

2020 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010021

參展科別 數學

作品名稱 超立方體最小控制集建構方式的探討

得獎獎項 大會獎：二等獎

就讀學校 臺北市私立復興實驗高級中學

指導教師 陳俊佑

作者姓名 吳映賢

關鍵詞 超立方體、最小控制集、同構

作者簡介



我是吳映賢，目前就讀復興實中十年級。

小學時曾在老師的帶領下討論一些數學遊戲背後的規律，啟蒙了我對數學專題研究的基本概念。上國中後我自行尋找有興趣的題目探討，當時還不了解選擇的題目其實是圖論中著名的問題；後來有幸遇到擅長圖論的指導老師，讓我漸漸認識圖論，往後繼續進行圖論的研究。

這是我第一次參加國際科展，非常感謝所有曾經指導過我的師長，讓我每次的研究作品都能越來越成熟。

摘要

本研究將至多8維的超立方體(hypercube) Q_n 最小控制集(minimum dominating set) $MDS(Q_n)$ 建構方式一般化，並藉由同構(isomorphic)的分類討論提出的建構模式之唯一性與否。由文獻得出的各超立方體最小控制集大小 $\gamma(Q_n)$ 以及已知的控制集形式，並從控制集重複控制的次數 $R(MDS(Q_n))$ ，我們得出 Q_n 的平方圖中最小控制集形成的子圖 $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 可能的連通分量(component)數，最後透過 Q_n 層狀圖(layered graph)中各層控制點數的運算，篩選得出可行的建構方式。

研究得出 $MDS(Q_1)$ 、 $MDS(Q_2)$ 、 $MDS(Q_3)$ 、 $MDS(Q_5)$ 、 $MDS(Q_7)$ 只有一種同構； $MDS(Q_4)$ 、 $MDS(Q_6)$ 有兩種同構，同時我們發現 $MDS(Q_5)$ 與 $MDS(Q_6)$ 構造上的關聯； Q_8 的情況較為複雜，我們先是證明了 $\gamma(Q_8) = 32$ ，並討論 $MDS(Q_8)$ 與 $MDS(Q_7)$ 構造上的關聯，提出了建構 $MDS(Q_8)$ 之方式。

Abstract

In this research, we generalized the constructions of minimum dominating sets in hypercubes with up to eight dimensions ($MDS(Q_n)$), and discussed the uniqueness of the constructions by classifying them into various isomorphic types. With $\gamma(Q_n)$, the size of $MDS(Q_n)$, quoted from literatures, we discussed the possible number of the components in the subgraph $Q_n^2[MDS(Q_n)]$, according to $R(MDS(Q_n))$, the number of times when two dominating vertices dominate the same vertex. Then we examined whether the constructions are acceptable by calculating the number of dominating vertices in each layer of the layered graph of Q_n .

We discovered that up to isomorphism, there is only one possibility of $MDS(Q_n)$ where $n = 1, 2, 3, 5, 7$, and there are two possibilities of $MDS(Q_n)$ where $n = 4, 6$, we also discovered the relationship between the constructions of $MDS(Q_5)$ and $MDS(Q_6)$. The condition of $MDS(Q_8)$ is more complicated, we first proved that $\gamma(Q_8) = 32$, then we came up with the construction of $MDS(Q_8)$ by relating its construction with $MDS(Q_7)$.

壹、研究動機

過去對超立方體最小控制集的研究，1990年文獻[3]證明 $\forall k \in \mathbb{N}, n = 2^k - 1$ ，有 $\gamma(Q_n) = 2^{n-k}$ ；

1998年文獻[4]證明 $\gamma(Q_5) = 7, \gamma(Q_6) = 12$ ；2008年文獻[1]則提出 $\gamma(Q_n)$ 的猜想：

$\forall 2^{p-1} - 1 < n < 2^p - 1, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-2^{p+1}}]$ 。

起初我們希望透過研究控制點的排列方式，觀察是否對證明此猜想有所幫助，而在撰寫程式得出超立方體 Q_5 中的每一種最小控制集排列時，發現每一種解之間似乎均同構(isomorphic)，且 Q_6 的最小控制集中似乎也有相同規律。因此我們希望能在知道 $\gamma(Q_n)$ 的各個超立方體中找出其一般化的建構模式，並探討是否存在著同構的現象。

貳、研究目的

- 一、探討 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 最小控制集的建構模式與同構現象
- 二、提出 $\gamma(Q_5) = 7$ 更簡單的證明，並探討 Q_5 最小控制集的建構模式與同構現象
- 三、提出 $\gamma(Q_6) = 12$ 更簡單的證明，並探討 Q_6 最小控制集的建構模式與同構現象
- 四、證明 $\gamma(Q_8) = 32$ ，並探討 Q_7 、 Q_8 最小控制集的建構模式與同構現象

參、定義與文獻

一、圖論專用符號與名詞定義

本研究僅討論無向圖(undirected graph)，定義所述皆是此範圍

(一) 距離與相鄰(adjacent)

$\forall G(V(G), E(G)), u, v \in V(G)$ ， u 到 v 的最短路徑(path)長度為 u, v 的距離 $d(u, v)$ ；

我們稱彼此距離為1的兩點相鄰，以下是 $N(v)$ 、 $N[v]$ 的定義：

$N(v) = \{u | d(u, v) = 1\}$ (the open neighborhood of v)

$N[v] = N(v) \cup v$ (the closed neighborhood of v)

點集間的距離定義為 $\forall S_1, S_2 \subset V(G), d(S_1, S_2) = \min\{d(u, v) | u \in S_1, v \in S_2\}$ 。

同理，對點集 S 定義 $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ ， $N[S] = N(S) \cup S$ 。

(二) 子圖(subgraph)

$\forall G(V(G), E(G)), H(V(H), E(H))$, 若 $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$, 稱 H 是 G 的子圖。

$\forall S \subseteq V(G)$, S 在 G 中形成的子圖以 $G[S]$ 表示。

$G[S]$ 符合 $V(G[S]) = V(S) \wedge E(G[S]) = \{uv | d(u, v) = 1\}$ 。

(三) 連通圖(connected graph)與連通分量(component)

$\forall G(V(G), E(G))$, 若 $\forall u, v \in V(G)$, u, v 之間存在路徑, 則 G 是連通圖。

$\forall G(V(G), E(G)), H \subseteq G$ 且 H 是連通圖。

若 $\exists H' \supseteq H$ 使得 H' 也是連通圖, 則稱 H 為 G 的一個連通分量。

可推得若 G 是連通圖, 則 G 僅有一個連通分量; 若 G 不是連通圖, 則 G 有多個連通分量。

(四) 圖的表示方法與運算

1. 平方圖

$\forall G(V(G), E(G))$, G 的平方圖 G^2 符合 $V(G^2) = V(G)$, $E(G^2) = \{uv | d(u, v) \leq 2 \text{ in } G\}$ 。

2. 層狀圖(layered graph)

$\forall G(V(G), E(G))$, G 為連通圖, 將 G 以層狀圖表示, 即 $\forall u \in V(G)$, 定義 $u = L_0$ 後, 將 $V(G)$ 劃分為互斥子集 $L_0, L_1, \dots, L_k (|L_0| = 1)$, 其中 $k = \max\{d(u, v) | v \in V(G)\}$; 且 $\forall w \in V(G)$, 有 $w \in L_{d(u, w)}$ 。

3. 卡氏乘積(Cartesian product)

$\forall G(V(G), E(G)), H(V(H), E(H))$, G 和 H 的卡氏乘積 $G \square H$ 為滿足以下條件的圖:

$$V(G \square H) = \{(g, h) | g \in V(G), h \in V(H)\}$$

$$E(G \square H) =$$

$$\{u(g_1, h_1)v(g_2, h_2) | (g_1 = g_2 \wedge d(h_1, h_2) = 1) \vee (h_1 = h_2 \wedge d(g_1, g_2) = 1)\}$$

(五) 最小控制集(minimum dominating set)

$\forall G(V(G), E(G)), S \subseteq V(G)$ ，若 $N[S] = V(G)$ ，稱 S 為 G 的控制集， S 中的點為控制點。
 若 $\nexists S' \subsetneq S$ 使得 $N[S'] = V(G)$ ，則稱 S 為 G 的 minimal dominating set；
 在 G 的所有 minimal dominating set 中，點數最少的控制集稱為 G 的最小控制集，本文中
 中以 $MDS(G)$ 表示。

(六) 同構

$\forall G(V(G), E(G)), H(V(H), E(H))$ ，

設 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，若且唯若存在映射 σ ，使 $V(H) = \{\sigma(v_1), \sigma(v_2), \dots, \sigma(v_n)\}$ ，
 且 $\forall u, v \in V(G), d(u, v) = 1 \Leftrightarrow d(\sigma(u), \sigma(v)) = 1$ ，則稱 G 和 H 同構。

本研究探討的則是同一圖中兩點集間的同構關係。對點集 $S_1, S_2 \subseteq V(G)$ ，若存在 G
 的自同構 σ 使得 $\sigma(S_1) = S_2$ ，則稱 S_1 和 S_2 同構。

二、超立方體的構造、性質與文獻

(一) n 度空間的超立方體 Q_n 定義如下：

$$V(Q_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

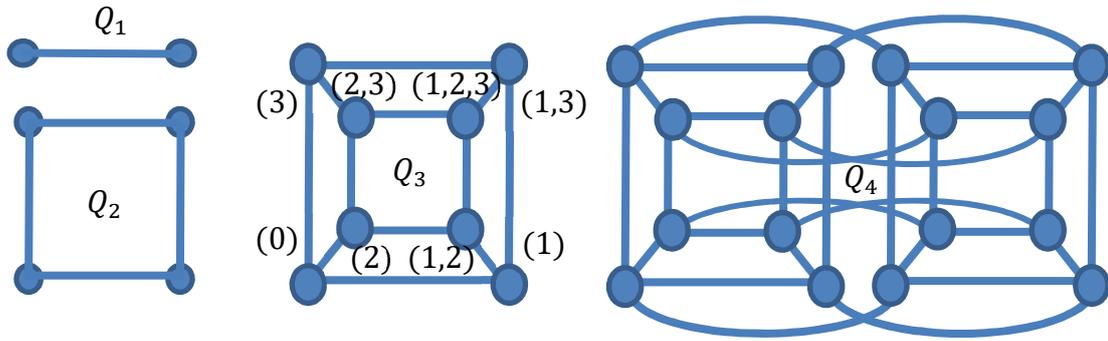
$$E(Q_n) = \{u(x_1, x_2, \dots, x_n)v(y_1, y_2, \dots, y_n) \mid \exists! x_i \neq y_i\}$$

(二) 對 $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ， v 也可表示作 (i, j, \dots, m) ，其中 $x_i, x_j, \dots, x_m = 1$ 。

我們定義 $g(v)$ 為此新表示法的數字集合，如 $v(0, 1, 1, 0, 1) = v(2, 3, 5) \Rightarrow g(v) = \{2, 3, 5\}$ ，
 並以 $g'(v)$ 表示 $[n] \setminus g(v)$ 。另外，單獨定義 $v(0, 0, \dots, 0) = v(0)$ 。

處理點集的問題時，定義 $g(V) = \cup_{v \in V} g(v)$ 且 $g(V)$ 為多重集，如此可用 $|g(V)|$ 表示此點
 集的座標位數（如： $|g(\{(123), (24)\})| = 5$ ），並用 $[g(V)]$ 表示此點集的座標中有幾種
 數字（如： $[g(\{(123), (24)\})] = 4$ ）。

超立方體 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 如下頁圖（一）所示，以 Q_3 示範座標的表示法：



圖(一): Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4

(三) 我們可以得出 Q_n 的特性：

1. $|V(Q_n)| = 2^n$
2. $\forall v \in V(Q_n), N[v] = n + 1$
3. $\forall u, v \in V(Q_n), d(u, v) = |g(u) \setminus g(v)| + |g(v) \setminus g(u)|$
4. $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < k < n, Q_n = Q_k \square Q_{n-k}$
5. 以層狀圖表示任意 Q_n ，如圖(二)是 Q_5 的層狀圖。

	12	123			
	13	124			
1	14	125	1234		
2	15	134	1235		
0	3	23	135	1245	12345
4	24	145	1345		
5	25	234	2345		
	34	235			
	35	245			
	45	345			

定義 $L_0 = (0)$ ，則 $\forall 0 \leq k \leq n, |L_k| = C_k^n$ ，

且有 $\forall v \in L_k, N(v) \cap L_{k+1} = m - k, N(v) \cap L_{k-1} = k$ ，

這些性質使層狀圖是文獻中常用來研究超立方體的工具。

圖(二):
把邊省略的 Q_5 層狀圖

利用層狀圖進行運算時，我們定義以下符號：

- (1) $L(v) = k$ 表示 v 位在第 k 層。
- (2) $\forall M = \{m_1, m_2, \dots | m_i \in \mathbb{N}, 1 \leq m_i \leq n\}, L_k(M) = \{v | v \in L_k \wedge M \subseteq g(v)\}$

$$D_k = L_k \cap \text{MDS}(Q_n), D_k(M) = L_k(M) \cap D_k$$

6. 超立方體的自同構 σ 有兩種運算：

- (1) 將任意維度平移，即 $\forall u \in V(Q_n)$ ，將 $V(Q_n)$ 平移使 u 移至 (0) ，

$$\text{運算結果為 } \forall v \in V(Q_n), \sigma(v) = v' \left(g(v) \cup g(u) \setminus (g(v) \cap g(u)) \right)。$$

我們以 $\sigma(v) = v + g(u)$ 的符號表示。

- (2) 將任意維度 x_i 對應至運算後的另一維度 x_j ；此時為了避免 x_i 和 x_j 運算後皆對應至 x_j ，因此 x_j 也必須對應至運算後的另一維度，如此重複執行直到運算前、後的維度產生一對一的對應。

如將運算前的 $(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m)$ 對應至運算後的 $(x_j, x_k, x_i, x_m, x_l)$ ，我們以

$\sigma(v) = v \times (x_i x_j x_k)(x_l x_m)$ 的符號表示，其中 $(x_l x_m)$ 代表 x_l 、 x_m 換維， $(x_i x_j x_k)$ 代表依 $x_i \rightarrow x_j$ 、 $x_j \rightarrow x_k$ 、 $x_k \rightarrow x_i$ 的順序換維。

由於 Q_n 的結構之對稱性，即設任一點為 (0) ，所得層狀圖均相同，因此自同構運算中 n 個維度可以任意平移、任意互換。以 Q_5 的兩個最小控制集為例：

$$A = \{(1,2,3), (1), (3), (2,4), (2,4,5), (2,5), (1,3,4,5)\}$$

$$B = \{(0), (4,5), (2,4), (2,3,5), (1,2,3,5), (1,2,5), (1,3,4)\}$$

定義 $\sigma(v) = (v + \{1,2,3\}) \times (12435)$ ，可得：

$$\sigma(1,2,3) = (0) \times (12435) = (0) \quad \sigma(1) = (2,3) \times (12435) = (4,5)$$

$$\sigma(3) = (1,2) \times (12435) = (2,4) \quad \sigma(2,4) = (1,3,4) \times (12435) = (2,3,5)$$

$$\sigma(2,4,5) = (1,3,4,5) \times (12435) = (1,2,3,5) \quad \sigma(2,5) = (1,3,5) \times (12435) = (1,2,5)$$

$$\sigma(1,3,4,5) = (2,4,5) \times (12435) = (1,3,4)$$

此自同構將 A 對應至 B ，因此 A 、 B 同構。

(四) 研究 $MDS(Q_n)$ 的文獻

$MDS(Q_n)$ 的大小以 $\gamma(Q_n)$ 表示：

- 1990年文獻[3]證明了 $\forall k \in \mathbb{N}, n = 2^k - 1$ ，有 $\gamma(Q_n) = 2^{n-k}$ 。文獻[1]、文獻[4]也各自提出不同的證明方式。 $\forall u \in V(Q_n), \exists! v \in MDS(Q_n) | u \in N[v]$ ，因此我們稱呼 $n = 2^k - 1$ 時 0 為「完美情況」。

2008年文獻[1]提出完美情況的一種建構方式：

$$D = \{v | g(v) \text{各元素行二進位模加法後得 } 0\}$$

如完美情況 $MDS(Q_3) = \{(2), (1,3)\}$ ，

進行二進位模加法時 $2 = 10_2$ 、 $1 + 3 = 01_2 + 11_2 = 10_2$ 。

- 1998年文獻[4]將 Q_5 、 Q_6 以層狀圖表示，分別就 $L_0 \in MDS(Q_n), L_n \in MDS(Q_n), L_0, L_n \notin MDS(Q_n)$ 三種情況計算各層可能的控制點數，證明 $\gamma(Q_5) = 7 \cdot \gamma(Q_6) = 12$ 。
- 文獻[1]提出猜想 $\forall 2^{p-1} - 1 < n < 2^p - 1, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-2^{p+1}}]$ 。

