

2018 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160019

參展科別 物理與天文學

作品名稱 正多角柱內皂膜的形狀與對稱性破缺

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市私立泰北高級中學

指導教師 藍邦偉、劉繕榜

作者姓名 陳竑廷

關鍵詞 皂膜形狀、浦拉托問題、正多角柱

作者簡介



我是陳屹廷，我們家有四個人，家庭成員分別有父親、母親、哥哥和我。自小我就生活在一個幸福和諧的環境中。父母親從小就培養我獨立自主，並且常常督促我一些待人處事的道理，開明的教育下對我很大的影響，也造就了現在的我。

我朋友總是說我是位脾氣溫和並樂於助人的好朋友，事實上，我則認為我是位富有求知慾的人，在我空閒的時間，我樂於進行不同樣的小實驗並觀察現象或是待在圖書館中尋找解答，這單純的樂趣成為了我成長的一大部分。

從小我對科學及實驗有濃厚的興趣，在我的作品中剛好需要大量的實驗，而且也運用了我最喜歡的泡泡，這讓我每次在操作實驗時都樂在其中。我很榮幸能參加這次的國際科展，藉由我喜歡的這些興趣去開拓視野。

摘要

本研究旨在探討正多角柱內所產生之肥皂泡膜形狀，以及改變正多角柱邊長與高度比例時，所發生的對稱破缺的現象。在初步研究中我們發現，正五角柱內的肥皂泡膜確實存在對稱破缺的現象，因此我們希望進一步確認並理解箇中奧秘。我們的研究將以實驗觀測做基礎，然後在理論上配合最小曲面的面積近似解來分析，為了將實驗與理論作結合，我們透過免費的數學軟體 GeoGebra 來進行數值模擬計算以及圖形展示，並使用薄膜干涉測量討論皂膜的厚度，對皂膜受力的影響。

Abstract

In this project, we propose to study the shape morphology and the phenomenon of symmetry breaking of the soap film created when we dip a regular cylindrical wireframe into soapy water then lift it up. Both experimental and theoretical aspects will be investigated. In our preliminary experiments, symmetry breaking has been observed when we change the aspect ratio of the cylindrical wireframe. Based on our careful experimental observations, we will build up a theoretical model to approximate the minimal surface describing the shape of the soap film. Numerical simulations and confirmations with experiments will be done through the use of GeoGebra, a public domain software. And finally we discuss the thickness of the soap film by using film interference .

壹、前言 (Introduction)

一、研究動機

本研究起初參考 2016 臺灣區國際科學展覽會物理組周昕諭的作品[5]，發現該作品可以更深入討論。所以我們進行皂膜在立體框架模型中皂膜形狀之探討。並討論正多角柱模型上皂膜成形的各種現象。並透過物理上對於力平衡與最小能量的分析，以及利用數學所繪出的最小面積模型，得到一個穩定的立體結構。本研究首先參考了幾篇論文[1][2]及以前的科展[5][6][7][8]做為文獻參考資料。當中我發現一個有趣的問題。綜合物理上對於力平衡與最小能量的探討，我們知道共點的三力平衡時，兩兩夾角為 120° ，且當達到平衡狀態，也就是產生最小曲面時，平均曲率(mean curvature)要為 0，本研究利用數學軟體所繪出的皂膜模型來對皂膜形狀進行分析，並且比較不同正多角柱間的皂膜結構[8]與最小面積。

由於皂膜有使面積縮到最小的特性，因此在三度空間中利用物理實驗形成的肥皂泡膜形狀是什麼樣的圖形？除此之外，皂膜的厚度是否會影響其形狀？皂膜形狀的形成現象與變換與皂膜溶液濃度、溫度及拉出皂膜溶液時的傾角之關聯性又是如何？因此本研究決定利用自製模型及數學軟體，找出正多角柱中形成的皂膜形狀，並利用理論分析來解釋實驗現象。

二、研究目的

- (一) 從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正四角柱皂膜模型及可調整高度正四角柱模型皂膜形狀。利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。
- (二) 從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正三角柱皂膜模型及可調整高度正三角柱模型皂膜形狀。利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。
- (三) 從一次近似到二次近似的方法，求出固定高度正五角柱皂膜模型及可調整高度正五角柱模型皂膜形狀。利用動態幾何軟體模擬，討論能量轉換的臨界點，並計算最小曲面面積，最後進行理論分析。
- (四) 由於正五角柱皂膜形狀是不對稱的，故我們考慮用薄膜干涉分析皂膜的厚度。從長方形金屬框架的皂膜厚度，進而推出 7 種不同正五角柱皂膜的厚度。

三、研究設備及器材

(一) 固定高度模型：

以銅線焊錫或烙鐵製作而成固定高度的正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱、正七角柱與正八角柱模型，如圖 1(a)。

(二) 可調整高度的模型：

以銅線焊錫或烙鐵製作而成可調整高度的正三角柱、正四角柱與正五角柱；以光軸與水晶黏土製作而成可調整高度的正三角柱、正四角柱與正五角柱模型，如圖 1(b)。

(三) 筆記工具：

紙、筆、黑板、粉筆、筆記型電腦、Canon 數位相機、動態幾何軟體 GeoGebra、Mathematica。

(四) 實驗設備：

洗手乳、水、燒杯、量筒、透明水箱、LED 紅光條。

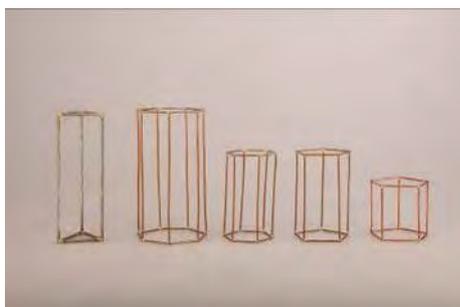


圖 1(a)：自製正多角柱模型



圖 1(b)：自製可調高度正多角柱模型



圖 2(a)：暗房模型拍攝

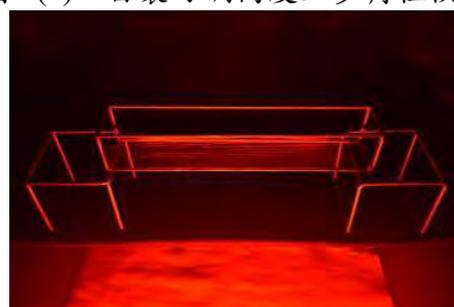


圖 2(b)：暗房模型拍攝加紅光 LED

貳、研究過程或方法 (Materials and Method)

一、定義與名詞解釋

- (一) 皂膜實驗：本研究參考國立台中科學博物館的皂膜實驗，以銅線或鐵線焊接而成的模型，放入洗手乳對水比例為 **1:6** 的皂膜溶液中，再鉛直抽出，觀察皂膜的形狀。
- (二) 浦拉托問題：是數學中與最小曲面有關的一類問題，旨在研究在邊界固定時極小表面的存在性。
- (三) 一次近似：將二項式 $(1+x)^n$ 展開得到： $1+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots+C_{n-1}^n x^{n-1}+x^n$ ，當我們取二項式級數的前兩項： $1+C_1^n x \approx 1+nx$ ，就稱為**一次近似**(linear approximation)，其幾何意義為將兩點間以線段連接。
- (四) 二次近似：將二項式 $(1+x)^n$ 展開得到： $1+C_1^n x+C_2^n x^2+\cdots+C_{n-1}^n x^{n-1}+x^n$ ，當我們取二項式級數的前三項： $1+C_1^n x+C_2^n x^2 \approx 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ ，就稱為**二次近似**(quadratic approximation)，其幾何意義為將兩點間以拋物線連接。
- (五) 干涉：光的干涉是指同一束光的兩個部分發出的單頻率光的結合現象。而結合的方式有波峰與波峰相疊合，或波峰與波谷相疊合[8]。
- (六) 薄膜干涉：一個肥皂泡就是一個薄膜，但是它的表面厚度不均勻。而光是由紅色，綠色，和藍色光波組成的，不同的顏色就從表面上反射出來。從兩個靠得很近的平面反射光線照射於薄膜，光波會被薄膜的上界面與下界面分別反射，因相互干涉而形成新的光波，這現象稱為薄膜干涉[8]。

二、研究流程

根據文獻[3][5]，知道以下條件：溶液溫度、室溫、皂膜濃度、模型大小、材質、直徑和抽離液面角度，都不會影響皂膜所形成的曲面面積。所以我們只需考慮常溫下固定濃度的溶液，鉛直抽出液面的皂膜形狀，並計算它的最小面積。圖 3 為我們的研究流程。

