O'}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{HB_H'}}{\overline{HB}}$、$\dfrac{\overline{OC_O'}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{HC_H'}}{\overline{HC}}$ 也各自相同，故進而探討其幾何意義。

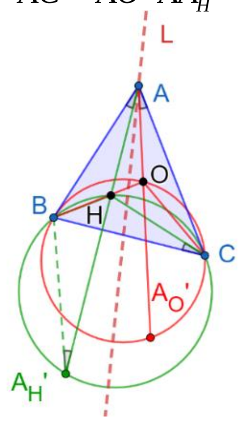
<proof> $\overrightarrow{AO}$ 交 $\triangle BOC$ 的外接圓於 A_O'，$\overrightarrow{AH}$ 交 $\triangle BHC$ 的外接圓於 A_H'，

令 φ 為以 A 為反演中心，$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ 為反演冪，再對 $\angle BAC$ 的角平分線(L)做對稱變換，

$\because \angle OAC=\angle HAB=\angle HCB=\angle HA_H'B$，$\therefore \triangle OAC\sim\triangle BAA_H'\left(AA\text{相似}\right)\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AO}\cdot\overline{AA_H'}$，

故 $\varphi(O)=A_H'$，同理，$\varphi(H)=A_O'$，

故 $\overline{AO}\cdot\overline{AA_H'}=\overline{AH}\cdot\overline{AA_O'}$，得 $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AA_O'}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AA_H'}}$，$\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OA_O'}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HA_H'}}$。#



推廣 若 P 與 P' 互為等角共軛點，則 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{P'A'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{P'C'}}{\overline{PC}}$。

由於外心和垂心互為等角共軛點，所以我們猜測若 P 與 P' 互為等角共軛點，比值就會相等，而透過前面證明所使用到的相似形，可以輕易完成證明。

2. 製造更多的三角不等式

我們希望能由三角形的特殊點加上任意點點結論，來製造或快速解出更多的三角函數不等式關係，例如布洛卡點、甚至空間中的費馬點。

四、結論與應用

(一)結論

1. 在平面上，任意給定三角形$\triangle ABC$，P為其內的費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點或任意點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於A'、B'、C'，滿足

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1\text{及}\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\geq 8$$

，等號成立時$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$，且當$P$為外心、內心、垂心、重心、費馬點時，等式成立時$\triangle ABC$為正三角形。

2. 在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定n維$n-$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$，P為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、$\cdots$、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n$維球交於$A_1'$、$A_2'$、$\cdots$、$A_{n+1}'$，滿足$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$及$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$，等號成立時，$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$。

3. 任意給定$\triangle ABC$，P為其內一點，以三邊為焦距、P為橢圓上一點建構橢圓Γ_A、Γ_B、Γ_C，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交Γ_A、Γ_B、Γ_C於A'、B'、C'，當P為$\triangle ABC$的外心、垂心時滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\leq 1$，而當$P$為$\triangle ABC$的重心時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=1$。

(二)研究應用—製造特殊的三角函數不等式

在 Thm.2~5 討論特殊點不等式情況時，都是先用三內角的三角函數值來表示比值再得到不等式關係，唯獨在 Thm.1 費馬點的情況時，我們直接得到了不等式的關係，更引發的研究興趣。

<Property>任意給定$\triangle ABC$，F為費馬點，A'、B'、C'為以三邊向外做正三角形的頂點，則

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot\left(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C\right)}{\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)}$$

。

<proof>令$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則C、C'、B'的直角座標分別為

$(a,0)$、$\left(-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right),c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\right)$、$\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a,b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\right)$，

$\overleftrightarrow{BB'}:y=\frac{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)}{b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a}\cdot x$，$\overleftrightarrow{CC'}:y=\frac{c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}{-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)-a}\cdot x-\frac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}{-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)-a}$