4. 2010年文獻[4]稱證明了 $\forall k \in \mathbb{N}, n = 2^k$ ，有 $\gamma(Q_n) = 2\gamma(Q_{n-1})$ 。然而，我們認為其證明脈絡有問題。我們於證明 $\gamma(Q_8) = 32$ 前敘述此問題。

肆、研究方法

我們討論 $MDS(Q_n)$ 的建構模式，僅使用層狀圖的概念是不夠的，因此我們運用以下的工具，找出最小控制集的排列：

(一) $\forall u, v \in MDS(Q_n)$, 若 $d(u, v) \leq 2$ ，則 $|N[u] \cap N[v]| = 2$ 。

兩個控制點任意擺放，最多可以控制 $2(n+1)$ 個點，但 $\{u, v\}$ 僅控制了 $2n$ 個點，代表 $\{u, v\}$ 重複控制了兩次。

研究中，我們需要研究控制點集重複控制的次數，因此使用以下符號：

1. $\forall S \subseteq MDS(Q_n)$, 定義 $R(S) = (n+1)|S| - |N[S]|$ ，即可表示 S 重複控制的次數。

例如當 $S = MDS(Q_n)$, $R(S) = (n+1)\gamma(Q_n) - |V(Q_n)|$ 。

2. 若我們要討論 S 對點集 $T (T \in V(G))$ 重複控制的次數，記作 $R_T(S)$ ，

則設 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ，定義 $R_T(S) = \sum_{i=1}^k |N[v_i] \cap T| - |N[S] \cap T|$ 。

例如當 $S = \{(0), (1), (1,2)\}, T = L_1, R_T(S) = 3$ 。

(二) 稱 $MDS(Q_n)$ 在 Q_n^2 中形成的子圖為 Q_n 的「控制平方子圖」，以 $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 表示。

我們使用 $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 的概念，只是為了計算其邊數與連通分量數，因此本文中

$\forall u, v \in V(Q_n), d(u, v), N[u], N(u), R(u, v)$ 的符號均表示點在 Q_n 中的距離、點在 Q_n 中的相鄰情況、點集在 Q_n 中重複控制的次數。

$Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 有以下特性與相關定義：

1. $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 不一定是連通圖，我們以 $C(Q_n^2[MDS(Q_n)])$ 表示 $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 的連通分量數。

2. $\forall u, v \in Q_n^2[MDS(Q_n)]$ ，若 $uv \in E(Q_n^2[MDS(Q_n)])$ ，則 $R(\{u, v\}) = 2$

\Rightarrow 若 $C_3 \not\subseteq Q_n^2[MDS(Q_n)]$ ，則 $R(MDS(Q_n)) = 2|E(Q_n^2[MDS(Q_n)])|$ 。

3. 若 $C_3 \subseteq Q_n^2[MDS(Q_n)]$ ，則設此 $C_3 = \{u, v, w\}$ ，不論在 Q_n 或 $Q_n^2[MDS(Q_n)]$ 中，皆稱

$\{u, v, w\}$ 為一組「三聯點」； $\exists! t \in |N[u] \cap N[v] \cap N[w]|$ ，稱 t 為 $\{u, v, w\}$ 的中心點。

(1) 考慮中心點的存在，以排容原理可算出 $R(\{u, v, w\}) = 2 + 2 + 2 - 1 = 5$ 。

(2) $\{d(u, v), d(v, w), d(u, w)\}$ 可能為 $\{2, 2, 2\}$ 或 $\{1, 1, 2\}$ ，

前者代表 $t \notin \{u, v, w\}$ ，稱 $\{u, v, w\}$ 為A型三聯點。

後者代表 $t \in \{u, v, w\}$ ，稱 $\{u, v, w\}$ 為B型三聯點。

(3) 對A型三聯點 $\{u, v, w\}$ ，中心點 $t, n \geq 4$ ，

可不失一般性設 $L(u) = L(v) = L(w)$ ，其中 $2 \leq L(u) \leq (n - 2)$ 。

若 $t \in L_{L(u)-1}$ ，有 $R_{L(u)-1}(\{u, v, w\}) = 2, R_{L(u)+1}(\{u, v, w\}) = 3$ 。

若 $t \in L_{L(u)+1}$ ，有 $R_{L(u)-1}(\{u, v, w\}) = 3, R_{L(u)+1}(\{u, v, w\}) = 2$ 。

4. $\forall v \in \text{MDS}(Q_n)$ ，若 v 在 $Q_n^2[\text{MDS}(Q_n)]$ 中自成一個連通分量，

則 $\forall u \in \text{MDS}(Q_n) \setminus v, d(u, v) \geq 3$ ，不論在 Q_n 或 $Q_n^2[\text{MDS}(Q_n)]$ 中，皆稱 v 為「孤點」。

5. $\forall v \in \text{MDS}(Q_n)$ ，若 $\exists! u \in \text{MDS}(Q_n) | uv \in E(Q_n^2[\text{MDS}(Q_n)])$ ，

則不論在 Q_n 或 $Q_n^2[\text{MDS}(Q_n)]$ 中，皆稱 v 為「端點」。

伍、研究過程與討論

一、探討 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 的建構模式與同構現象

(一) $\text{MDS}(Q_1)$ 明顯只有一解。

(二) $\gamma(Q_2) = 2$ ，兩個控制點距離1或2， $\text{MDS}(Q_2)$ 有兩種同構。

(三) $\gamma(Q_3) = 2$ 且 $R(\text{MDS}(Q_3)) = 0$ ，因此兩控制點必距離3， $\text{MDS}(Q_3)$ 均同構。

(四) $\gamma(Q_4) = 4$ ， $R(\text{MDS}(Q_4)) = 5\gamma(Q_4) - |V(Q_4)| = 4$

因此 $|E(Q_4^2[\text{MDS}(Q_4)])| = 2, C(Q_4^2[\text{MDS}(Q_4)]) = 2$

1. 若兩連通分量的大小分別為(3,1)，則設(0)為孤點，其餘三點 u, v, w 有

$L(u), L(v), L(w) \geq 3$ ，如此 u, v, w 為三聯點， $R(\text{MDS}(Q_4)) = 5$ (矛盾)

2. 若兩連通分量的大小分別為(2,2)，則對控制點 $\{u, v, w, x\}$ ，設 $d(u, v), d(w, x) \leq 2$

(1) 若 $d(u, v) = 2$ ，設 $u = (0)$ ，則 $L(v) = 2$ 且 $L(w), L(x) = 3 \Rightarrow d(w, x) = 2$

$\therefore |L_3 \setminus N[v]| = 2 \therefore w, x$ 有唯一解 \Rightarrow 存在彼此距離2的控制點之 $\text{MDS}(Q_4)$ 皆同構

(2) 若 $d(u, v) = 1$ ，設 $u = (0)$ ，則 $L(v) = 1$ 且 $L(w), L(x) \geq 3$

$\because |L_3 \setminus L_3(g(v))| = 1 \therefore w, x$ 有唯一解

\Rightarrow 存在彼此距離1的控制點之 $MDS(Q_4)$ 皆同構

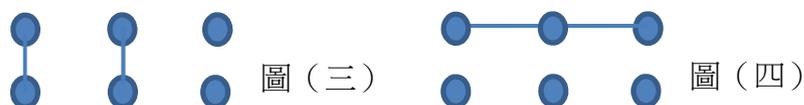
以上證明 $MDS(Q_4)$ 包含兩種同構情況。

二、提出 $\gamma(Q_5)$ 更簡單的證明，並探討 Q_5 的建構模式與同構現象

首先我們以層狀圖以及控制平方子圖的概念，提出 $\gamma(Q_5)$ 更簡單的證明：

若 $\gamma(Q_5) = 6$ ，則 $R(MDS(Q_5)) = 6\gamma(Q_5) - V(Q_5) = 4$ ，代表 $|E(Q_5^2[MDS(Q_5)])| = 2$

其形態必為圖(三)、圖(四)之一，至少存在兩個孤點。



設點 a, b 是兩個孤點，其中 $a = (0)$ ，則 $L(b) \geq 3$

若 $L(b) = 5$ ，則 $\forall v \in MDS(Q_5) \setminus \{a, b\}, d(v, a) \leq 2 \vee d(v, b) \leq 2$ (矛盾)

若 $L(b) = 4$ ，則設 $g'(b) = \{x\}$ ，有 $MDS(Q_5) \setminus \{a, b\} \subset L_3 \cup L_4 \cup L_5 \setminus N[N[b]] = L_3(x)$

$\because \forall u \in L_3(x), \exists! v \in L_3(x) | d(u, v) > 2$

$\therefore MDS(Q_5) \setminus \{a, b\}$ 在 $Q_5^2[MDS(Q_5)]$ 中是一個連通分量 $\Rightarrow |E(Q_5^2[MDS(Q_5)])| \geq 3$ (矛盾)

若 $L(b) = 3$ ，則設 $g'(b) = \{x, y\}$ ，

有 $MDS(Q_5) \setminus \{a, b\} \subset L_3 \cup L_4 \cup L_5 \setminus N[N[b]] = L_3(\{x, y\}) \cup L_4(\{x, y\})$

$\because \forall u \in L_3(\{x, y\}) \cup L_4(\{x, y\}), \exists! v \in L_3(\{x, y\}) \cup L_4(\{x, y\}) | d(u, v) > 2$ ，

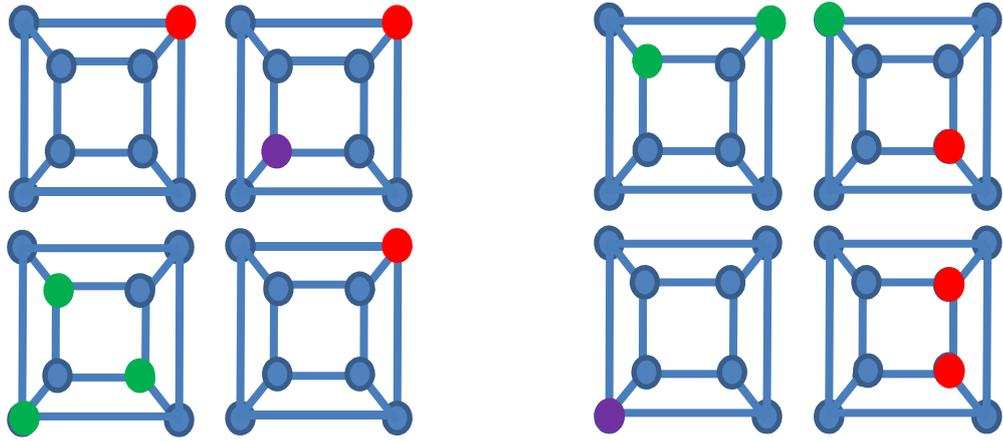
$\therefore MDS(Q_5) \setminus \{a, b\}$ 在 $Q_5^2[MDS(Q_5)]$ 中是一個連通分量(矛盾)

故 $\gamma(Q_5) > 6$ ，又 $\gamma(Q_5) = 7$ 有解，證明 $\gamma(Q_5) = 7$ 。

$\gamma(Q_5) = 7, R(MDS(Q_5)) = 6\gamma(Q_5) - V(Q_5) = 10$ 。

以Python程式得出當(0)為控制點時， $MDS(Q_5)$ 有70種排列方式。下頁圖(五)是其中兩

種排列方式，將其視為 $Q_3 \square Q_2$ ，省略了 Q_3 之間各點連線：



圖（五）

我們觀察各組數據，發現對 $MDS(Q_5) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 似乎都符合以下條件：

$$d(a, b) = d(b, c) = d(a, c) = 2, d(d, e) = d(e, f) = 1, d(d, f) = 2$$

其餘大於2的距離關係我們不標示出來。

也就是說 $MDS(Q_5)$ 是由兩組三聯點和另一孤點所組成，其中一組三聯點為A型三聯點（上圖的綠色點），另一組為B型三聯點（上圖的紅色點）。

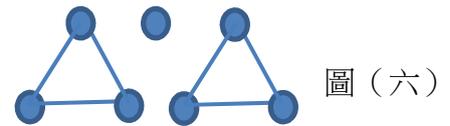
證明 $MDS(Q_5)$ 皆為同構的方法如下：

（一）證明 $MDS(Q_5)$ 中不存在端點

若 $MDS(Q_5)$ 均同構，則 $Q_5^2[MDS(Q_5)]$ 應如圖（六），不存在端點。

以下的證明中我們稱端點為a點，設 $a = (0)$ ，與其相連的是b點，故a, b以外的控制點皆在第三層以上。

我們根據b點的位置分兩種情況討論：



1. 當 $L(b) = 1$ ，則設 $b = (x)$

$$\because [g(L_2 \setminus N[b])] = 4 \because \forall y \in [5] \setminus \{x\}, |L_2(y) \setminus N[b]| = 3$$

$$\because \forall v \in D_3(y), |L_2(y) \cap N[v]| = 2 \because D_3(y) \geq 2 \Rightarrow |g(D_3)| > 4 \times 2, |D_3| \geq 3$$

若 $|D_3| = 4, |D_4| = 1$ ，則 $|N[D_4] \cup D_3| = 8$ ， L_3 無法被完全控制(矛盾)

若 $|D_3| = 3, |D_4| = 2$ 時， L_3 可被完全控制，則 $\because |L_3 \setminus N[D_4]| = 3 \because D_3 = L_3 \setminus N[D_4]$

令 $D_4 = \{v_1, v_2\}$ ，代表 $\forall u \in D_3, g'(v_1), g'(v_2) \in g(u)$ ，否則 $d(u, D_4) = 1$

如此 $\forall y \in [5] \setminus \{g'(v_1), g'(v_2)\}, |D_3(y)| \leq 1$ (矛盾)

2. 當 $L(b) = 2$ ，則設 $b = (x, y)$

若 $|D_3| = 3$ ，則 $R_{L_2}(D_3) = 0 \Rightarrow \forall v_1, v_2 \in D_3, d(v_1, v_2) > 2$

$\because |g(D_3)| = 9 \wedge [g(D_3)] = 5 \therefore \exists v_1, v_2 \in D_3 \mid |g(v_1) \cap g(v_2)| = 2$

$\Rightarrow d(v_1, v_2) = 2$ (矛盾)，故 $|D_3| = 4$

若 $|D_3| = 4, |D_4| = 1$ 時 L_3 可被完全控制，則 $d(b, D_4) > 2$ ，

可不失一般性設 $g'(D_4) = \{x\}$ ，

$\because y \notin g(L_3 \setminus N[D_2 \cup D_4])$ 且 $(L_3 \setminus N[D_2 \cup D_4]) \subset D_3$ ，又 $|L_3 \setminus N[D_2 \cup D_4]| = 3$

$\therefore |D_3(y)| \leq 1 \Rightarrow L_2(y)$ 無法被完全控制(矛盾)

因此證明 $MDS(Q_5)$ 中不存在端點。

(二) 證明 $MDS(Q_5)$ 必由兩組獨立的三聯點與一孤點組成

我們依據 $C(Q_5^2[MDS(Q_5)])$ 進行分析：

1. 若 $C(Q_5^2[MDS(Q_5)]) = 1$ ，則 $R(MDS(Q_5)) \geq 2|E(Q_5^2[MDS(Q_5)])| \geq 12$ (矛盾)

2. 若 $C(Q_5^2[MDS(Q_5)]) = 2$ ，則 $R(MDS(Q_5)) \geq 2|E(Q_5^2[MDS(Q_5)])| \geq 10$

即不能存在三聯點，但如此必存在端點(矛盾)

3. 若 $C(Q_5^2[MDS(Q_5)]) = 4$ ，則若存在一大小為2的連通分量即存在端點，故四個連通分量的大小依序只可能為(4,1,1,1)。

但我們證明 $\gamma(Q_5) = 7$ 時已說明若 Q_5 中已存在兩個孤點，則剩下的控制點均位於同一個連通分量中(矛盾)

4. 若 $C(Q_5^2[MDS(Q_5)]) = 3$ ，則連通分量可能的大小依序為(5,1,1)、(4,2,1)、

(3,3,1)、(3,2,2)，因不存在端點，只需考慮(5,1,1)和(3,3,1)的狀況。

因 $R(MDS(Q_5)) = 10$ ，故連通分量大小為(5,1,1)的情況必存在 C_5

但我們證明 $\gamma(Q_5) = 7$ 時已說明若 Q_5 中已存在兩孤點 a, b ，

則 $\forall v \in MDS(Q_5) \setminus \{f, g\}, \exists! v \in MDS(Q_5) \setminus \{f, g\}, d(u, v) > 2$ ，故不存在 C_5 (矛盾)

