2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010001**

參展科別　數學

作品名稱　歐德斯-史特勞斯猜想之探討

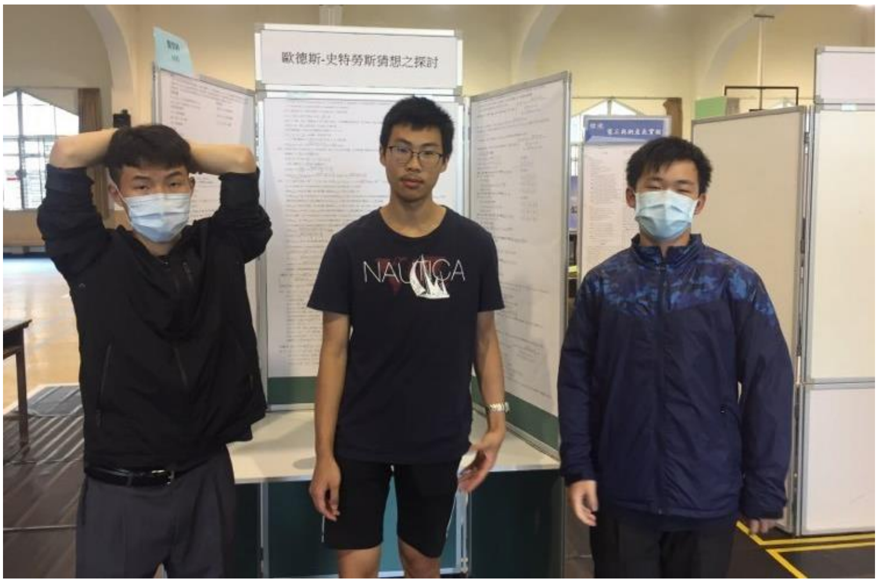
就讀學校　國立羅東高級中學

指導教師　鐘明宏

作者姓名　吳政諒、林秉逸、林煒軒

關鍵詞　歐德斯猜想、埃及分數

作者簡介



我是林秉逸(中)，目前就讀羅東高中三年級，興趣是數學和物理。

國中時受到老師的啟蒙，從此便喜歡上了數學，將自己沉浸在數學的世界並苦苦思索對我而言就成為了最大的享受。這是我第四次做數學科展，對我而言它已是我生活的一部分，缺少它的我彷彿缺少了生活的重心，因此我特別重視與珍惜科展的過程，尤其是這次，我將全身心投注其中，並期待能有一個完美的結果。

我是吳政諒(左)，目前就讀羅東高中三年級。

國中時受到老師的啟蒙，從此便喜歡上了數學，數學對我而言就成為了最大的消遣。這是我第四次做數學科展，對我而言數學不但是邏輯的科學更是對自己的挑戰，我期待能在數學的路上學到更多知識。

我是林煒軒(右)，目前就讀羅東高中三年級，平時喜歡打球、看小說。

國中時受到老師的啟蒙，從此便喜歡上了數學，開始試著做數學研究。這是我第三次做數學科展，我喜歡解決數學難題後感到的喜悅感，每次的科展對我來說都是一次挑戰，希望這次的科展能有好的結果。

摘要

The purpose of this research is to discuss the form of a certain solution to the "Erdős–Straus conjecture" and the number of it and apply it to any solution, trying to prove the "Erdős–Straus conjecture".

We start the discussion of the certain solution form of the "Erdős–Straus conjecture" under the circumstances of a=b or b=c, and prove that the positive integer $\boldsymbol{n}$ without such a certain solution must be the form of $\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ $(\forall m_i \in \mathbb{N}\ ，4m_i+1 \in \mathbb{P})$

Through the proof above, we can infer that the power of n's prime factor is closely related to the number of solutions, and the number of certain solutions can be derived.

Based on the idea used in the proof of the above, we generalize it to any solution to try to prove the "Erdős–Straus conjecture".

Compared with the previous researches which only work out a particular solution without systematic methods, only conducted a rough analysis of the number of solutions, we came up with various possibilities in a systematic way and accurately calculated the number of solutions for the special case solutions.

壹、　研究動機

歐德斯—史特勞斯猜想又稱為 $\frac{4}{n}$ 問題，其內容為對於所有正整數 n 皆滿足 $\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，其中 a, b, c 為正整數。於 19 世紀提出並在當代引起討論熱潮，至今此問題仍沒有完善的證明方法。經過查閱文獻資料後，我們發現他人研究重點著眼於如何將正整數 n 以同餘分類，且並未獲得一個系統性的研究結論。研究內容多執著於如何解決此猜想而非探討問題本身的規律性及各項性質。

此外，他人研究少有討論正整數 n 的解數者。因此本研究將方向設定在 n, a, b, c 的可行解數量。透過特例解切入 n, a, b, c 的表示方式，使問題簡化而較易於討論。以求對證明此猜想有所貢獻。

貳、 研究目的

一、探討$a=b$或$b=c$時 n 的型態

二、$a=b$或$b=c$時 n 的解數

三、$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的證明推論

參、 研究過程或方法

一、探討$a=b$或$b=c$時 n 的型態

研究初我們令$a\le b\le c$，使所得解無重複，此假設不失一般性且可將相同的解從討論範圍剔除。一開始，我們編寫程式觀察解的型態，發現有許多 n 皆有$a=b$或$b=c$的情形，因此，我們先探討$a=b$或$b=c$的情況。而當$b=c$時，其證明皆與下述$a=b$時的證明同理，故以下證明皆只說明$a=b$的情況。由於偶數必定存在$\frac{4}{n}=\frac{4}{2d}=\frac{1}{d}+\frac{1}{2d}+\frac{1}{2d}$型態的解，後續引理證明只需討論 **$n$ 為奇數的解**。經過化簡後，我們得出若 n 為奇數，則在$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$的式子中，$a$ 為偶數。由此可知**若歐德斯猜想中的n為奇數且$a=b$或$b=c$，則相等者必為偶數**。

利用此性質，我們可將原算式進行約分後得出**當$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$時，$n$ 的形態及規律**。

