

2018 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160038

參展科別 物理與天文學

作品名稱 圓形皂膜駐波與厚度變化

得獎獎項 大會獎：三等獎

比利時科學博覽會 BSE 正選代表

就讀學校 高雄市立新莊高級中學

指導教師 呂台華

作者姓名 甄致瑜、蔡明翰、施柏安

關鍵詞 干涉、皂膜振動、駐波

作者簡介



我是施柏安(左)，目前就讀高雄新莊高中二年級，因為父親是物理教授，從小就受到了理科方面的薰陶，在閒暇之時，也經常閱讀科普雜誌，來增廣見聞，在現在較為死板的教育體制中，希望可以藉由科展，培養主動解決問題和實作的能力。

我是蔡明翰(中)，目前就讀高雄市新莊高中二年級，從小很喜歡思考事情的本質，對於物理的邏輯思考，有非常濃厚的興趣，所以才參加這個比賽，想一探物理這門博大精深的科學，也希望對未來的科技有貢獻。

我是甄致瑜(右)，目前就讀高雄市新莊高中二年級，從小時候就常常把東西拆解看裡面的構造，如果有疑問的話也會一直想找到答案，在剛開始接觸自然科的時候也就很感興趣，能從中學到頗多，希望藉由此次科展，增進對自然的了解。

摘要

本實驗藉觀察圓皂膜的共振駐波，探討皂膜厚度對共振模態之影響。發現在條件相同下，因駐波共振頻率與表面張力、厚度及體密度間的複雜關係，使皂膜厚度有時會影響振動模態。

實驗中以同心圓駐波加上轉動，分析皂膜在駐波共振下的厚度分布及隨時變化。駐波加轉動下皂膜之厚度有三種分布情形：厚度相等、厚度沿徑向突增及沿徑向漸增再漸減；隨時間演進，皂膜上同心干涉環會於駐波節線產生暗紋，此暗紋再往兩側拓寬。

當轉動皂膜產生黑膜後，將轉動停止再施以同心圓駐波，可於貝索函數 J_0 之腹線附近出現較厚之干涉亮紋。圓黑皂膜共振之亮點分布與圓板共振動克拉里尼圖案類似，只是皂膜上的亮點往腹線堆積，而圓板上的顆粒則往節線聚集。

Abstract

The effects of thickness variation of a soap film on resonant modes were investigated by observing standing waves on horizontal circular membranes. The study results showed that the thickness of a soap film would occasionally change the resonant mode because of a complex interaction among the resonant frequency, surface tension, volume density and the film thickness.

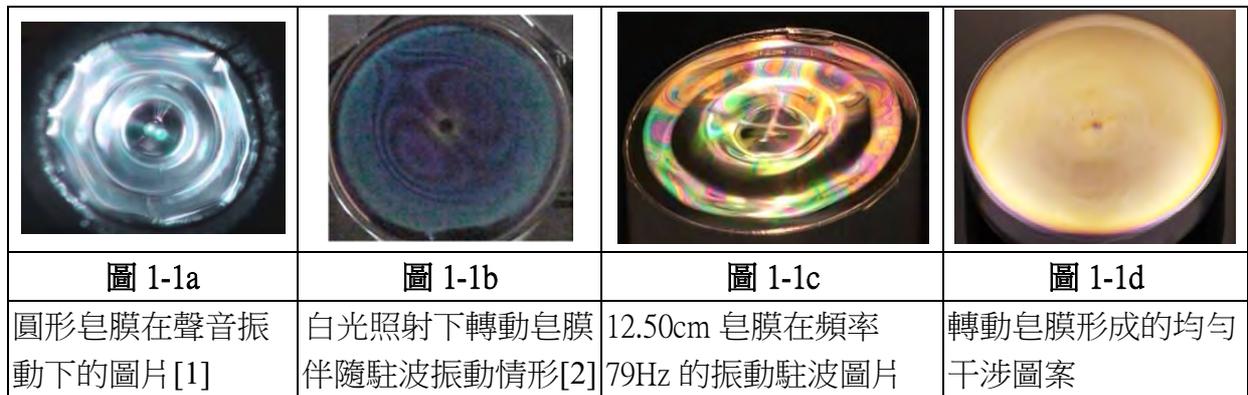
In this experiment, the concentric circular resonating acted on the circular film rotating in order to analyze the real-time change and distribution of a soap film thickness under standing waves. When the resonance and rotation are found, the structure of the resonant soap film has three major types of distribution: a constant thickness, thickness ramping along the radial direction, and thickness continuously increasing before decreasing along the radial direction. With the evolution of time, dark interference fringes on the concentric rings of the soap film appeared near the nodal lines, and the dark fringes gradually widened from the nodal lines.

A dark film appeared when the circular soap film rotated. Immediately after the rotating stopped, the soap film was treated with concentric circular resonant vibrating. Then some thick bright fringes, which generated around the antinodal lines of the Bessel function J_0 , would appear on the black film. The distribution of the bright spots formed on the black soap film was similar to that of the Chladni patterns on a resonant circular plate, except that the bright spots on the soap film gathered around the antinodal lines while particles on the resonant circular plate moved toward the nodal positions.

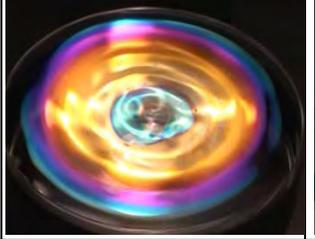
壹、前言

一、研究動機

之前在 Youtube 看到有人可以藉由皂膜的振動將聲音影像化[1]，拍攝了圓形皂膜藉由不同頻率之聲波振動時形成的特定圖案(如圖 1-1a)；另外又看到之前的科展作品[2]中轉動皂膜伴隨駐波共振時會形成特殊的干涉圖案(如圖 1-1b)，感覺圓形皂膜振動非常有趣，故想對此現象加以探討。初步實驗中嘗試以 79Hz 振動直徑 12.50cm 皂膜，其表面形成特定駐波，其特定時刻的圖案如圖 1-1c 所示，而皂膜色彩繽紛代表此時厚度分布並不均勻，且皂膜表面上會出現大小不一的渦流。那要如何讓皂膜厚度分布變得較均勻呢？轉動皂膜後可讓皂膜干涉顏色均勻(如圖 1-1d 所示)，代表此時厚度分度較為平均，所以轉動皂膜可以達到讓厚度分布均勻的效果。



另外對直徑 12.50cm 之圓形皂膜施以 104Hz 振動時，此時皂膜表面出現同心圓駐波，但更奇特的是實驗中皂膜表面出現了亮暗相間的條紋分布(如圖 1-2a)，且隨著時間演進，因水分的蒸發使得環狀暗紋的有增寬趨勢(如圖 1-2b)。環狀暗紋代表此處的皂膜厚度甚薄，此種環狀暗紋在駐波模式中是對應節線位置還是腹線位置呢？振動又是如何影響圓形皂膜的厚度分布造成環狀暗紋形成呢？而看到圖 1-1d 皂膜轉動可讓皂膜厚度分度較為平均，那若將振動皂膜產生駐波再配合轉動，又會對皂膜的駐波模式產生何種影響呢？所以我們將皂膜施以 104Hz 振動再加以轉動，拍到了初期如圖 1-3a、末期如圖 1-3b 的圖片。

			
圖 1-2a	圖 1-2b	圖 1-3a	圖 1-3b
純振動下產生環狀暗紋	環狀暗紋隨時間演進有變寬情形	先振後轉時初期之振動圖案	先振後轉時後期產生環狀亮紋
直徑 12.50cm 皂膜在頻率 104Hz 共振下，兩種實驗狀況的圖片及對照說明			

比較圖 1-2a 與圖 1-3a 可發現，圖 1-2a 中因為只有振動，所以皂膜中亮帶區的顏色分布較不規則，而圖 1-3a 中皂膜顏色因轉動呈現環狀分布；而兩者的駐波模態幾乎相同。由網路搜尋到的皂膜顏色-厚度對照圖[3](如圖 1-4)發現，皂膜由外而內的顏色為：天空藍(第 2 級)→藍(第 2 級)→洋紅(第 1 級)→金黃→天空藍(第 1 級)→金黃→銀；其對應之厚度大約是 450nm→420nm→380nm→160nm→270nm→160nm→120nm，由此可發現其厚度由外而內並非逐漸變薄的分布，而是由厚轉薄後在圓心天藍色附近又突然增厚再變薄。這種不連續的厚度變化非常特殊。再經約 90 秒後，皂膜出現像圖 1-3b 的圖形，當中有數條環狀亮紋像是飄浮在透明的皂膜表面上，甚為奇特。

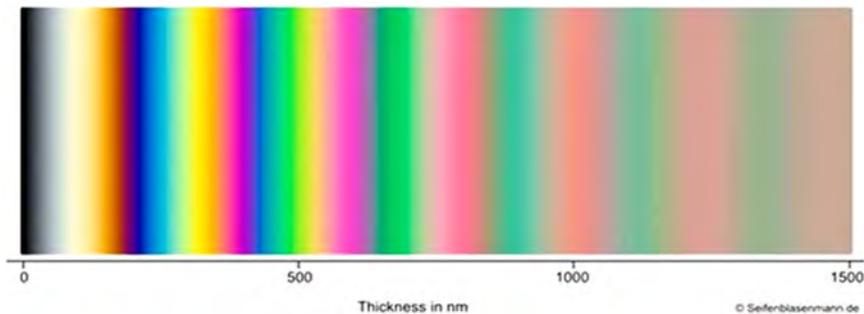


圖 1-4 皂膜顏色-厚度之對照圖 [3]

因上述轉動+振動的皂膜厚度之特殊變化尚未有文獻仔細探討，故想對圓形皂膜的駐波及對應之厚度變化做一仔細探討。

二、研究目的

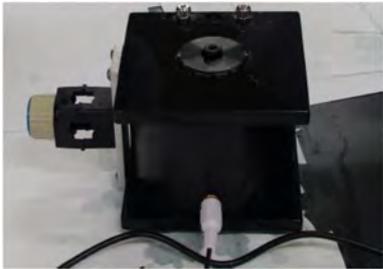
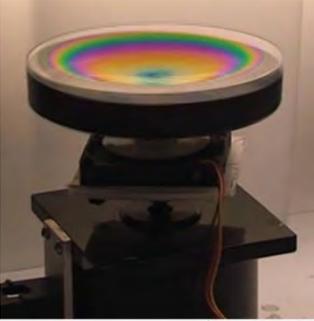
- (一)、找出圓形皂膜在何種振動頻率下可以形成駐波，並加以分析討論。
- (二)、探討相同條件下，皂膜厚度對圓形皂膜的駐波振動模態之影響。

(三)、探討轉動加駐波共振下對圓形皂膜之厚度分布及隨時變化的影響。

貳、研究方法

一、實驗器材

- (一)、聲頻產生器、揚聲器
- (二)、功率放大器、接線數條
- (三)、函數產生器、振動產生裝置
- (四)、12V 直流風扇(7cm*7cm)、直流電源供應器(最高 12V，5 段式輸出電壓)
- (五)、桌上型電腦(Image J 軟體)及數位攝影機
- (六)、圓形塑膠盒(直徑分別為 10.50cm、12.50 cm、14.00cm)
- (七)、Dawn 清潔劑、甘油、水
- (八)、檯燈數座(100W)、乳白色壓克力板數片

		
<p>圖 2-1 振動產生裝置</p>	<p>圖 2-2 函數產生器</p>	<p>圖 2-3 功率放大器</p>
		
<p>圖 2-4 振動裝置上的皂膜 轉動設備</p>	<p>圖 2-5 鎢絲燈泡檯燈</p>	<p>圖 2-6 直流電源供應器及 產生皂膜之容器</p>

二、理論探討 [2、4]