因此連通分量的大小必為(3,3,1,)，即我們的目標「兩組三聯點與一孤點」。

(三) 證明MDS(Q_5)皆同構

設(0)為孤點，則 $|D_1|, |D_2| = 0, |D_3| \geq 4$

若 $|D_3| = 5$ 則 $|D_4| = 1$ ， L_3 無法被控制，因此 $|D_3| = 4, |D_4| = 2$ 。

若 $D_3 \cup D_4$ 是兩組B型三聯點，則中心點皆位於 D_4 ，如此 $R_{L_3}(D_4) \geq 4$ ， L_3 無法被控制。

故 D_3 存在一組A型三聯點 $V(A)$ ，

而 $D_3 \setminus V(A) \cup D_4$ 是B型三聯點 $V(B)$ ， $D_3 \setminus V(A)$ 即其中心點 b 。

固定 b 的位置，則 $\because |D_4(g(b))| = 2 \therefore V(B) \setminus b = D_4(g(b))$ 有唯一解

$\because |D_3(g'(b))| = 3 \therefore V(A) = D_3(g'(b))$ 有唯一解

以上證明了MDS(Q_5)必由一組A型三聯點、一組B型三聯點及一孤點所組成。

而任意一個MDS(Q_5)，我們都可以進行以下的同構轉換：

對孤點 c ，設 $\sigma(v) = v + g(c)$ ，則 $c = (0)$

再對B型三聯點的中心點 $b(x, y, z)$ ，設 $\sigma(v) = v \times (x1y2z3)$

即可將控制集轉為 $b(1,2,3)$ 的形式。

而已證固定 b 的座標會使剩下各點有唯一解，故運算後皆得出

$MDS(Q_5) = \{(0), (123), (145), (245), (345), (1234), (1235)\}$ 。

三、提出 $\gamma(Q_6) = 12$ 更簡單的證明，並探討 Q_6 的建構模式與同構現象

我們同樣提出 $\gamma(Q_6) = 12$ 更簡單的證明：

若 $\gamma(Q_6) = 11$ ，則 $R(MDS(Q_6)) = 7\gamma(Q_6) - V(Q_6) = 13$ ，

代表 $Q_6^2[MDS(Q_6)]$ 必存在一連通分量 C 使得 $R(C) \equiv 1 \pmod{2}$ 。

此時若 $\gamma(Q_6)$ 存在孤點，則設(0)為孤點，

$\because \forall 1 \leq x \leq 6, |L_2(x)| = 5$ ，又 $|L_2(x) \cap N[D_3(x)]| = 2$

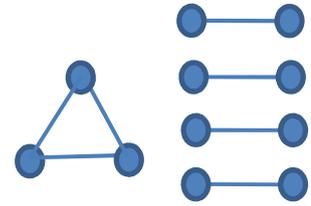
$\therefore D_3(x) \geq 3, |g(D_3)| \geq 3 \times 6 = 18 \Rightarrow |D_3| \geq 6$ 。

$\because |D_4| \geq \left\lceil \frac{|L_3 \setminus D_3|}{4} \right\rceil \therefore |D_3 \cup D_4| \geq 10$ ， L_6 無法被控制(矛盾)，故 $\gamma(Q_6)$ 不存在孤點。

若 $|C| \geq 4$ ，則 $R(C) \geq 2|C| - 1$ ，因剩餘 $11 - |C|$ 個控制點中不存在孤點，故

$R(\text{MDS}(Q_6) \setminus C) \geq \left\lceil \frac{11 - |C|}{2} \right\rceil$ ，有 $R(\text{MDS})(Q_6) \geq 2 \left\lceil \frac{11 - |C|}{2} \right\rceil + 2(|C| - 1) \geq 13$ (矛盾)

因此 $|C| = 3$ 且 $Q_6^2[\text{MDS}(Q_6)]$ 必形如圖(七)。



圖(七)

若 C 是A型三聯點，則設 $C = \{(a), (b), (c)\}$ ，

有 $|L_2 \setminus N[C]| = 3 \wedge [g(L_2 \setminus N[C])] = 3$

如果 $L_2 \setminus N[C] = D_2$ ，則 D_2 是A型三聯點(矛盾)

如果 $|L_2 \setminus N[C] \cap D_2| = 2$ ，令 $L_2 \setminus N[C] \setminus D_2 = (x, y)$ ，則 $\exists v \in D_3 \setminus \{x, y\}$

當 $(g(v) \setminus \{x, y\}) \in [6] \setminus \{a, b, c\}$ 則 $(v \cup D_2)$ 是B型三聯點(矛盾)

當 $(g(v) \setminus \{x, y\}) \in \{a, b, c\}$ 則 $d(C, v) = 2$ (矛盾)

因此 C 是B型三聯點，設 $C = \{(0), (a), (b)\}$

$\because \forall x \in [6] \setminus \{a, b\}, |L_2(x) \setminus N[C]| = 3 \therefore D_3(x) \geq 2, |g(D_3)| \geq 2 \times 4, |D_3| \geq 3$

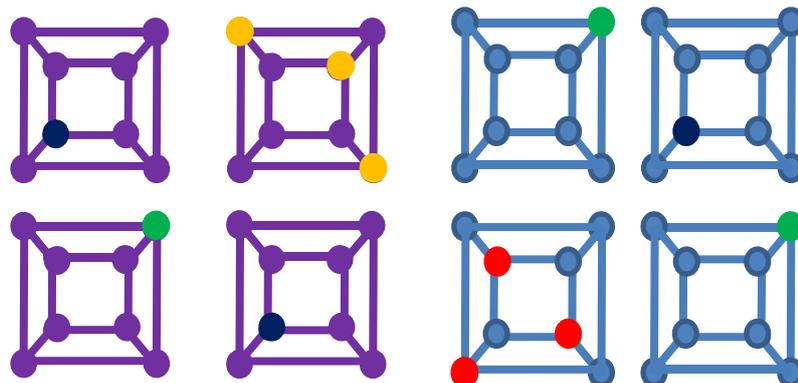
但 $\because |D_4| \geq \left\lceil \frac{|L_3 \setminus D_3|}{4} \right\rceil \therefore |D_3 \cup D_4| \geq 8$ ， L_6 無法被控制(矛盾)

以上證明圖(七)不是 $Q_6^2[\text{MDS}(Q_6)]$ ，故 $\gamma(Q_6) = 11$ 此前提錯誤， $\gamma(Q_6) \geq 12$

又 $\gamma(Q_6) = 12$ 時有解，證明 $\gamma(Q_6) = 12$ 。

$$\gamma(Q_6) = 12, R(\text{MDS}(Q_6)) = 7\gamma(Q_6) - 2^6 = 20$$

我們無法寫出 Q_6 最小控制集Python程式，因此無法得知實際上解的數目。只是手動排列控制集時，發現排出的解皆由四組三聯點組成，如圖(八)。



圖(八)

我們要證明 $C(Q_6^2[\text{MDS}(Q_6)]) \leq 4$ 且 $\text{MDS}(Q_6)$ 中不存在端點。

當 (0) 為控制點時，若 $|D_3| \geq 7$ ，則 $|D_2 \cup D_4| \geq \left\lceil \frac{20-|D_3|}{4} \right\rceil$ ， $|D_2 \cup D_3 \cup D_4| \geq 11$ ，

如此 L_6 無法被控制(矛盾)。故下文的證明中均可運用 $|D_3| \leq 6$ 此條件。

(一) 證明 $\text{MDS}(Q_6)$ 不存在孤點

設 (0) 為孤點，則 $|D_1| = |D_2| = 0$ ，證明 $\gamma(Q_6) = 12$ 時已說明此時 $|D_3| = 6$

$$\forall x \in [6], |D_3(x)| = 3 \wedge [g(D_3(x))] = 6$$

若 D_3 中存在中心點為 t 的三聯點 $\{u, v, w\}$ ，則分以下兩情況討論

1. 若 $t \in L_2$ ，則設 $t = (x, y)$ ，有 $\{u, v, w\} = D_3(x) = D_3(y)$ ，

$$\text{如此 } [g(D_3(x))], [g(D_3(y))] = 5 \text{ (矛盾)}$$

2. 若 $t \in L_4$ ，則設 $t = (p, q, r, s)$ ，

$$\text{有 } [g(\{u, v, w\})] = 4 \wedge \exists! x \in \{p, q, r, s\} \{u, v, w\} = D_3(x)$$

$$\Rightarrow [g(D_3(x))] = 4 \text{ (矛盾)}$$

故 D_3 中不存在三聯點， $R_{L_2}(D_3) = R_{L_4}(D_3)$

$$\text{因此 } L_2 \subset N[D_3] \Leftrightarrow L_4 \subset N[D_3], \text{ 有 } \forall v \in D_4, |L_3 \setminus D_3 \cap N[v]| = 3 \Rightarrow |D_4| \geq \left\lceil \frac{|L_3 \setminus D_3|}{3} \right\rceil = 5$$

L_6 無法被控制(矛盾)。因此 $\text{MDS}(Q_6)$ 不存在孤點。

(二) 證明 $Q_6^2[\text{MDS}(Q_6)]$ 中不存在端點

在以下的證明中我們稱端點為 a 點，設 $a = (0)$ ，與其相連的是 b 點，故 a 、 b 以外的控制點皆在第三層以上。我們根據 b 點的位置與情況討論。

1. 當 $L(b) = 1, b = (x)$ 且 $D_3(x) \neq \emptyset$ ，則 $|D_3| \geq 4$ 。

$$\text{若 } |D_3| = 4, \because \forall v \in D_3(x), |L_2 \setminus L_2(x) \cap N[v]| = 1 \therefore |D_3(x)| = 1 \wedge R(D_3 \setminus D_3(x)) = 0$$

$$\text{但 } \because [g(D_3 \setminus D_3(x))] = 9 \wedge [g(D_3 \setminus D_3(x))] = 5 \therefore \exists u, v \in D_3 \setminus D_3(x) |d(u, v)| = 2 \text{ (矛盾)}$$

若 $|D_3| = 6$ ，則 $|D_4| \geq 4$ ， L_6 無法被控制(矛盾)。故 $|D_3| = 5$ ， $|D_4| = 4$ 。

但設 $D_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ， $\because |g'(v_1)| + |g'(v_2)| + |g'(v_3)| + |g'(v_4)| = 8$

$\therefore |E(Q_6^2[D_4])| = 2$ ，故 $L_3 \cap N[D_4] \leq 14$ ，而 $D_3 = 5$ ， L_3 中有一點未被控制(矛盾)

2. 當 $L(b) = 1, b = (x)$ 且 $D_3(x) \in \emptyset$ ，則 $|D_3|, |D_4(x)| \geq 4$

若 $|D_3| = 6$ ，則 $|D_3 \cup D_4| \geq 10$ ， L_6 無法被控制(矛盾)

若 $|D_3| = 5$ ，則 $\because |L_3 \setminus L_3(x) \setminus D_3| = 5 \wedge \forall v \in D_4(x), |N[v] \cap L_3 \setminus L_3(x)| = 1$

$|D_4 \setminus D_4(x)| \geq 1, |D_4| \geq 5$ ， L_6 無法被控制(矛盾)

因此 $|D_3| = 4, |D_4| = 5$

$\because L_3(x) \subset N[D_4(x)] \therefore \forall y, z \in [6] \setminus \{x\}, \exists v \in D_4(x, y, z)$

$\because \exists u, v \in D_4(x), d(u, v) = 2$

\therefore 對 $\{p, q, r, s, t\} = [6] \setminus \{x\}$ ，可設 $(x, p, q, r), (x, p, q, s) \in D_4(\{x, p, q\})$

此時若 $(x, p, q, t) \notin D_3$ ，

則 $D_4(x) \setminus D_4(x, p, q) = (x, p, r, t), (x, q, s, t)$ 或 $(x, p, s, t), (x, q, r, t)$ ，

如此 $(x, r, s) \notin N[D_4(x)]$ (矛盾)

故 $D_4(x)$ 必形如 $\{(x, p, q, r), (x, p, q, s), (x, p, q, t), (x, r, s, t)\}$

$\because \{p, q\} \subset \{g(D_4 \setminus D_4(x)) \vee \{r, s, t\} \subset \{g(D_4 \setminus D_4(x))$

$\therefore d(D_4 \setminus D_4(x), D_4(x)) = 2 \Rightarrow R_{L_3}(D_4) \geq 4, |L_3 \setminus N[D_4]| \leq 4 = |D_3|$

代表 $D_3 = L_3 \setminus N[D_4], d(D_3, D_4) > 2$

$\because \forall y, z \in [6] \setminus \{x\}, \exists v \in D_3(y, z)$

\therefore 同樣可推得對 $\{p', q', r', s', t'\} = [6] \setminus \{x\}$ ， D_3 必形如

$\{(p', q', r'), (p', q', s'), (p', q', t'), (r', s', t')\}$

但 $\because \exists v \in D_4(x, p', q') \therefore \exists u \in \{(p', q', r'), (p', q', s'), (p', q', t')\}, g(u) \subset g(v)$

$\Rightarrow d(D_3, D_4) = 1$ (矛盾)

3. 當 $L(b) = 2$ ， $b = (x, y)$

$$\because \forall k \in [6] \setminus \{x, y\}, |L_2(k) \setminus b| = 5 \therefore |D_3(k)| \geq 3$$

$$\because |L_2(x) \setminus b| = |L_2(y) \setminus b| = 4 \therefore |D_3(x)|, |D_3(y)| \geq 2$$

$$\Rightarrow |g(D_3)| \geq 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16, |D_3| = 6$$

為了使 L_6 能被控制，應有 $|D_4| = 3$

此時若 $\exists v \in D_3(x, y)$ ，則 $L_2 \subset N[D_3]$ ，證明不存在孤點時已證如此 $L_4 \subset N[D_3]$

$$\Rightarrow \forall u \in D_4, |L_3 \cap N[u] \setminus D_3| = 3, \text{ 因此 } |D_4| \geq \left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4 \text{ (矛盾)}$$

而對於 $D_3(x, y) \in \emptyset$ 的情況，設 $|D_4| = 3$ ，依其結構討論：

(1) 若 $|E(Q_6^2[D_4])| \geq 2$ ，則 $\because R_{L_3}(D_4) \geq 2, |L_3 \setminus N[D_4]| \leq 6 = |D_3|$

$$\therefore R_{L_3}(b \cup D_4) = 0, d(b, D_4) > 2, D_4(x, y) \in \emptyset \Rightarrow \text{為控制 } L_4(x, y), |L_5| = 1$$

但 $R_{L_5}(D_4) = 2$ ， L_5 無法被控制(矛盾)

(2) 若 $|E(Q_6^2[D_4])| = 1$ ，則 $d(b, D_4) > 2$ ，否則 $R_{L_3}(D_4 \cup (x, y)) \geq 3$ ， L_3 無法被控制

令 $D_4 = \{u, v, w\} \wedge d(u, v) = 2$ ，有 $[6] \setminus \{g(u) \cap g(v)\} \subset g(w)$

$\because D_4(\{x, y\}) \in \emptyset \therefore$ 可不失一般性設 $x \in g(u) \cap g(v) \wedge y \in [6] \setminus \{g(u) \cup g(v)\}$

因此對 $\{p, q, r, s\} = [6] \setminus \{x, y\}$ ，可設 $D_4 = \{(x, p, q, r), (x, p, q, s), (y, p, r, s)\}$

$$\Rightarrow L_3(\{p, r\}), L_3(\{x, q\}) \subset N[b \cup D_4]$$

$$\text{但 } \because |(L_3 \setminus N[b \cup D_4])| = 5, |D_3 \cap N[b \cup D_4]| = 1$$

$$\therefore D_3(\{p, r\}) \in \emptyset \vee D_3(\{x, q\}) \in \emptyset, \exists v \in \{(p, r), (x, q)\}, v \notin N[D_3] \text{ (矛盾)}$$

(3) 若 $|E(Q_6^2[D_4])| = 0$ ，即 $\forall k \in [6], |D_4(k)| = 2$

$$\because |g(D_4(k)) \setminus \{k\}| = 6, [g(D_4(k)) \setminus \{k\}] = 5 \therefore \exists! k' \in [6] \mid D_4(k) = D_4(k')$$

且 $\{k, k'\} \neq \{x, y\}$ ，否則 $R_{L_3}(D_4 \cup (x, y)) \geq 3$ ， L_3 無法被控制

因此對 $\{p, q, r, s, t, u\} = [6]$ ，可設 $D_4 = \{(p, q, r, s), (p, q, t, u), (r, s, t, u)\}$

其中 $\{p, q\}, \{r, s\}, \{t, u\} \neq \{x, y\} \Rightarrow L_3(\{p, q\}), L_3(\{r, s\}), L_3(\{t, u\}) \subset N[D_4]$

$\because |(L_3 \setminus N[b \cup D_4])| \geq 4, |D_3 \cap N[b \cup D_4]| \leq 2$