$\therefore F$ 的直角坐標為

$$\left(\frac{ac\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot(b\cdot\cos(120^\circ-C)+a)}{b\cdot\sin(120^\circ-C)\cdot(c\cdot\cos(120^\circ-B)+a)+c\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot(b\cdot\cos(120^\circ-C)+a)},\right.$$

$$\left.\frac{ac\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot b\cdot\sin(120^\circ-C)}{b\cdot\sin(120^\circ-C)\cdot(c\cdot\cos(120^\circ-B)+a)+c\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot(b\cdot\cos(120^\circ-C)+a)}\right),$$

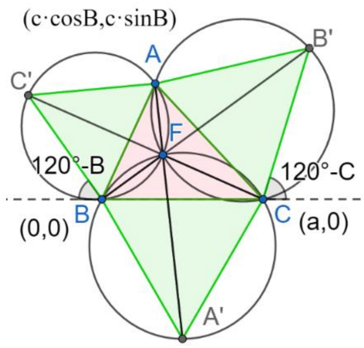
令 $\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}=k$ ，由分點公式得 $k=$

$$\frac{b\cdot\sin(120^\circ-C)-\dfrac{ac\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot b\cdot\sin(120^\circ-C)}{b\cdot\sin(120^\circ-C)\cdot(c\cdot\cos(120^\circ-B)+a)+c\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot(b\cdot\cos(120^\circ-C)+a)}}{\dfrac{ac\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot b\cdot\sin(120^\circ-C)}{b\cdot\sin(120^\circ-C)\cdot(c\cdot\cos(120^\circ-B)+a)+c\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot(b\cdot\cos(120^\circ-C)+a)}}$$

$$=\frac{bc\cdot\sin(120^\circ-C)\cdot\cos(120^\circ-B)+ab\cdot\sin(120^\circ-C)+bc\cdot\sin(120^\circ-B)\cdot\cos(120^\circ-C)}{ac\cdot\sin(120^\circ-B)}$$

$$=\frac{ab\cdot\sin(120^\circ-C)+bc\cdot\sin(120^\circ-A)}{ac\cdot\sin(120^\circ-B)}=\frac{\sin B\cdot(\sin A\cdot\sin(120^\circ-C)+\sin C\cdot\sin(120^\circ-A))}{\sin A\sin C\sin(120^\circ-B)}$$

$$=\frac{\sin B\cdot\left(\sin A\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)+\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)\right)}{\sin A\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)}$$



$$=\frac{\sin B\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B-\sin A\sin C\right)}{\sin A\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)}=\frac{\sin B\cdot(\sqrt{3}\sin B-2\sin A\sin C)}{\sin A\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos B-\sin B)}$$

同理，$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}=\frac{\sin A\cdot(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C)}{\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)}$ ，$\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\frac{\sin C\cdot(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B)}{\sin A\sin B\cdot(\sqrt{3}\cos C-\sin C)}$ ，

由此可得 $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C)}{\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)}$

$$=\frac{(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C)\cdot(\sqrt{3}\sin B-2\sin C\sin A)\cdot(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B)}{\sin A\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)\cdot(\sqrt{3}\cos B-\sin B)\cdot(\sqrt{3}\cos C-\sin C)}\geq 8$$ 。#

顯然，這個比值的下界非常難得到，卻可以從 Thm.1 的結論輕易得出。

<Corollary 5> $\triangle ABC$ 之三內角皆小於 120°，仍滿足下列不等式

$$\frac{\left(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin B-2\sin C\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos B-\sin B\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)}\geq 8$$ 。

透過任意點的結果可輕易得到不直觀的三角不等式。亦可製造或快速解出其他三角不等式。

(1) 由外心、垂心的比值結果 $\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$，得到任意銳角 $\triangle ABC$，仍滿足下列不等式

$$(\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B})(\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C})(\frac{1+\cot C\cot A}{1-\cot C\cot A})\geq 8$$ 。