引理 1-1：若歐德斯猜想中，n 為奇數且 a, b, c 中兩者相等，則相等者必為偶數

證　明：設$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$中，$a=b$，$n$為奇數

$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a+2c}{ac}$，$n\equiv\frac{4ac}{a+2c}\equiv 0(mod\,4)$

若$a+2c$不為 4 的倍數$\Rightarrow n\equiv 0(mod\,2)$，與原假設矛盾

$\therefore\ a+2c\equiv 0(mod\,4)$，$a\equiv 0(mod\,2)$，$b=c$時同理，$b\equiv 0(mod\,2)$

得出引理 1-1 後，研究目標可從**探討$a=b$或$b=c$簡化為$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$時，$n$ 的形態及規律」**。但此類數字卻複雜且難以呈現完整結論，因此我們轉而觀察數據中無法符合上述條件的正整數 n。相對於符合上述條件者，公式不但可以統一且敘述也較為簡單。

若n符合上述條件，顯然$d\times n(d\in\mathbb{N})$也符合條件。只須討論 **$n$ 為質數時的規律即可將結果推廣至任意正奇數**。將討論範圍縮減至質數後，解的型態也十分單純。我們利用質數性質經過推導公式後得出**引理 1-2**。

引理 1-2：若質數 n 不為 2， a, b, c 中兩者相等$\Rightarrow n\equiv 3(mod\ 4)$

證　明：根據**引理 1-1**，設$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$ ($n\in\mathbb{P}$，$s,t\in\mathbb{N}$)，$(s,t)=w$　$s=s'\times w$　$t=t'\times w$

$\frac{4}{n}=\frac{1}{s'w}+\frac{1}{t'w}=\frac{s'+t'}{s't'w}$，$n=\frac{4s't'w}{s'+t'}\in\mathbb{P}$

$(s'+t')\,|4s't'w$，又s', t'互質

$\therefore$ $s'+t'$與$s't'$互質

又 n 為質數$\Rightarrow$ s', t'其中一數為 1，$s'=4w-1$　$t'=1$

故$n=s'=4w-1$，得證**引理 1-2**

顯然若正整數 n 符合$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$條件，則其倍數也可表示為$\frac{4}{n\times d}=\frac{1}{s\times d}+\frac{1}{t\times d}$的形式，承接引理 1-2，若 n 有 $4m$+3 型態質因數，則其必符合$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$，因此我們猜測不符合此條件的奇數 n 其所有質因數皆**為 4 的倍數加 1**，而整數 n 可表示為$n=\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ ($\forall m_i\in\mathbb{N}$，$4m_i+1\in\mathbb{P}$)，其中k_i為$4m_i+1$型態質因數的次方、$\omega(x)$為 x 的質因數個數。

我們經過證明可得出**定理 1**：

定理 1：若$n=\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ (($\forall m_i\in\mathbb{N}$，$4m_i+1\in\mathbb{P}$) $\Leftrightarrow$無$a=b$或$b=c$的解

證　明：1. $n=\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ ($\forall m_i\in\mathbb{N}$，$4m_i+1\in\mathbb{P}$) $\Rightarrow$無$a=b$或$b=c$的解

設$n=\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$，$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$

$4st=(s+t)\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$，將等式兩側分別 mod s 和 t，得到(1)、(2)

(1) $4st \equiv (s+t)\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}\ (mod\ s) \Rightarrow s|t\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$

(2) $4st \equiv (s+t)\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}\ (mod\ t) \Rightarrow t|s\prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$

令$s = 2^{\alpha} \times \prod_{i=1}^{\omega_1(s)}((4m_i+1)^{k_i}) \times \prod_{j=1}^{\omega_2(s)}((4m_j+3)^{k_j})$，

$t = 2^{\beta} \times \prod_{i=1}^{\omega_1(t)}((4m_i+1)^{k_i}) \times \prod_{j=1}^{\omega_2(t)}((4m_j+3)^{k_j})$，$\forall 4m_i+1, 4m_j+3 \in \mathbb{P}$，

其中$\omega_1(x),\ \omega_2(x)$分別為 x 的$4m_i+1$及$4m_i+3$ ($\forall m_i \in \mathbb{N}$)型態質因數個數

根據(1)、(2)關係式，可得出：$\alpha = \beta$、$\prod_{j=1}^{\omega(s)}(4m_j+3)^{k_j} = \prod_{j=1}^{\omega(t)}(4m_j+3)^{k_j}$

令$w = (s,t) = 2^{\alpha} \times \prod_{i=1}^{\omega_1(w)}((4m_i+1)^{k_i}) \times \prod_{j=1}^{\omega_2(s)}((4m_j+3)^{k_j})$

，$s = s' \times w$ t=t' $\times w$

$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=\frac{s\prime+t\prime}{s\prime t\prime w}$，又$s' \equiv 1(mod\ 4)$、t' $\equiv 1(mod\ 4) \Rightarrow s'$+ t' $\equiv 2(mod\ 4)$

與假設矛盾

$\therefore\ n = \prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ ($\forall m_i \in \mathbb{N}$，$4m_i+1 \in \mathbb{P}$) ⇒無$a=b$或$b=c$的解

2. 無$a=b$或$b=c$的解⇒ $n = \prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ ($\forall m_i \in \mathbb{N}$，$4m_i+1 \in \mathbb{P}$)

由**引理 1-1**、**引理 1-2** 可知，符合 ***a, b, c*** **任意兩者相等條件之質數 *n* (**$n \equiv 1(mod\ 2)$)

必符合條件$n \equiv 3(mod\ 4)$。已知$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{4}{n\times d}=\frac{1}{a\times d}+\frac{1}{b\times d}+\frac{1}{c\times d}$成立

又$n \equiv 0(mod\ 2)$ ⇒其必有一解型態為$\frac{4}{n}=\frac{4}{2d}=\frac{1}{d}+\frac{1}{2d}+\frac{1}{2d}$

∴無$a=b$或$b=c$的解⇒ $n = \prod_{i=1}^{\omega(n)}(4m_i+1)^{k_i}$ ($\forall m_i \in \mathbb{N}$，$4m_i+1 \in \mathbb{P}$)