$\therefore D_3(\{p, q\}) \in \emptyset \vee D_3(\{r, s\}) \in \emptyset \vee D_3(\{t, u\}) \in \emptyset$

$\Rightarrow \exists v \in \{(p, q), (r, s), (t, u)\}, v \notin N[D_3]$ (矛盾)

以上證明 $MDS(Q_6)$ 不存在端點。

(三) 證明 $C(Q_6^2[MDS(Q_6)]) = 4$

因為 $Q_6^2[MDS(Q_6)]$ 不存在端點與孤點，故每一個連通分量的大小皆至少為3，推得

$C(Q_6^2[MDS(Q_6)]) \leq 4$

1. 若 $C(Q_6^2[MDS(Q_6)]) = 2$ ，則不存在三聯點或迴圈(C_m)的情況下即有

$|E(Q_6^2[MDS(Q_6)])| \geq 10, R(MDS(Q_6)) \geq 20$ ，故不存在三聯點或迴圈，但如此必存在端點(矛盾)。

2. 若 $C(Q_6^2[MDS(Q_6)]) = 3$ ，則在不存在三聯點或迴圈的情況下即有

$|E(Q_6^2[MDS(Q_6)])| \geq 9, R(MDS(Q_6)) \geq 18$ ，因此存在兩個三聯點或迴圈使 $R(MDS(Q_6)) = 20$ ，但這代表其中一個連通分量必存在端點(矛盾)。

3. 若 $C(Q_6^2[MDS(Q_6)]) = 4$ ，則每個連通分量的大小都是3，在不存在三聯點的情況下

$R(MDS(Q_6)) = 16$ ，因此存在四個三聯點使 $R(MDS(Q_6)) = 20$

代表 $MDS(Q_6)$ 由四組三聯點組成。

(四) 證明 $MDS(Q_6)$ 的同構現象

1. 若存在B型三聯點

若存在B型三聯點，則設其中心點位於(0)，有 $|D_1| = 2, |D_3| \geq 3$

令 $D_1 = \{(x), (y)\}$ ，則 $D_3 \cap (L_3(x) \cup L_3(y)) \in \emptyset \Rightarrow |D_3| \leq 4$

若 $|D_3| = 4$ ，則因 $|g(D_3)| = 4$ ，代表此四點位於同一連通分量中(矛盾)

因此 $|D_3| = 3$ ， D_3 是以 $v([6] \setminus \{x, y\})$ 為中心的A型三聯點， $|D_4| \geq \left\lceil \frac{|L_3 \setminus D_3|}{4} \right\rceil = 5$

若 $|D_4| = 6$ ，則控制點用盡而 L_6 無法被控制(矛盾)，故 $|D_4| = 5$

若 $|D_6| = 1$ ，則 $D_4 \cup D_6$ 位於同一連通分量(矛盾)，故 $|D_6| = 0$ 、 $|D_5| = 1$

這代表 D_4 包含了一組完整的A型三聯點 $V(A)$ 與一組B型三聯點 $V(B)$ 的其中2點。

$\exists c \in L_3 \setminus D_3 | g(c) \subset g(D_3)$ ，對 $\{p, q, r, s\} = [6] \setminus \{x, y\}$ ，令 $g(c) = \{p, q, r\}$

$\therefore L_4 \setminus N[D_3] \setminus L_4(\{x, y\}) = \{(x, p, q, r), (y, p, q, r)\} \therefore |D_4(\{x, y\})| \geq 3$

若 $|D_4(\{x, y\})| = 4$ ，則 $\therefore \forall v \in D_4(\{x, y\}), \exists! v' \in D_4(\{x, y\}), d(v, v') > 2$

$\therefore D_4(\{x, y\})$ 屬於大小大於4的連通分量(矛盾)

故 $|D_4(\{x, y\})| = 3$ ， $(x, p, q, r), (y, p, q, r) \in V(B)$ ， $V(B) \cap L_5 = (x, y, p, q, r)$

$D_4(\{x, y\}) = V(A) \Rightarrow \forall v \in V(A), \{x, y, s\} \subset g(v)$ ，否則 $d(V(A), V(B)) = 1$

$\Rightarrow V(A) = \{(x, y, p, s), (x, y, q, s), (x, y, r, s)\}$

亦即當(0)為控制點，固定 D_1 與 D_3 的位置後， $MDS(Q_6)$ 有唯一解

因此對於存在B型三聯點的 $MDS(Q_6)$ ，我們都可以進行以下的同構轉換：

對一B型三聯點的中心點 b ，設 $\sigma(v) = v + g(b)$ ，則 $b = (0)$

此時再對 $g(D_1) = \{x, y\}$ ，設 $\sigma(v) = v \times (x1y2ij)$ ，其中 $\{i, j\} \in [6] \setminus \{1, 2, x, y\}$

即可將控制集轉為 $D_1 = \{(1), (2)\}$ 的形式

此時 $\exists c \in L_3 \setminus D_3 | g(c) \subset g(D_3)$ ，再對 $g(c) = \{p, q, r\}$ ，設 $\sigma(v) = v \times (p4q5r6)$

即可將控制集轉為 $c = (4, 5, 6), D_3 = \{(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6)\}$ 的形式

由於這個步驟進行的是維度3、4、5、6的換維，因此不改變 D_1 的位置

如此 D_1 與 D_3 的位置即被固定，剩餘控制點會有唯一解，皆得出：

$MDS(Q_6) = \{(0), (1), (2), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6),$

$(1, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 6), (1, 2, 4, 5, 6)\}$

2. 若不存在B型三聯點

所有三聯點皆為A型，設(0)為一中心點，則 $|D_1| = 3$ ，令 $D_1 = \{(x), (y), (z)\}$

有 $D_3 \cap (L_3(x) \cup L_3(y) \cup L_3(z)) \in \emptyset \Rightarrow |D_3| \leq 1$

若 $|D_3| = 1$ ，則 $\because \forall v \in D_2, d(v, D_1) = 1 \vee d(v, D_3) = 1 \therefore |D_2| = 0$

$\Rightarrow L_1 \setminus D_1$ 無法被控制(矛盾)

因此 $|D_3| = 0$ ，要控制 $L_2 \setminus N[D_1]$ ，只有 $|D_2| = 3$

要控制 $L_3 \setminus N[D_2]$ 以及 $L_4 \setminus D_4$ ，只有 $|D_4| = |D_5| = 3$

所以 $|D_1| = |D_2| = |D_4| = |D_5| = 3$

固定 $D_1 = \{(x), (y), (z)\}$ 後， $|L_2 \setminus N(D_1)| = |D_2| = 3 \Rightarrow D_2$ 有唯一解

$|L_4 \setminus N[N[D_2]]| = |D_4| = 3 \Rightarrow D_4$ 有唯一解

$\because \forall v \in D_4, \{x, y, z\} \in g(v) \therefore |L_5 \setminus N[D_4]| = |D_5| = 3 \Rightarrow D_5$ 有唯一解

因此對於由四組 A 型三聯點組成的 $MDS(Q_6)$ ，我們進行以下的同構轉換：

對一中心點 a ，設 $\sigma(v) = v + g(a)$ ，則 $a = (0)$

再對 $D_1 = \{(x), (y), (z)\}$ ，設 $\sigma(v) = v \times (x1y2z3)$

即可將圖形轉為 $D_1 = \{(1), (2), (3)\}$ 的控制集。而已證固定 D_1 的座標，剩餘控制點會有唯一解，故皆得出：

$MDS(Q_6) = \{(1), (2), (3), (4,5), (4,6), (5,6), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,3,6), (1,2,4,5,6), (1,3,4,5,6), (2,3,4,5,6)\}$

我們得出 $MDS(Q_6)$ 有兩種同構的可能：

若存在 B 型三聯點，則 $MDS(Q_6)$ 會是由兩組 B 型三聯點及兩組 A 型三聯點組成。且任一中心點與另外三個中心點的距離依序為 $(3,4,5)$ ，其中兩 B 型三聯點的中心點距離 5、兩 A 型三聯點的中心點距離 5。

若不存在 B 型三聯點，則 $MDS(Q_6)$ 會是由四組 A 型三聯點組成，且任一中心點與另外三個中心點的距離依序為 $(3,3,6)$ 。

(五) $MDS(Q_5)$ 與 $MDS(Q_6)$ 構造上的關聯

將 Q_6 視為 $Q_5^0 \cup Q_5^1$ ，且不失一般性設

$$\forall v \in V(Q_5^0), g(v) \subseteq [5] \cup \{0\} \wedge \exists! v' \in V(Q_5^1) | g(v') = g(v) \cup \{6\},$$

我們發現對所有 $MDS(Q_6)$ ，存在解使得 $MDS(Q_6)$ 為 $MDS(Q_5^0) \cup MDS(Q_5^1)$ 的子圖：

1. 當 $MDS(Q_6)$ 存在 B 型三聯點

$$\text{不失一般性設 } MDS(Q_6) = \{(0), (1), (2), (3,4,5), (3,4,6), (3,5,6), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,3,6), (1,4,5,6), (2,4,5,6), (1,2,4,5,6)\}$$

$$\text{則有對應的 } MDS(Q_5^0) = \{(0), (1), (2), (3,4,5), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5)\}$$

$$MDS(Q_5^1) = \{(6), (3,4,6), (3,5,6), (1,2,3,6), (1,4,5,6), (2,4,5,6), (1,2,4,5,6)\}$$

$$MDS(Q_6) = MDS(Q_5^0) \cup MDS(Q_5^1) \setminus (1,2,4,5) \setminus (6)$$

移除的 $(1,2,4,5)$ 與 (6) 是 $MDS(Q_5^0)$ 、 $MDS(Q_5^1)$ 中，兩組 A 型三聯點的其中一點

因此 $MDS(Q_6)$ 的兩組 B 型三聯點來自 $MDS(Q_5^0)$ 、 $MDS(Q_5^1)$ 原本的 B 型三聯點，

$MDS(Q_6)$ 的兩組 A 型三聯點則是一個 Q_5 的孤點另一 Q_5 的 A 型三聯點結合而成。

2. 當 $MDS(Q_6)$ 不存在 B 型三聯點

$$\text{不失一般性設 } MDS(Q_6) = \{(1), (2), (3), (4,5), (4,6), (5,6), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,3,6), (1,2,4,5,6), (1,3,4,5,6), (2,3,4,5,6)\}$$

$$\text{則有對應的 } MDS(Q_5^0) = \{(1), (2), (3), (4,5), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,3,4,5)\}$$

$$MDS(Q_5^1) = \{(6), (4,6), (5,6), (1,2,3,6), (2,3,4,5,6), (1,3,4,5,6), (1,2,4,5,6)\}$$

$$MDS(Q_6) = MDS(Q_5^0) \cup MDS(Q_5^1) \setminus (1,2,3,4,5) \setminus (6)$$

而 $(1,2,3,4,5)$ 與 (6) 正是 $MDS(Q_5^0)$ 、 $MDS(Q_5^1)$ 中，兩組 B 型三聯點的中心點

因此 $MDS(Q_6)$ 的四組 A 型三聯點，有兩組來自 $MDS(Q_5^0)$ 、 $MDS(Q_5^1)$ 原本的 A 型三

聯點，另外兩組則是一個 Q_5 的孤點另一個 Q_5 的 B 型三聯點結合而成。

四、證明 $\gamma(Q_8) = 32$ ，並探討 Q_7 、 Q_8 的建構模式與同構現象

(一) Q_7 的完美情況

Q_7 屬於文獻[1]提出的完美情況， $\gamma(Q_7) = 16$ 且 $R(\text{MDS}(Q_7)) = 0$

因此不失一般性設(0)為控制點，則有 $|D_1| = |D_2| = 0$

$$\because L_2 \subset N[D_3] \therefore |D_3| = \frac{|L_2|}{3} = 7 \quad \because L_3 \setminus D_3 \subset N[D_4] \therefore |D_4| = \frac{|L_3 \setminus D_3|}{4} = 7$$

$\Rightarrow |L_5 \cap N[D_4]| = 3|D_4| = |L_5|$ ， L_5 可被控制。故最後的控制點即 D_7 。

文獻[1]提出的 $\text{MDS}(Q_7)$ 是所有層狀圖座標位數行模加法後得0的點，以下證明任意 $\text{MDS}(Q_7)$ 皆與該建構方式同構。不失一般性設(0)為控制點，

$$\because \forall x \in [7], |L_2(x)| = 6 \wedge \forall v \in D_3(x), |L_2(x) \cap N[v]| = 2 \therefore |D_3(x)| = 3$$

對控制點 (x, y, z) ，設 $\sigma(v) = v \times (x1y2z3)$ ，則點 (x, y, z) 被轉換為 $(1, 2, 3)$

此時對 $\{p, q, r\} = [7] \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ ，可令 $D_3(\{4\}) = \{(14p), (24q), (34r)\}$

再設 $\sigma(v) = v \times (p5q6r7)$ ，則 $D_3(\{4\}) = \{(1, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 4, 7)\}$

此換維不影響維度 $\{1, 2, 3\}$ ，故 $(1, 2, 3)$ 仍為控制點

而固定了 $\{(1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 4, 7)\}$ ，便可由對 $\forall x \in [7], |D_3(x)| = 3$ 的特性確定

$$D_3 = \{(1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)\}$$

代表原 D_3 與文獻[1]提出的 D_3 同構

$\because \forall u \in D_3$ ，進行同構運算 $\sigma(v) = v + g(u)$ 後， u 轉為(0)而必仍有 $|D_7| = 1$

$\therefore \exists! u' \in D_4, d(u, u') = 7 \Rightarrow$ 原 D_4 也與文獻[1]提出的 D_4 同構

因此任意 $\text{MDS}(Q_7)$ 均與所有層狀圖座標位數行模加法後得0的 $\text{MDS}(Q_7)$ 同構。

當(0)為控制點時， $\text{MDS}(Q_7)$ 中由 $|D_0|$ 到 $|D_7|$ 依序為 $\{1, 0, 0, 7, 7, 0, 0, 1\}$

若(0)不是控制點，則設 $D_1 = (x)$ ， $\text{MDS}(Q_7)$ 可視為對(0)為控制點的情況進行了維度 x 的平移

而平移前 $|D_3(x)| = 3$ 、 $|D_4(x)| = 4$ ，平移後的 $|D_2| =$ 平移前的 $|D_3(x)|$ ，平移後的 $|D_5| =$ 平移前的 $|D_4 \setminus D_4(x)|$

因此(0)不是控制點時， $\text{MDS}(Q_7)$ 中由 $|D_0|$ 到 $|D_7|$ 依序為 $\{0, 1, 3, 4, 4, 3, 1, 0\}$

以上這兩組各層控制點數在 $\text{MDS}(Q_8)$ 中是重要的，因此先予以分類。

(二) 對文獻的分析

文獻[1]、[3]、[4]並未求出 $\gamma(Q_8)$ 的值，僅得出 $30 \leq \gamma(Q_8) \leq 32$ ，但在文獻[1]提出的猜想中 $\forall 2^{p-1} - 1 < n < 2^p - 1, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-p+1}]$ ，敘述了若 Q_n 為完美情況，則 $\gamma(Q_{n+1}) = 2\gamma(Q_n)$ ，故猜想 $\gamma(Q_8) = 2\gamma(Q_7) = 32$ 。

2010年文獻[5]提出證明當 $m = 2^k, \gamma(Q_m) = 2\gamma(Q_{m-1}) = 2^{m-k}$ ，即證明了所有完美情況的下一個 $\gamma(Q_n)$ 之值。其證明脈絡如下：

由於上界 $\gamma(Q_m) \leq 2\gamma(Q_{m-1}) = 2^{m-k}$ 是明確的，因此將 Q_m 視為 $Q_{m-1} \square K_2$ ，

設 $Q_m = Q_{m-1}^0 \cup Q_{m-1}^1$

令 $S^0 = \text{MDS}(Q_m) \cap V(Q_{m-1}^0), S^1 = \text{MDS}(Q_m) \cap V(Q_{m-1}^1)$ ，必可分為三種情況：

S^0 是 Q_{m-1}^0 的最小控制集($|S^0| = 2^{m-k-1}$)

$|S^0| = 2^{m-k-1}$ 但 S^0 不是 Q_{m-1}^0 的最小控制集

$|S^0| < 2^{m-k-1}$

只要以上三種情況皆可推導出下界 $\gamma(Q_m) \geq 2\gamma(Q_{m-1})$ ，即完成證明。

但是我們發現對第二種情況，其證明有誤。此部分原文證明位於文獻[5]第24頁的Case 2(a)，以下我們簡單敘述問題所在：

當 $|S^0| = 2^{m-k-1}$ 但 S^0 不是 Q_{m-1}^0 的最小控制集，文獻[5]提及 Q_{m-1}^0 至少存在 $(m-2)$ 個點未被控制（稱這樣的點為「洞」），因此 S^1 必存在 $(m-2)$ 個控制點，各控制其中一個洞。