(一)、皂膜干涉光強度與薄膜厚度關係

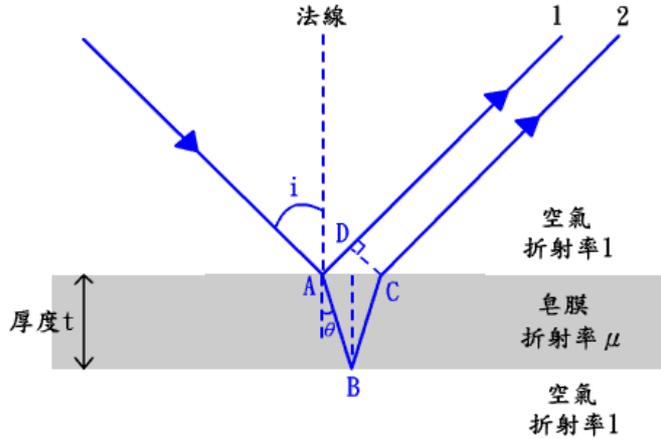


圖 2-7 入射光經皂膜上下表面反射後的示意圖[2]

要探討經皂膜上下表面之反射光干涉圖案時可用圖 2-7 中 1,2 兩道光線加以說明。已知空氣折射率為 1，若皂膜之折射率為 μ ，則此 2 道光線之光程差 d 為

$$d = \mu(\overline{AB} + \overline{BC}) + \frac{\lambda}{2} - \overline{AD} \quad (2-1)$$

經由干涉理論分析可得到

當 $d = \begin{cases} n\lambda, & \text{產生完全加強型干涉，光線強度最大} \\ (n + \frac{1}{2})\lambda, & \text{產生完全破壞型干涉，光線強度為 0} \end{cases}$

若入射光強度為 I_i ，反射光強度為 I_r ，而皂膜之反射率為 R ，入射角 i 、折射角 θ ，根據理論[2]可推導出

$$\begin{aligned} I_r &= 4I_i R \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \mu t \cos \theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 4I_i R \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \mu t \cos \theta \right) = I_{\max} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \mu t \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (2-2)$$

(2-2)式中 $I_{\max} = 4I_i R$ ，在強度均勻的單色光照射下其反射光干涉後光強度 I_r 會與厚度 t 形成

$I_r = I_{\max} \sin^2(kt)$ 之變化關係，此處 $k = \frac{2\pi\mu \cos \theta}{\lambda}$ ，所以皂膜的干涉顏色與厚度有關，

並可由干涉光相對強度 $\frac{I_r}{I_{\max}}$ 推算出皂膜厚度。

以 460nm 之藍光為例，若入射角 θ 為 15° ，溶液之折射率為 1.36，則其反射光干涉後之強度隨厚度變化關係如圖 2-8 所示。由圖 2-8 可看出當皂膜厚度由上而下呈線性增加時，干涉光相對強度 $\frac{I_r}{I_{\max}}$ 會隨厚度 t 在最大值 1 與最小值 0 之間做週期性的變化，而本實驗中水平皂膜的干涉圖案則會在後方對其厚度分布加以分析。

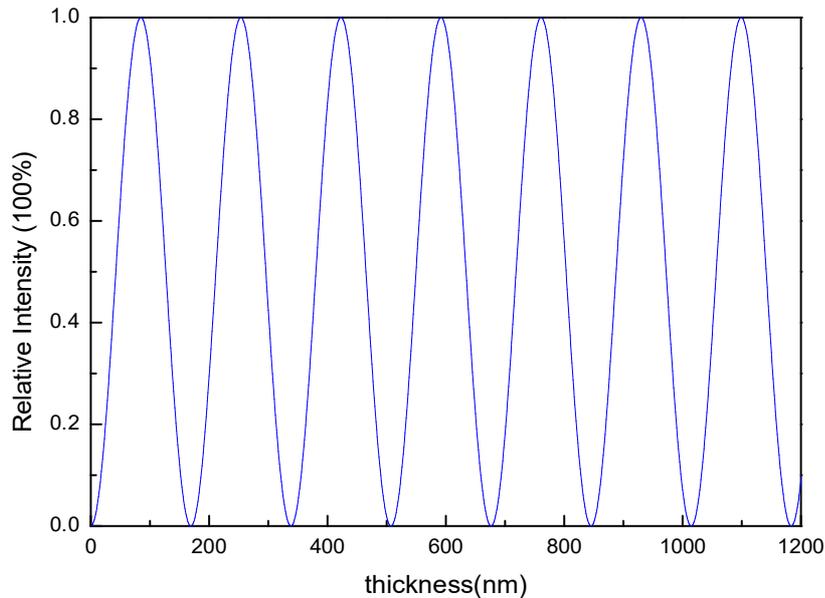


圖 2-8 藍光經薄膜干涉後之相對光強度隨薄膜厚度 t 之關係圖形

(二)、圓形皂膜之共振模態探討[4、5]

若皂膜為圓形且半徑為 a ，若取其中一小塊皂膜，其極座標位置為 (r, θ) ，如圖 2-9，則其任意時刻 t 之振動位移 $\psi(r, \theta, t)$ ，須滿足下列關係式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (2-3)$$

(2-3)式中 v 表示波速。

由分離變數法令 $\psi(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ ，整理(2-3)式可得到

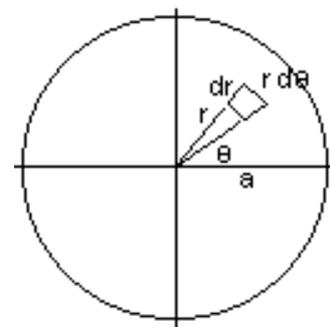


圖 2-9 極座標示意圖

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \quad (2-4)$$

令 $T(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ ，整理(2-4)式可得下列關係式

$$-\omega^2 = \frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} \quad (2-5)$$

令 $\Theta(\theta) = B \cos(m\theta + \phi)$ ，將(2-5)式移項整理後可得

$$\frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{R(r)} + \omega^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = m^2 \quad (2-6)$$

將(2-6)式同乘以 r^2 ，可得到 $r^2 R''(r) + rR'(r) + (\omega^2 r^2 - m^2)R(r) = 0$ (2-7)

再令 $x \equiv \omega r$ 、 $R(r) \equiv J(x)$ ，則可得 $x^2 J''(x) + xJ'(x) + (x^2 - m^2)J(x) = 0$ (2-8)

因 R 需滿足邊界條件 $R(a) = 0 \Rightarrow J_m(\omega a) = 0$

令 $J_m(k_{mn}r) = J_m(x_{mn})$ ，其中 $k_{mn} = \frac{2\pi}{\lambda_{mn}}$ ， x_{mn} 為滿足第 m 階貝索函數中第 n 個不全為 0 的解，

也就是滿足 $J_m(x_{mn}) = J_m(k_{mn}a) = 0$ 之特定值，也就是滿足節點(位移為 0)之特定值。例如當 $m=0$ 、 $n=1, 2, 3, 4, 5 \dots$ 時， $J_0(x_{0n}) = J_0(k_{0n}a) = 0$ 所分別對應之 x_{0n} 數值如下表所示， x_{0n} 之對應數值如圖 2-10 中紅色函數圖形與 x 軸之交點，如標示所列。

表 2-1 貝索函數 J_0 與 x 軸之 5 個交點座標之一覽表

n	1	2	3	4	5
x_{0n}	2.405	5.520	8.654	11.793	14.931

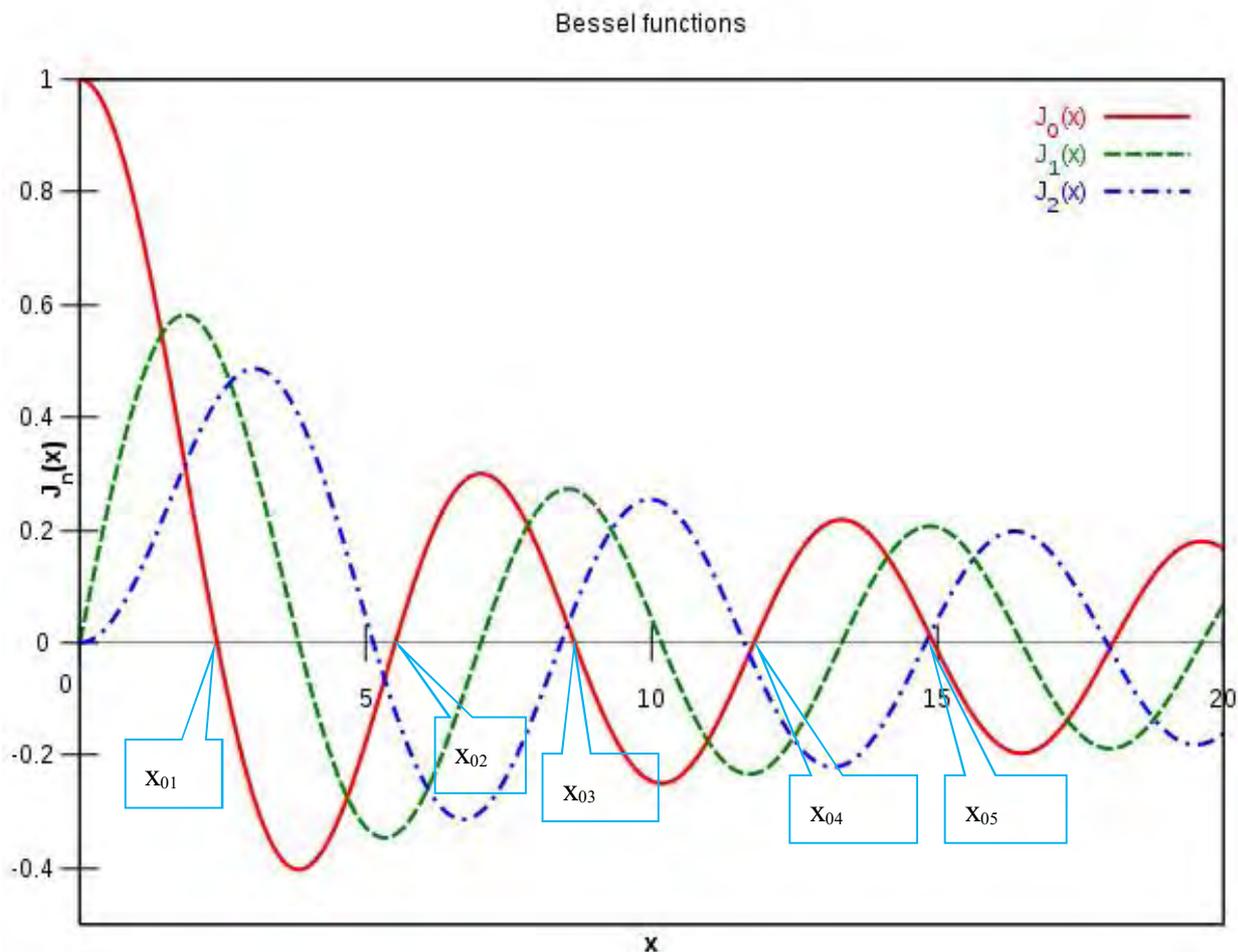


圖 2-10 三種不同貝索函數隨 x 之變化情形 [5]

所以可解出
$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} J_m(k_{mn} \frac{r}{a}) \cos(m\theta + \phi) \cos(\omega_{mn} t + \delta)$$