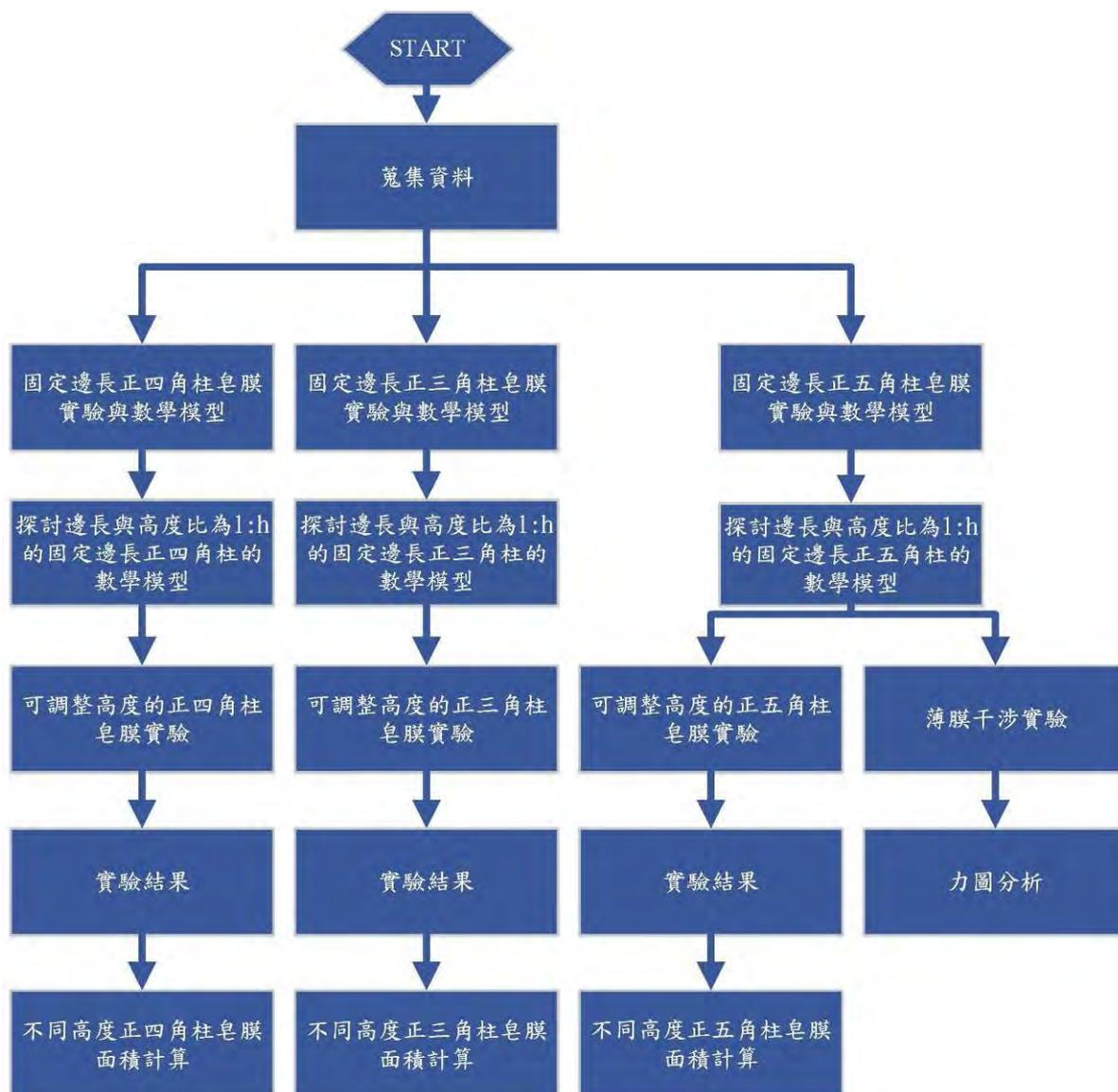


圖 3：研究流程圖

三、邊長與高度比為 1:2 的固定邊長正四角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正四角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正四角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積，如圖 4。我們先將底邊長為 5 公分且高為 10 公分的正四角柱體模型，鉛直抽離皂膜重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，並利用數學軟體 GeoGebra 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。

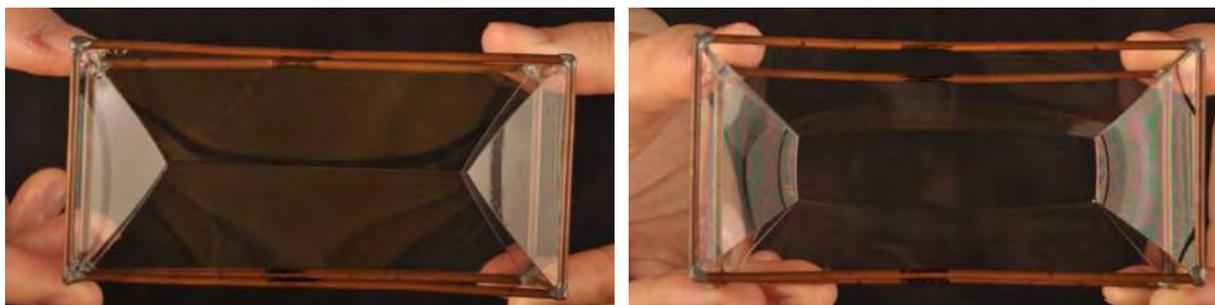


圖 4(a)：不同角度正四角柱皂膜實際情形 圖 4(b)：不同角度正四角柱皂膜實際情形

我們將正四角柱模型放入肥皂水中重複觀察，發現中間水平面上有 4 個點形成一個類長方形，而且連接了 8 個頂點，如圖 5(a)。鉛直抽離皂膜重複實驗所得結果相同。根據文獻[3]，我們所看到的皂膜形狀應該為最小曲面。

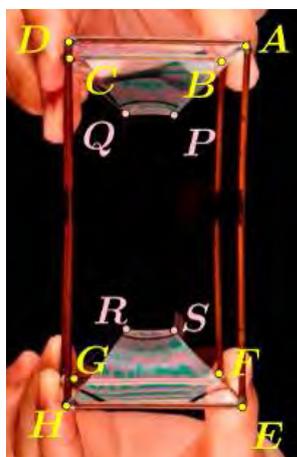


圖 5(a)：正四角柱皂膜實驗

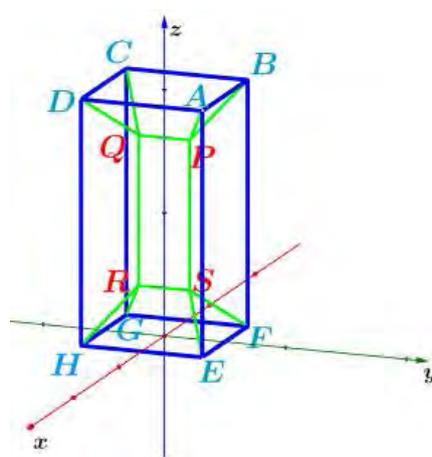


圖 5(b)：正四角柱皂膜實驗示意圖

再依比例調整成底面為 1 單位，高為 2 單位的正四角柱，如圖 5(b)。即設 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ 、 $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ 、 $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$ 、 $D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$ 、 $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 、 $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 、 $G(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 、 $H(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 為正四角柱的八個頂點，並設中央矩形之長為 s ，寬為 t ，即 $P(0, \frac{t}{2}, 1 + \frac{s}{2})$ 、 $Q(0, -\frac{t}{2}, 1 + \frac{s}{2})$ 、 $R(0, -\frac{t}{2}, 1 - \frac{s}{2})$ 、 $S(0, \frac{t}{2}, 1 - \frac{s}{2})$ 為中央矩形的四個頂點，其中 $0 \leq t \leq 1$ ， $0 \leq s \leq 2$ 。接著計算出面積函數公式： $f(s, t) = st + (t+1)\sqrt{(2-s)^2 + 1} + (2+s)\sqrt{(1-t)^2 + 1} + \sqrt{(2-s)^2 + (1-t)^2}$ 。因為有

兩個變量影響面積，所以我們使用梯度遞減法(Gradient Descent)找出 $f(s,t)$ 的最小值，並將 $z = f(s,t)$ 中的 z 坐標做適當的調整後，得到當 $s = 0.60, t = 0.15$ 時，我們可以得到 $f(s,t)$ 的最小值為 9.00，如圖 6。

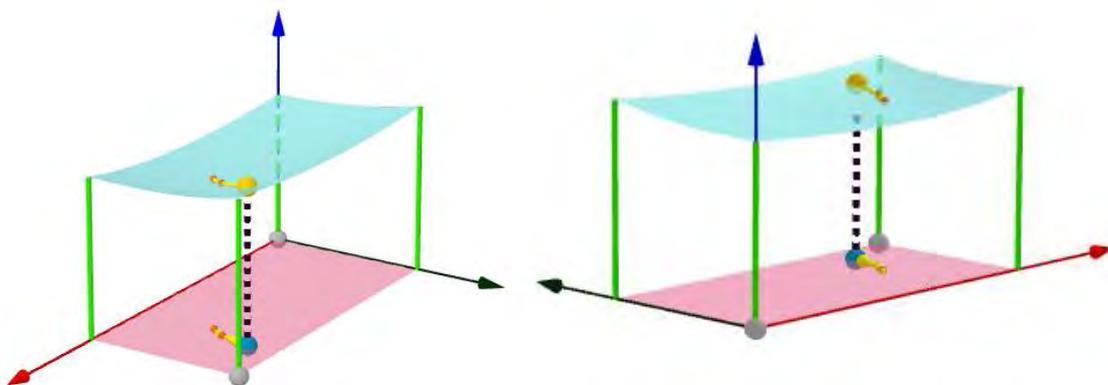


圖 6： Gradient Descent 找最小值

四、邊長與高度比為 1:3 的固定邊長正三角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正三角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正三角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積。我們先將底邊長為 5 公分且高為 15 公分的正三角柱模型，鉛直抽離皂膜溶液重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，如圖 7，並利用數學軟體 *GeoGebra* 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。