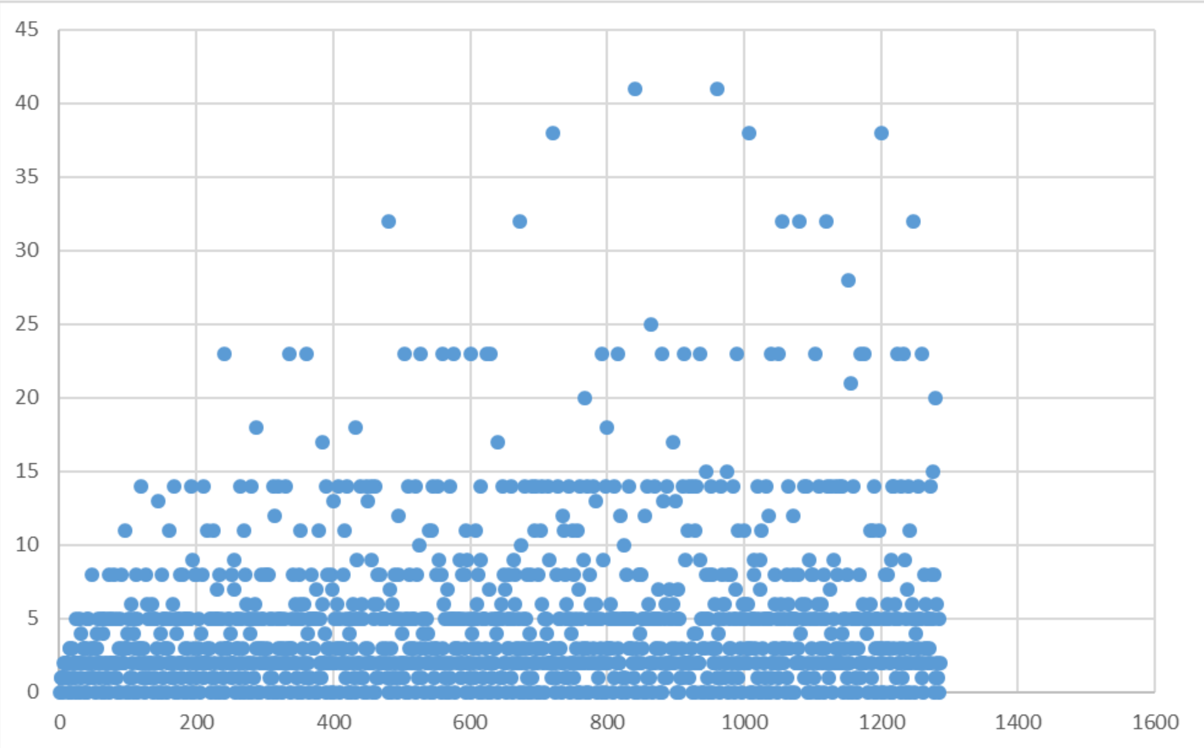
整合上述證明，得證定理 1，並得出所有有$a=b$或$b=c$解的正整數 n

二、$a = b$或$b = c$時 *n* 的解數

得出 n 的型態後，我們想藉由定理一更進一步對$a=b$或$b=c$的解進行討論。經過分析定理 1 的型態以及數據資料後，我們發現 n 增加時，仍會出現解數極少的情形，我們便將研究方向定位成研究其解的數量。

由於先前國內外研究鮮少有對於解數進行探討，研究無參考方向。我們將解數化為分布圖進行觀察，如表格(2)，表格(2)為 n=1~1300 的數據：

結合表格(2)的觀察：$n = 21, n = 69, n = 249$時，三者$\boldsymbol{a = b}$或$b = c$型態的解數相等。故我們推論**其解的數量與 $\boldsymbol{n}$ 的大小並無絕對關係，$\boldsymbol{n}$ 的解數由 $\boldsymbol{n}$ 的質因數數量所決定。**同樣的，我們將奇數與偶數的解分開討論。



表格(2)

統整完數據後，我們發現多個正奇數 n 乘以 4m+1 型態的質數後，解的數量為原數解數的三倍，如$\boldsymbol{n = 3}$時，$\boldsymbol{a = b}$或$\boldsymbol{b = c}$型態的解有 1 組，而$\boldsymbol{n = 15}$時相同型態的解有 3 組。但並非所有奇數皆符合此規律，如$\boldsymbol{n = 15}$有三組解，但是$\boldsymbol{n = 75}$時解數並非 9。

我們統整 n 放大後符合此規律的正整數後，歸類出結論：乘以$\boldsymbol{4m + 1}$型態的質數後，解的數量為原數解數的三倍的正奇數 n，與$\boldsymbol{4m + 1}$互質。**由此我們推測，解的數量與 $\boldsymbol{n}$ 經過質因數分解後的質數次方也有關聯。**

整合兩觀察後我們由此方向推論公式的型態，利用組合及同餘性質，表示$p(n)$與$\boldsymbol{p}(\frac{\boldsymbol{n}}{\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}})$的關係式並證明之，其中$p(n)$為 n 所有$a=b$或$b=c$的解數。

在以下證明中，我們用到了一個十分重要的觀念，我們將其稱為「**分配**」：令一數對(s,t)，一數$\boldsymbol{\prod_{i=1}^{n} u_i = d_1 \times d_2\ (u_i, d_1, d_2 \in N)}$，則數對$(d_1 s, d_2 t)$的所有可能即為將$\boldsymbol{\prod_{i=1}^{n} u_i}$「**分配**」至數對$(s,t)$的所有可能。

引理 2-1：若$\boldsymbol{n \equiv 1(\mathrm{mod}2) \Rightarrow p(n) = \prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1) \times p(\frac{n}{\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}})}$

證　明：令$\frac{4}{n} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{s'w} + \frac{1}{t'w} = \frac{s'+t'}{s't'w}$，$w = (s,t)$