在圓形皂膜上橫波傳遞的波速 v ，皂膜周緣均固定不動，若皂膜表面張力為 T ，面密度為 σ ，

則其波速 v 會滿足關係式
$$v = \sqrt{\frac{2T}{\sigma}} \quad (2-9)$$

(2-9)式中的 2 倍是因為皂膜有上下兩層，如圖 2-11 所示。

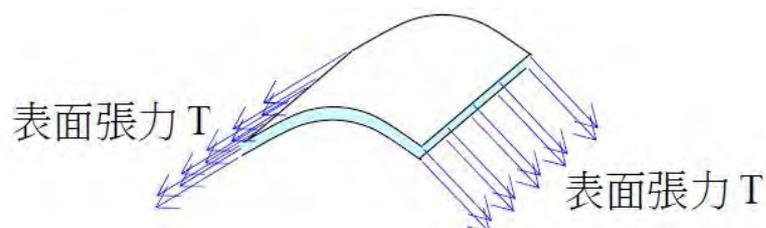


圖 2-11 局部皂膜上方表面張力之作用示意圖[6]

當圓形皂膜振動產生駐波時，其共振頻率 f_{mn} 會滿足下列關係式

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{vk_{mn}}{2\pi} = \frac{k_{mn}}{2\pi} \sqrt{\frac{2T}{\sigma}} = \frac{k_{mn}a}{2\pi a} \sqrt{\frac{2T}{\sigma}} = \frac{x_{mn}}{2\pi a} \sqrt{\frac{2T}{\sigma}} \quad (2-10)$$

而圖 2-12[4]中是 6 種理想圓皂膜駐波所對應之振動模態圖，圖中數字表(m,n)；黑白部分表示 180 度的反相振動，而節線為沿著徑向及圓形的分布。

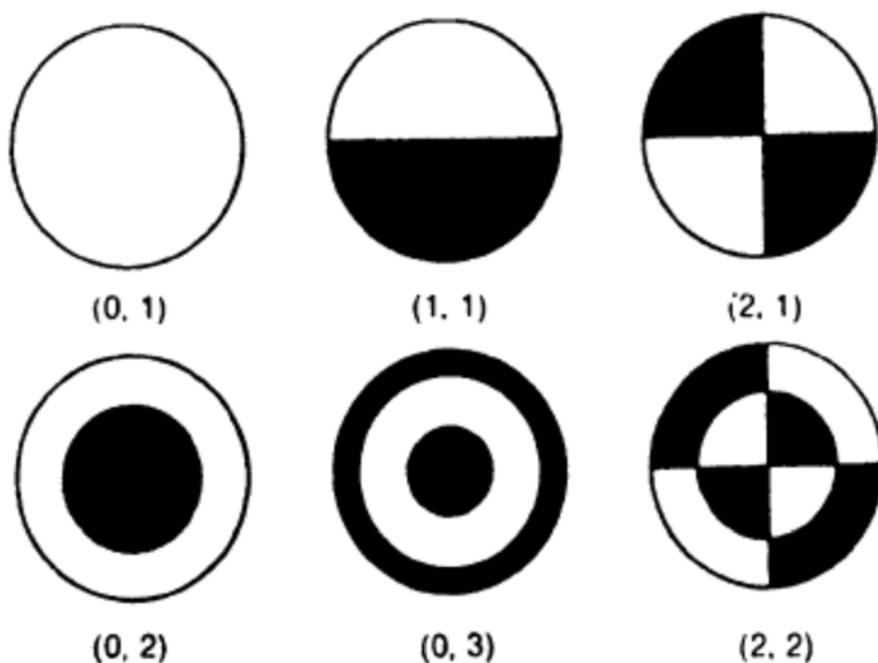
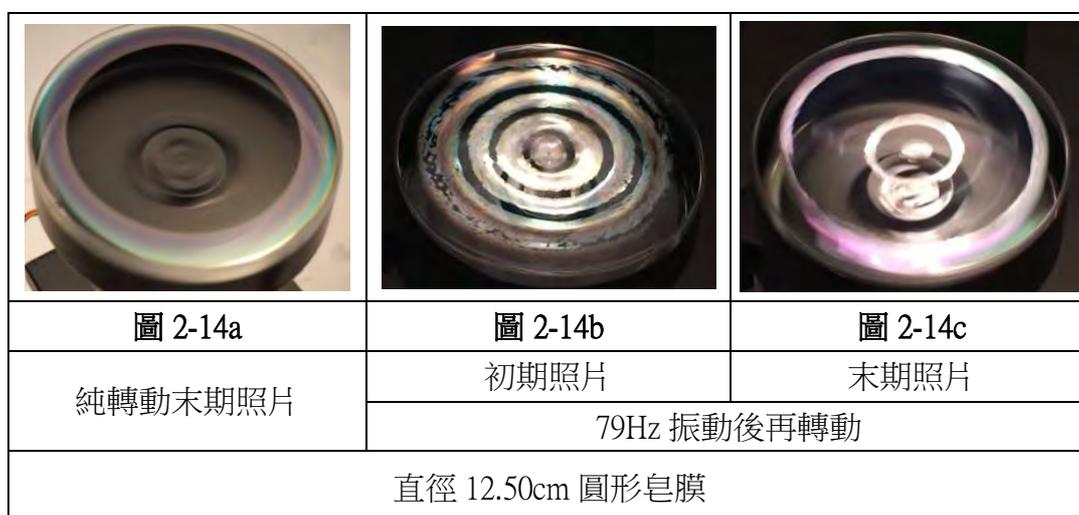
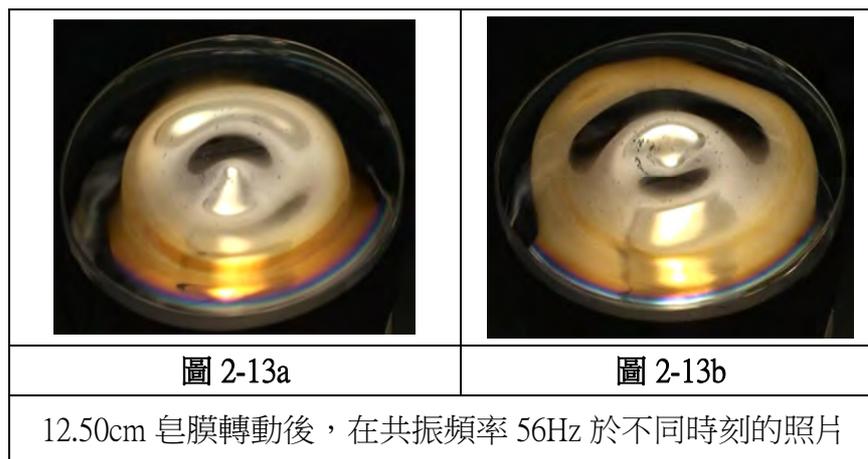


圖 2-12 6 種理想圓皂膜駐波的振動模態 [4]

(三)、實驗方法

圓形皂膜形成後，因其厚度較不均勻，若只有純振動，皂膜表面容易形成各種小渦流，顏色雖然艷麗但會增加分析的困難度。所以如何讓皂膜厚度較為平均，成為本實驗的重大課題。因轉動後的皂膜顏色分布會較均勻(厚度較平均)，如圖 2-13a、b 是轉動後的皂膜施以 56Hz 振動，整個皂膜幾乎都是金黃色的，代表厚度分布相當平均，這樣對振動實驗的變因控制更有幫助。而圓形皂膜轉動時末期會出現如圖 2-14a 之情形，這時因轉動導致皂膜中心處會出現大片黑色圓形區域。而皂膜轉動後再加上共振頻率 79Hz 之振動，初期皂膜也出現了環狀暗紋 (圖 2-14b)，造成亮暗相間的分布；而末期黑膜區內還生成了第 3 圈、第 4 圈細窄的環狀亮紋(圖 2-14c)。故本實驗想將轉動與振動結合，藉此仔細探討圓形皂膜形成駐波時的物理機制。



要分析轉動對圓形皂膜之駐波影響，裝置中一定要有風扇轉盤來帶動圓形容器上方之皂膜轉動。但因額外增加了風扇的重量，需用更大的振動功率才能驅動裝置上的皂膜振動，以利拍攝明顯的共振現象。實驗初期將圓形容器置於風扇轉盤並固著在揚聲器上，利用聲頻產生器及功率放大器來振動容器上的皂膜，但實驗過程中為了拍攝清晰的振動模態，常需調出大幅的振動造成揚聲器聲音非常大，形成難以忍受的噪音，無法持續實驗。後來知道學校有振動設備可加以改裝成本實驗所需的裝置，故就學校現有的設備將函數產生器之訊號驅動振動裝置使得皂膜產生振動，就可以克服噪音的影響加以實驗了。

下方圖 2-15 為本實驗改進後之設備示意圖。

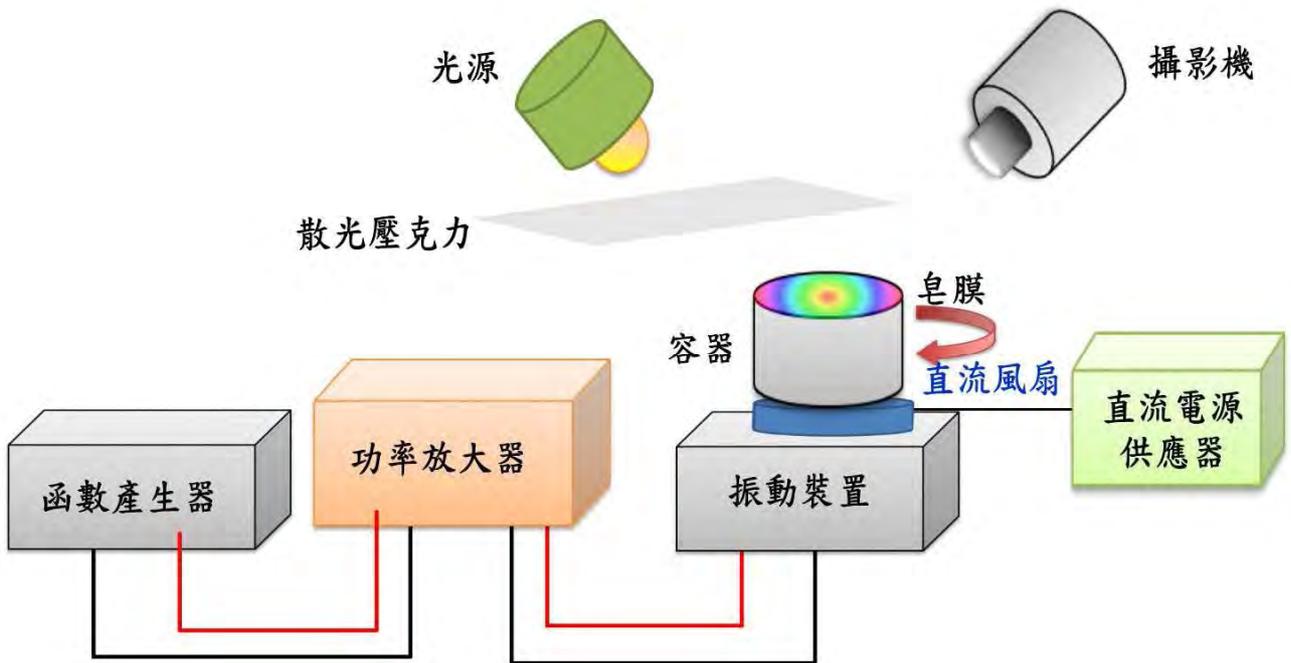


圖 2-15 本實驗改進後之設備示意圖

實驗過程中發現，相同振動的功率下，皂膜越小越不易在皂膜上形成明顯的振動模態，所以後期實驗都改用較大的圓形皂膜來做觀察。但皂膜越大也越容易破裂，成為實驗中必須克服的問題。因為需觀察能持續較久時間的皂膜，溶液是以下列之體積比列配製而成，水：DAWN 清潔劑：甘油=5：2：1，配好後靜置一日再做皂膜干涉觀測。我們利用高中物理實驗的半圓形容器測出配製的溶液折射率為 1.36。實驗中並利用 Image J 軟體讀取照片各處之光強度，藉由理論分析推算出圓形皂膜對應之厚度分布。