圖 7(a)：不同角度正三角柱皂膜實際情形圖



圖 7(b)：不同角度正三角柱皂膜實際情形圖

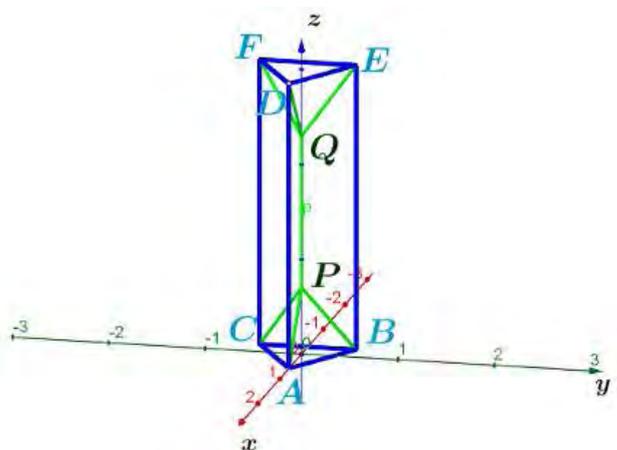


圖 7(c)：正三角柱皂膜示意圖

設底面邊長為 1 單位且高為 3 單位的正三角柱的六個頂點座標分別為： $A(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0)$ 、 $B(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, 0)$ 、 $C(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, 0)$ 、 $D(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 3)$ 、 $E(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, 3)$ 與 $F(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, 3)$ ，並設 t 為正三角柱的中心到兩節點的距離。故中央兩節點之座標為 $P(0, 0, \frac{3}{2} - t)$ 、 $Q(0, 0, \frac{3}{2} + t)$ ，其中

$0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 。此時：

$$1 \text{ 個三角形的面積為 } \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - 3t + \frac{7}{3}},$$

$$1 \text{ 個梯形的面積為 } \frac{(3+2t)}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}(2t+3)}{6},$$

接著計算六個三角形與三個梯形的面積和公式為： $f(t) = 3\sqrt{t^2 - 3t + \frac{7}{3}} + \frac{\sqrt{3}(2t+3)}{2}$ ，我

們將 $f(t)$ 微分後得到 $f'(t) = \frac{3(2t-3)}{2\sqrt{t^2 - 3t + \frac{7}{3}}} + \sqrt{3}$ ，當 $t = 1.30$ 時， $f(t)$ 有最小值 5.90。

五、邊長與高度比為 1:1.5 的固定邊長正五角柱的皂膜形狀與面積

為了探討高度可以調整的正五角柱皂膜形狀，我們先從高度固定的正五角柱開始討論皂膜的結構並計算其面積。我們製作底邊長為 4 公分且高為 6 公分的正五角柱體模型，鉛直抽離皂膜重複實驗，用攝影機拍攝並觀察其皂膜形狀，如圖 8，並利用數學軟體 *GeoGebra* 進行皂膜形狀最小曲面的一次近似估計。

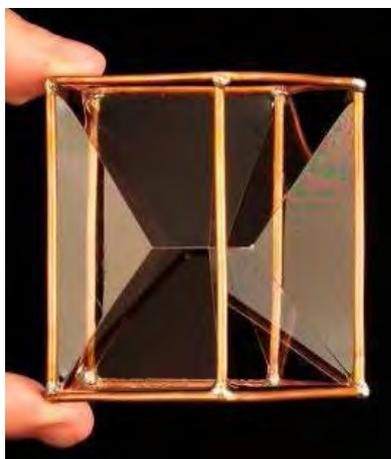


圖 8(a)：固定高度正五角柱皂膜形狀

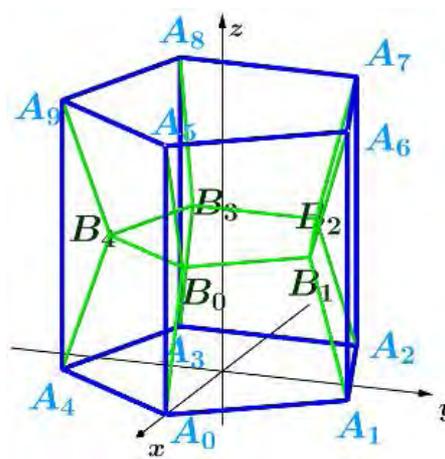


圖 8(b)：固定高度正五角柱皂膜形狀

我們取底面邊長為 1 單位且高為 1.5 單位的正五角柱的十個頂點座標分別為：

$$A_0(r \cos 0^\circ, r \sin 0^\circ, 0), A_1(r \cos 72^\circ, r \sin 72^\circ, 0), A_2(r \cos 144^\circ, r \sin 144^\circ, 0),$$

$$A_3(r \cos 216^\circ, r \sin 216^\circ, 0), A_4(r \cos 288^\circ, r \sin 288^\circ, 0), A_5(r \cos 0^\circ, r \sin 0^\circ, \frac{3}{2}),$$

$$A_6(r \cos 72^\circ, r \sin 72^\circ, \frac{3}{2}), A_7(r \cos 144^\circ, r \sin 144^\circ, \frac{3}{2}), A_8(r \cos 216^\circ, r \sin 216^\circ, \frac{3}{2}),$$

$$A_0(r \cos 288^\circ, r \sin 288^\circ, \frac{3}{2}), \text{ 其中 } r = \frac{1}{2} \csc 36^\circ = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}。$$

而中央邊長為 t 的正五邊形的頂點座標分別為：

$$B_0(rt \cos 0^\circ, rt \sin 0^\circ, \frac{3}{4})、B_1(rt \cos 72^\circ, rt \sin 72^\circ, \frac{3}{4})、B_2(r \cos 144^\circ, r \sin 144^\circ, \frac{3}{4})、$$

$$B_3(rt \cos 216^\circ, rt \sin 216^\circ, \frac{3}{4})、B_4(rt \cos 288^\circ, rt \sin 288^\circ, \frac{3}{4})。$$

$$\text{中央正五邊形之面積為 } \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} t，$$

$$\text{梯形的面積為 } \frac{t+1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{9}{16}}，$$

$$\text{等腰三角形的面積為 } \frac{3(1-t)(5+\sqrt{5})}{40}。$$

當 $0 \leq t \leq 1$ 時，此時皂膜面積為：

$$f(t) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} t + 5(1+t) \sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \cdot \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{9}{16}} + \frac{3(1-t)(5+\sqrt{5})}{8}$$

微分後得

$$f'(t) = 5 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \frac{9}{16}} - \frac{(5+2\sqrt{5})(1-t)^2}{4 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \frac{9}{16}}} + \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} - \frac{3(5+\sqrt{5})}{8}$$

因為 $f'(t)$ 恆正，也就是說函數 $f(t)$ 嚴格遞增，故當 $t=0$ 時 $f(t)$ 產生最小值 7.80。也就是說理論值是出現中央一點的情形，實驗值是中央有一個正五邊形。但是這個理論值與我們實驗值的皂膜形狀是不同的。理論值變成中央五邊形退化成一點，而我們觀察到的皂膜形狀為圖 8(a)。

參、研究結果與討論 (Results and Discussions)

一、邊長與高度比為 $1:h$ 的正四角柱的皂膜形狀與面積

(一) 正四角柱的皂膜形狀與面積實驗與計算

我們製作可調整高度，邊長為 6 公分，高為 32 公分的正四角柱模型，如圖 9。



圖 9：可調整高度的正四角柱模型

接著，調整至不同高度的比例，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起和觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 1。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

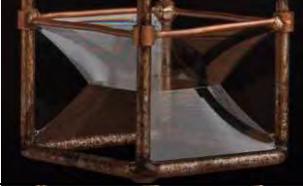
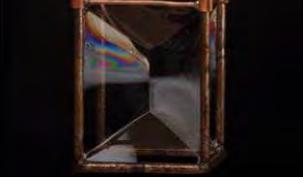
表 1：改變不同高度正四角柱皂膜情形



設正四角柱的邊長為 1，高為 h ；以 Type I 表示高小於等於 1 的皂膜形狀；Type II 表示高大於等於 1 的皂膜形狀，由實驗得知，當高度在 0.9 到 1.1 時，兩種情形都會出現，如表 2 所示。我們以一次近似計算正四角柱皂膜面積，當 $h \leq 1$ 時，設中央正方形邊長為 x ，皂膜形狀在水平的平面上如圖 10。同時我們還發現當邊長與高度比例在 1:0.9 的時候，若搖晃模型，則皂膜形狀將會從水平轉變為鉛直。