稱這 $(m-2)$ 個控制點為點集 T ， T 最多控制 Q_{m-1}^1 中 $(m-2)m$ 個點。因此

$$|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T]| = 2^{m-1} - (m-2)m$$

但接著文獻[5]計算 $|S^1 \setminus T| \geq \frac{|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T]|}{m}$ ，這種計算方法代表不論在 T 或 $S^1 \setminus T$ 中的控制點，皆視為可以控制 Q_{m-1}^1 的 m 個點，而忽略 S^0 對 Q_{m-1}^1 的控制。

如此 $|T|$ 對證明沒有影響，且忽略 S^0 對 Q_{m-1}^1 的控制是不對的。

因為即使 $\forall v \in S^1 \setminus T, d(v, S^0) = 2$ ，即 v 會和 S^0 重複控制 Q_{m-1}^1 的點，但情況可能為

$$\forall v \in S^1 \setminus T, \exists! v' \in S^0 \mid d(v, v') = 2$$

如此若把 $S^1 \setminus T$ 的每個點視為控制 Q_{m-1}^1 的 m 個點，則可以忽略的只有 S^0 中與 $S^1 \setminus T$ 距離2的點，故 S^0 中最多有 $|T| = (m - 2)$ 個點，與 $S^1 \setminus T$ 是不重複控制的。不能把這 $(m - 2)$ 個點對 Q_{m-1}^1 的控制一併忽略。

正確的計算方式應該是 $|S^1 \setminus T| \geq \left\lfloor \frac{|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T] \setminus N[S^0]|}{m-1} \right\rfloor$ 。而如此 T 的值越大，得出下界越小，即可舉出反例。

如在 Q_8 中 $|T| = 8$ 的情況：

$$\text{當 } S^0 = \{(1), (2,3), (1,4,5), (1,6,7), (2,4,6), (2,5,7), (3,4,7), (3,5,6), (1,2,4,7), (1,2,5,6), (1,3,4,6), (1,3,5,7), (2,3,4,5), (2,3,6,7), (4,5,6,7), (1,2,3,4,5,6,7)\}$$

$$\text{計算出下界為 } |S^1 \setminus T| \geq \frac{128-16-64}{7} = 6 + \frac{6}{7}, D \geq 7 + 8 + 16 = 31$$

得不到足夠證明 $\gamma(Q_8) = 32$ 的下界

尋求專業的觀點後，確認文獻[5]的證明不夠完備，因此要探討 $\text{MDS}(Q_8)$ 的建構方式，我們必須先證明 $\gamma(Q_8) = 32$ 。

(三) 證明 $\gamma(Q_8) = 32$

若 $\text{MDS}(Q_8)$ 存在(0)為孤點，

$$\because \forall x \in [8], |L_2(x)| = 7 \therefore |D_3(x)| \geq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 4, |g(D_3)| \geq 4 \times 8 = 32, |D_3| \geq 11。$$

若 $|D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| \leq 6$ ，則設 $|D_7| = k$

$$\because |D_5| \leq 5 - k \therefore |N[D_5] \cap L_6| \leq 3(5 - k) = 15 - 3k$$

$$\because \forall u, v \in D_7, d(u, v) = 2 \therefore |N[D_7] \cap L_6| \leq 7k - \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\Rightarrow |L_6 \setminus N[D_5 \cup D_7 \cup D_6]| \geq 28 - \left(7k - \frac{k(k-1)}{2} + 15 - 3k + 6 - k \right)$$

$$= 7 - 3k + \frac{k(k-1)}{2} > 0, \text{ 代表 } L_6 \text{ 無法被完全控制(矛盾)}$$

$$\text{故 } |D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| > 6, \Rightarrow |D_3 \cup D_4| \leq 24$$

$$\text{設 } |D_3| = 11 + x, \text{ 當 } x \geq 3, |D_3 \cup D_4| \geq 11 + x + \left\lceil \frac{56-11-x}{4} \right\rceil \geq 25, \text{ 故 } |D_3| < 14$$

$$\forall x, y \in [8], |D_4(\{x, y\})| \geq \frac{|L_3(\{x, y\}) \setminus D_3(\{x, y\})|}{2} = \frac{6 - |D_3(\{x, y\})|}{2}$$

$$\text{當 } |D_3(x)| = 4, \exists ! y \in [8] \mid |D_3(\{x, y\})| = 2 \Rightarrow |D_4(\{x, y\})| \geq 2$$

$$\text{其餘 } \forall z \in [8] \setminus \{x, y\}, |D_3(\{x, z\})| = 1 \Rightarrow |D_4(\{x, z\})| \geq 3$$

$$\text{因此 } |D_4(x)| \geq \left\lceil \frac{(2+3 \times 6)}{3} \right\rceil = 7$$

延伸此概念，當 $|D_3(x)| = 6$ ，於 $g(D_3(x))$ 中，令 $[8] \setminus \{x\}$ 裡有 p 個數各出現 6 次、 q 個數各出現 5 次、 r 個數各出現 4 次、 s 個數各出現 3 次、 t 個數各出現 2 次、 u 個數各出現 1 次。可以列式得：

$$p + q + r + s + t + u = 7 \text{ (1 式)}$$

$$6p + 5q + 4r + 3s + 2t + u = |g(D_3(x)) \setminus \{x\}| = 12 \text{ (2 式)}$$

$$\therefore \forall x, y \in [8], |D_4(\{x, y\})| \geq \frac{6 - |D_3(\{x, y\})|}{2} \therefore |g(D_4(x)) \setminus \{x\}| \geq q + r + 2s + 2t + 3u$$

我們希望證明 $|D_4(x)| \geq 6$ ，即 $q + r + 2s + 2t + 3u > 15$ (3 式)。

將(3 式)減去(1 式)，得到待證 $s + t + 2u - p > 8$ (4 式)。

將(2 式)減去(1 式)，得 $5p + 4q + 3r + 2s + t = 5$ ，我們列出其解：

$$(1) p = 1, u = 6 \quad (2) q = 1, t = 1, u = 5 \quad (3) r = 1, s = 1, u = 5$$

$$(4) r = 1, t = 2, u = 4 \quad (5) s = 2, t = 1, u = 4 \quad (6) s = 1, t = 3, u = 3 \quad (7) t = 5, u = 2$$

其中 u 值是透過(1 式)得到的。

不難檢驗各組解皆符合(4 式)，故證明當 $|D_3(x)| = 6$ ， $|D_4(x)| \geq 6$

對 $|D_3(x)| = 5$ 的情況，當 $g(D_3(x))$ 中， $[8] \setminus \{x\}$ 裡有三數各出現2次、四數各出現1次，
 即有 $|D_4(x)| \geq \left\lceil \frac{2 \times 3 + 3 \times 4}{3} \right\rceil = 6$ ，又已證 $|D_3(x)| = 6$ 時 $|D_4(x)| \geq 6$ ，故 $|D_3(x)| = 5$ 時
 $|D_4(x)| \geq 6$ 。至於 $|D_3(x)| = 7、8$ 的情況，寬鬆求出下界 $|D_4(x)| \geq \left\lceil \frac{21-8}{3} \right\rceil + 1 = 5$ 即可。

當 $|D_3| = 11$ ， $|g(D_3)| = 33$ ， $g(D_3)$ 中有7數各出現4次，1數出現5次，因此

$$|g(D_4)| = 7 \times 7 + 6 = 55, |D_4| \geq \left\lceil \frac{55}{4} \right\rceil = 14, |D_3 \cup D_4| = 25 \text{ (矛盾)}$$

當 $|D_3| = 12$ ， $|g(D_3)| = 36$ ， $g(D_3)$ 中至少有4數各出現4次，最多有1數出現7次

$$\text{因此 } |g(D_4)| \geq 7 \times 4 + 5 + 6 \times 3 = 51, |D_4| \geq \left\lceil \frac{51}{4} \right\rceil = 13, |D_3 \cup D_4| = 25 \text{ (矛盾)}$$

當 $|D_3| = 13$ ， $|g(D_3)| = 39$ ， $g(D_3)$ 中至少有1數出現4次，最多有2數各出現7次

$$\text{因此 } |g(D_4)| \geq 7 + 5 \times 2 + 6 \times 5 = 47, |D_4| \geq \left\lceil \frac{47}{4} \right\rceil = 12, |D_3 \cup D_4| = 25 \text{ (矛盾)}$$

以上證明 $\text{MDS}(Q_8)$ 不存在孤點。

$$\text{因為 } R(\text{MDS}(Q_8)) \geq 2|E(Q_8^2[\text{MDS}(Q_8)])| \geq 2 \left\lceil \frac{\gamma(Q_8)}{2} \right\rceil$$

所以若 $\gamma(Q_8) = 30$ ，應有 $R(\text{MDS}(Q_8)) \geq 30$ ，但根據定義計算得 $R(\text{MDS}(Q_8))$

$$= 30 \times 9 - 256 = 14 \text{ (矛盾)}；$$

同理若 $\gamma(Q_8) = 31$ ，應有 $R(\text{MDS}(Q_8)) \geq 30$ ，但根據定義計算得 $R(\text{MDS}(Q_8))$

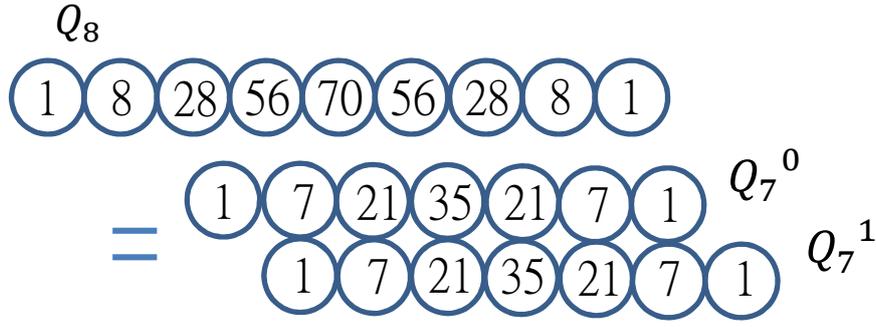
$$= 31 \times 9 - 256 = 23 \text{ (矛盾)}；$$

故 $\gamma(Q_8) = 32$ ， $R(\text{MDS}(Q_8)) = 32 \times 9 - 256 = 32$ ，正好是 $|E(Q_8^2[\text{MDS}(Q_8)])|$ 的最小值。這代表 $\text{MDS}(Q_8)$ 是由16個大小為2的連通分量組成。

(二) $\text{MDS}(Q_8)$ 各層的控制點數

將 Q_8 視為 $Q_7 \square K_2$ ，設 $V(Q_8) = V(Q_7^0) \cup V(Q_7^1)$

且 $\forall v \in V(Q_7^0), g(v) \subseteq [7] \cup \{0\} \wedge \exists! v' \in V(Q_7^1) | g(v') = g(v) \cup \{8\}$



圖(九): Q_7 、 Q_8 的層狀圖過於龐大，我們以圓圈內的數字表示各層的控制點數。

在以下的證明中，我們仍以 L_k 來代表 Q_8 的第 k 層，但定義 $L_k^0 = L_k \cap V(Q_7^0)$ 、 $L_k^1 = L_k \cap V(Q_7^1)$ ，即 Q_8 的第 k 層是由 Q_7^0 的第 k 層與 Q_7^1 的第 $k-1$ 層結合而成。因此有 $|L_k^0| = C_k^7$ 、 $|L_k^1| = C_{k-1}^7$ 。以同理定義 D_k^0 、 D_k^1 。

確定 $\gamma(Q_8) = 32$ 後，明顯有一類解符合 $MDS(Q_8) \cap V(Q_7^0) = MDS(Q_7^0)$ 、 $MDS(Q_8) \cap V(Q_7^1) = MDS(Q_7^1)$ 。但我們不知道是否任意 $MDS(Q_8)$ 皆符合此條件。由於 Q_8 的圖形複雜，我們必須先得出每一層的控制點數為何。

1. 後文的證明中，若我們以 $\forall x \in [7]$ ， $|D_3^0(x)| \geq 3$ 為由，得出 $g(D_3^0) \geq 21$ ， $|D_3^0| \geq 7$ ，則可以確定 $|D_3^0| = 7$ ，其證明如下：

若 $|D_3^0| > 7$ ，則 $\exists x, y, z \in [7] \mid |D_3^0(x)|, |D_3^0(y)|, |D_3^0(z)| \geq 4$

$\therefore [g(D_3^0(x)) \setminus \cup \{x\}] = 6 \wedge |g(D_3^0(x)) \setminus \cup \{x\}| = 8$

$\therefore \exists p, q \in [7] \setminus \{x\}, |D_3^0(\{x, p\})| = |D_3^0(\{x, q\})| = 2$

且 $(x, p, q) \notin D_3^0$ ，否則 $D_3^0(\{x, p\}) \cup D_3^0(\{x, q\})$ 此三點位於同一連通分量
接著分兩種情況進行討論。

- (1) 若 $\{p, q\} \cap \{y, z\} \neq \emptyset$ ，不失一般性設 $p = y$

有 $|D_3^0(y) \setminus D_3^0(x)| = |D_3^0(x) \setminus D_3^0(y)| = |D_3^0(\{x, y\})| = 2$

$\therefore D_3^0(x) \cap D_3^0(y)$ 已是大小為2的控制平方子圖連通分量

$\therefore d(D_3^0(y) \setminus D_3^0(x), D_3^0(\{x, y\})) , d(D_3^0(x) \setminus D_3^0(y), D_3^0(\{x, y\})) > 2$

\Rightarrow 設 $D_3^0(\{x, y\}) = \{(x, y, r), (x, y, s)\}$

有 $[g(D_3^0(y) \setminus D_3^0(x)) \setminus \cup \{y\}], [g(D_3^0(x) \setminus D_3^0(y)) \setminus \cup \{x\}] = |[7] \setminus \{x, y, r, s\}| = 3$

$\Rightarrow D_3^0(y) \setminus D_3^0(x)$ 與 $D_3^0(x) \setminus D_3^0(y)$ 均是大小為2的控制平方子圖連通分量

但 $[7] \setminus \{x, y, r, s\}$ 的三個數字只有三種組合

故 $\exists v \in D_3^0(y) \setminus D_3^0(x), v' \in D_3^0(x) \setminus D_3^0(y) \mid g(v) \setminus \{y\} = g(v') \setminus \{x\}$,

代表 $(D_3^0(y) \setminus D_3^0(x), D_3^0(x) \setminus D_3^0(y)) = 2$ (矛盾)

(2) 若 $\{p, q\} \cap \{y, z\} \in \emptyset$, 有 $|D_3^0(\{x, p\})| = |D_3^0(\{x, q\})| = 2$, 且兩者各為一個控制平方子圖連通分量

不失一般性設 $\{y\} \in D_3^0(\{x, p\})$, 即 $(x, p, y) \in D_3^0$

則 $|D_3^0(y) \setminus (x, p, y)| = 3$, 但 $[g(D_3^0(y) \setminus (x, p, y)) \setminus \cup \{y\}] = |[7] \setminus \{x, p, y\}| = 4$

代表此三點位於同一控制平方子圖連通分量(矛盾)

以上證明在 $\forall x \in [7], |D_3^0(x)| \geq 3$ 的前提下, $|D_3^0| = 7$;

同理, 若 $\forall x \in [7], |D_4^1(x)| \geq 3$, 則 $|D_4^1| = 7$ 。

2. 若 $MDS(Q_8)$ 中不存在彼此距離1的兩點

不存在彼此距離1的兩點, 則不失一般性設 $(0), (1, 8)$ 為控制點,

如此 $|D_2^0| = 0 \wedge \forall v \in D_3^1 \cup D_4^1, \{1, 8\} \notin g(v)$

$\therefore |L_2^1 \setminus (1, 8)| = 6 \therefore |D_3^1| \geq \frac{6}{2} = 3$

若 $|D_3^1| = 4$, 則 $\therefore [g(D_3^1) \setminus \cup \{8\}] = 6 \wedge |g(D_3^1) \setminus \cup \{8\}| = 8$

\therefore 可設 $D_3^1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, d(v_1, v_2) = d(v_3, v_4) = 2$

$\Rightarrow d(D_3^1, D_3^0) > 2$, 故 $L_2^0 \setminus N[D_3^0] = L_2^0 \cap N[D_3^1] = 4$

$\therefore |L_2^0(g(v_1) \cap g(v_2) \setminus \{8\}) \setminus N[D_3^1]|, |L_2^0(g(v_3) \cap g(v_4) \setminus \{8\}) \setminus N[D_3^1]| = 4$

其餘 $\forall x \in [7] \setminus \{g(v_1) \cap g(v_2) \setminus \{8\}, g(v_3) \cap g(v_4) \setminus \{8\}\}, |L_2^0(x) \setminus N[D_3^1]| = 5$

$$\therefore |g(D_3^0)| \geq 2 \times \frac{4}{2} + 5 \times \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 19 \Rightarrow |D_3^0| \geq \left\lceil \frac{19}{3} \right\rceil = 7$$