後續要進一步利用干涉光強度推算薄膜厚度，須使用光強度較均勻之光源，實驗上使用乳白壓克力板的散光效果，讓白熾燈的光源經過散光後再照射在皂膜表面形成近似均勻的光強度分布。

以下是我們進行實驗的流程簡圖

以直徑 7.00cm、12.50cm、14.00cm 三種圓形皂膜進行下列實驗

前置實驗

改變振動頻率，找出能讓圓形皂膜產生駐波之共振頻率並加以拍攝

以適當轉速轉動皂膜，並拍攝皂膜干涉圖案隨時變化情形

與前置實驗相同轉速先轉動皂膜

圓形皂膜先以特定駐波頻率振動

再以特定駐波頻率振動皂膜

再以前置實驗同轉速下讓皂膜轉動

拍攝皂膜隨時變化之情形

改變駐波振動頻率

實驗分析討論(以 Image J 軟體分析光強度並推算對應厚度)

提出結論

參、研究結果與討論

一、無轉動下，圓皂膜之振動探討

(一)、皂膜振動模態探討：

為了解皂膜圓形駐波，實驗中以直徑 12.50cm 圓皂膜於不同頻率驅動，在白熾燈光照射下觀察其對應的振動模態，得到圖 3-1 系列之結果。圖 3-1 中的模擬振動圖片是擷取自參考資料[7]的結果。

實驗中發現，增加駐波振幅不會改變駐波模態，而振幅不夠明顯時無法拍出明顯的皂膜共振的照片。而振動劇烈時，有時皂液會產生液滴於皂膜表面上，伴隨皂膜一起振動。

現以實驗中零階的振動模態 f_{0n} 為例加以說明，當皂膜振動時會造成表面彎曲形成類似曲面鏡的現象，這會使得腹線附近的光線會聚並反射，造成皂膜表面形成亮環。而當頻率 f_{0n} 之 n 增加時，亮環的數目也跟著提升。而在圖 3-1 中振動頻率為 91Hz 時，在皂膜表面形成同心圓環之駐波同時又產生 2 個對稱的渦流，渦流流動時會穿過駐波的腹點、節點回到原出發位置形成一完整之封閉路徑。這 2 個對稱渦流在振動模態 f_{0n} 的系列中有時會產生，其產生的原因應當是皂膜內部的皂液因不同位置的壓力變化所造成的流動。

因圓形皂膜之共振模態會形成各種貝索函數的圖形，在前面原理已有說明，且在文獻搜尋時發現到有科展作品[8]曾對皂膜的振動詳加討論過，於此不再詳述。

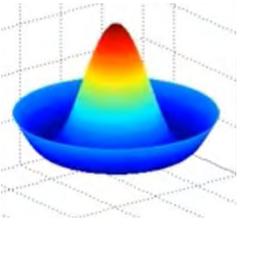
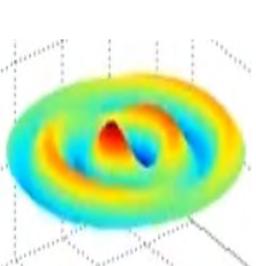
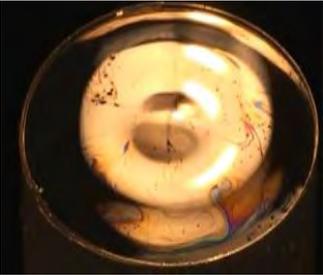
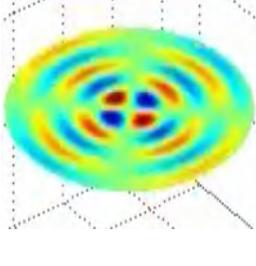
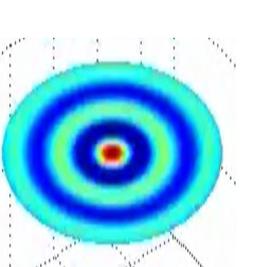
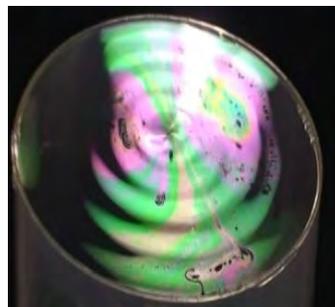
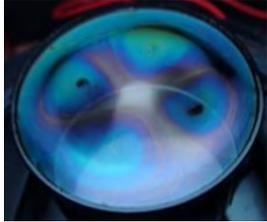
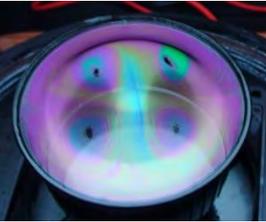
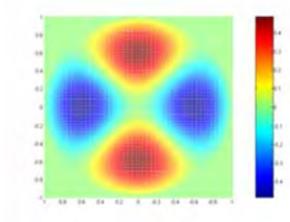
振動 頻率	模擬振動圖片 [7] 或現象說明	不同時刻振動照片	
15Hz f_{02}			
56Hz f_{14}			
79Hz f_{25}			
85Hz f_{06}			
91Hz	左右 2 側出現對稱 之渦流		

圖 3-1 直徑 12.50cm 圓皂膜於不同頻率下的駐波振動模態及說明

(二)、皂膜厚度對圓形皂膜的駐波振動模態之影響

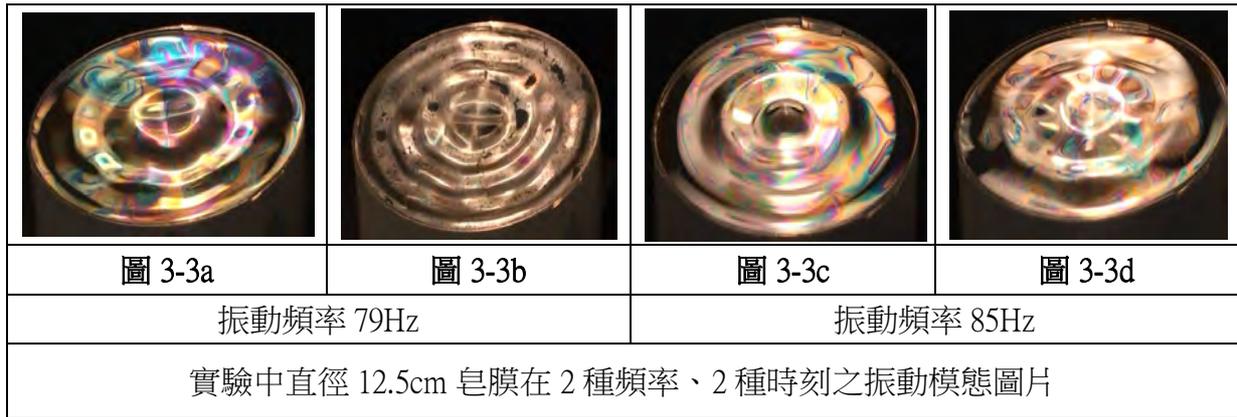
實驗中發現皂膜越小，同樣振幅的驅動下其振動模態越不明顯，要拍出清晰的振動模態會越困難。本實驗裝置拍攝直徑 7cm 皂膜較清晰的振動模態只有 54Hz 之 f_{21} (如圖 3-2a、b)。

			
<p>圖 3-2a</p>	<p>圖 3-2b</p>	<p>圖 3-2c</p>	<p>圖 3-2d</p>
<p>本實驗直徑 7cm 皂膜於振動頻率 54Hz 之駐波模態在 2 種時刻之圖片</p>		<p>作品中直徑 12cm 皂膜在振動頻率 46Hz、特徵值 $k=5.1235$ 之實驗照片與理論模擬對照 [8]</p>	

在文獻搜尋時發現到有科展作品[8]曾對皂膜的振動加以探討，該作品[8]中認為圓形皂膜的厚度會影響駐波模態，故可用皂膜之共振模態(如圖 3-2c、d)來推算皂膜平均厚度。由圖 3-2a、b 可看出直徑 7 公分的圓形皂膜在振動頻率 54Hz 的駐波共振模態，其在不同時刻下皂膜顏色分布出現變化，也就是厚度改變，但共振模態並無改變。所以皂膜厚度真得會影響圓形皂膜的共振模態嗎？且由圖 3-5a、b 可看出皂膜顏色分布是不均勻，代表皂膜厚度分布是不均的。那利用厚度不均的振動模態來推算整體皂膜的平均厚度是可行的嗎？

為了更進一步確定相同頻率下，皂膜振動模態是否會隨厚度改變，我們又使用直徑12.50cm 皂膜觀察其在79Hz、85Hz兩種頻率下的振動情形，得到如圖3-3系列之結果。

實驗觀察皂膜共振時，皂液會不斷流動導致振動模態會變得不穩定。有時駐波型式固定但會伴隨著在表面上轉動(如圖3-2及圖3-3中的a、b)；有時振動模態會先消失待皂膜表面穩定後，又會再次出現新的駐波，只是再次出現的駐波大致與原來相同，有時卻產生了新的模態(圖 3-3之c、d)。



由圖 3-3a、3-3b 可看出在 79Hz 振動下，不同時刻下兩種厚度截然不同的皂膜對應之振動模態並無變化；但圖 3-3c、3-3d 卻顯示在 85Hz 振動下，不同時刻下皂膜厚度變化導致振動模態也跟著改變了。所以在直徑、振動頻率相同下，皂膜厚度變化有時會造成振動模態改變；有時又不會。為什麼呢？

由 (2-10) 式可知共振頻率 $f_{mn} = \frac{x_{mn}}{2\pi a} \sqrt{\frac{2T}{\sigma}}$ ，代表共振頻率與皂膜表面張力 T 及面密度 σ 都有關係。科展作品[8]中探討共振頻率利用 $v = f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{T}{\rho d}}$ ，此處 ρ 為皂膜體密度， d 為皂膜厚度，所以可用共振頻率去求出皂膜平均厚度。

但面密度是單位面積的皂膜質量，當共振產生時，由皂膜表面的干涉顏色分布就可看出皂膜的厚度分布各處不同，且皂膜的體密度是否各點均相同也無法肯定，故面密度 σ 各位置均有差異。而表面張力 T 也和厚度有關，也就是 $T(d)$ 。故共振頻率與厚度會形成一複雜關係，所以造成厚度有時會影響共振頻率有時又不會，故科展作品[8]中直接利用共振頻率去求得皂膜平均厚度是不適宜的做法。

二、純轉動下圓皂膜之隨時變化

關於轉動皂膜的厚度變化分析，在參考資料[2]中有詳細的討論，在此不予詳述。但參考資料[2]有提到轉動皂膜因需藉由皂膜內外的表面張力的差值提供作圓周運動的向心力來源，所以水平轉動皂膜之厚度會呈現越往內越薄的現象；而當轉動皂膜表面呈現同種顏色(厚度)時，皂膜會凹陷成球面，且轉速越快，凹陷會越劇烈。本實驗中轉動皂膜只是為了讓皂膜達到厚度均勻的效果，並不希望皂膜表面有明顯的凹陷，所以轉速是用直流風扇最小的驅動電壓 3V