表 2：不同角度的不同高度正四角柱皂膜情形

比例	角度 a		角度 b	
1:0.3 (type I)				

1:0.4 (type I)						
1:0.5 (type I)						
1:0.6 (type I)						
1:0.7 (type I)						
1:0.8 (type I)						
1:0.9 (type I)						
1:0.9 (type II)						
1:1 (type II)						
1:1.1 (type II)						

Type I

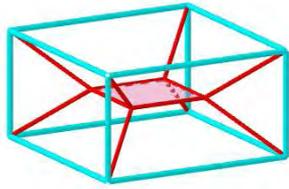


圖 10(a)：正四角柱 Type I
面積分解示意圖

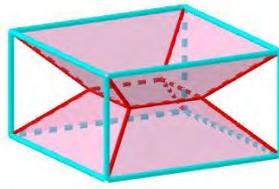


圖 10(b)：正四角柱 Type I
面積分解示意圖

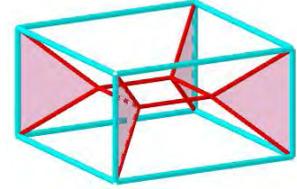


圖 10(c)：正四角柱 Type I
面積分解示意圖

經過計算得：

中央正方形的面積是 x^2 ，如圖 10(a)；

梯形的面積是 $\frac{(x+1)}{2} \sqrt{\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2}}$ ，如圖 10(b)；

三角形的面積是 $\frac{\sqrt{2}}{4} h(1-x)$ ，如圖 10(c)。

此時面積和為： $f_1(x, h) = x^2 + 2(1+x)\sqrt{(1-x)^2 + h^2} + \sqrt{2}h(1-x)$

我們發現模型要將高度大於等於 0.3 時，皂膜才會形成穩定的狀態。起初我們發現不同高度時，邊長與面積的函數關係都是單調遞增，但是當我們調整單位後，並將有效位數調整至小數點後五位發現在不同的高度時，都有相對極小值發生，如圖 11。

當 $h = 1.0$ 時， $x = 0.07$ ， $f_1(x, 1.0)$ 有相對極小值 4.24；

當 $h = 0.9$ 時， $x = 0.29$ ， $f_1(x, 0.9)$ 有相對極小值 3.95；

當 $h = 0.8$ 時， $x = 0.41$ ， $f_1(x, 0.8)$ 有相對極小值 3.64；

當 $h = 0.7$ 時， $x = 0.51$ ， $f_1(x, 0.7)$ 有相對極小值 3.33；

當 $h = 0.6$ 時， $x = 0.59$ ， $f_1(x, 0.6)$ 有相對極小值 3.01；

當 $h = 0.5$ 時， $x = 0.67$ ， $f_1(x, 0.5)$ 有相對極小值 2.68；

當 $h = 0.4$ 時， $x = 0.75$ ， $f_1(x, 0.4)$ 有相對極小值 2.35；

當 $h = 0.3$ 時， $x = 0.81$ ， $f_1(x, 0.3)$ 有相對極小值 2.02。

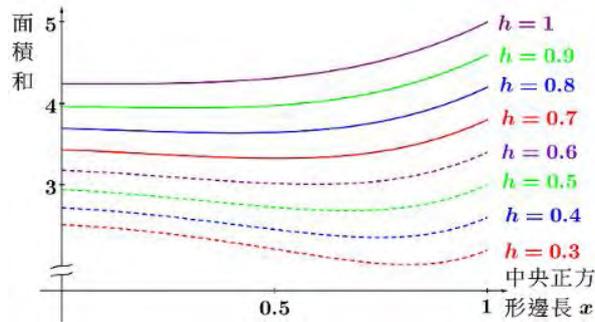


圖 11：正四角柱 Type I 正方形邊長與皂膜面積關係圖

Type II

當 $h \geq 0.9$ 時，設 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h}{2})$ 、 $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h}{2})$ 、 $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{h}{2})$ 、 $D(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{h}{2})$ 、 $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{h}{2})$ 、 $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{h}{2})$ 、 $G(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{h}{2})$ 、 $H(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{h}{2})$ 為正四角柱的八個頂點，並設中央矩形之長為 s ，寬為 t ，且 $P(0, \frac{t}{2}, \frac{s}{2})$ 、 $Q(0, -\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$ 、 $R(0, -\frac{t}{2}, -\frac{s}{2})$ 、 $S(0, \frac{t}{2}, -\frac{s}{2})$ 為中央矩形的四個頂點，其中 $0 \leq t \leq 1$ ， $0 \leq s \leq h$ ，如圖 12。

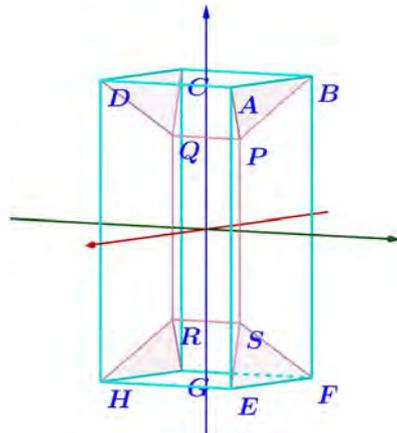


圖 12：正四角柱數學軟體模擬

我們也以一次近似計算 Type II 的面積。所以最小曲面就是長方形 $PQRS$ 、四個大梯形 $APSE$ 、四個小梯形 $APQD$ 與四個三角形 $\triangle ABP$ 的面積和；高的部分我們可以用三垂線定理算出。

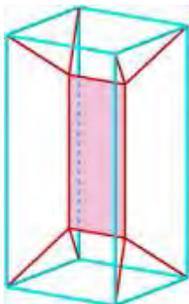


圖 13(a)：正四角柱 Type II 面積分解圖

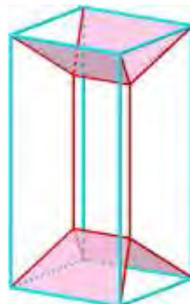


圖 13(b)：正四角柱 Type II 面積分解圖

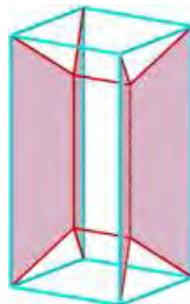


圖 13(c)：正四角柱 Type II 面積分解圖

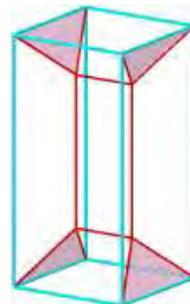


圖 13(d)：正四角柱 Type II 面積分解圖

長方形 $PQRS$ 的面積是 st ，如圖 13(a)；

小梯形 $APSE$ 的面積是 $\frac{(t+1)}{2} \sqrt{\left(\frac{h-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{t+1}{4} \sqrt{(h-s)^2 + 1}$ ，如圖 13(b)；

大梯形 $APQD$ 的面積是 $\frac{(h+s)}{2} \sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{(h+s)}{4} \sqrt{(1-t)^2 + 1}$ ，如圖 13(c)；

三角形 $\triangle ABP$ 的面積是 $\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(h-s)^2 + (1-t)^2}$ ，如圖 13(d)；

故面積函數為：

$$f_2(s, t, h) = st + (t+1)\sqrt{(h-s)^2 + 1} + (h+s)\sqrt{(1-t)^2 + 1} + \sqrt{(h-s)^2 + (1-t)^2}$$

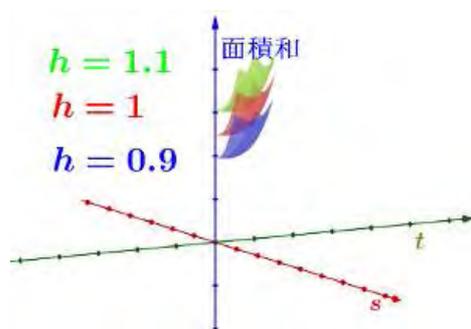


圖 14：正四角柱 Type II 長方形形邊長與面積關係圖

圖 14 為模型高度 h 為 0.9、1.0 與 1.1 的長方形的長、寬與面積和 $f_2(s, t, h)$ 的函數圖形，我們將函數向 z 軸負向平移 3 個單位作圖，並利用梯度遞減法(Gradient Descent)，求出下列相對極值。

當 $h = 1.1$ 時， $s = 0.15$ ， $t = 0.09$ 時， $f_2(s, t, 1.1)$ 有相對極小值 4.52；

當 $h = 1.0$ 時， $s = 0.07$ ， $t = 0.07$ 時， $f_2(s, t, 1.0)$ 有相對極小值 4.24；

當 $h = 0.9$ 時， $s = 0.13$ ， $t = 0.14$ 時， $f_2(s, t, 0.9)$ 有相對極小值 3.98；

(二) 正四角柱的皂膜形狀與面積的討論

1. 當 $h = 1$ 時，水平與鉛直的皂膜形狀都會隨機出現。而代入 Type I 與 Type II 公式計算，也得到相同的結果。
2. 假設只論皂膜的拓撲結構，也就是假設不管模型的高度，都有 Type I 與 Type II 兩種皂膜會出現(如圖 15)，我們比較兩種情形的面積和，我們發現 Type I 的面積小於 Type II 的面積。