但 D_3^0 中最多有三個控制平方子圖連通分量，故 $|L_2^0 \setminus N[D_3^0]| = R_{L_2^0}(D_3^0) \leq 3$

$L_2^0 \setminus N[D_3^0] \neq L_2^0 \cap N[D_3^1]$ (矛盾)

因此 $|D_3^1| = 3$ ， $R(D_3^1) = 0$ ， $\forall x \in [7] \setminus \{1\}$ ， $|D_3^1(x)| = 1$

$\therefore \forall x \in [7]$ ， $|L_2^0(x) \setminus N[D_3^0]| \geq 5 \therefore |D_3^0(x)| \geq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 3$ ，可確定 $|D_3^0| = 7$ 。

$\therefore d((1,8), D_3^1) > 2 \therefore \forall x \in [7] \setminus \{1\}$ ， $|L_3^1(x) \setminus D_3^1 \setminus N[(1,8)]| = 4$

$\Rightarrow |D_4^1(x)| \geq 2$ ， $|D_4^1| \geq \frac{12}{3} = 4$

若 $|D_4^1| > 4$ ，則 $\exists y, z \in [7] \setminus \{1\}$ ， $|D_4^1(y)| \geq 3 \wedge D_3^1(y) = (y, z, 8)$ ，代表 $z \notin D_4^1(y)$

因此 $|g(D_4^1(y)) \setminus (\cup \{y, 8\})| = 6$ 且 $|g(D_4^1(y)) \setminus (\cup \{y, 8\})| = 4$

$\Rightarrow D_4^1(y)$ 為大小大於3的控制平方子圖連通分量(矛盾)

故 $|D_4^1| = 4$ 且 $R(D_4^1) = 0$

$\therefore L_3^0(1) \setminus N[D_3^0 \cup D_4^1] = 15 - 3 = 12$

$\forall x \in [7] \setminus \{1\}$ ， $L_3^0(x) \setminus N[D_3^0 \cup D_4^1] = 15 - 3 - 2 = 10$

$\therefore D_4^0(1) \geq \frac{12}{3} = 4$ ， $D_4^0(x) \geq \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 4 \Rightarrow |D_4^0| \geq 7$

$\therefore \forall x \in [7] \setminus \{1\}$ ， $|L_4^1(\{1, x\}) \setminus N[D_4^1 \cup D_3^0 \cup D_3^1]| \geq 5 - 2 = 3$

$\therefore D_5^1(\{1, x\}) \geq 2 \Rightarrow |g(D_5^1(1)) \setminus (\cup \{1, 8\})| \geq 12$ ， $|D_5^1(1)| \geq \frac{12}{3} = 4$

重新檢視整個 Q_8 此時的情況：

$|D_0| = 1$ ， $|D_2| = 1$ ， $|D_3| = 10$ ，設 $|D_4| \geq 11$ ， $|D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| \leq 9$ ， $|D_5| \geq 4$

若 $|D_4| \geq 12$ ，則 $|D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| \leq 8$ 。

當 $|D_6| \geq 2$ 則 $|D_5 \cup D_7| \leq 6 \Rightarrow |L_6 \setminus N[D_5 \cup D_6 \cup D_7]| \geq 28 - 12 - 2 - 13 = 1$ (矛盾)

當 $|D_6| \leq 1$ 則 $|D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| \leq 7$ ，只有 $|D_5 \cup D_7| = 7$ 時能完全控制 L_6 ，

但 $D_8 \in \emptyset$ ， L_7 無法被控制(矛盾)

$$\text{故}|D_4| = 11, |D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| = 9, |D_5| \geq 4, |D_6| \geq \left\lceil \frac{|L_5 \setminus N[D_4]|}{6} \right\rceil = 2$$

若 $|D_6| = 2$ ，則要控制 L_6 ， $|D_5 \cup D_7| = 7$ ，如此 L_7 無法被控制(矛盾)

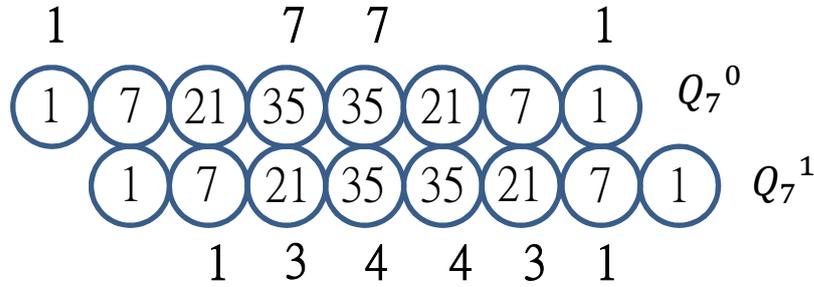
故 $|D_6| = 3$ ，此時 $|D_5 \cup D_7| \leq 6$ ，唯有 $|D_5| = 4, |D_7| = 2$ 時 L_6, L_7 均能被控制。

$$|D_4| = 11 \text{ 代表 } |D_4^0| = 7, |D_5| = 4 \text{ 代表 } |D_5^0| = 0$$

$$\text{因此要控制 } L_6^0, |D_7^0| = 1, \text{ 而有 } |D_7^1| = 1, |D_6^1| = 3。$$

$$\text{由最後各層的控制點數可推得 } R(D_6^1), R(D_5^1) = 0$$

我們得到各層的控制點數如圖(十)。



圖(十): 粗體字為該層的控制點數

3. 若 $MDS(Q_8)$ 中存在彼此距離1的兩點

存在距離1的兩控制點，不失一般性設(0)、(8)為控制點，即 $|D_1^1| = 1$

$$\text{則}|D_2| = |D_3^1| = 0, L_2^0 \subset N[D_3^0], L_3^1 \subset N[D_4^1],$$

故 $\forall x \in [7], |D_3^0(x)|, |D_4^1(x)| \geq 3$ ，可確定 $|D_3^0|, |D_4^1| = 7$ 且 $R(D_3^0), R(D_4^1) = 0$

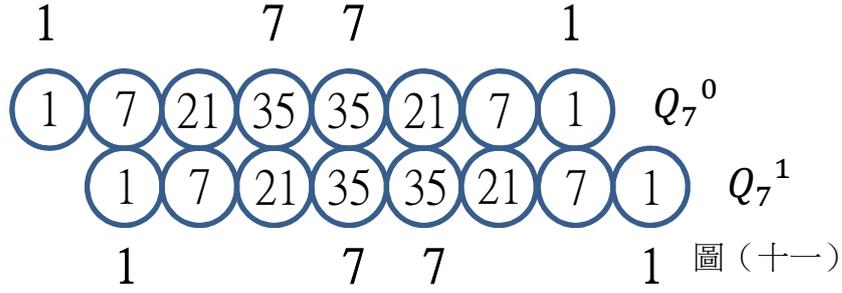
$$\therefore \forall y \in [7] \setminus \{x\}, |D_3^0(\{x, y\})| = |D_4^1(\{x, y\})| = 1$$

$$\therefore |L_3^0(\{x, y\}) \setminus N[D_3^0 \cup D_4^1]| \geq 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow |D_4^0(\{x, y\})| \geq 2, |D_4^0(x)| \geq \frac{12}{3} = 4, |D_4^0| \geq 7, \text{ 同理 } |D_5^1| \geq 7$$

此時又因 $|D_5^0 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8| \leq 2$ ，故要控制 L_6^0, L_7^1 ，只有 $|D_7^0| = 1, |D_8| = 1$

因此 $|D_4^0|, |D_5^1| = 7, R(D_4^0), R(D_5^1) = 0$ 。各層的控制點數如下頁圖(十一)。



(三) Q_8 的建構模式

1. 當不存在距離1的兩控制點，不失一般性設(1,8)為控制點， $|D_0|$ 到 $|D_7^0|$ 依序為 $\{1,0,0,7,7,0,0,1\}$ ， $|D_1^1|$ 到 $|D_8|$ 依序為 $\{0,1,3,4,4,3,1,0\}$ 。

如此的排列，若 $\forall v \in D_3^1, d(v, D_3^0) = 2$ ，則 $L_2 \subset N[D_3^0] \Rightarrow R(D_3^0) = 0$

此時存在 D_4^0 的解使得 $R(D_4^0) = 0$ ，亦即 $MDS(Q_8) \cap Q_7^0 = MDS(Q_7^0)$ ，又因

$|L_4 \setminus N[D_3^0]| = 7$ ，可確定此為 D_4^0 的唯一解。

因此 $\forall v \in MDS(Q_8) \cap Q_7^0, \exists! v' \in MDS(Q_8) \cap Q_7^1, d(v, v') = 2$

$$\Rightarrow MDS(Q_8) = MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$$

但若 $d(D_3^1, D_5^1) = 2$ ，則 $R(MDS(Q_8) \cap Q_7^1) \neq 0$ 。

如果這樣的控制集存在，則控制平方子圖連通分量 $\{(0), (8)\}$ 已跨過 Q_7^0 、 Q_7^1 ，又 Q_7^1 內存在完整的另一連通分量，若不進行平移、換維， $MDS(Q_8)$ 無法被視為 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 。我們對此進行探討：

若 $\exists v \in D_3^1 | d(v, D_5^1) = 2$ ，

$$\text{則 } |E(Q_8^2[D_3^1 \cup D_5^1])| = |L_2^0 \setminus N[D_3^0]| = |E(Q_8^2[D_3^0])|$$

令 $(x, y) \in L_2^0 \setminus N[D_3^0]$ ，則 $D_3^0(\{x, y\}) \in \emptyset$

$$\therefore \exists p, q \in [7] \setminus \{x, y\}, |D_3^0(\{x, p\})|, |D_3^0(\{y, q\})| = 2$$

$$\therefore \exists r, s \in [7] \setminus \{x, y\} | D_3^0(\{p, r\}), D_3^0(\{q, s\}) \in \emptyset \Rightarrow \{p, r\}, \{q, s\} \in g(L_2^0 \setminus N[D_3^0])$$

因此若 $\{r, s\} = \{p, q\}$ ， $L_2^0 \setminus N[D_3^0] = \{(x, y), (p, q)\}$ ，即 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ 的情況

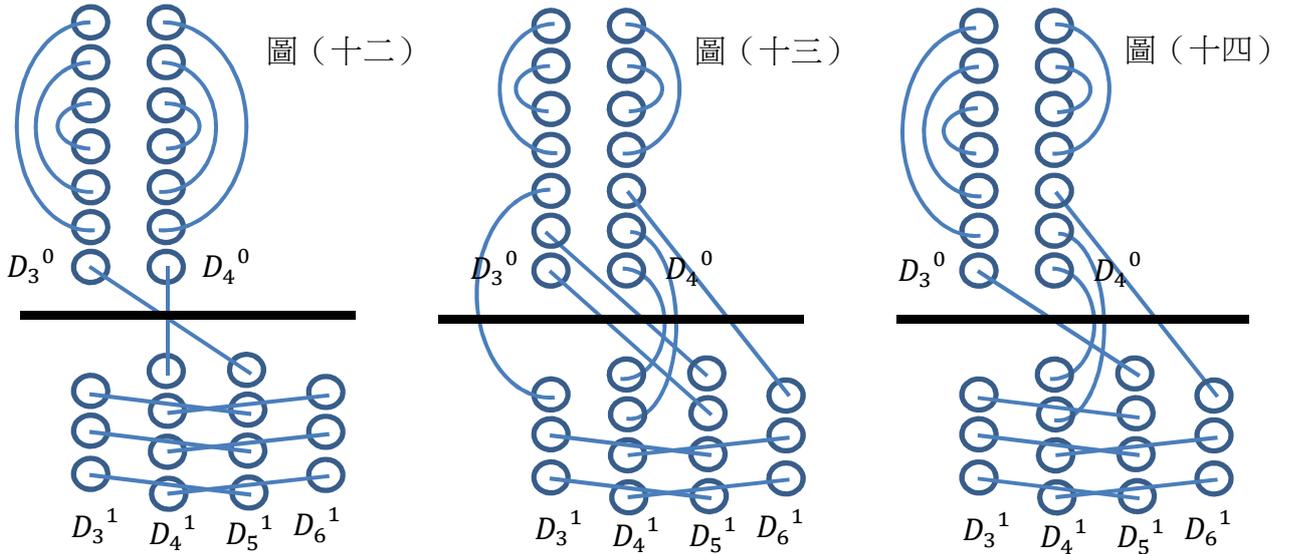
反之，若 $\{r, s\} \neq \{p, q\}$ ， $L_2^0 \setminus N[D_3^0] = \{(x, y), (p, r), (q, s)\}$ ，即 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3$

同樣地， $|E(Q_8^2[D_4^1 \cup D_6^1])| = |L_5^0 \setminus N[D_4^0]| = |E(Q_8^2[D_4^0])|$

若 $R(D_4^0) = 0$ 則必有 $R(D_3^0) = 0$ 的唯一解(矛盾)

因此此時 $\exists v \in D_6^1 | d(v, D_4^1) = 2$ ，同樣也有 $|E(Q_8^2[D_4^0])| = 2$ 或 3

故將彼此距離2的控制點相連，得出 $D_3^0, D_4^0, D_3^1, D_4^1, D_5^1, D_6^1$ 的可能形態如下：



圖(十二)： $|E(Q_8^2[D_3^0])|, |E(Q_8^2[D_4^0])| = 3$

圖(十三)： $|E(Q_8^2[D_3^0])|, |E(Q_8^2[D_4^0])| = 2$

圖(十四)： $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3, |E(Q_8^2[D_4^0])| = 2$ 。進行 $\sigma(v) = v + \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的轉換即得 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2, |E(Q_8^2[D_4^0])| = 3$ 的情況。

(1) $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3$ 的情況

當 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3$ ， D_3^0 和 D_5^1 的距離關係如圖(十五)

因設(1,8)為控制點，故 $D_3^1(1) \in \emptyset$

$\Rightarrow L_2^0(1) \subset N[D_3^0], R(D_3^0(1)) = 0$

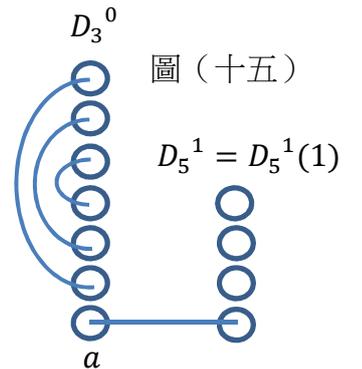
$\therefore |L_4^0(1)| = 20 \wedge |D_3^0(1)| = 3, |D_4^0(1)| = 4, |D_5^1(1)| = 4$

$\therefore R_{L_4^0(1)}(D_3^0 \cup D_5^1)$

$= 4|D_3^0(1)| + |D_3^0 \setminus D_3^0(1)| + |D_4^0(1)| + |D_5^1| - |L_4^0(1)| = 4$

$\exists! a \in D_3^0, d(v, D_5^1(1)) = 2$ ，如圖(十五)所示。若 $a \in D_3^0(1)$ ，

則 $R_{L_4^0(1)}(D_3^0 \cup D_5^1) = R_{L_4^0(1)}(D_3^0 \setminus a) + R_{L_4^0(1)}(a \cup D_5^1) = 2 + 1 = 3$ (矛盾)



代表圖（十五）的 D_3^0 與 D_5^1 間應存在未被畫出的邊，如此存在大小大於2的連通分量（矛盾）。因此 $a \notin D_3^0(1), \forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \setminus D_3^0(1), d(v, v') = 2$ 。

至於 $|E(Q_8^2[D_4^0])| = 3$ 的情況下，若進行 $\sigma(v) = v + \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的轉換，則 D_4^0 對應至新圖的 D_3^0 ， $D_4^0 \setminus D_4^0(1)$ 對應至新圖的 $D_3^0(1)$ ，又此時全圖仍為 $MDS(Q_8)$ ，已證 $\forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \setminus D_3^0(1), d(v, v') = 2$ ，

故原圖中也有 $\forall v \in D_4^0 \setminus D_4^0(1), \exists! v' \in D_4^0(1), d(v, v') = 2$ 。

(2) $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ 的情況

當 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ ， D_3^0, D_3^1 與 D_5^1 的距離關係如圖（十六）

同樣因設(1,8)為控制點，故 $R(D_3^0(1)) = 0$

可以將 D_3^0 分為三個點集：

$$S = \{v | \exists! v' \in D_3^0, d(v, v') = 2\} \cdot T = \{v | \exists! v' \in D_5^1, d(v, v') = 2\}$$