(2) 由內心的比值結果，得到任意 $\triangle ABC$，仍滿足下列不等式 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ 。

五、參考資料

1. 石博允、錢昀(2017)。三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討。

   取自：https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2017/pdf/010029.pdf。

2. 趙文敏(1997)。三線性坐標與面積(一)-(五)。科學教育月刊 198-202 期。

3. 黃家禮(1997)。幾何明珠。台北市：九章出版社。

4. 10th Bay Area Mathematical Olympiad (2008)。取自

   http://hosted.msri.org/bamo/attachments/bamo2008examsol.pdf。

5. 維基百科，單體(數學)，取自

   https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%95%E7%BA%AF%E5%BD%A2

6. 維基百科，n 維球面，取自

   https://zh.wikipedia.org/wiki/N%E7%BB%B4%E7%90%83%E9%9D%A2

7. Simplex Volumes and the Cayley-Menger Determinant，取自

   http://www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm

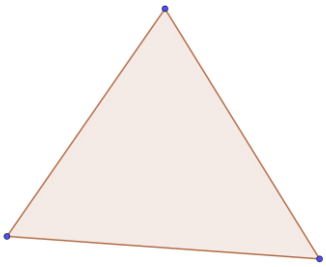
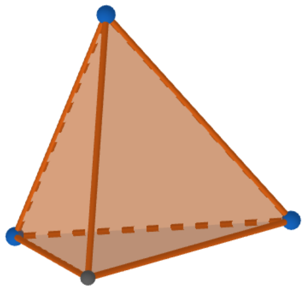
8. 科學 Online-科技部高瞻自然科學教學資源平台-座標平面上的旋轉變換，取自

http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=51646

六、附錄

(一)單體的定義

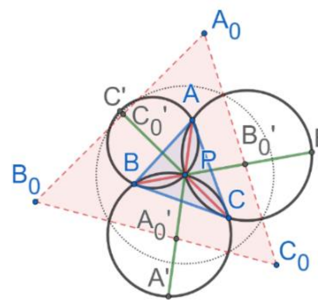
n 維空間中，給定 $n+1$ 個頂點，若這 $n+1$ 個頂點不位於任何 $n-1$ 維的面中，則定義這 $n+1$ 個點的凸包為 n-單體。

n-單體	2-單體(三角形)	3-單體(四面體)	4-單體(五胞體)[9]
圖示			

[9] 圖片來源：維基百科，五胞體，取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%94%E8%83%9E%E9%AB%94

(二)定理六之反演證法



令 A_0 為 A 以 P 為中心，半徑 r 隨意之圓的反演點

因為 B 、 A' 、 C 、 P 在 $\triangle BPC$ 的外接圓上，

故 $B_0-A_0'-C_0$ 三點共線，

同理， $A_0-B_0'-C_0$ 、 $A_0-C_0'-B_0$ 三點共線

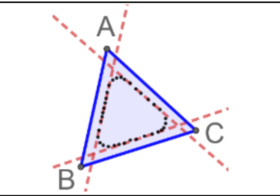
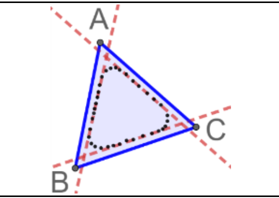
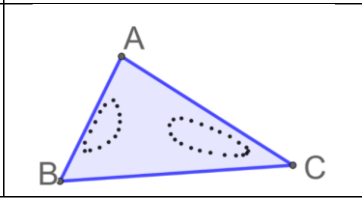
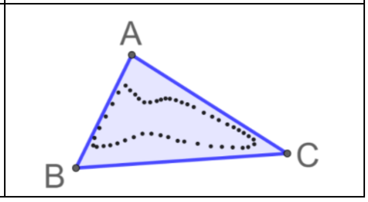
又 $\because \overline{PA}\cdot\overline{PA_0}=\overline{PA'}\cdot\overline{PA_0'}=r^2$ ， $\therefore \dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PA_0}}{\overline{PA_0'}}$ ，同理， $\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PB_0}}{\overline{PB_0'}}$ ， $\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PC_0}}{\overline{PC_0'}}$