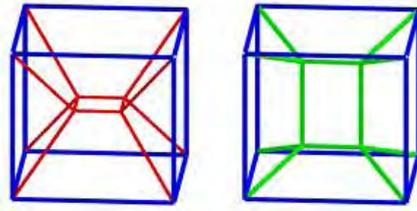


圖 15：相同高度時的 Type I 和 Type II 正四角柱皂膜形狀

3. 在正四角柱高度為 0.3 到 1 之間時 (Type I)，我們討論將不同高度(h)的正四角柱，中央正方形邊長與面積的最小值關係，並將 x 座標放大 10 倍，發現正四角柱的高度越高，總面積和產生最小值時的中央正方形邊長越小，我們發現資料好像分部在一條直線上，我們取迴歸直線 $L: y = -3.06x + 4.72$ ，如圖 16。下一步是將實驗模擬的高度間距由 0.1 調整到 0.05。

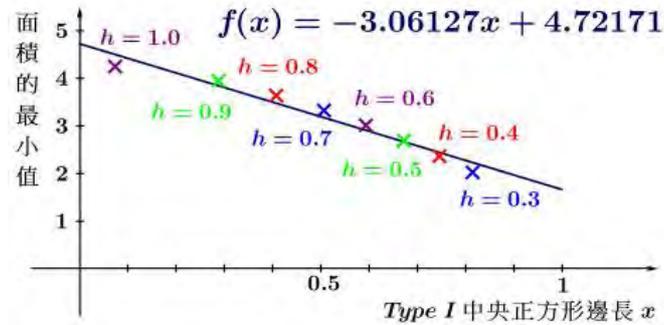


圖 16：不同高度模型對應正方形邊長與最小面積關係圖

4. 基於本研究得知，當正方形邊長與高之比為 1:5 時，皂膜實驗仍可成功，但是較不易成功拉出皂膜。

二、邊長與高度比為 1:h 的正三角柱的皂膜形狀與面積

(一) 正三角柱的皂膜形狀與面積實驗與計算

我們製作邊長為 6 公分，高為 32 公分的正三角柱模型，並設計出可調整高度的裝置，如圖 17。



圖 17：可調整高度的正三角柱模型

接著，調整至不同高度的比例，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起和觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 3 與表 4。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

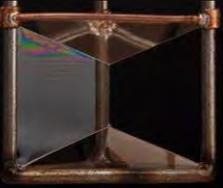
表 3：改變不同高度正三角柱皂膜情形



設正三角柱底邊的邊長為 1，高為 h ；以 Type I 表示高小於等於 0.5 的皂膜形狀，如圖 18；Type II 表示高大於等於 0.4 的皂膜形狀，如圖 20。由實驗得知，當高度在 0.4 與 0.5 之間時，兩種情形都會出現，我們以一次近似計算正三角柱皂膜面積。同時我們還發現當高度比例介於 1:0.4 到 1:0.5 之間的時候，若搖晃模型，則皂膜形狀將會從 Type I 轉變為 Type II。

表 4：不同角度的不同高度正三角柱皂膜情形

比例	角度 a		角度 b	
1:0.3 (type I)				
1:0.4 (type I)				
1:0.5 (type I)				
1:0.5 (type II)				
1:0.6 (type II)				

1:0.7 (type II)		
1:0.8 (type II)		
1:0.9 (type II)		
1:1 (type II)		
1:1.1 (type II)		

Type I

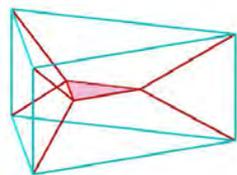


圖 18(a): 正三角柱 Type I
面積分解示意圖

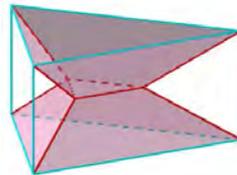


圖 18(b): 正三角柱 Type I
面積分解示意圖

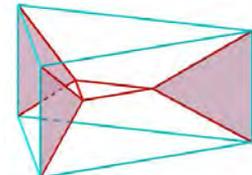


圖 18(c): 正三角柱 Type I
面積分解示意圖

當 $h \leq 0.5$ 時，設中央正三角形邊長為 x ，經計算得：

中央正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ，如圖 18(a)；

梯形面積為 $\frac{(x+1)}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{3}}\right)^2}$ ，如圖 18(b)；

等腰三角形面積為 $\frac{h(1-x)}{2\sqrt{3}}$ ，如圖 18(c)；

此時皂膜面積為 $f_1(x, h) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} + \frac{3}{4}(1+x)\sqrt{h^2 + \frac{1}{3}(1-x)^2} + \frac{\sqrt{3}h}{2}(1-x)$ ， $0 \leq x \leq 1$ 。

我們發現若模型高度大於等於 0.3 時，皂膜才會穩定。起初我們發現不同高度時，邊長與面積的函數關係都是單調遞增，但是當我們調整單位後，並將有效位數調整至小數點

後五位發現在不同的高度時，都有相對極小值發生，如圖 19 所示。

當 $h = 0.50$ 時， $x = 0.70$ ， $f_1(x, 0.50)$ 有相對極小值 1.78；

當 $h = 0.45$ 時， $x = 0.74$ ， $f_1(x, 0.45)$ 有相對極小值 1.65；

當 $h = 0.40$ 時， $x = 0.78$ ， $f_1(x, 0.40)$ 有相對極小值 1.52；

當 $h = 0.35$ 時， $x = 0.82$ ， $f_1(x, 0.35)$ 有相對極小值 1.39；

當 $h = 0.30$ 時， $x = 0.85$ ， $f_1(x, 0.30)$ 有相對極小值 1.26；

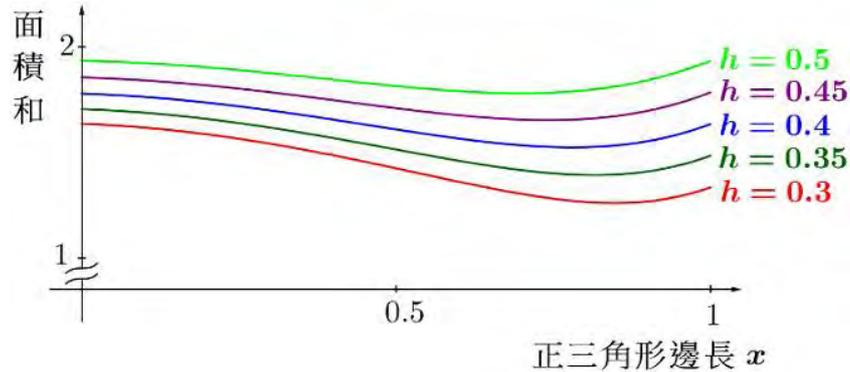


圖 19：正三角柱 Type I 正三角形邊長與面積關係圖

Type II

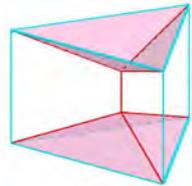


圖 20(a)：Type II 面積分解示意圖

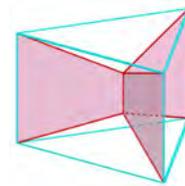


圖 20(b)：Type II 面積分解示意圖

當 $h \geq 0.4$ 時，皂膜情形如圖 20，以一次近似計算正三角柱皂膜面積。我們觀察皂膜形狀，發現節點所在位置即以底面正三角形為一面的正四面體的重心，如圖 22，與我們所查的文獻相同[3]。此時：

等腰三角形面積為 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ，如圖 20(a)；

梯形面積為 $\frac{\sqrt{3}h}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$ ，如圖 20(b)；

此時皂膜面積為 $f_2(h) = \sqrt{3}h + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。也就是說當 $h \geq 0.4$ 時，皂膜面積和只與模型高度 h 有關，如圖 21。

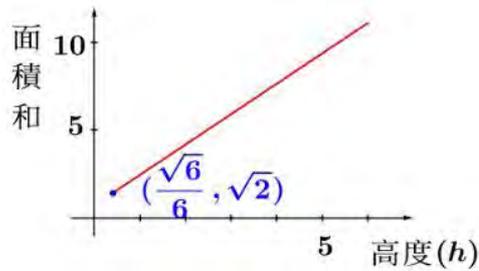


圖 21：正三角柱 Type II 高度與面積關係圖

我們將此公式代入第 9 頁邊長與高度比為 1:3 的正三角柱進行比對，發現 $f_2(3) = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.90$ ，與以微分算出的最小值相同！也與我們查到的參考資料一致 [5]。而且經過測量計算我們發現皂膜的兩節點與對應正三角形的頂點所連接的 4 個線段夾角均為 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ ，約為 109.4° 。即上下兩個正三角錐皆為正四面體重心與四頂點連線的部份圖形，如圖 22。