來加以轉動。

實驗中的轉動皂膜(圖 3-4 系列)可清楚看出皂膜 15 秒之干涉圖案為同心圓環之分布，這是因厚度分布隨徑向位置變化所造成。此厚度分布為越靠圓心厚度越薄，所以 20s 時中心開始形成黑膜區。隨著時間演進，皂膜厚度逐漸變薄，中心的黑膜區有逐漸擴大的趨勢，而黑膜的外緣呈現金黃色，如 25s 之圖片所示。70s 時幾乎整片皂膜均呈現黑膜，此時幾乎整個皂膜厚度都小於 100 nm。轉動皂膜可以讓皂膜厚度分布較平均，達到我們實驗需要的效果。

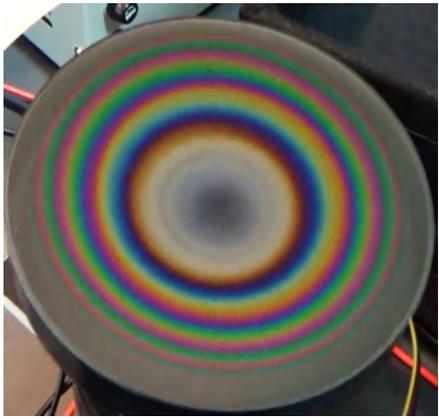
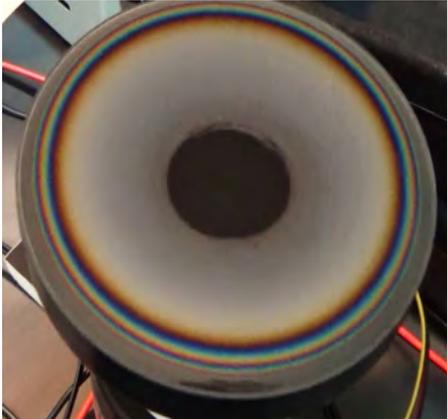
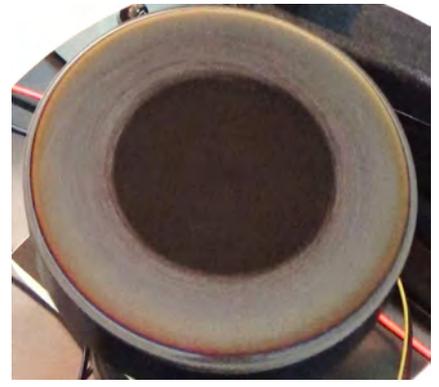
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	15	20
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	25	35

圖 3-4 以白光拍攝直徑 12.50cm 轉動皂膜於不同時刻的干涉圖案

I. 如何由干涉照片推得皂膜厚度分布

為了與後續轉動加共振時的皂膜厚度分布及隨時變化作一對照比較，此處仍須將轉動皂膜 20s、25s、35s 時刻的皂膜厚度找出其不同時刻之皂膜厚度隨徑向位置之變化關係。

本實驗使用皂膜干涉照片分析其不同徑向位置對應厚度的方法如下所述。

當攝影完成後，需擷取不同時刻的圖片，如圖 3-4 之系列所示。接著以 Image J 軟體分析各點之光強度並計算出之相對光強度。再搭配圖 2-8 找出對應的厚度區間，並依據(2-2)式計算出各處皂膜所對應的厚度。分析時是以藍光 460nm 之波長、找出 B(藍)值中光強度之最大值(如 255)，並以此為基準計算出相對光強度，將實驗得到的皂液折射率 1.36、入射角 15° 等條件帶入(2-2)式再去推得皂膜在該處所對應厚度。

II. 轉動皂膜之厚度分布

現將 3 種時刻(20s、25s、35s)經皂膜反射的干涉光相對強度及皂膜厚度隨徑向位置之關係做成圖 3-5，因皂膜外緣干涉條紋過於密集，不易分析。此處只分析直徑 10.00cm 以內的區域。此處均訂圓形皂膜中心位置為 $r=0$ ，最左側位置為

$r = -5.00\text{cm}$ ，最右側位置為 $r = +5.00\text{cm}$ 。

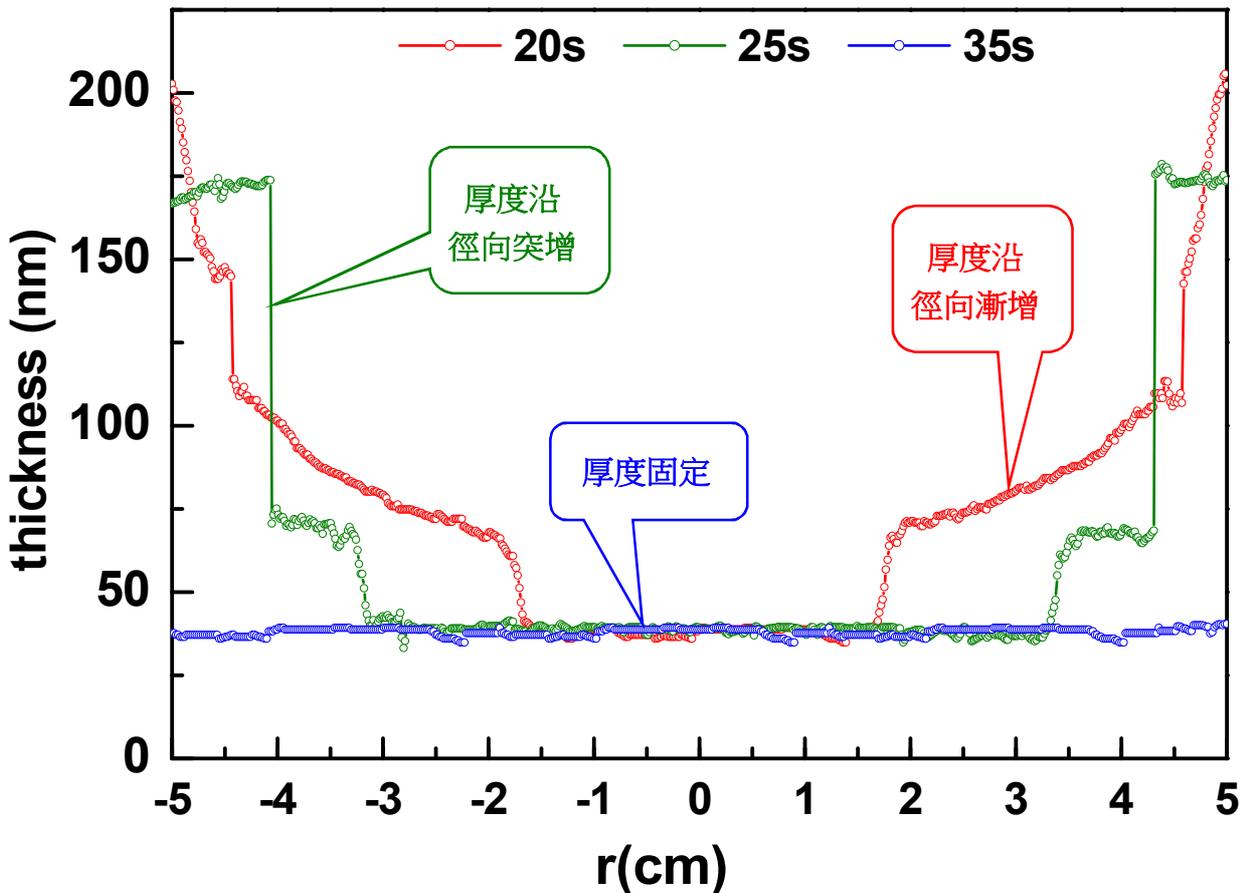
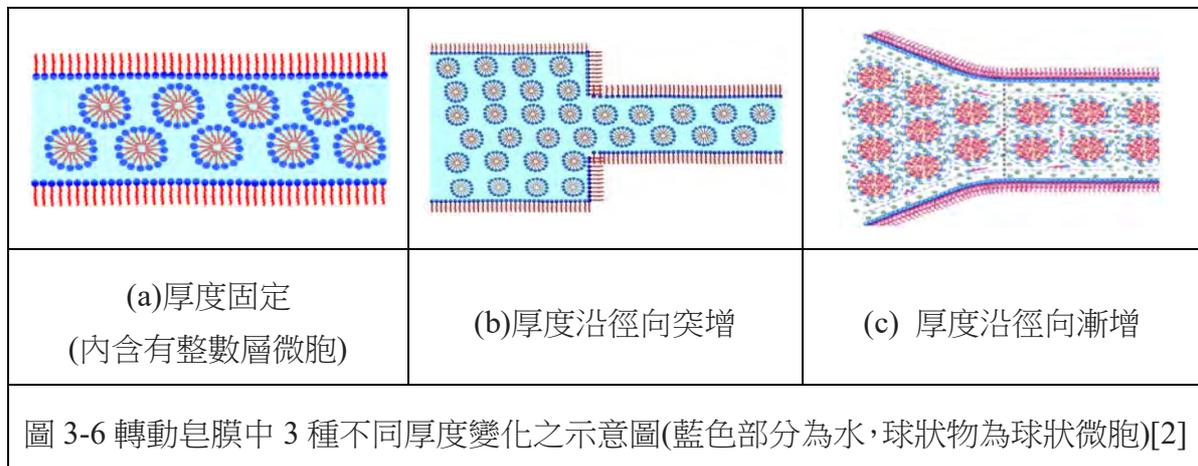


圖 3-5 直徑 12.50cm 圓皂膜轉動，不同時刻之皂膜厚度隨徑向位置之變化關係圖

由圖 3-5 可看出當轉動皂膜出現最薄之黑膜區時，其厚度都約為 40nm。轉動皂膜的厚度分布有下列三種情形：厚度相等、厚度沿徑向突增及沿徑向漸增，這是因為轉動皂膜因轉動造成內部微胞的層流堆積所形成，參考資料[2]中有仔細討論，3 種情況下的轉動皂膜內部微胞堆積如圖 3-6 所示。



三、轉動加振動下，圓皂膜之厚度變化探討

(一)、先共振後轉動下之皂膜變化

1. 直徑 12.50cm 皂膜之隨時變化

實驗中對直徑為 12.50cm 皂膜產生共振後，再將皂膜轉動，拍攝其在不同時刻下之對應圖片如圖 3-7 系列所示。先共振再轉動下，經常會在中心(振幅最大處)出亮圓，而在亮圓四周出現環形暗紋，此暗紋再逐漸向內外拓寬，末期時會在皂膜的表面漂浮數個同心圓亮紋(如圖 3-7 中 79Hz 秒及 105Hz 之系列照片)。另外實驗中顯示轉動的確可讓皂膜厚度較平均，而出現相近的顏色(如圖 3-7 中於 56Hz 的系列照片)。

因相關實驗拍攝中較無法在 f_{0n} 同心圓環的駐波形式拍出良好的照片，故此處沒有對其厚度分布隨徑向位置變化做分析討論。

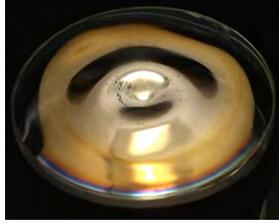
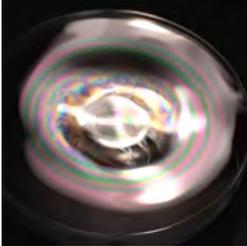
6Hz 3s 開始轉動				
時間(s)	8	12	20	35
79Hz 3s 開始轉動				
時間(s)	10	80	105	142
105Hz 5s 開始轉動				
時間(s)	15	80	102	135