以及 $\exists! a \in D_3^0, b \in D_3^1, d(a, b) = 2$ 。如圖（十六）所示。

$$\text{且同樣有 } R_{L_4^0(1)}(D_3^0 \cup D_5^1) = R_{L_4^0(1)}(T \cup a \cup D_5^1) + R_{L_4^0(1)}(S) = 4$$

$$R_{L_4^0(1)}(T \cup a \cup D_5^1) = 2, \text{ 若 } |D_3^0(1) \cap S| \leq 1, \text{ 則 } R_{L_4^0(1)}(S) = 1 \text{ (矛盾)}$$

$$\text{故 } |D_3^0(1) \cap S| = 2。$$

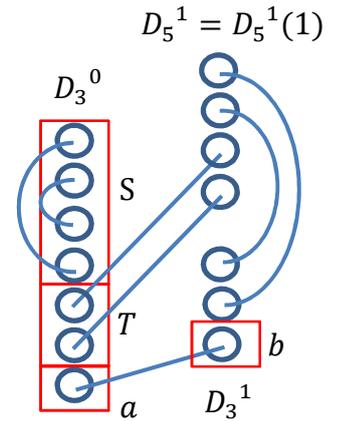
而 $L_2^0 \setminus N[D_3^0] = \{(x, y), (p, q)\}$ ，代表對 $u, v \in D_3^0(1) \cap S$ ，

$$\text{可設 } \{x, p\} \subset g(u), \{y, q\} \subset g(v) \Rightarrow g(D_3^0(1) \setminus S) = [7] \setminus \{x, y, p, q\}$$

$$\text{而對 } u', v' = D_3^1 \setminus b, \text{ 可設 } \{x, y\} \subset g(u'), \{p, q\} \subset g(v') \Rightarrow g(b) = [8] \setminus \{1, x, y, p, q\}$$

$$|g(D_3^0(1) \setminus S) \cap g(b)| = 2, \text{ 代表 } d(D_3^0(1) \setminus S, b) = 2, D_3^0(1) \setminus S = a$$

$$\text{因此 } \forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \cup D_3^1, d(v, v') = 2$$



圖（十六）

至於 $|E(Q_8^2[D_4^0])| = 2$ 的情況下，若進行 $\sigma(v) = v + \{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的轉換，則 D_4^0

對應至新圖的 D_3^0 ， D_6^1 對應至新圖的 D_3^1 ， $D_4^0 \setminus D_4^0(1)$ 對應至新圖的 $D_3^0(1)$

已證 $\forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \setminus D_3^0(1) \cup D_3^1, d(v, v') = 2$ ，

故原圖中也有 $\forall v \in D_4^0 \setminus D_4^0(1), \exists! v' \in D_4^0(1) \cup D_6^1, d(v, v') = 2$ 。

(3) 證明可藉由換維使 $\text{MDS}(Q_8) = \text{MDS}(Q_7^0) \cup \text{MDS}(Q_7^1)$

有了以上兩點前提，我們便可證明，設(1,8)為控制點時，經過 $\sigma(v) = v \times (18)$

的換維後，可以使圖(十二)至(十四)的排列形成 $\text{MDS}(Q_7^0) \cup \text{MDS}(Q_7^1)$ ：

a. \because 經過 $\sigma(v) = v \times (18)$ 的換維後， D_3^1 對應至 D_3^0 中、 D_4^1 對應至 D_4^0 中

而 D_5^1, D_6^1 的座標不變

\therefore 原本 $D_3^1 \cup D_5^1$ 、 $D_4^1 \cup D_6^1$ 中的連通分量現在皆跨過 Q_7^0 與 Q_7^1

b. 當 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3$ ， $\forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \setminus D_3^0(1), d(v, v') = 2$

且 $\exists! a \in D_3^0 \setminus D_3^0(1), d(a, D_5^1) = 2$

當 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ ， $\forall v \in D_3^0(1), \exists! v' \in D_3^0 \cup D_3^1, d(v, v') = 2$

且 $\exists T \subset D_3^0 \setminus D_3^0(1), \forall u \in T, d(u, D_5^1) = 2$

\because 經過 $\sigma(v) = v \times (18)$ 的換維後，原 $D_3^0(1)$ 對應至 D_3^1 ，原 D_3^1 對應至 $D_3^0(1)$

而 $D_3^0 \setminus D_3^0(1), D_5^1$ 的座標不變

\therefore 不論 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ 或 3 ，原本 D_3^0 中的連通分量換維後，皆跨過 Q_7^0 與 Q_7^1

同理，不論 $|E(Q_8^2[D_4^0])| = 2$ 或 3 ，經過 $\sigma(v) = v \times (18)$ 的換維後，原本 D_4^0 中的連通分量現在皆跨過 Q_7^0 與 Q_7^1

因此 $\sigma(v) = v \times (18)$ 的換維可以使所有連通分量皆轉換為跨過 Q_7^0 與 Q_7^1 的形式，如下頁圖(十七)表示 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 3$ 的情況，圖(十八)表示 $|E(Q_8^2[D_3^0])| = 2$ 的情況。

得到結論是將 Q_8 視為 $Q_7^0 \cup Q_7^1$ ，且 $\forall v \in Q_7^0, \exists! v' \in Q_7^1, g(v') = g(v)$ ，當不存在彼此距離1的兩控制點，則所有 $\text{MDS}(Q_8)$ 均與 $\text{MDS}(Q_7^0) \cup \text{MDS}(Q_7^1)$ 同構。

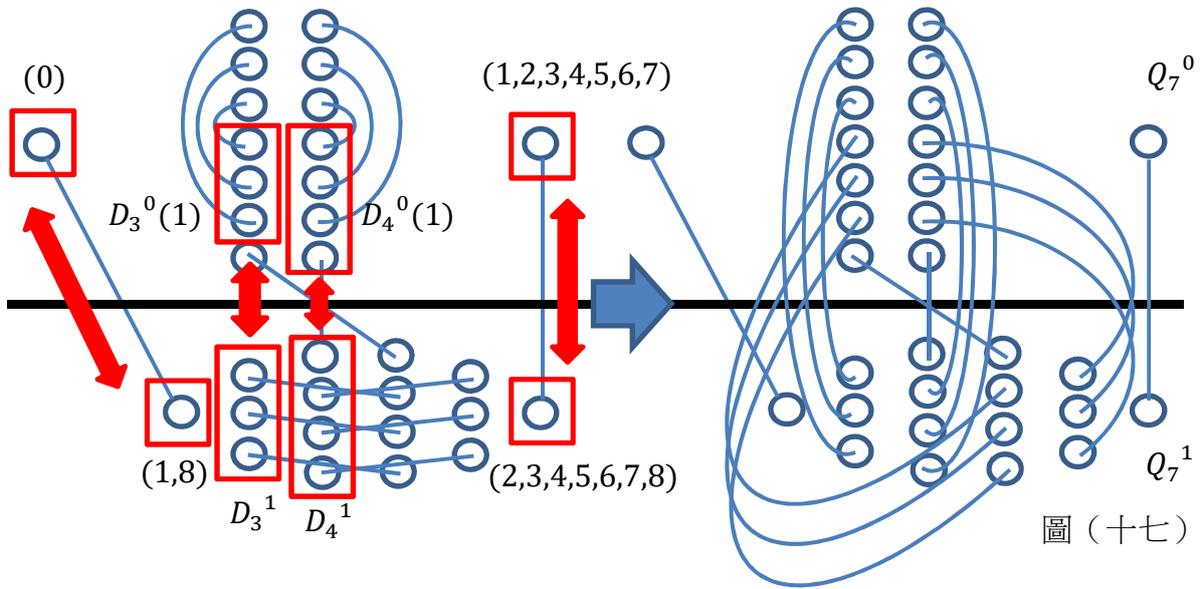


圖 (十七)

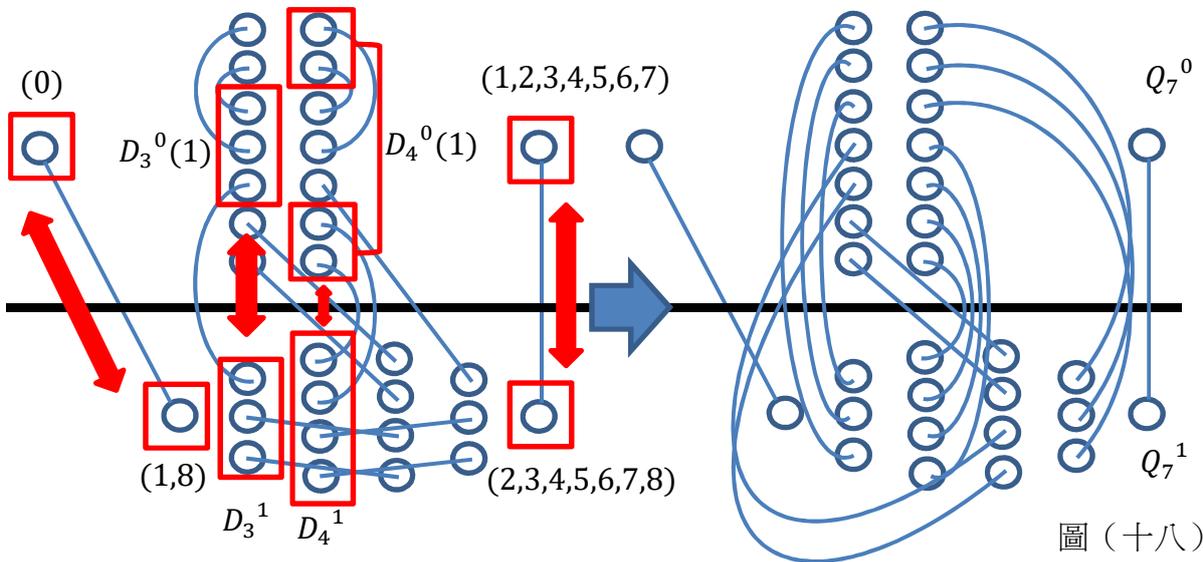


圖 (十八)

例如以下的 $MDS(Q_8) \neq MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$:

$$MDS(Q_8) \cap Q_7^0 = \{(0), (127), (134), (156), (246), (257), (347), (356), (1236), (1245), (1357), (1467), (2345), (2367), (4567), (1234567)\}$$

$$MDS(Q_8) \cap Q_7^1 = \{(18), (238), (458), (678), (2478), (2568), (3468), (3578), (12358), (12468), (13678), (14578), (134568), (125678), (123478), (2345678)\}$$

但是存在 $\sigma(v) = v \times (18)$ 使 $MDS(Q_8) = MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$:

$$MDS(Q_8) \cap Q_7^0 = \{(0), (123), (145), (167), (246), (257), (347), (356), (1247), (1256), (1346), (1357), (2345), (2367), (4567), (1234567)\}$$

$$MDS(Q_8) \cap Q_7^1 = \{(18), (278), (348), (568), (2368), (2458), (3578), (4678), (12358), (12468), (13678), (14578), (134568), (125678), (123478), (2345678)\}$$

2. 若存在彼此距離1的兩控制點，則不失一般性設(0), (8)為控制點， $|D_0^0|$ 到 $|D_7^0|$ 依序為{1,0,0,7,7,0,0,1}， $|D_1^1|$ 到 $|D_7^1|$ 依序為{1,0,0,7,7,0,0,1}，

$$\because \forall v_1, v_2 \in D_3^0, d(v_1, v_2) = 4$$

\therefore 存在同構對應 σ_1 使得 $\forall v \in D_3^0, \sigma_1(v)$ 的座標位數行模加法得0

同理，存在同構對應 σ_2 使得 $\forall v \in D_4^0, \sigma_2(v)$ 的座標位數行模加法得0

$$\text{若 } \sigma_1 = \sigma_2, \text{ 則 } \text{MDS}(Q_8) \cap Q_7^0 = \text{MDS}(Q_7^0) \cdot \text{MDS}(Q_8) \cap Q_7^1 = \text{MDS}(Q_7^1)$$

但若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ，則 $\exists v_1 \in D_3^0, v_2 \in D_4^0, d(v_1, v_2) = 1$

對 $\{x, y, z, p, q, r, s\} = [7]$ ，令 $v_1 = (x, y, z), v_2 = (x, y, z, p)$

$$\because |D_4^0(\{x, y\})|, |D_4^0(\{y, z\})|, |D_4^0(\{x, z\})| = 2 \wedge |D_4^0(\{x, y, z\})| = 1$$

$\therefore |D_4^0(\{x, y\}) \cup D_4^0(\{y, z\}) \cup D_4^0(\{x, z\})| = 4$ ，此四點內 x, y, z 各出現3次

$$\Rightarrow \left| D_4^0 \setminus \left(D_4^0(\{x, y\}) \cup D_4^0(\{y, z\}) \cup D_4^0(\{x, z\}) \right) \right| = 3$$

此三點內 x, y, z 各出現1次，且任兩數不出現於同一點中。

將三點依序命名為 v_x, v_y, v_z ：

設 $(x, p, q), (x, r, s) \in D_3^0$ ， $\therefore g(v_x \setminus \{x\}) \in \{p, q, r, s\}$

$$\therefore \{x, p, q\} \subset g(v_x) \vee \{x, r, s\} \subset g(v_x) \Rightarrow d(v_x, D_3^0) = 2,$$

同理 $d(v_y, D_3^0), d(v_z, D_3^0) = 1$ ， $D_3^0 \cup D_4^0$ 中至少有四組彼此距離為1的控制點，

$$\because \forall v \in L_4^0 \setminus N(D_3^0), \exists! v' \in D_3^0, d(v, v') = 7$$

$$\therefore |\{u \mid u \in D_4^0 \wedge \exists u' \in D_3^0, d(u, u') = 7\}| \leq 3$$

$$\Rightarrow |\{u \mid u \in D_5^1 \wedge \exists u' \in D_3^0, d(u, u') = 8\}| \geq 4$$

且固定 $D_3^0 \cup D_4^0$ 的位置後，此點集有唯一解。又因此點集的大小大於3，

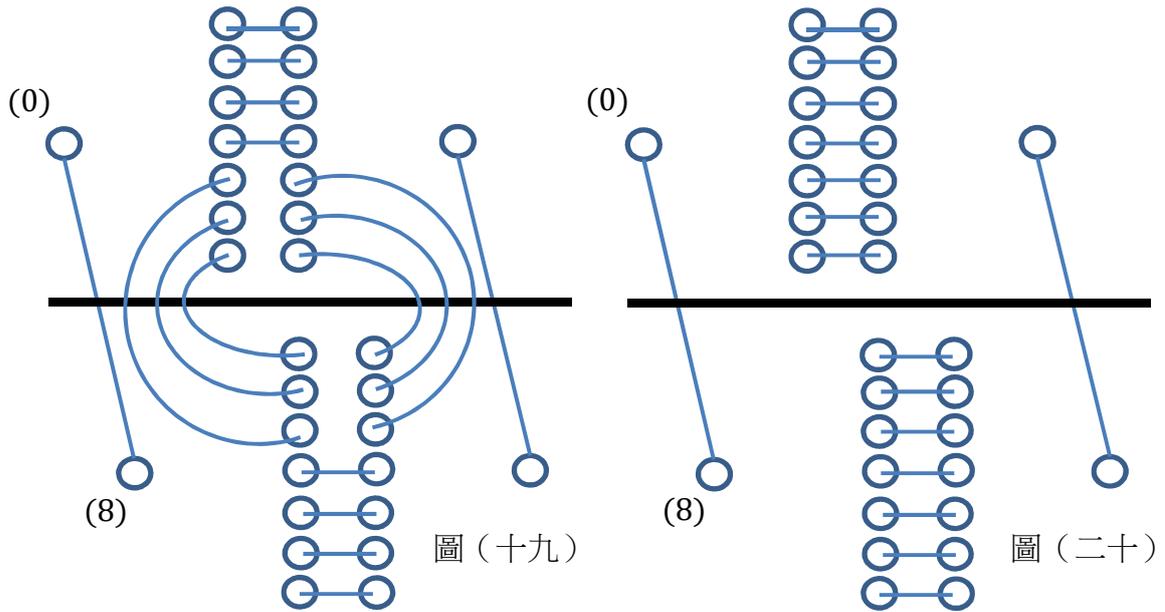
所以可藉由 $\forall x, y \in [7], |D_5^1(\{x, y\})| = 2 \wedge R(D_5^1) = 0$ ，推得整個 D_5^1 有唯一解。

$\forall v \in D_5^1, \exists! v' \in D_3^0, d(v, v') = 8$ 的建構方式符合條件，即該唯一解。

這表示若 $\exists u \in D_3^0, d(u, v) = 2$ ，則 $d(u, v') = 6$ (矛盾)，

因此 $\forall w \in D_5^1, \exists! w' \in D_4^0 \cup D_4^1, d(w, w') = 1$

⇒ $MDS(Q_8)$ 不存在彼此距離2的控制點，其形態舉例如圖（十九）與（二十）。



$\forall u, v \in MDS(Q_8) | d(u, v) = 1$ ，若 $(u \in Q_7^0, v \in Q_7^1) \vee (v \in Q_7^0, u \in Q_7^1)$ ，則稱 u, v 為「垂直分量」；反之，稱其為「平行分量」。