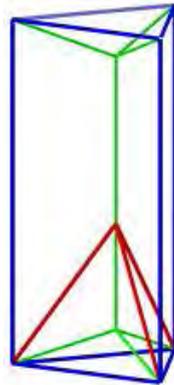


圖 22：正三角柱 Type II 頂點與正四面體重心比較圖

(二) 正三角柱的皂膜形狀與面積的討論

1. 因為在 Type II 皂膜的面積只與高度有關，所以我們討論 Type I，目前我們調整高度的間距是 0.05 單位，所以我們目前只有五組數據，如果將實驗模擬的高度調整到更小，也許可以得到更精準的資料，但是手做的可調高度模型精準度可能無法這麼高，將來我們要設計更準確的模型以完成實驗。
2. 假設只論皂膜的拓撲結構，而為了比較兩種皂膜形狀的面積，我們控制相同高度的模型將兩種形狀模擬在圖 23，並以軟體模擬皂膜面積和。因為在 $0.4 \leq h \leq 0.5$ 時皂膜形狀 Type I 與 Type II 兩種情形都可能出現。起初以為兩者會有共同面積，但模擬後發現，在這段區間，皂膜形狀改變那一瞬間，面積函數是不連續的！關於這點我們用分岔理論(Bifurcation Theory)解釋。

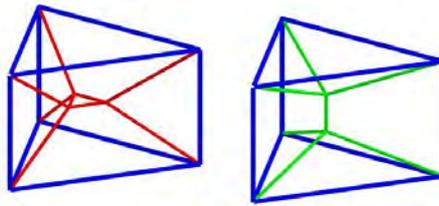


圖 23：相同高度時的 Type I 和 Type II 正三角柱皂膜形狀

3. 如果只論皂膜的拓撲結構，也就是假設不管模型的高度，則都有 Type I 與 Type II 兩種皂膜會出現，同時 Type II 要出現時模型高度必須大於等於 $\frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.41$ 單位，我們從 $h = 0.40$ 到 $h = 0.5$ 時，Type I 的最小面積皆大於 Type II 的面積，但實驗結果兩種情形都可能出現。
4. 在正三角柱高度為 0.3 到 0.5 之間時 (Type I)，實驗模擬的高度間距為 0.05 單位，我們討論將不同高度 h 的正三角柱，中央正三角形邊長與面積的最小值關係，並將座標軸調整，如圖 24，發現正三角柱的高度越高，總面積和產生最小值時的中央三角形邊長越小，我們發現資料分部很靠近一條直線，故我們做線性迴歸得到直線方程式： $L: y = 3.51x + 4.50$ 。

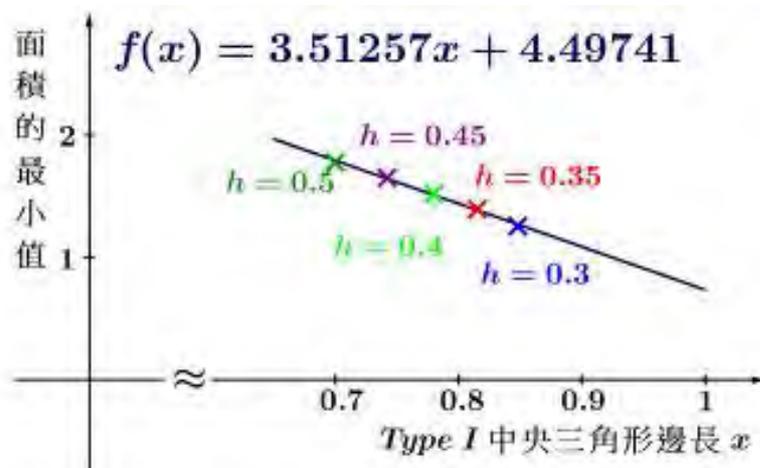


圖 24：不同高度 Type I 模型對應正三角形邊長與最小面積關係圖

5. 基於本研究得知，當正三角形邊長與高之比為 1:5 時，皂膜實驗仍可成功，但是較不易成功拉出皂膜。

三、邊長與高度比為 1:h 的正五角柱的皂膜形狀與面積

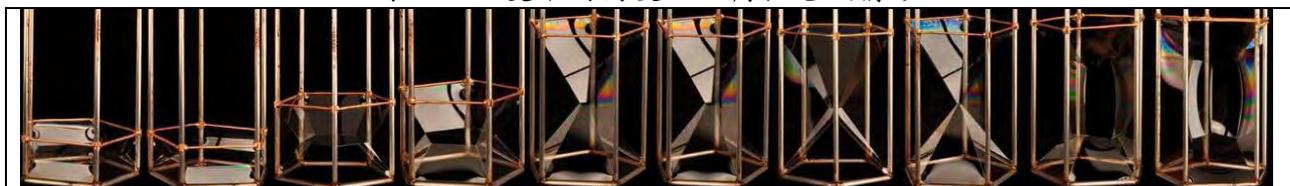
(一) 正五角柱的皂膜形狀與面積實驗與計算



圖 25：可調整高度的正五角柱模型

我們製作邊長為 6 公分，高為 32 公分的正五角柱模型，並設計出可調整高度的裝置，如圖 21。接著，調整模型至不同的高度，放入肥皂溶液中，並鉛直拉起觀察它的形狀，實驗照片記錄如表 5 與表 6。我們盡量將模型底邊對齊在照片底部，以便看出調整模型高度時皂膜變化情形。

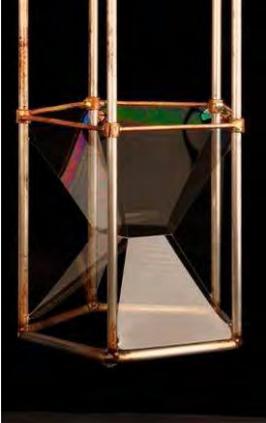
表 5：改變不同高度正五角柱皂膜情形

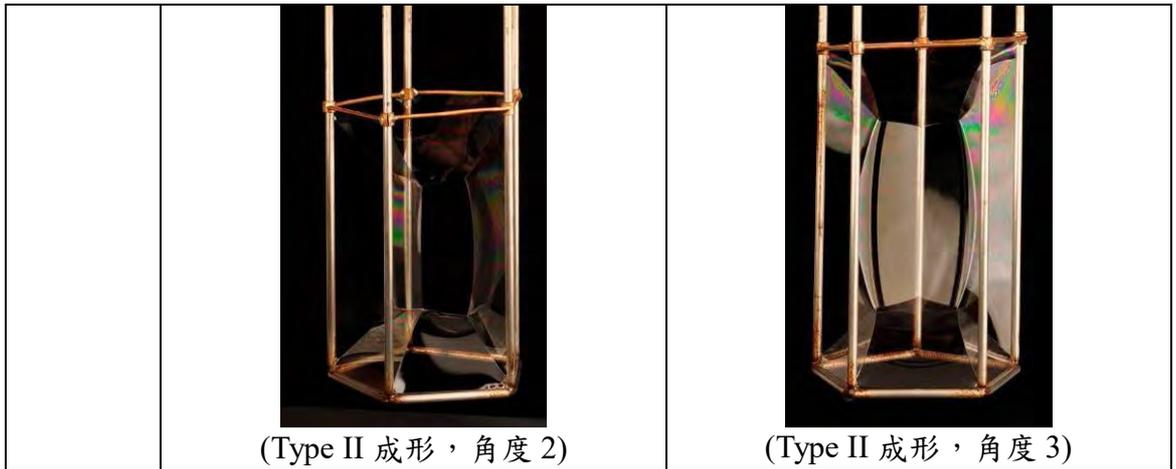


設正五角柱底邊的邊長為 1，高為 h ；以 Type I 表示高小於 2.08 的皂膜形狀；Type II 表示高大於等於 2.08 的皂膜形狀，我們以一次近似計算正五角柱皂膜面積。而在臨界情形，我們選擇不同角度的照片，以便觀察。

表 6：不同角度的不同高度正五角柱皂膜情形

比例	角度 a	角度 b
1:0.5 (Type I)		

<p>1:1.0 (Type I)</p>		
<p>1:1.5 (Type I)</p>		
<p>1:2.0 (Type I)</p>		
<p>1:2.1 (Type I 變到 Type II)</p>	 <p>(Type I 逐漸縮小)</p>	 <p>(Type II 成形，角度 1)</p>



Type I



圖 26(a): 正五角柱 Type I 面積分解示意圖



圖 26(b): 正五角柱 Type I 面積分解示意圖

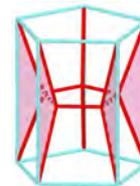


圖 26(c): 正五角柱 Type I 面積分解示意圖

當 $h < 2.08$ 時，設中央正五邊形邊長為 x ，皂膜情形如圖 26，經計算得：

中央正五邊形之面積為 $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} x$ ，如圖 26(a)；

梯形面積為 $\frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{h^2}{4}}$ ，如圖 26(b)；