令 ${}_a\triangle PB_0C_0=a$ ， ${}_a\triangle PA_0C_0=b$ ， ${}_a\triangle PA_0B_0=c$ ，

則 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PA_0}}{\overline{PA_0'}}\cdot\dfrac{\overline{PB_0}}{\overline{PB_0'}}\cdot\dfrac{\overline{PC_0}}{\overline{PC_0'}}=\dfrac{b+c}{a}\cdot\dfrac{a+c}{b}\cdot\dfrac{a+b}{c}\geq 8$ ，等號成立時， P 為 $\triangle A_0B_0C_0$ 重心#

(三)任意點 P 在比值固定時的軌跡變化

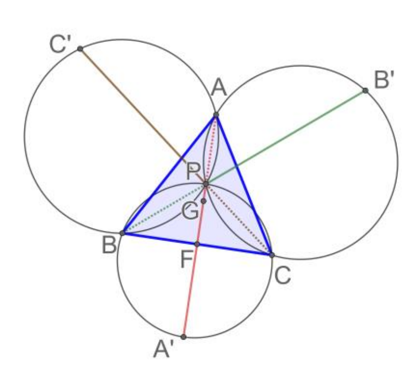
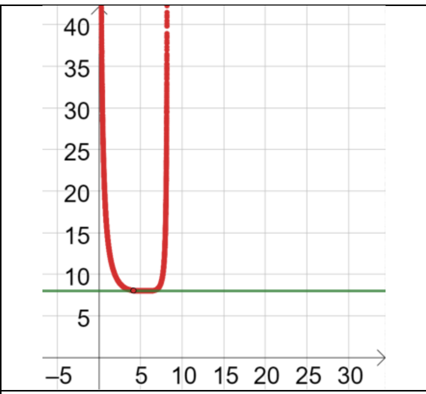
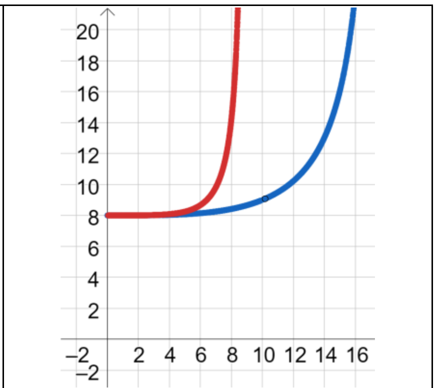
在以上的報告中，任意給定 $\triangle ABC$ ， P 為其內任意一點，向外做三個外接圓得到 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$，於是我們好奇在固定比值下 P 點對應的軌跡為何。

當 $\triangle ABC$ 為正三角形		當 $\triangle ABC$ 為任意三角形	
$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$	$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=10$	$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$	$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=10$
			

在 $\triangle ABC$ 為正三角形且比值 >8 的情況下， P 點軌跡呈現御飯糰的形狀，而我們希望能找出御飯糰三個邊的方程式為何；至於在任意三角形的部分，我們發現 P 點軌跡會呈現一個詭異的曲線，似乎也可以用三角恆等式求出，這是我們正在努力的部分。

(四) 在 $\triangle ABC$ 為正三角形且 P 在 $\overline{AF}$ 上移動時探討比值的變化

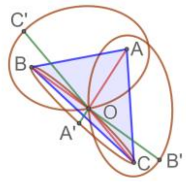
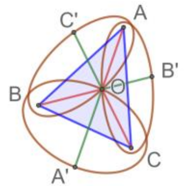
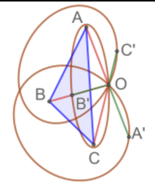
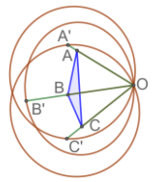
延續以上”任意點 P 在比值固定時的軌跡變化”之討論，我們做正三角形的中垂線，讓 P 點在線上移動，觀察並記錄比值乘積的變化，當 P 點慢慢遠離比值等於 8 的點時，數值會遞增的越來越快。為了方便，我們再把它分成兩段表示，第一段是等於 8 的點到三角形頂點，第二段是等於 8 的點到底邊中點。