由於s', t'互質，$(s't',\ s'+t') = 1$，又$\frac{s'+t'}{s't'w}$化為最簡分數後為$\frac{4}{n}$

$\therefore$ $s'+t'$必為 w 與$s'+t'$的最大公因數乘以 4

$\Rightarrow$ $n = s't'\frac{4w}{s'+t'}$，$\frac{4w}{s'+t'} \in \mathbb{N}$

設$n = \prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(4m_j+3)^{k_j} = n_1 \times \prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}$

$(\forall m_i, m_j \in \mathbb{N}$，$4m_i+1, 4m_j+3 \in \mathbb{P})$

由定理 1 可知$\frac{4}{n_1} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{s_1'w_1} + \frac{1}{t_1'w_1} = \frac{s_1'+t_1'}{s_1't_1'w_1}$，$n_1 = s_1't_1'\frac{4w_1}{s_1'+t_1'}$ $(\frac{4w_1}{s_1'+t_1'} \in \mathbb{N})$

$$n = n_1\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i} = s_1't_1'\frac{4w_1}{s_1'+t_1'}\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i} = s't'\frac{4w}{s'+t'}$$

$\Rightarrow$ 所有數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$的可能必為將$\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}$分配至數對$(s_1', t_1', \frac{4w_1}{s_1'+t_1})$的所有可能

又s', t'互質

$\Rightarrow$ 任一質數$4m_i+1$只可能分別為s'和$\frac{4w}{s'+t'}$的因數、t'和$\frac{4w}{s'+t'}$的因數或只為$\frac{4w}{s'+t'}$的因數

其中$4m_i+1$為s'和$\frac{4w}{s'+t'}$的因數或t'和$\frac{4w}{s'+t'}$的因數時，s'或t'質因數分解後所包含$4m_i+1$的次方分別可能為$1 \sim k_i$，再加上只為$\frac{4w}{s'+t'}$的因數，共有$2k_i+1$種可能

$\therefore$數對$(s',t',\frac{4w}{s'+t'})$共有$\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)$種可能

$p(n)=\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\times p(n_1)\Rightarrow p(n)=\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\times p(\frac{n}{\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(4m_i+1)^{k_i}})$

得證引理 2-1

導出引理 2-1 後，只需完成$4m+3$ 型態的正整數 *n* 所有$a=b$或$b=c$的解數，即可結合引理 2-1 及定理 1 推導出任一奇數$a=b$或$b=c$型態解的個數。

與引理 2-1 的推導運用相同的概念，組合與同餘，便可表示出質因數為$4m+3$型態的正整數 *n* 的解數。但由於進行$4m+3$型態質因數的組合時，會因為除以 4 後的餘數不同導致可行解約為所有組合的 1/2。

引理 2-2：若$\boldsymbol{n=\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(4m_j+3)^{k_j}}$，$\boldsymbol{\forall 4m_j+3\in\mathbb{P}\Rightarrow p(n)=2\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil}$

證　明：令$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=\frac{1}{s'w}+\frac{1}{t'w}=\frac{s'+t'}{s't'w}$，$w=(s,t)$

由**引理 2-1** 可知$s'+t'$必為 *w* 與$s'+t'$的最大公因數乘以 4

$s'+t'\,\big|\,4w\Rightarrow s'\equiv t'\equiv 0(mod\ 4)$或$s'\equiv t'\equiv 2(mod\ 4)$或

$s'\equiv 1(mod\ 4),t'\equiv 3(mod\ 4)$或$s'\equiv 3(mod\ 4),t'\equiv 1(mod\ 4)$，又$s',t'$互質

$\therefore s'\equiv 1(mod\ 4),t'\equiv 3(mod\ 4)$或$s'\equiv 3(mod\ 4),t'\equiv 1(mod\ 4)$

故以下證明皆不失一般性的假設$s'\equiv 1(mod\ 4),t'\equiv 3(mod\ 4)$

$n=s't'\frac{4w}{s'+t'}=\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(4m_j+3)^{k_j}$，$\frac{4w}{s'+t'}\in\mathbb{N}$

由於s',t'互質，則任一質數$4m_j+3$只可能分別為s'、t'的因數或兩者皆非

其中$4m_j+3$為 s'的因數或 t'的因數時，s'或t'質因數分解後所包含$4m_j+3$的次方分別可能為$1\sim k_j$，再加上兩者皆非，共有$2k_j+1$種可能

若所有質數$4m_j+3$皆非s'的因數或t'的因數$\Rightarrow s'=t'=1$

$\frac{4}{n}=\frac{1}{w}+\frac{1}{w}=\frac{2}{w}=\frac{4}{2w}$，*n* 為偶數，與原假設矛盾

$\therefore$ s', t'互質的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$共有$\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1$種可能

1. 當$\omega_2(n)=1$時， $2\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil=2\times\left\lceil\frac{k_1}{2}\right\rceil=p(n)$

證明：由前述可知$s'\equiv 1(mod\ 4), t'\equiv 3(mod\ 4)$，$4m_1+3$必為$t'$的因數

且t'質因數分解後所包含$4m_1+3$的次方必為奇數，共$\left\lceil\frac{k_1}{2}\right\rceil$種可能

故數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$共有$\left\lceil\frac{k_1}{2}\right\rceil$種可能

由於$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$可表示為$\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s}+\frac{1}{t}$或$\frac{1}{s}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}$

$\therefore p(n)$ 為數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$的可能數乘以二

$\Rightarrow p(n)=2\times\left\lceil\frac{k_1}{2}\right\rceil=2\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil$

2.若$p\left(\frac{n}{(4m_{\omega_2(n)}+3)^{k_{\omega_2(n)}}}\right)=2\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil$，則$p(n)=2\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil$

證明：令$s'=\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(4m_j+3)^{k_j{}'}$ ，$0\le k_j{}'\le k_j$，$0\le k_{\omega_2(n)}{}'\le k_{\omega_2(n)}-1$，

$$t'=\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(4m_j+3)^{k_j{}''}\ \text{，}0\le k_j{}''\le k_j\text{，}0\le k_{\omega_2(n)}{}''\le k_{\omega_2(n)}-1$$

且$s'\equiv 1(mod\ 4), t'\equiv 3(mod\ 4)$或$s'\equiv 3(mod\ 4), t'\equiv 1(mod\ 4)$，$s', t'$互質