如果存在 $\sigma(v)$ 可將 $MDS(Q_8)$ 轉為 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 的同構，則因為僅靠平移無法使連通分量的垂直、平行狀態改變，

故將 $\sigma(v)$ 寫為有限步的 $\sigma(v) = v \times (8 a_1)(8 a_2) \dots (8 a_i)$ 的形式時，

存在步驟最短的 n 次換維 $\sigma(v) = v \times (8 a_1)(8 a_2) \dots (8 a_n)$ ，使所有連通分量皆轉為垂直分量。

假設 $a_n = k$ ，則進行 $(8 a_n)$ 的換維前，對同一連通分量內的兩點 (u, w) ， (u, w) 必為平行分量且 $g(u) \setminus g(v) = \{k\} \vee g(v) \setminus g(u) = \{k\}$ 。

此時若 $a_{n-1} \neq k$ ，則因 $g(u), g(w) \ni a_{n-1} \vee g(u), g(w) \ni a_{n-1}$ ，則進行 $(8 a_{n-1})$ 的換維前， (u, w) 必已是平行分量且 $g(u) \setminus g(v) = \{k\} \vee g(v) \setminus g(u) = \{k\}$ 。

如此直接進行 $(8 k)$ 換維即得最短步驟(矛盾)。故 $a_{n-1} = k$ ， $(8 a_n) = (8 a_{n-1})$ ，但這代表進行 $(8 a_{n-2})$ 換維後，所有連通分量已是垂直分量，最短步驟應為 $n - 2$ 步，遞迴推得矛盾。

故如圖（十九）、（二十）的排列，不存在 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 的同構，不可視為兩 $MDS(Q_7)$ 的聯集。

不過若僅對 $D_4^0 \cup D_5^1$ 進行運算 $\sigma(v) = v + \{8\}$ ，即將兩者的位置互換，則：

運算前： $\forall v \in D_5^1, \exists! v' \in D_3^0, d(v, v') = 8 \Rightarrow \forall w \in D_5^1, w' \in D_3^0, d(w, w') \geq 4$

$\forall v \in D_4^1, \exists! v' \in D_4^0, d(v, v') = 8 \Rightarrow \forall w \in D_4^1, w' \in D_4^0, d(w, w') \geq 4$

運算後： $\forall v \in D_4^0, \exists! v' \in D_3^0, d(v, v') = 7 \Rightarrow \forall w \in D_4^0, w' \in D_3^0, d(w, w') \geq 3$

$\forall v \in D_4^1, \exists! v' \in D_5^1, d(v, v') = 7 \Rightarrow \forall w \in D_4^1, w' \in D_5^1, d(w, w') \geq 3$

可以使連通分量皆形成橫跨狀態，即 $MDS(Q_8) = MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$

例如以下的 $MDS(Q_8) \neq MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ ：

$MDS(Q_8) \cap Q_7^0 = \{(0), (123), (145), (167), (246), (257), (347), (356), (1237), (1457), (2467), (3567), (1256), (1346), (2345), (1234567)\}$

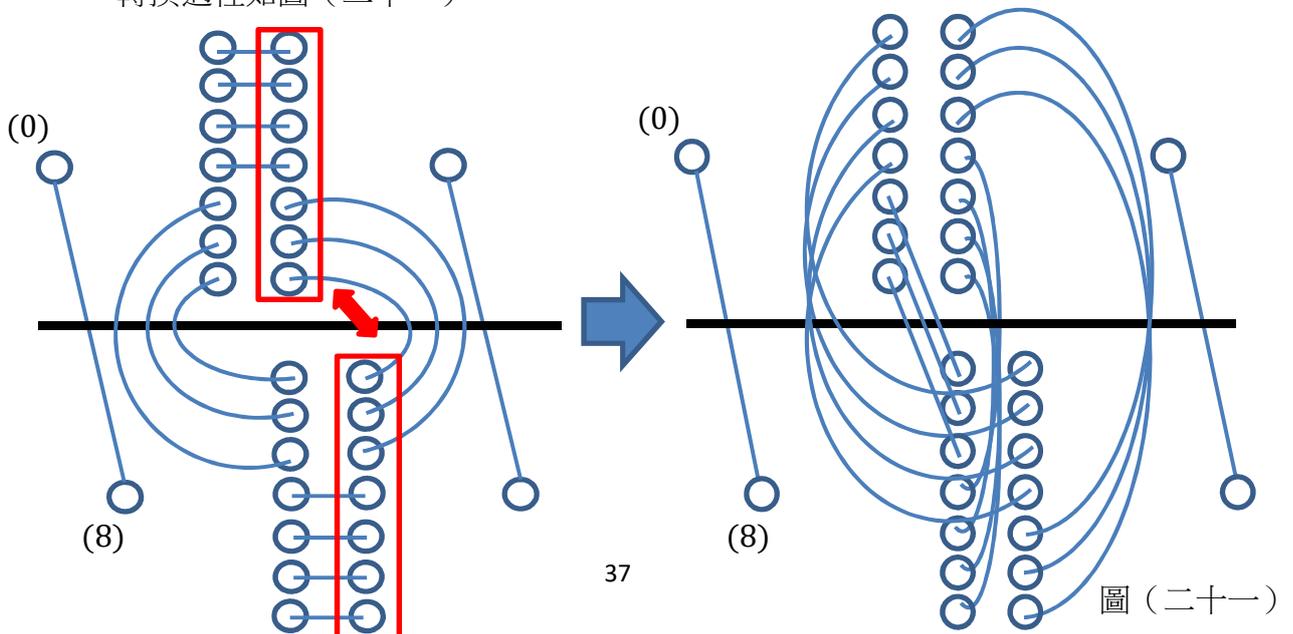
$MDS(Q_8) \cap Q_7^1 = \{(8), (1248), (1358), (1678), (2368), (2578), (3478), (4568), (12478), (12568), (13468), (13578), (23458), (23678), (45678), (12345678)\}$

但是對 $D_4^0 \cup D_5^1$ 進行運算 $\sigma(v) = v + \{8\}$ ，能使 $MDS(Q_8) = MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ ：

$MDS(Q_8) \cap Q_7^0 = \{(0), (123), (145), (167), (246), (257), (347), (356), (1247), (1256), (1346), (1357), (2345), (2367), (4567), (1234567)\}$

$MDS(Q_8) \cap Q_7^1 = \{(8), (1248), (1358), (1678), (2368), (2578), (3478), (4568), (12378), (12568), (13468), (14578), (23458), (24678), (35678), (12345678)\}$

轉換過程如圖（二十一）。



我們得出 $MDS(Q_8)$ 建構方式的結論：

將 Q_8 視為 $Q_7^0 \cup Q_7^1$ ，且 $\forall v \in V(Q_7^0), \exists! v' \in V(Q_7^1), g(v') = g(v) \cup \{k\} (k \in [8])$

若 $MDS(Q_8)$ 內存在彼此距離2的兩控制點，則必與 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 同構

若 $MDS(Q_8)$ 內不存在彼此距離2的兩控制點，則可能與 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ ，但也有可能是對 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 中的 $D_4^0 \cup D_5^1$ 進行運算 $\sigma(v) = v + \{k\}$ 後建構而成的。

陸、結論與未來展望

一、結論

(一) 探討 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 最小控制集在建構模式與同構現象

當 $n = 1, 2, 3$ ， $MDS(Q_n)$ 明顯均同構；而 $MDS(Q_4)$ 有兩種同構。

(二) 提出 $\gamma(Q_5) = 7$ 更簡單的證明，並探討 Q_5 最小控制集在建構模式與同構現象

1. 以控制集重複控制的次數 $R(MDS(Q_5))$ 篩選控制平方子圖 $Q_5^2[MDS(Q_5)]$ 的型態，能使證明 $\gamma(Q_5) = 7$ 更簡單。

2. $MDS(Q_5)$ 均同構：皆是由一個A型三聯點、一個B型三聯點、一個孤點組成，且兩組三聯點的中心點彼此距離5。

(三) 提出 $\gamma(Q_6) = 12$ 更簡單的證明，並探討 Q_6 最小控制集在建構模式與同構現象

1. 以 $R(MDS(Q_6))$ 篩選 $Q_6^2[MDS(Q_6)]$ 的型態，能使證明 $\gamma(Q_6) = 12$ 更簡單。

2. $MDS(Q_6)$ 有兩種同構：

(1) 由兩組A型三聯點、兩組B型三聯點組成的 $MDS(Q_6)$ 均同構：任一中心點與另外三個中心點的距離依序為(3,4,5)，其中兩組B型三聯點的中心點距離5、兩組A型三聯點的中心點距離5。

(2) 由四組A型三聯點組成的 $MDS(Q_6)$ 均同構：任一中心點與另外3個中心點的距離依序為(3,3,6)。

3. 將 Q_6 視為 $Q_5^0 \cup Q_5^1$, $\forall v \in V(Q_5^0), \exists! v' \in V(Q_5^1), g(v') = g(v) \cup \{k\} (k \in [6])$

則對所有 $MDS(Q_6)$, 存在解使得 $MDS(Q_6)$ 為 $MDS(Q_5^0) \cup MDS(Q_5^1)$ 的子圖。

(四) 證明 $\gamma(Q_8) = 32$, 並探討 Q_7, Q_8 最小控制集的建構模式與同構現象

1. $MDS(Q_7)$ 均同構

2. $MDS(Q_8)$ 不存在孤點, 因此 $\gamma(Q_8) = 32$ 。

3. 將 Q_8 視為 $Q_7^0 \cup Q_7^1$, 設 $\forall v \in V(Q_7^0), \exists! v' \in V(Q_7^1) | g(v') = g(v) \cup \{k\}$,

則 $MDS(Q_8)$ 各層的控制點數有以下兩種可能:

(1) 若不存在彼此距離1的兩控制點, 則不失一般性設 $(0), (1, k)$ 為控制點,

此時由 $|D_0|$ 至 $|D_7^0|$ 依序為 $\{1, 0, 0, 7, 7, 0, 0, 1\}$, 由 $|D_1^1|$ 至 $|D_8|$ 依序為 $\{0, 1, 3, 4, 4, 3, 1, 0\}$

(2) 若存在彼此距離1的兩控制點, 則不失一般性設 $(0), (k)$ 為控制點,

此時由 $|D_0|$ 至 $|D_7^0|$ 依序為 $\{1, 0, 0, 7, 7, 0, 0, 1\}$, 由 $|D_1^1|$ 至 $|D_8|$ 依序為 $\{1, 0, 0, 7, 7, 0, 0, 1\}$

4. $MDS(Q_8)$ 有兩種建構模式:

(1) 若存在彼此距離2的控制點, 則 $MDS(Q_8)$ 與 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 同構

(2) 若不存在彼此距離2的控制點, 則 $MDS(Q_8)$ 可能與 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 同構, 但也有可能是對 $MDS(Q_7^0) \cup MDS(Q_7^1)$ 中的 $D_4^0 \cup D_5^1$ 進行運算 $\sigma(v) = v + \{k\}$ 後建構而成的。

二、未來展望

(一) 最初本研究即希望透過超立方體最小控制集建構方式的探討, 對證明猜想

$\forall 2^{p-1} - 1 < n < 2^p - 1, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-2^{p+1}}]$ 有所幫助。

此猜想的關鍵點之一在於:

令 $k = 2^{p-1} - 1$ 的完美情況, 當 $n - k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1}$, 即 $\gamma(Q_n) = 2^{n-k} \gamma(Q_k)$

但當 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor < n - k < 2^p - 2^{p-1}, \gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-2^{p+1}}]$,

即 $\gamma(Q_n) = 2^{n-k} \gamma(Q_k) - 2^{2n-p-2^{p+1}}$

為何 $n > k + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$ 時能使 $\gamma(Q_n) < 2\gamma(Q_{n-1})$ 是此猜想的核心，但也難以說明。

就此方面而言，本研究最重要的是提出 $MDS(Q_5)$ 與 $MDS(Q_6)$ 、 $MDS(Q_7)$ 與 $MDS(Q_8)$ 的關聯，提供了由 $MDS(Q_n)$ 演變為 $MDS(Q_{n+1})$ 的兩個局部結果。

例如就猜想 $\gamma(Q_9) = 2\gamma(Q_8)$ 、但 $\gamma(Q_{10}) = 2\gamma(Q_9) - 2$ 這點，若再進行深究，本文對最小控制集構造的相關成果就可能可以幫助我們證明 $\gamma(Q_9) = 2\gamma(Q_8)$ ，或是幫助解釋為何 $\gamma(Q_{10}) < 2\gamma(Q_9)$

(二) 在文獻[5]證明 $\forall m = 2^k, \gamma(Q_m) = 2^{m-k}$ 的過程中， $|S^1 \setminus T| \geq \frac{|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T]|}{m}$ 應改為

$|S^1 \setminus T| \geq \left\lceil \frac{|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T] \setminus N[S^0]|}{m-1} \right\rceil$ ，以致 $|S^1 \setminus T|$ 的下界隨 T 的上升而減少，但不論是我們給

出的反例或文獻[5]起初的證明方式，均設 $R(T) = 0$ ，如此得出的下界會盡可能的低。

未來我們應嘗試以 $Q_m^2[T]$ 探討 $|T| \geq (m-1)$ 時， $C(Q_m^2[T])$ 、 $E(Q_m^2[T])$ 的值，便有機會在 $|T|$ 提升時將 $R(T)$ 一併提升，而使 $\left\lceil \frac{|V(Q_{m-1}^1) \setminus N[T] \setminus N[S^0]|}{m-1} \right\rceil$ 中 $|N[T]| < m(m-2)$ ，重新提高 $|S^1 \setminus T|$ 的下界並證明 $\forall m = 2^k, \gamma(Q_m) = 2^{m-k}$ 。

(三) 我們曾希望證明對任意完美情況的 Q_n ， $MDS(Q_n)$ 皆同構。

設 (0) 為控制點，以 Q_{15} 而言， $L_2 \subset N[D_3]$ ，此時 D_3 的點座標即科克曼女生問題

(Kirkman's Schoolgirl Problem)的解，但科克曼女生問題有七組不同構的解。而且即使證明 $MDS(Q_n)$ 中 D_3 只有一種同構，還是無法確定此時 $MDS(Q_n)$ 後續的層數皆會被固定有唯一解。從以上的分析來看， $MDS(Q_n)$ 很可能有兩種以上的同構。

但我們也無法證明科克曼女生問題的解即為 D_3 的解—亦即若取與文獻[1]提出之 D_3 不同構的一組解作為 D_3 ，雖能完全控制 L_2 ，但我們不知道能否使 $L_3 \setminus D_3 \subset N[D_4]$ 有解、使 $L_4 \setminus D_4 \subset N[D_5]$ 有解…以此類推。因此還是無法排除 $MDS(Q_n)$ 皆為同構的可能性。

未來若要朝完美情況的建構方式進行研究，我們可能需要更進階的數學工具，例如熟

悉群論的知識或是以矩陣代表 σ 的運算進行推導。

柒、參考文獻

- 一、中華民國第 48 屆中小學科學展覽會國中數學科臺北市私立復興實驗高級中學李佳晉、藍唯倫、徐書強、鄭博升。超立方體 Q_n 之最小控制。
- 二、羅見今。1993。科克曼女生問題。初版，13~33。台北市：九章。
- 三、P.K. Jha, Hypercubes, median graphs and product of graphs: Some algorithmic and combinatorial results, Ph.D. dissertation, Department of Computer Science, Iowa State University, 1990
- 四、S.Arumugam, R.Kala, 1998. Domination parameters of Hypercubes. *Journal of the Indian Math Society*, 65, 31~38.
- 五、T.N. Janakiraman, M.Bhanumathi, S.Muthammai, 2010. Domination parameters of Hypercubes. *International Journal of Engineering Science, Advanced Computing and Bio-Technology*, 1(1),19~28.

【評語】 010021

本作品主要是研究 Hypercube Domination number 的問題
往前推進一步。主要的結果在於利用所觀察出的同構性質，計算出
 $MDS(Q_8)=32$ ，雖然這個結果似乎已經在 2010 [5] 被證明
 $MDS(Q_8)=2*MDS(Q_7)$ ，且由 1990 文獻得知 $MDS(Q_7)=2^{(7-3)}=16$
可以算出，但是作者藉此研究結果指出文獻[5]， $m=2^k$ ， $|S^{1/T}|$ 下
界公式錯誤，因此該結果的證明是錯誤的。本作品的分析相當慎密，
也可以對 $MDS(Q_5)=7$ ， $MDS(Q_6)=12$ 提出更簡單的證明，是相當
不容易的。