		
(F 為 $\overline{BC}$ 中點， G 為 $\triangle ABC$ 特殊點)	x 軸： $\overline{PA}$ 長 y 軸： $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 的值	x 軸： $\overline{PG}$ 長(P 在 $\overline{GA}$ 、 $\overline{GF}$) y 軸： $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 的值

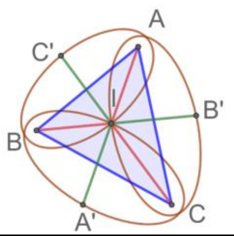
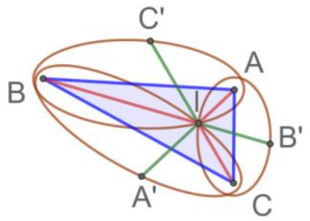
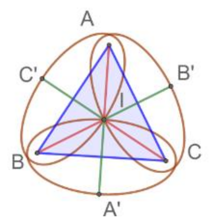
(五)將圓換成橢圓探討比值相加關係

在 2017 年國際科展[1]和前面報告中的 Corollary 3、4 都有討論到外接圓中比值相加的性質，而在這篇報告中又有討論到橢圓，所以我們想去觀察在橢圓中的比值相加是否有好的性質。

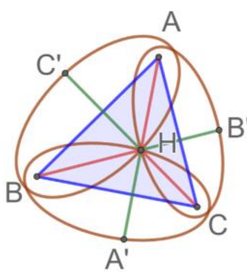
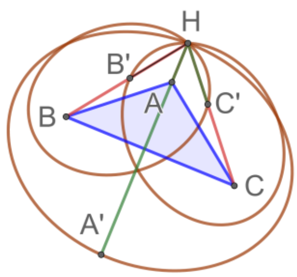
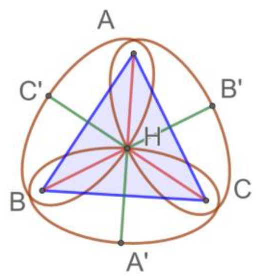
(1)外心：<GGB 測試結果>猜測：O 為外心時，沒有特殊的性質。

銳角三角形一	銳角三角形二	鈍角三角形一	鈍角三角形二
			
$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 2.91\leq 3$	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 3.01>3$	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 2.09\leq 3$	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 4.08>3$

(2)內心：<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$，滿足 $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 3$。

$\triangle ABC$ 為銳角三角形	$\triangle ABC$ 為鈍角三角形	$\triangle ABC$ 為正三角形
		
$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 3.02884>3.$	$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 3.42192>3.$	$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=3$

(3)垂心：<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$，滿足 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 3$。

$\triangle ABC$ 為銳角三角形	$\triangle ABC$ 為鈍角三角形	$\triangle ABC$ 為正三角形
		
$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 3.05916>3$	$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 6.32251>3$	$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=3$

<proof>由 Thm.10 的證明中得

$$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=2\cdot\frac{\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\text{ ， }\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}=2\cdot\frac{\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\text{ ， }\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=2\cdot\frac{\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\text{ ，}$$

令 $x=1-\cot B\cot C$ ， $y=1-\cot A\cot C$ ， $z=1-\cot A\cot B$ ，

則 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=2\cdot\left(\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3\right)$ ，

由柯西不等式得 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9$，又 $x+y+z=2$ ，得 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 3$