若$4m_{\omega_2(n)}+3$為s'的因數，當s'質因數分解後$4m_{\omega_2(n)}+3$的次方增加一時

$\Rightarrow (4m_{\omega_2(n)}+3)s'\equiv 3(mod\ 4), t'\equiv 3(mod\ 4)$或

$(4m_{\omega_2(n)}+3)s'\equiv 1(mod\ 4), t'\equiv 1(mod\ 4)$

兩種情形皆不符合解的條件，故s'的$4m_{\omega_2(n)}+3$的次方為$k_{\omega_2(n)}{}'$時符合解的條件的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數等於次方為$k_{\omega_2(n)}{}'+1$時不符合解的條件的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數

若$4m_{\omega_2(n)}+3$為t'的因數，當t'質因數分解後$4m_{\omega_2(n)}+3$的次方增加一時，與s'同理，其必不符合解的條件

故t'的$4m_{\omega_2(n)}+3$的次方為$k_{\omega_2(n)}{}'$時符合解的條件的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數等於次方為$k_{\omega_2(n)}{}'+1$時不符合解的條件的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數

結合以上兩點，且$s' \equiv 1(mod\ 4), t' \equiv 3(mod\ 4)$和$s' \equiv 3(mod\ 4), t' \equiv 1(mod\ 4)$的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數相等，可知：

若$2 \mid k_{\omega_2(n)}$，除了$4m_{\omega_2(n)}+3$不為s'或t'的因數的情形，符合解的條件的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數等於不符合解的條件的數對個數，則2乘以符合$s' \equiv 1(mod\ 4), t' \equiv 3(mod\ 4)$的數對$(s', t', \frac{4w}{s'+t'})$個數等於$\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{2} + 2 \times \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor$

又$2 \mid k_{\omega_2(n)}$，$\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{4}$為整數

$$\Rightarrow\ p(n) = 2 \times \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor$$

若$2 \nmid k_{\omega_2(n)}$，除了s'或t'質因數分解的$4m_{\omega_2(n)}+3$次方為 1 和 0 的情形，符合解的條件的數對$\left(s', t', \frac{4w}{s'+t'}\right)$個數等於不符合解的條件的數對個數，則2乘以符合$s' \equiv 1(mod\ 4), t' \equiv 3(mod\ 4)$的數對$\left(s', t', \frac{4w}{s'+t'}\right)$個數等$\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-3\times\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{2} + 2\left(\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1) - 2 \times \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor\right) + 2 \times \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor$

$$= 2\left(\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)+\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{4} - \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor\right)$$

$$= -2\left(\left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor - \frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)+\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{4}\right)$$

又$2 \nmid k_{\omega_2(n)}$，$\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)+\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)}{4}$為整數

$$\Rightarrow\ p(n) = -2 \times \left\lfloor\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1) - 1 - \left(\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)+\prod_{j=1}^{\omega_2(n)-1}(2k_j+1)\right)}{4}\right\rfloor$$

$$= -2 \times \left\lfloor\frac{-\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rfloor = 2 \times \left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil$$

故根據以上兩點與數學歸納法得證：$p(n) = 2 \times \left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil$

導出奇數 n 的$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$b=c$型態的解數後，我們便試著從引理 2-1、2-2 的公式推廣偶數 n 的解數，但由於 n 為偶數不適用引理 1-1，其解的型態也更難以討論。因此我們只透過數據分析得到觀察，並利用此觀察推測偶數的解數公式。

引理 2-3：若$\boldsymbol{n=2^{\alpha}\times\prod_{i=2}^{\omega(n)}p_i{}^{k_i}}$，$\boldsymbol{p_i}$為$\boldsymbol{n}$的質因數，$\boldsymbol{p_1=2}$，$\boldsymbol{\alpha\geq 1\Rightarrow a,b,c}$中相等的兩項為偶數，即$\boldsymbol{\frac{4}{n}}$可表示為$\boldsymbol{\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$的數對$\boldsymbol{(s,t)}$共有$\boldsymbol{\begin{cases}\frac{\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)+1}{2}, \alpha=1\\ \left(\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)\right)\times\alpha-\frac{3\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)-1}{2}, \alpha\geq 2\end{cases}}$組

證　明：令$\frac{4}{n}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=\frac{1}{s'w}+\frac{1}{t'w}=\frac{s'+t'}{s't'w}$，$w=(s,t)$

若$\alpha=1$，令$\frac{4}{n}=\frac{2}{n'}=\frac{s'+t'}{s't'w}$，其分子為偶數，又$s'$與$t'$互質

$\therefore s'$與t'皆為奇數

由於s',t'互質，則任一非 2 質數p_i只可能分別為s'、t'的因數或兩者皆非

其中p_i為 s'的因數或 t'的因數時，s'或t'質因數分解後所包含p_i的次方分別可能為$1\sim k_i$，再加上兩者皆非，共有$2k_i+1$種可能

由於s'與t'皆為奇數，則 2 只可能為w的因數

故在計算解數時，2 並不會影響到此類型解數

由於計算須考量到s',t'的排列情形，又$s'=t'=1$的解無需考慮排列

$\Rightarrow$數對$(s',t',\frac{4w}{s'+t'})$共有$\frac{1}{2}\left(\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)-1\right)+1=\frac{1}{2}\left(\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)+1\right)$組

若$\alpha\geq 2$，令$\frac{4}{n}=\frac{1}{n'}$，$n'=2^{\alpha-2}\times\prod_{i=2}^{\omega(n)}p_i{}^{k_i}=s't'\frac{w}{s'+t'}$

由於s',t'互質，與$\alpha=1$時同理，其任一質因數 2 和質數p_i只可能分別為s'、t'的因數或兩者皆非，s'或t'質因數分解後所包含p_i的次方共有$2k_i+1$種可能，而 2 的次方則有$2(\alpha-2)+1=2\alpha-3$種可能