等腰三角形面積為 $\frac{h(1-x)(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{5}}$ ，如圖 26(c)；此時皂膜面積為

$$f_1(x, h) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} x + 5(1+x) \sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \cdot \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{h^2}{4}} + \frac{h(1-x)(5+\sqrt{5})}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

我們發現模型要將高度大於等於 0.3 時，皂膜才會穩定，容易成形。

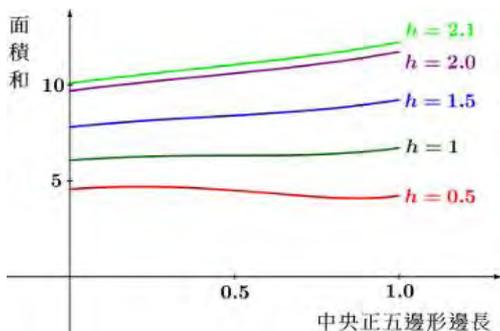


圖 27(a): Type I 正五角柱五邊形邊長(x) 與面積(y)關係圖

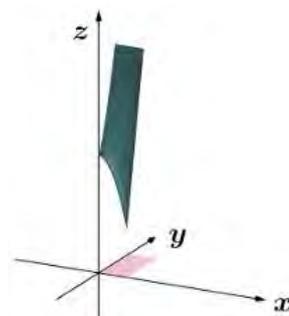


圖 27(b): Type I 正五角柱正五邊形邊長(x)高度(y)與面積(z)關係圖

圖 27(a)中，除了 $h = 0.5$ ，其他四個函數都是單調遞增，也就是當 $x = 0$ 時產生相對極小值發生。中央正五邊形的邊長、高度與面積的關係圖，如圖 27(b)所示。我們猜想可能是高度在 1 與 2 之間時，能量差距很小，所以看起來理論值的中央正五邊形縮成一點，與實驗值不同！待 Type II 的面積和公式求出後我們再對此問題討論。

當 $h = 0.50$ 時， $x = 0.87$ ， $f_1(x, 0.50)$ 有相對極小值 4.10；

當 $h = 1.00$ 時， $x = 0$ ， $f_1(x, 1.00)$ 有相對極小值 6.06；

當 $h = 1.50$ 時， $x = 0$ ， $f_1(x, 1.50)$ 有相對極小值 7.80；

當 $h = 2.00$ 時， $x = 0$ ， $f_1(x, 2.00)$ 有相對極小值 9.69；

當 $h = 2.10$ 時， $x = 0$ ， $f_1(x, 2.10)$ 有相對極小值 10.08；

Type II



圖 28(a)：正五角柱
Type II 測視圖

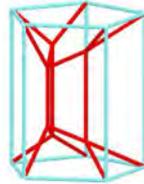


圖 28(b)：正五角柱
Type II 測視圖



圖 28(c)：正五角柱
Type II 上視圖

當 $h \geq 2.08$ 時，正五角柱皂膜如圖 28 所示。側視圖中有兩個矩形，五個梯形，其中兩組為兩兩對稱的。從正上方與正下方觀察投影至水平面其圖形如圖 28(c)所示，上下投影圖相同，皆有一左右對稱的五邊形，有兩個全等的三角形與兩個全等的四邊形。



圖 29(a)：正五角柱皂膜
轉換過程 1

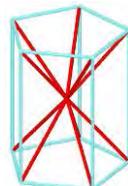


圖 29(b)：正五角柱皂膜
轉換過程 2

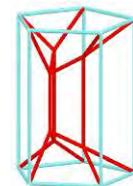


圖 29(c)：正五角柱皂膜
轉換過程 3

而且在高度與邊長比為 2.1:1 時，拉出的皂膜會從過程 1 即圖 29(a)變到過程 2 圖 29(b) 平均約耗時 2 秒，而由過程 2 圖 29(b)變到過程 3 如圖 29(c)平均約耗時 1 秒。

正五角柱是以其重心點對稱的結構，而其 Type II 皂膜形狀竟然是不對稱的！如圖 30。

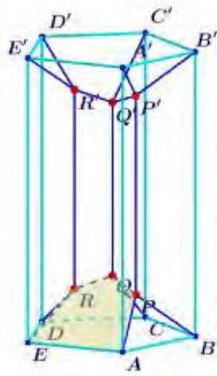


圖 30(a)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

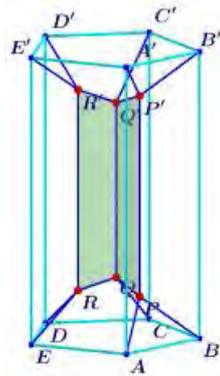


圖 30(b)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

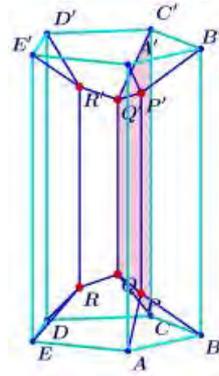


圖 30(c)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

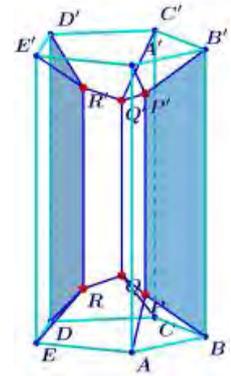


圖 30(d)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

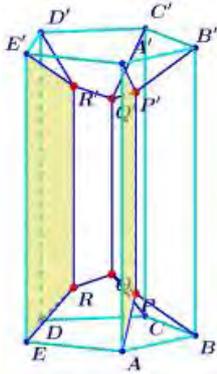


圖 30(e)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

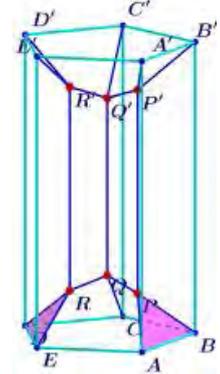


圖 30(f)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

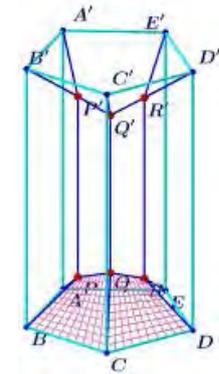


圖 30(g)：
正五角柱 Type II
面積分解示意圖

(二) 正五角柱 Type II 的面積

我們考慮用以下方法求出正五角柱 Type II 的面積。我們使用翻拍架由正五角柱模型的正上方拍攝 80 張照片，最後取圖 31(a)。我們將照片放在數學軟體中，再找一個正五邊形 $ABCDE$ 去逼近它，最後找出中間三個節點 P, Q, R 的位置，如圖 31(b)、31(c)。



圖 31(a)：上視圖

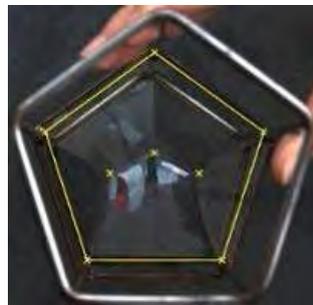


圖 31(b)：找出節點



圖 31(c)：模擬皂膜形狀

我們取平面上正五邊形的頂點分別為 $A(0.5,0)$ 、 $B(0.81,0.95)$ 、 $C(0,1.54)$ 、 $D(-0.81,0.95)$ 、 $E(-0.5,0)$ 。設 P 、 Q 、 R 三個點在 xy 平面的投影點座標分別為 $P_1(0.32,0.66)$ 、 $Q_1(0,0.88)$ 、 $R_1(-0.32,0.66)$ 。而為了方便計算，我們設 $B(\alpha_1, \beta_1)$ 、 $C(0, \beta_2)$ 、

$D(-\alpha_1, \beta_1)$ 、 $P_1(\alpha, \beta)$ 、 $Q_1(0, \gamma)$ 、 $R_1(-\alpha, \beta)$ ，如圖 32。

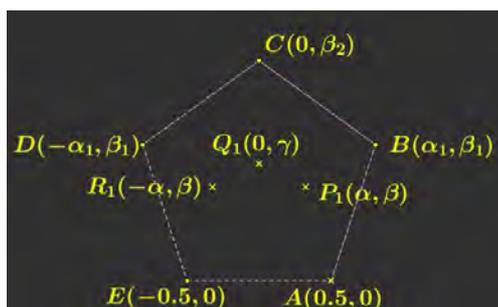


圖 32(a)：給定座標

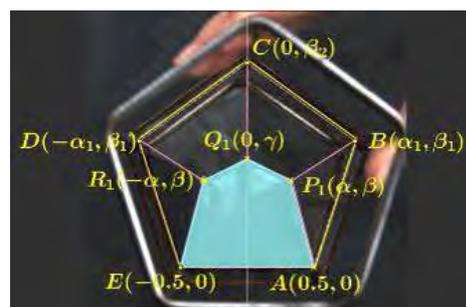


圖 32(b)：給定座標

因為這個圖形是面對稱的，所以在空間中，我們分別設正五角柱 5 個頂點座標為 $A(0.5, 0, 0)$ 、 $B(\alpha_1, \beta_1, 0)$ 、 $C(0, \beta_2, 0)$ 、 $D(-\alpha_1, \beta_1, 0)$ 、 $E(-0.5, 0, 0)$ 、 $A'(0.5, 0, h)$ 、 $B'(\alpha_1, \beta_1, h)$ 、 $C'(0, \beta_2, h)$ 、 $D'(-\alpha_1, \beta_1, h)$ 與 $E'(-0.5, 0, h)$ 。而相關的 6 個節點座標設為 $P(\alpha, \beta, \lambda)$ 、 $Q(0, \gamma, \eta)$ 、 $R(-\alpha, \beta, \lambda)$ 、 $P'(\alpha, \beta, h - \lambda)$ 、 $Q'(0, \gamma, h - \eta)$ 、 $R'(-\alpha, \beta, h - \lambda)$ ，且 λ 與 η 皆為 h 的函數。