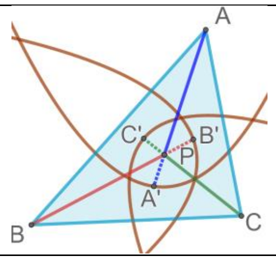
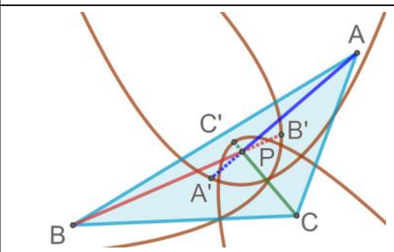
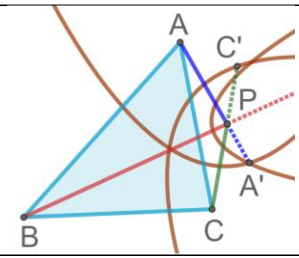
且當等號成立時， $x^2=y^2=z^2$ ， $\triangle ABC$ 為正三角形。#

(4)重心：顯然 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}+\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}+\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=3$ 。

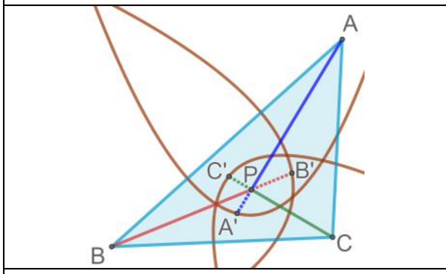
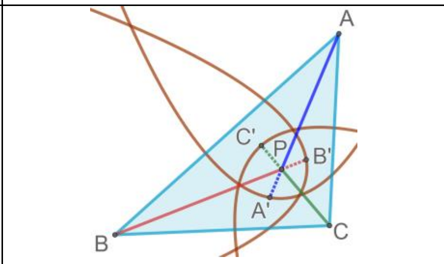
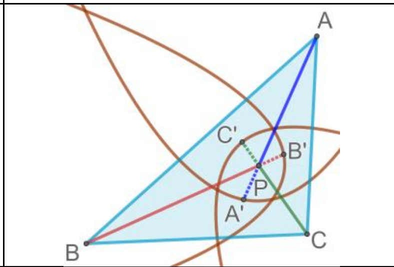
(六)將圓換成拋物線探討比值相乘及相加關係

給定任意 $\triangle ABC$ 與一點 P 在其內， $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交以 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{AC}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 為準線， P 為焦點的拋物線於另一點 A' 、 B' 、 C' ，我們想探討 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 及 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 的不等式關係。

(1)相乘 <GGB 測試結果> 猜測： P 在任意 $\triangle ABC$ 內，恆滿足 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\leq\frac{1}{64}$ 。

<table>
<tr><td>當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形
且 P 在 $\triangle ABC$ 內。</td><td>當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形
且 P 在 $\triangle ABC$ 內。</td><td>當 P 在 $\triangle ABC$ 外。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.01473<\frac{1}{64}$</td><td>$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.00929<\frac{1}{64}$</td><td>$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 1.55972>\frac{1}{64}$</td></tr>
</table>

(2)相加：我們一開始猜測，等式會成立於$\triangle ABC$為正三角形，P點落在四心共點的位置，也就是說$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}+\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}+\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$的極值會是$\dfrac{3}{4}$，但是透過 GGB 的測試，我們卻發現這三段比值相加有可能大於、等於、小於$\dfrac{3}{4}$，所以我們目前還沒有找到在建構拋物線情況下的特殊性質。

測試一	測試二	測試三
		
$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}+\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}+\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.72595<\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}+\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}+\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.77958>\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}+\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}+\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=0.75=\dfrac{3}{4}$

【評語】010025

本作品在研究平面幾何問題，主要是探討多邊形內接多邊形，經邊中點鏡射，所衍生之ｎ邊形與原ｎ邊形之相關幾何性質。作者以軟體進行數學實驗，在三角形上發現某些特性，再以數學論證其性質，是一個不錯的研究方式與課題。