考慮s',t'的排列情形，又$s'=t'=1$的解無需考慮排列

$\Rightarrow$數對$(s',t',\frac{4w}{s'+t'})$共有$\frac{1}{2}\left((2\alpha-3)\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)-1\right)+1=\frac{1}{2}\left((2\alpha-3)\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)+1\right)=\left(\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)\right)\times\alpha-\frac{3\times\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)-1}{2}$組

引理 2-4：若$\boldsymbol{n=2^{\alpha}\times\prod_{i=2}^{\omega(n)}p_i{}^{k_i}}$，$\boldsymbol{p_i}$為$\boldsymbol{n}$的質因數，$\boldsymbol{p_1=2}$，$\boldsymbol{\alpha\geq 2\Rightarrow a,b,c}$中相等的兩項為奇數的數對$\boldsymbol{(a,b,c)}$共有$\boldsymbol{\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)}$組

證　明：令$a=\mathrm{b}$，$\frac{4}{n}=\frac{2}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{a'w}+\frac{1}{c'w}=\frac{a'+2c'}{a'c'w}$，$w=(a,c)$，$a\equiv 1(mod\ 2)$

在此證明中，為了方便計算解數，不採先前$a\leq b\leq c$的假設

$a'+2c'\equiv 1(mod\ 2)$，經過約分後分子無法為 4

$\therefore$ 分子分母須同乘以 4，故只有在$n\equiv 0(mod\ 4)$有此類型解

令$\frac{4}{n}=\frac{1}{n'}=\frac{a'+2c'}{a'c'w}$，$n'=a'c'\frac{w}{a'+2c'}$

由於a',c'互質，則任一非 2 質因數p_i只可能分別為a'、c'的因數或兩者皆非

其中p_i為 a'的因數或 c'的因數時，a'或c'質因數分解後所包含p_i的

次方分別可能為$1\sim k_i$，再加上兩者皆非，共有$2k_i+1$種可能

由於 a 為奇數，則 2 只可能為c'的因數，2 不可能整除a'、w

故在計算解數時，2 並不會影響到此類型解數

$\Rightarrow$ a,b,c 中相等的兩項為奇數的數對(a,b,c)共有$\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1)$組

定理 2：若$n=2^{\alpha}\times\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}((4m_i+1)^{k_i})\times\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}((4m_j+3)^{k_j})$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p(n)}=\begin{cases}\boldsymbol{2\times\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil,\alpha=0}\\ \boldsymbol{\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1),\alpha=1}\\ \boldsymbol{2(\alpha-1)\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1),\alpha\geq 2}\end{cases}$$

證　明：若$\alpha=0$，則根據引理 2-1、引理 2-2，

$p(n)=2\times\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\times\left\lceil\frac{(\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1))-1}{4}\right\rceil$

若n為偶數，且a,b,c中相等的兩項為偶數，即$\frac{4}{n}$可表示為$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$，則$\frac{4}{n}$可表示為$\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s}+\frac{1}{t}$或$\frac{1}{s}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}$，但數對$(s,t)$必有一組為$(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$使$\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s}+\frac{1}{t}=\frac{1}{s}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}$

$\therefore p(n)$為數對$(s',t',\frac{4w}{s'+t'})$的可能數乘以二減一再加上a,b,c中相等的兩項為奇數的數對(a,b,c)數

則根據此點與引理 2-3、引理 2-4，再加上前述n為奇數的$p(n)$，可得定理 2：

$$p(n)=\begin{cases} 2\times\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\times\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil, \alpha=0 \\ \prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1), \alpha=1 \\ 2(\alpha-1)\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1), \alpha\geq 2 \end{cases}$$

整合引理 2-1、2-2、2-3、2-4 後，即可導出定理二。整篇報告到這裡，我們可以得到 **$a=b$或$b=c$時所有的解數。為 n 解數的計算提出創新的計算方式。**然而我們認為，研究不能止步於特例解的研究，因此我們決定更進一步研究歐德斯猜想的證明方法。

三、$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的證明推論

我們認為，前述分析方式同樣能應用於任意$\boldsymbol{a,b,c}$的解。令$\boldsymbol{a,b,c}$的最大公因數為w，將$\boldsymbol{a,b,c}$提出w後，可得$\boldsymbol{a',b',c'}$，$\boldsymbol{a',b',c'}$三者互質，再令$(\boldsymbol{a'},\boldsymbol{b'})=\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{b'},\boldsymbol{c'})=\boldsymbol{y}$，$(\boldsymbol{a'},\boldsymbol{c'})=\boldsymbol{z}$，將$a',b',c'$兩兩各自提出最大公因數後，可得$\boldsymbol{a'',b'',c''}$，$\boldsymbol{a'',b'',c''}$兩兩各自互質，則可得$\boldsymbol{a=wa'=wxza''}$，$\boldsymbol{b=wb'=wxyb''}$，$\boldsymbol{c=wc'=wyzc''}$，$\frac{4}{n}$可化為：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{a'b'+b'c'+a'c'}{a'b'c'w}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}$$

此式中的$\boldsymbol{x,y,z}$若不兩兩各自互質，則a',b',c'必存在公因數，故$\boldsymbol{x,y,z}$兩兩各自互質。

根據$\frac{4}{n\times d}=\frac{1}{a\times d}+\frac{1}{b\times d}+\frac{1}{c\times d}$，我們只需證明質數$p$符合歐德斯猜想，便能將其解經過縮放推廣至任意正整數，因此我們先探討 n 為質數的情形。。

當 n 為質數時，$\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}$分母中的$a'', b'', c''$皆不可能約分掉，以$a''$為例，分子中的$a''b''x, a''c''z$皆可約分掉，但$b''c''y$因$a''$與$b'', c'', y$皆互質而無法約分掉，$b'', c''$同理，故若要將$\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}$經約分後化簡為$\frac{4}{n}$，則$a'', b'', c''$必分別為 1 或$n$，但最多只能有一者為$n$，否則經約分後分母必存在二次方以上的$n$，則等式不成立。

因此，a'', b'', c''必為以下幾種可能：

1. $a''=1, b''=1, c''=1$
2. $a''=n, b''=1, c''=1$
3. $a''=1, b''=n, c''=1$
4. $a''=1, b''=1, c''=n$