圖 3-7 直徑 12.50cm 圓皂膜於先振後轉下於不同頻率的隨時變化情形

2. 直徑 14.00cm 皂膜在 104Hz 共振下之厚度分布及隨時變化

之後我們改用直徑 14.0cm 的大皂膜加以振動，結果恰可以調到 f_{05} 同心圓環的駐波出現，如圖 3-8 系列所示，故後續就針對直徑 14.0cm 的圓皂膜加以分析討論。在此將 104Hz 共振下直徑 14.00cm 的轉動圓皂膜於 50s、60s、80s 三種時刻，其厚度及相對光強度隨徑向位置之變化關係做成圖 3-9。

在此將皂膜之隨時演進分成前期、中期、後期三階段：

(1) 前期

皂膜在 50 秒時，由外而內分別是淡粉色(約 770nm)→紫色(約 620nm)→洋紅色(第 2 級,約 560nm)→天藍色(第 2 級,約 450nm)→淺綠色(第 1 級,約 320nm)→暗金色(約 170nm)。由圖 3-9 可看出 50s 時皂膜的厚度分布有下列四種情形：厚度相等、厚度沿徑向突增、厚度沿徑向突降及沿徑向先漸增再變薄。前 2 者與轉動皂膜內部之厚度分布情形類似(如圖 3-5)，這是因為皂液內部微胞的層流堆積所形成。但駐波振動下皂膜厚度會有沿徑向突降及先漸增再漸減，這和純轉動中皂膜厚度沿徑向之變化就有所不同了(如圖 3-5)。

皂膜純轉動時因表面張力變化導致其厚度沿徑向增加，但在駐波振動下鄰近節線位置的皂液會往內外兩側流動，造成厚度分布的變化不再是純轉動下之沿徑向漸增，而變成沿徑向漸增後再漸減，或是沿徑向突增的情形。

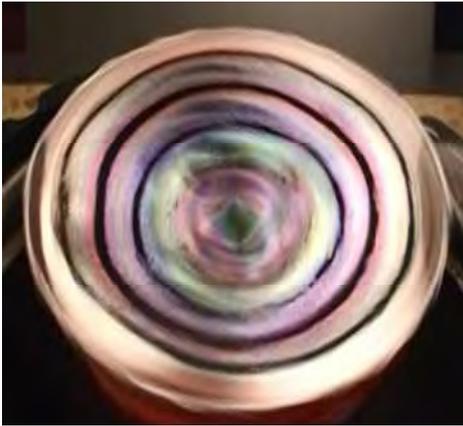
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	50s	60s
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	80s	89s

圖 3-8 直徑 14.00cm 圓皂膜於先振(104Hz)後轉下的隨時變化情形

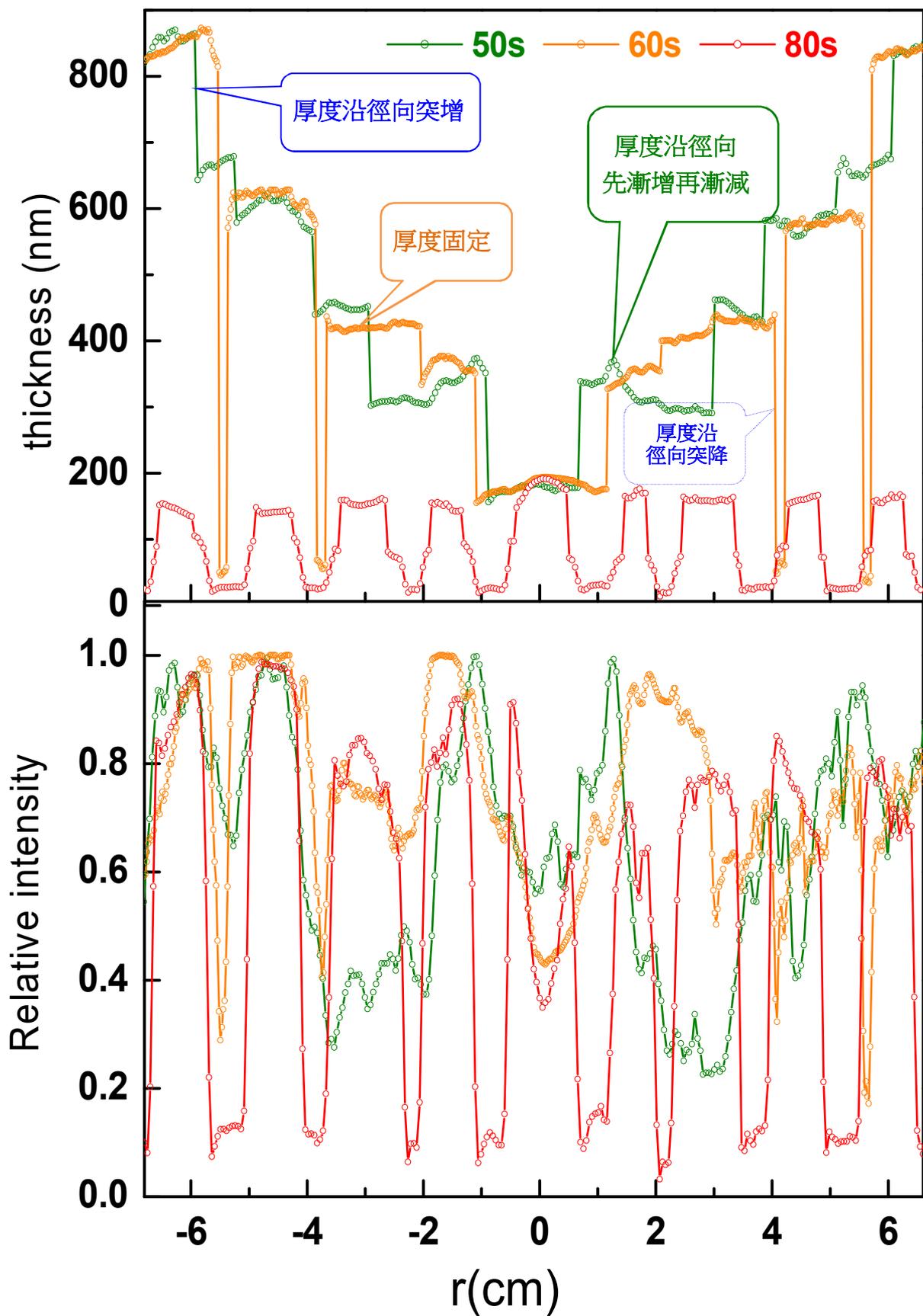


圖 3-9 直徑 14.00cm 圓皂膜先振(104Hz)後轉下，不同時刻之皂膜厚度及相對光強度隨徑向位置之變化關係圖

(2)中期

60s 時因皂膜持續轉動的影響，皂膜厚度 3 種分布中的固定厚度範圍擴大且厚度分布呈近似階梯狀由外而內下降(如圖 3-9)。另外皂膜於 60s 時在節線位置開始產生暗紋，所以導致在圖 3-9 中 $r=-5.5\text{cm}$ 、 -3.8cm 、 4cm 、 5.6cm 4 處附近的厚度驟降為約 50nm，而此 4 處的厚度在 80s 時會變得更薄，由圖 3-9 可清楚看出這四處對應到 80s 時的暗紋位置。

(3)後期

皂膜於 80 秒時，皂膜表面出現亮暗相間的同心圓環狀排列，此時亮紋呈金黃色，其厚度約 150nm；而暗紋對應之厚度約為 30nm。此種暗紋起源於節線位置，暗紋寬度隨著時間演進逐漸由節線位置向內外拓寬。為了清楚了解駐波共振對皂膜厚度分布所造成的影響，我們將 60s 及 80s 時刻的皂膜厚度隨徑向位置之變化與貝索函數 J_0 之振動情形做出如圖 3-10 之對照來加以分析。

由圖 3-10 中可看出藍色虛線位置為貝索函數值為 0 的位置，也就是駐波振動的節點位置；而藍色虛線對應到厚度分布圖形中恰為厚度最薄之處，所以顯而易見暗紋位置即為節線生成處，而暗紋處對應之厚度約為 30nm。另外圓心處的波腹其對應之皂膜厚度約為 180nm，較其他波腹位置的厚度要來的厚些，應當是此處的振幅最劇烈所導致。

為了分析皂膜表面駐波形成時對其厚度分布造成之影響，我們嘗試以圖 3-11 之示意圖加以說明。如圖 3-11 所示，依白努力方程式，在節點處(平衡點)振動速率為零，該處皂液所受之壓力最大；而在波腹處振動速率最大，此處壓力最小，所以皂液(內含微胞)會藉由壓力差由節點位置傳送到波腹位置(如圖中橘色箭頭所示)，造成節點處皂液減少而變薄，而波腹處因皂液增多而變厚。另外波腹振幅越大，節點與波腹間之壓力差應會更大，使得更多的皂液被擠壓至波腹，故造成振幅最大波腹(圓心處)之皂膜厚度最易增加，故圓形駐波振動時中心最易出現亮圓盤，且此亮圓盤較不易消失。