在此四種可能中，我們先從最簡單的第一種可能$a''=1, b''=1, c''=1$開始探討，並利用 scratch 編寫程式以觀察其規律。

由於質數中的偶數只有 2，所以我們只探討 n 為奇數的情況：

引理 3-1：當$n=4m-1(m\in\mathbb{N})$，必有一解為 $\frac{1}{m}+\frac{1}{2mn}+\frac{1}{2mn}$

證 明 ：令$a''=1, b''=1, c''=1, w=m, x=1, y=2n, z=1$

$$\frac{4}{n}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}=\frac{1+2n+1}{2mn}=\frac{1}{m}+\frac{1}{2mn}+\frac{1}{2mn}$$

化簡後可得 $n=4m-1$

排除$n=4m-1$後，就只剩下$n=4m-3$的情況，而$n=4m-3$又可分為$n=8m-3$or$n=8m-7$

引理 3-2：當 $n=8m-3(m\in\mathbb{N})$ 時，必有一解為 $\frac{1}{2m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{2mn}$

證 明 ：令$a''=1, b''=1, c''=1, w=m, x=1, y=n, z=2$

$$\frac{4}{n}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}=\frac{1+n+2}{2mn}=\frac{1}{2m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{2mn}$$

化簡後得 $n=8m-3$

$n=8m-7$又可分為$n=24m-7$、$n=24m-15$、$n=24m-23$，

而$n=24m-15=3(8m-5)$

$=3(4(2m-1)-1)$，又根據$\frac{4}{n\times d}=\frac{1}{a\times d}+\frac{1}{b\times d}+\frac{1}{c\times d}$及**引理 3-1，**

則$n=24m-15$有解。

引理 3-3：當$n=24m-7(m\in\mathbb{N})$時，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{6m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{6mn}}$

證 明 ：令$a''=1,b''=1,c''=1,w=m,x=1,y=n,z=6$

$\frac{4}{n}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}=\frac{1+n+6}{6mn}=\frac{1}{6m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{6mn}$

化簡後可得 $n=24m-7$

$n=24m-23$又可分為$n=120m-23$、$n=120m-47$、$n=120m-71$、

$n=120m-95$、$n=120m-119$，而$n=120m-95=5(24m-19)$

$=5(8(3m-2)-3)$，又根據$\frac{4}{n\times d}=\frac{1}{a\times d}+\frac{1}{b\times d}+\frac{1}{c\times d}$及**引理 3-2，**

則$n=120m-95$有解。

引理 3-4：當$n=120m-47(m\in\mathbb{N})$時，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{10(3m-1)}+\frac{1}{2n(3m-1)}+\frac{1}{5n(3m-1)}}$

證 明 ：令$a''=1,b''=1,c''=1,w=3m-1,x=2,y=n,z=5$

$\frac{4}{n}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}=\frac{2+n+5}{10n(3m-1)}=\frac{1}{10(3m-1)}+\frac{1}{2n(3m-1)}+\frac{1}{5n(3m-1)}$

化簡後可得 $n=120m-47$

引理 3-5：當$n=120m-23(m\in\mathbb{N})$時，必有一解為 $\frac{1}{5(6m-1)}+\frac{1}{2n(6m-1)}+\frac{1}{10n(6m-1)}$

證 明 ：令$a''=1,b''=1,c''=1,w=6m-1,x=1,y=2n,z=5$

$\frac{4}{n}=\frac{a''b''x+b''c''y+a''c''z}{a''b''c''wxyz}=\frac{1+2n+5}{10n(6m-1)}=\frac{1}{5(6m-1)}+\frac{1}{2n(6m-1)}+\frac{1}{10n(6m-1)}$

化簡後可得 $n=120m-23$

推論：

根據上述引理及參考文獻，我們發現當$\boldsymbol{n=4\times\prod_{i=1}^{k}p_i\times m+{p_x}^2(m\in\mathbb{Z},m\geq 0)}$，

$\forall p_x, (p_{k+1} \le p_x \le 2\sqrt{\prod_{i=1}^{k} p_i}) \vee (p_x = 1)$，其中$p_y$為由小到大的第$y$個質數，此類$\frac{4}{n}$無法以前述方法寫成通式，如：$n = 24m - 23 = 24(m-1) + 1$。

若推論正確，則歐德斯猜想正確

證明：令p_k為任意質數，則其必可表示為$\boldsymbol{n = 4 \times \prod_{i=1}^{k} p_i \times m + p_k}$，其中$\boldsymbol{m = 0}$

$\because \boldsymbol{p_k \neq {p_x}^2 \wedge p_k \neq 1}$

又$\frac{4}{n \times d} = \frac{1}{a \times d} + \frac{1}{b \times d} + \frac{1}{c \times d}$，只須證明任意質數皆符合歐德斯猜想

$\therefore$如果前述推論正確，則歐德斯猜想正確

肆、　結論

1. 引理 1-1：若歐德斯猜想中，$\boldsymbol{n}$ 為奇數且 $\boldsymbol{a, b, c}$ 中兩者相等，則相等者必為偶數

2. 引理 1-2：若質數 $\boldsymbol{n}$ ($n \equiv 1 (mod\, 2)$)，$\boldsymbol{a, b, c}$ 中兩者相等$\Rightarrow$ $\boldsymbol{n \equiv 3 (mod\, 4)}$

3. 定理 1：若$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} (4m_i + 1)^{k_i}$ $((\forall m_i \in \mathbb{N}$，$4m_i + 1 \in \mathbb{P})$ $\Leftrightarrow$無$a = b$或$b = c$的解

4. 引理 2-1：若$\boldsymbol{n \equiv 1 (\mathrm{mod} 2) \Rightarrow p(n) = \prod_{i=1}^{\omega_1(n)} (2k_i + 1) \times p\left(\frac{n}{\prod_{i=1}^{\omega_1(n)} (4m_i+1)^{k_i}}\right)}$

5. 引理 2-2：若$\boldsymbol{n = \prod_{j=1}^{\omega_2(n)} (4m_j + 3)^{k_j}}$，$\boldsymbol{\forall 4m_j + 3 \in \mathbb{P} \Rightarrow p(n) = 2 \times \left\lceil \frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)} (2k_j+1) - 1}{4} \right\rceil}$