另外純轉動下之皂膜厚度分布是沿徑向漸增，但在駐波產生時會造成節線鄰近之皂液被擠壓到波腹位置，因而改變厚度沿徑向連續變厚的趨勢，形成沿徑向漸增後再漸減的分布。

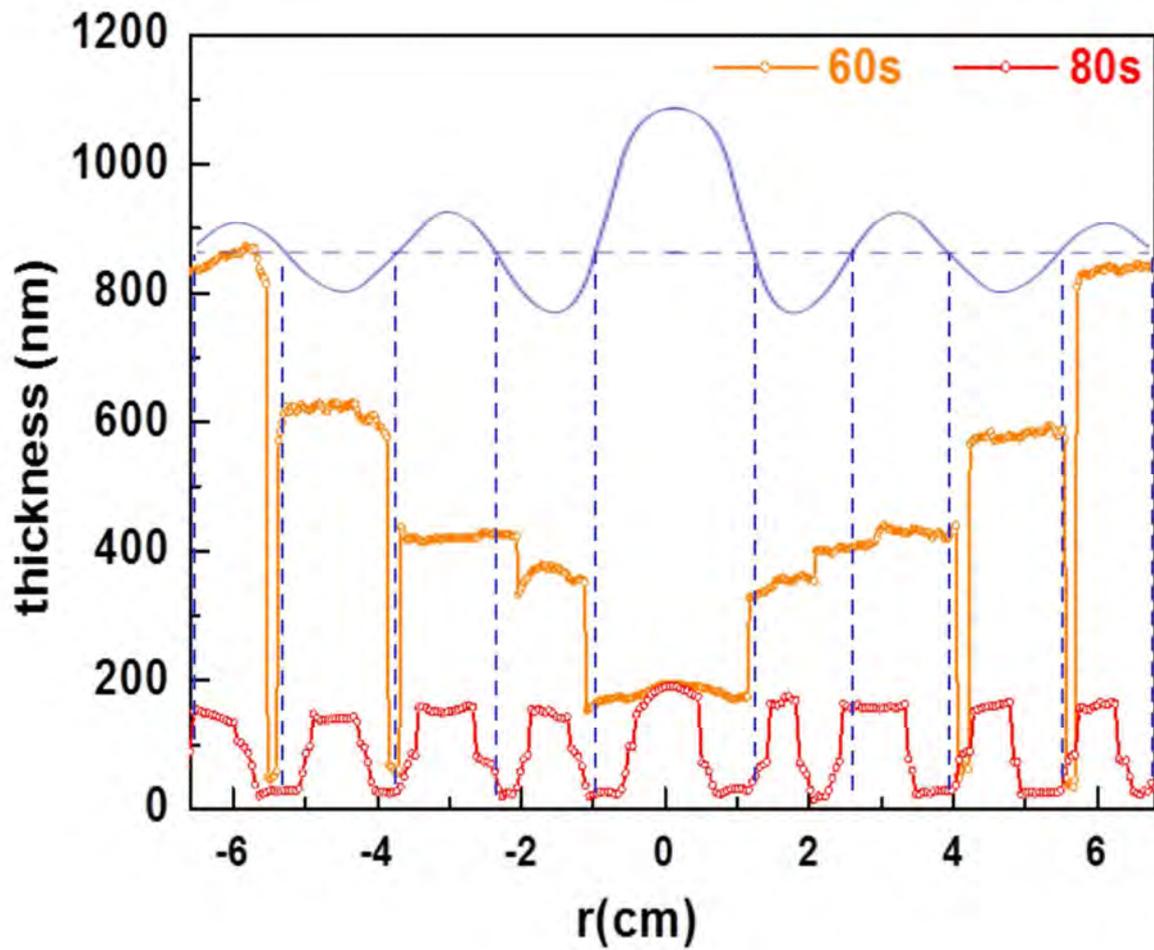


圖 3-10 直徑 14.00cm 圓皂膜 104Hz 振動後再轉時，60s、80s 之皂膜厚度隨徑向位置之變化與貝索函數 J_0 之對照圖

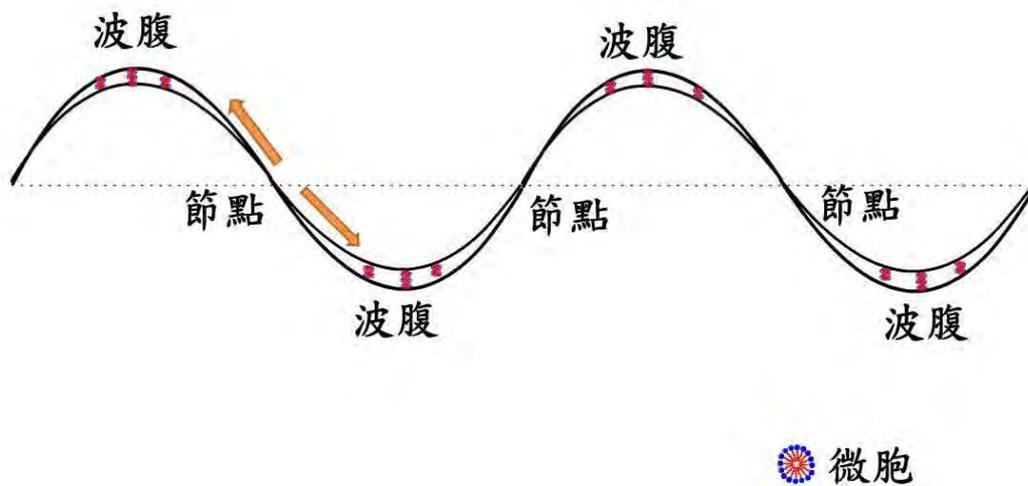


圖 3-11 皂膜表面駐波形成時對其厚度分布影響之說明圖

(二)、先轉動後共振下之皂膜變化

實驗中使用直徑為 12.50cm 皂膜經轉動後，拍攝其在不同共振頻率下的隨時變化圖片如圖 3-12 系列所示。

75Hz 15s 開始 振動				
時間(s)	20	24	25	31
79Hz 5s 開始 振動				
時間(s)	5	20	36	56
104Hz 10s 開始 轉動				
時間(s)	26	31	47	80

圖 3-12 直徑 12.50cm 圓皂膜於 3 種共振頻率先轉後振下的隨時變化情形

實驗結果發現先轉動再振動，也是可讓皂膜厚度較平均，而出現相近的顏色(如圖 3-12 中 79Hz)。而先轉再振時，經常在中心(振幅最大處)出明亮圓盤，而在圓盤四周出現之暗環會逐漸向外拓寬(如圖 3-12 中 75Hz、104Hz 之振動)，但有時會出現如 79Hz 振動下的凌亂之干涉圖案。而當皂膜出現黑膜後，有時也會在黑膜區形成清晰或不完整的環狀干涉條紋(如圖 3-12 中 75Hz、104Hz 之振動)。

我們做了文獻搜尋，發現到過去有人曾利用轉動皂膜讓厚度均勻後，將轉動停止後立刻做同心圓之駐波共振研究，得到了如圖 3-13 的結果[9]。

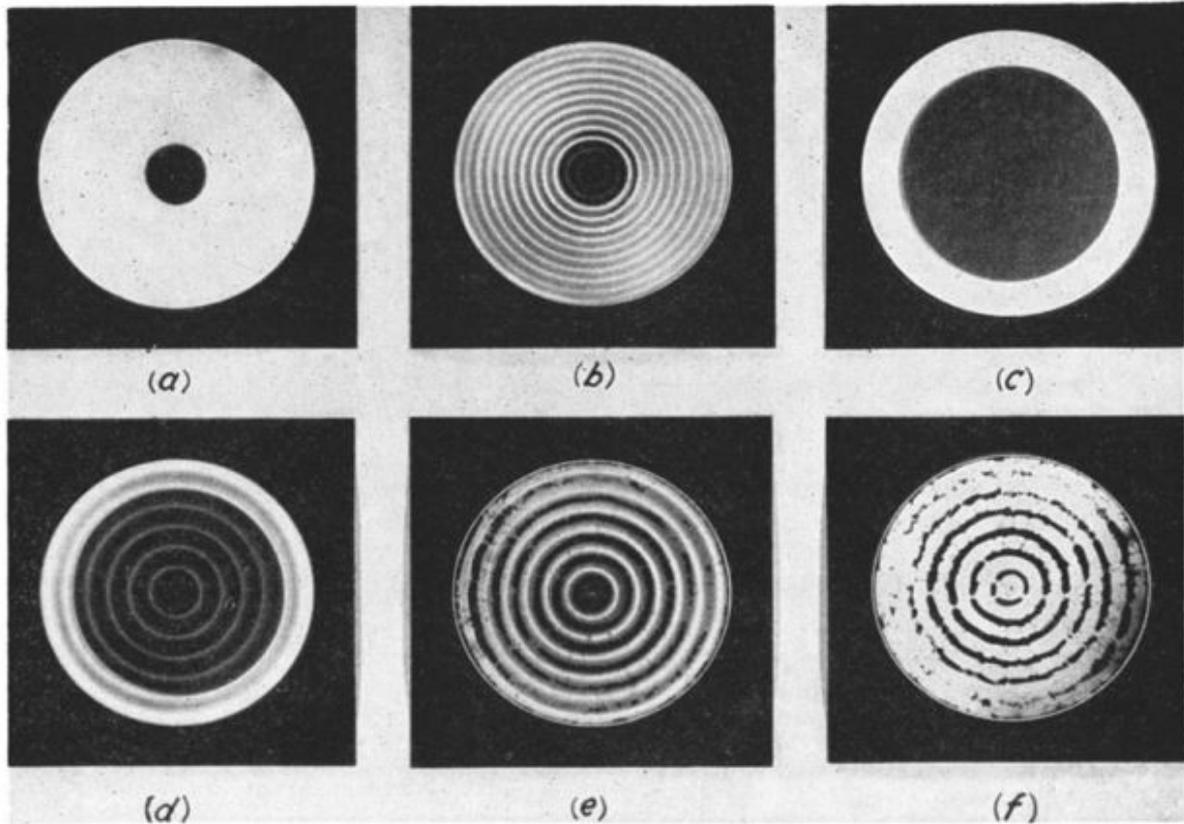


圖 3-13 直徑 3.00cm 圓皂膜於轉動停止後立刻做同心圓駐波共振之實驗結果[9]

圖 3-13 中 a、b 及 c、d 為兩組實驗在振動前後之對照圖，由圖中可看出利用轉動讓皂膜厚度分布均勻後，立刻施以 f_{0n} 同心圓環的駐波共振，會在皂膜表面形成明暗相間的干涉圓環。但該文獻[9]只有描述現象，並未做出相應的物理機制探討。我們嘗試文獻中的方法做實驗，但發現一但轉速漸減，原來厚度均勻的皂膜表面立刻就產生皂液流動，很難控制在轉動停止後，在皂膜厚度分布保持均勻下立刻做駐波振動。實驗中做了非常多的嘗試，後來使用 12.50cm 圓皂膜先轉動，在轉速減緩下加以 202.3Hz 同心圓的駐波頻率共振，得到如圖 3-14 的系列照片，雖然不像圖 3-13 那麼完美，但大致上已可以看到同心圓的駐波模態分布。

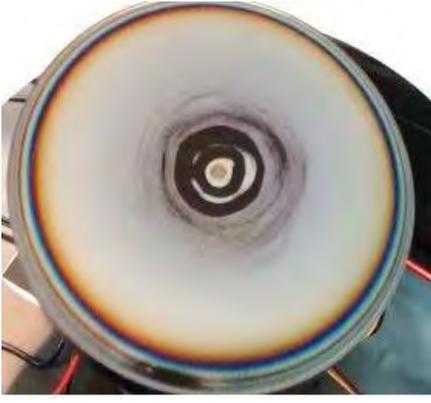
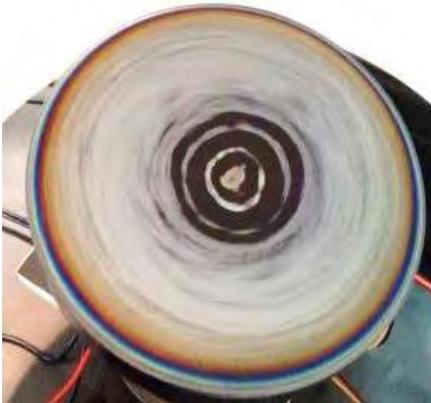
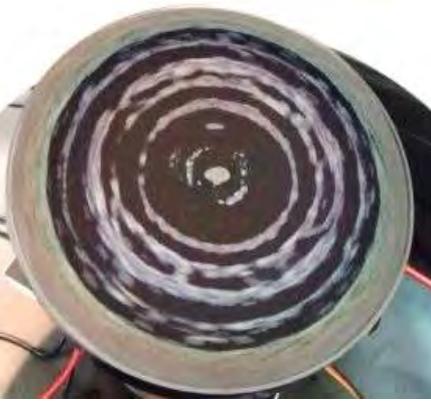
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	10s	17s
不同時刻干涉圖案		
時刻(s)	37s	57s

圖 3-14 直徑 12.50cm 圓皂膜於轉速減緩下以 202.3Hz 之頻率共振的隨時變化情形

多次實驗中均發現圓皂膜轉動後再以 f_{0n} 共振，均是在中心生成亮圓(如圖 3-12、3-14)，類似文獻中圖 3-13 的 e、f，尚未觀察到圓心處為黑膜的(如圖 3-13 之 b、d)。此點讓我們很困惑，因為圓心處駐波振幅最強，皂液應當甚易由最近的節線往圓心處流動造成此處形成厚度較厚的亮區，而不是厚度甚薄的暗區。

以下僅就圖 3-14 中駐波模式較完整的 17s、37s、57s 三種不同時刻的皂膜，在距圓心 5cm 的範圍內，分析出其厚度分布隨徑向位置變化之關係，並加入貝索函數 J_0 之對照做成圖 3-15。