6. 引理 2-3：若$\boldsymbol{n = 2^{\alpha} \times \prod_{i=2}^{\omega(n)} {p_i}^{k_i}}$，$\boldsymbol{p_i}$為$\boldsymbol{n}$的質因數，$\boldsymbol{p_1 = 2}$，$\boldsymbol{\alpha \ge 1 \Rightarrow a, b, c}$中相等的兩項為偶數，即$\boldsymbol{\frac{4}{n}}$可表示為$\boldsymbol{\frac{1}{s} + \frac{1}{t}}$的數對$(\boldsymbol{s, t})$共有$\boldsymbol{\begin{cases} \frac{\prod_{i=2}^{\omega(n)} (2k_i+1) + 1}{2}, \alpha = 1 \\ (\prod_{i=2}^{\omega(n)} (2k_i + 1)) \times \alpha - \frac{3\prod_{i=2}^{\omega(n)} (2k_i+1) - 1}{2}, \alpha \ge 2 \end{cases}}$組

7. 引理 2-4：若$\boldsymbol{n = 2^{\alpha} \times \prod_{i=2}^{\omega(n)} {p_i}^{k_i}}$，$\boldsymbol{p_i}$為$\boldsymbol{n}$的質因數，$\boldsymbol{p_1 = 2}$，$\boldsymbol{\alpha \ge 2 \Rightarrow a, b, c}$中相等的兩項為奇數的數對$(\boldsymbol{a, b, c})$共有$\boldsymbol{\prod_{i=2}^{\omega(n)} (2k_i + 1)}$組

8. 定理 2：若$n = 2^{\alpha} \times \prod_{i=1}^{\omega_1(n)} ((4m_i + 1)^{k_i}) \times \prod_{j=1}^{\omega_2(n)} ((4m_j + 3)^{k_j})$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p(n)} = \begin{cases} \boldsymbol{2\prod_{i=1}^{\omega_1(n)}(2k_i+1)\left\lceil\frac{\prod_{j=1}^{\omega_2(n)}(2k_j+1)-1}{4}\right\rceil, \alpha=0} \\ \boldsymbol{\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1), \alpha=1} \\ \boldsymbol{2(\alpha-1)\prod_{i=2}^{\omega(n)}(2k_i+1), \alpha\geq 2} \end{cases}$$

9. 引理 3-1：當$n = 4m - 1(m \in \mathbb{N})$，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{m} + \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{4m^2 n}}$

10. 引理 3-2：當 $n = 8m - 3(m \in \mathbb{N})$ 時，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{2m} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{2mn}}$

11. 引理 3-3：當$n = 24m - 7(m \in \mathbb{N})$時，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{2(m+2)} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(m+2)n}}$

12. 引理 3-4：當$n = 120m - 47(m \in \mathbb{N})$時，必有一解為 $\boldsymbol{\frac{1}{10(3m-1)} + \frac{1}{2n(3m-1)} + \frac{1}{5n(3m-1)}}$

13. 引理 3-5：當$n = 120m - 23(m \in \mathbb{N})$時，必有一解為 $\frac{1}{5(6m-1)} + \frac{1}{2n(6m-1)} + \frac{1}{10n(6m-1)}$

14. $\boldsymbol{n = 4 \times \prod_{i=1}^{k} p_i \times m + {p_x}^2 (m \in \mathbb{Z}, m \geq 0)}$，$\forall \boldsymbol{p_x}, \boldsymbol{(p_{k+1} \leq p_x \leq 2\sqrt{\prod_{i=1}^{k} p_i})} \vee \boldsymbol{(p_x = 1)}$，其中$p_y$為由小到大的第$y$個質數，此類$\frac{4}{n}$無法以前述方法寫成通式

伍、　未來展望

本篇報告中推導出了 n 為奇數時$\boldsymbol{a = b}$或$b = c$型態解的個數，而 n 為偶數的情況目前無完善的證明，未來希望能找出證明方法以完成所有$\boldsymbol{a = b}$或$b = c$型態解的公式。

此外，也期望未來能將任意型態解的型態公式加以證明，在報告進行的過程中我們將大部分正整數的解以同餘性質證明完成，與先前所找到的研究結果相符。若能利用相似的組合概念結合同餘推廣至任意解對證明歐德斯猜想也能有所助益。

陸、 參考資料

HANG LUNG MATHEMATICS AWARDS 2014 GOLD AWARD：

https://hlma.math.cuhk.edu.hk/wp-content/uploads/2018/07/b43b1f96e99df0621772d69b71885b31.pdf

第 47 屆全國中小學科展西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)—未完成的埃及分數問題：

AN APPROACH TO SOLVE ERDÖS-STRAUS CONJECTURE：

http://researchgate.net/publication/314938710_AN_APPROACH_TO_SOLVE_ERDOS-STRAUS_CONJECTURE

Solutions to Diophantine Equation of Erdos-Straus Conjecture：

https://www.researchgate.net/publication/329705620_Solutions_to_Diophantine_Equation_of_Erdos-Straus_Conjecture

COUNTING THE NUMBER OF SOLUTIONS TO THE ERDOS-STRAUS ˝ EQUATION ON UNIT FRACTIONS

https://terrytao.files.wordpress.com/2011/07/egyptian-count13.pdf

【評語】010001

本文主要在探討歐德斯猜想的特例解型態及其解數，嘗試證明歐德斯猜想。以 a=b 或是 b=c 切入討論歐德斯猜想特例解型態，決定 4/n 表示成三個單位分數(1/a)+(1/b)+(1/c)之和的型式。透過上述證明，推測 n 質因數分解後的次方與其解的數量有密切關係，藉此推導出 a=b 或是 b=c 型態可行解的數量。所得結果有相當的意思。不過 a=b 或是 b=c 相較於一般的整數 a, b, c 當然是較特別的特例。作者願意試圖解決公開難題是值得鼓勵，但目前所使用的工具太過初階，因此難能突破瓶頸。未來可再加強向未解的方向前進。