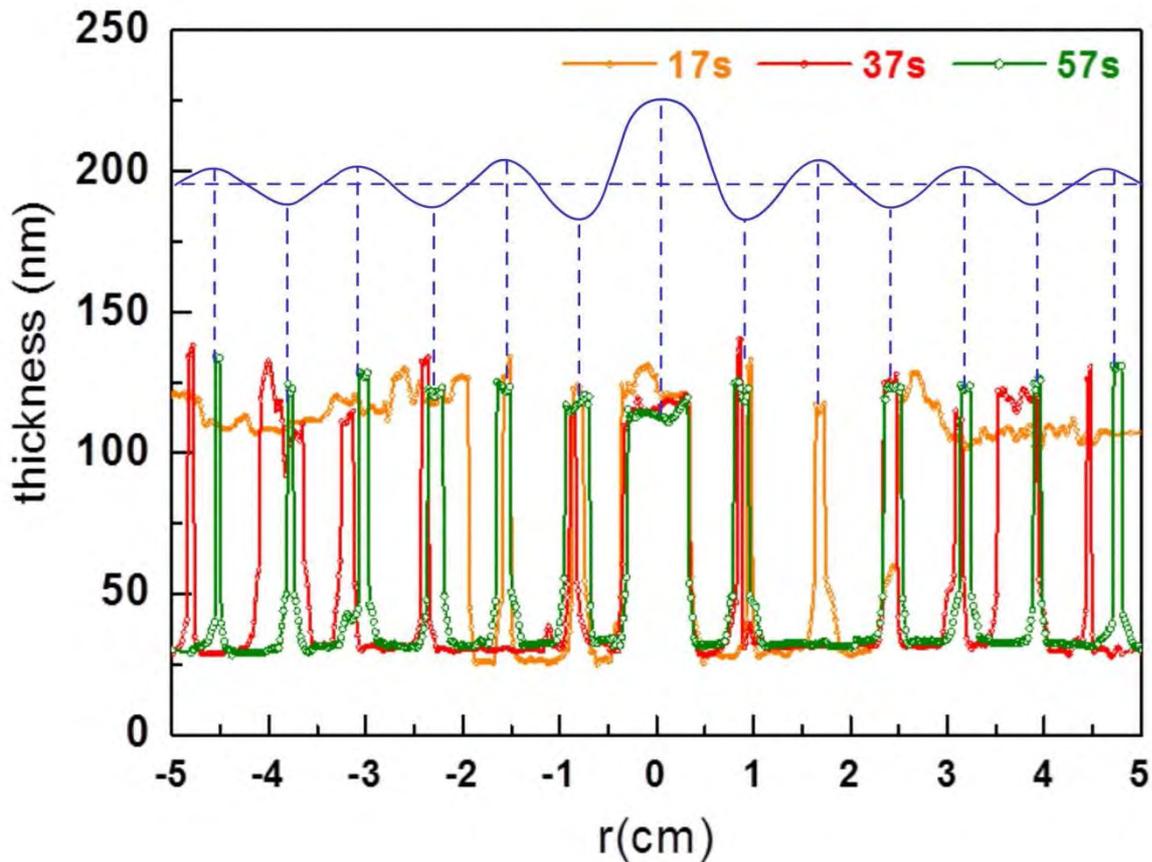


圖 3-15 直徑 12.50cm 圓皂膜轉速減緩後加以 202.3Hz 振動下，皂膜厚度隨徑向位置之變化與貝索函數 J_0 之對照圖

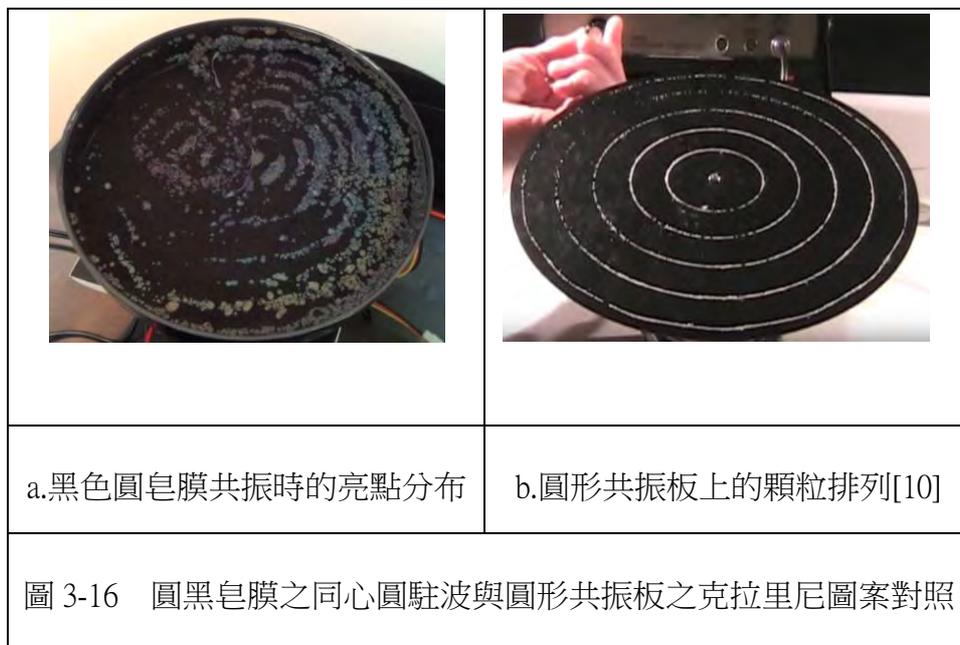
此實驗在 15 秒時切斷轉扇電源，17s 時轉速稍減，由圖 3-15 可看出在 -1.56cm、-0.86cm、0cm、0.94cm、1.64cm 五處產生亮紋。此些亮紋對應之厚度約為 120-130nm，而其生成位置對照圖 3-15 中藍色之貝索函數 J_0 恰為波腹位置。

37s 時轉速緩慢，此時皂液為不規則流動，皂膜表面之亮紋分布較紊亂。對照發現圖 3-15 中 17s 時 -1.56cm 及 1.64cm 處的亮紋於 37s 時消失了；而在 -4.81cm、-3.90cm、-3.20cm、-2.42cm、2.39cm、3.10cm、3.70cm、4.50cm 處產生新的亮紋，但其中 -4.81cm 及 4.50cm 的亮紋位置不是在貝索函數 J_0 之波腹位置形成，其餘亮紋都生成在貝索函數 J_0 之波腹位置附近。37s 時各處亮紋位置對應之厚度約為 100-140nm，其分布範圍較 17s 時大。這是因此時轉速甚慢，皂膜表面雖有駐波振動但因皂液不規則的流動，使得一些波腹上的亮紋消失，或是亮紋不是在波腹位置生成，故厚度分布無法完全符合貝索函數 J_0 之振動模式。

57s 時轉動停止，此時皂膜表面皂液流動緩慢，厚度分布主要受駐波振動影響，此時黑膜區的厚度約為 30nm。另外在 -4.54cm、-3.80cm、-3.06cm、-2.35cm、-1.58cm、-0.84cm、0cm、0.89cm、

2.40cm、3.14cm、3.89cm、4.71cm 處生成亮紋，37s 時在-1.56cm 消失的亮紋再度生成，但 1.64cm 處消失的亮紋並未再出現。57s 時產生的亮紋對應之厚度約為 110-130nm，對照圖 3-15 中藍色虛線，正好都是貝索函數 J_0 各個波腹位置。所以證明了同心圓駐波共振下，黑色皂膜表面漂浮的亮紋幾乎都是生成於腹線位置。黑色皂膜形成同心圓駐波時，其厚度沿徑向呈週期性的厚度相等及厚度突增的分布，在奈米尺度中呈現如此規律的排列值得更深入的探討。

實驗中發現先轉動皂膜再加以振動，皂膜容易破裂，實驗難度高。而當皂膜轉動至大圈的黑膜區產生後將轉動停止，將皂膜表面以 202.3Hz 之同心圓駐波振動，看到干涉亮點在表面上運動形成較穩定之分布(如圖 3-16a)，感覺上很像顆粒放在圓形共振板上的克拉里尼圖案。(Chladni Patterns，如圖 3-16b)。但兩者最大的差別是皂膜上的亮點(厚區)是往腹線流動堆積，而共振圓板上的顆粒則是往節線位置運動聚集。



肆、結論與應用

- (一)、圓形皂膜振動時，會於某些特定頻率形成特定的振動模態。而其振動模態會如同各式的貝索函數。
- (二)、圓形皂膜振動時，在所有實驗條件固定下，皂膜厚度變化有時會改變駐波模態，有時不會。故不宜用皂膜產生駐波模態之共振頻率去推算皂膜厚度。
- (三)、皂膜同心圓駐波共振後再轉動之情形：
- 1、前期皂膜之厚度有四種分布情形：厚度相等、厚度沿徑向突增及突降、沿徑向連續變厚再變薄。
 - 2、中期皂膜厚度因轉動效應，造成皂膜厚度固定的區域增大，使得厚度分布沿徑向呈近似階梯狀上升；另外此時在節線位置開始出現明顯的暗紋。
 - 3、後期皂膜出現明暗相間的干涉條紋，暗紋出現在節線附近，且暗紋寬度由節線逐漸往兩側拓寬。
- (四)、皂膜轉動後再施以同心圓駐波振動情形：
- 1、將皂膜轉至黑膜產生後，將轉動停止再施以同心圓駐波振動，穩定時在黑膜區會出現干涉亮紋，而其亮紋是在貝索函數 J_0 之波腹附近生成。
 - 2、圓黑皂膜之同心圓駐波亮點(厚區)分布與圓形共振板之克拉里尼圖案類似，只是皂膜上的亮點(厚區)是往腹線流動堆積，而共振圓板上的顆粒則是往節線位置運動聚集。

現今各式薄膜在生物、物理、電機等各大領域都有非常重要且廣泛的用途，所以如何測量及控制薄膜厚度是非常要的技术。皂膜本身類似液晶材料，本實驗分析出共振皂膜的厚度分布及變化情形，也可用來應用在液晶材料之討論。

伍、參考文獻

- 一、 youtube 影片 Vibrations of a Soap Membrane. Bessel function example
<https://www.youtube.com/watch?v=fs56Ox86eZM&t=72s2>.
- 二、 吳振榕、鮑柔安、許澤明(2016)。旋轉皂膜之厚度變化。第 56 屆全國中小學科展作品。取自：
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/051807.pdf>
- 三、 Color and Film Thickness. Retrived November 10, 2015, from
http://soapbubble.wikia.com/wiki/Color_and_Film_Thickness
- 四、 Cyril Isenberg (1992). The Science of Soap Films and Soap Bubbles (pp. 31-37). New York: Dover Publications.
- 五、 Steven Errede , Vibrations of Ideal Circular Membranes (e.g. Drums) and Circular Plates.取自：
https://courses.physics.illinois.edu/phys406/lecture_notes/p406pom_lecture_notes/p406pom_lect4_part2.pdf
- 六、 呂伊庭、鄭惟允、洪家琪(2009)。膜上的波扭。
第 49 屆全國中小學科展作品。取自：
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/040117.pdf>
- 七、 youtube 影片 <https://www.youtube.com/watch?v=sAiqK9AAb90>
- 八、 郭博鈞(2005)。波動奇蹟—皂膜與皂水共振模式之研究。2005 年台灣國際科展作品。取自：<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2005/pdf/020017-12.pdf>
- 九、 L. Bergmann(1956), Experiments with Vibrating Soap Membranes.
THE JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, volume 28,number 6,1043-1047.
- 十、 youtube 影片 Circular Centered Chladni Plate
<https://www.youtube.com/watch?v=CGiiSIMFFII&t=160s>

【評語】 160038

圓形皂膜駐波與厚度變化的研析內容豐富，實作上亦很認真，其報告中圖片的呈現很吸引人，可惜所用數學及模擬結果均為網路上既有資訊，在題材的創新較為不足，實為可惜。在厚度觀測中，發現暗亮處之薄膜厚度為定值，是新的成果，值得深入探究。