圖 33：不同高度正五角柱 Type II 皂膜形狀

我們分別取 Type II 中，邊長與高度比為 2.2、2.6、3、3.4、3.8 的五組數據討論，並拍攝照片，如圖 33。

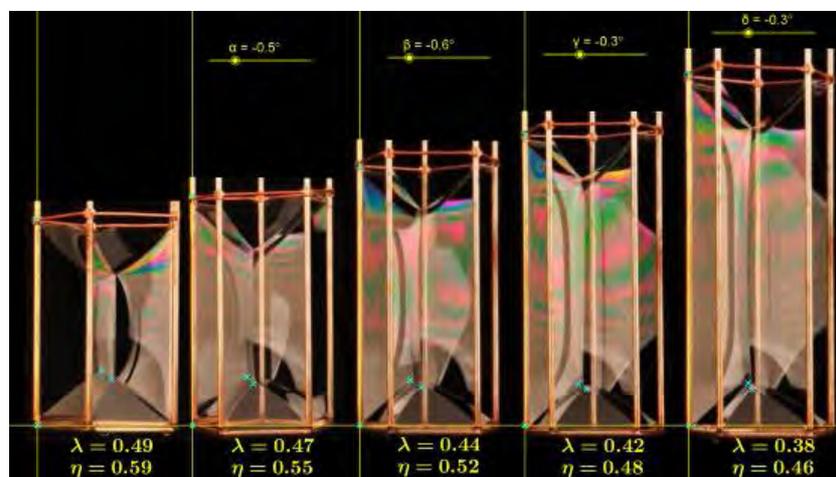


圖 34：正五角柱 Type II 皂膜形狀的 λ 值與 η 值

再將照片放到數學軟體中校正，找出對應比例，並計算高度為 h 時， λ 和 η 的值，如圖 34 與表 7。

表 7：正五角柱 Type II 皂膜形狀的 λ 值與 η 值

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
λ	0.49	0.47	0.44	0.42	0.38
η	0.59	0.55	0.52	0.48	0.46

最後我們找出 λ 與 η 關於 h 的迴歸直線方程式(如圖 35)：

$$\lambda = -0.07h + 0.64 \quad \text{及} \quad \eta = -0.08h + 0.77$$

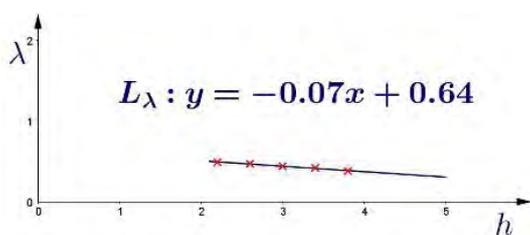


圖 35(a)： λ 關於 h 的迴歸直線

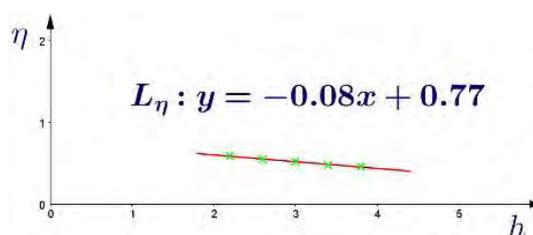


圖 35(b)： η 關於 h 的迴歸直線

接著開始討論這 5 個點對應的曲面面積。我們先用 GeoGebra 設計了一個通過 $A(0.5,0,0)$ 、 $E(-0.5,0,0)$ 與 z 軸正向某一點的平面，並考慮下列兩種情形：通過 A, E, P, R 四點與 A, E, Q 三點。做通過 P, Q, R 三點且垂直 xy 平面的直線 L_1, L_2, L_3 ，此時 L_1, L_2, L_3 會與平面交於三點 $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ ，此時考慮五邊形 $A\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}E$ 的面積模擬值，會與我們計算出來的理論值接近。

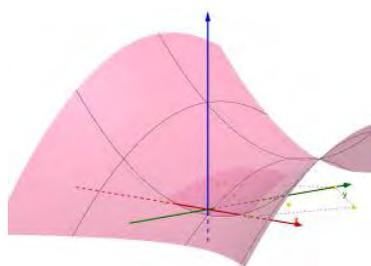


圖 36(a)：皂膜所在曲面

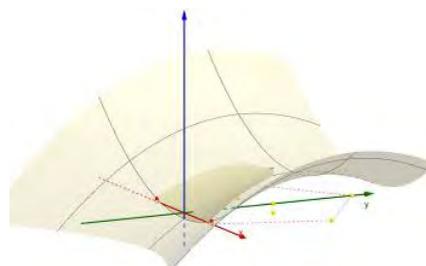


圖 36(b)：模擬皂膜所在曲面

圖 36(a)是真實皂膜曲面，我們取一個平均曲率為 0 的雙曲拋物面來逼近它，如圖 36(b)。而曲面的取法是我們利用最小平方方法的概念，找到一個曲面方程式使得這 5 個點到曲面的鉛直距離平方和為最小，即綠色線段長，如圖 37(a)、37 (b)。

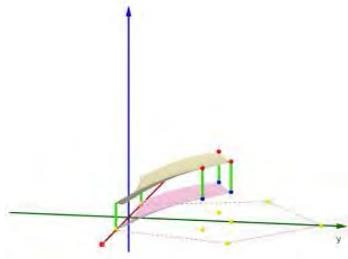


圖 37(a)：最小平方法示意圖

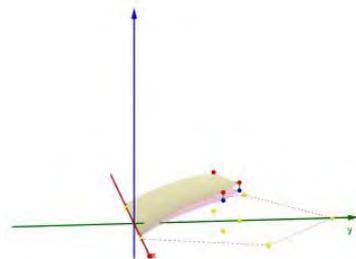


圖 37(b)：最小平方法示意圖

所以我們要考慮以下兩點：

1. 角度問題：圖 38(a)是我們假設的曲面方程式 $z = A_1(x^2 - y^2)$ ，我們將其旋轉 θ 角，得

$f(x, y) = (x^2 - y^2) \cos 2\theta + 2xy \sin 2\theta$ ，如圖 38(b)。很明顯改變曲面方程式的角度會影響我們估計的面積。

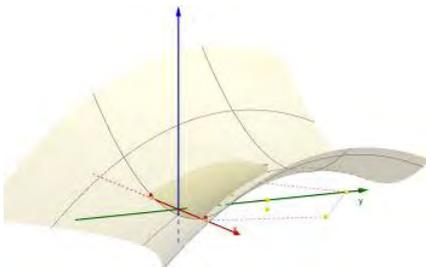


圖 38(a)：原角度

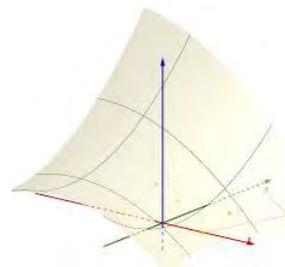


圖 38(b)：改變角度

2. 高度問題：圖 39(a)是我們 $f(x, y) = A_1(x^2 - y^2)$ ，調整係數 A_1 ，得到圖 39(b)。很明顯

改變 A_1 時我們估計的面積也會改變。

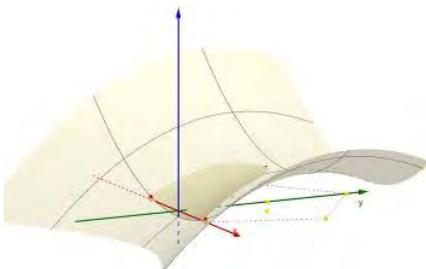


圖 39(a)：原高度

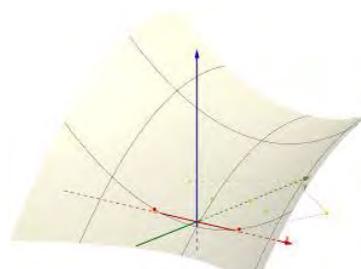


圖 39(b)：改變高度

要如何同時找到最好的 θ 與 A_1 呢？我們假設雙曲拋物面的方程式是

$$F(x, y) = A_1 [(x^2 - y^2) \cos 2\theta + 2xy \sin 2\theta]$$

考慮通過 A, E, Q 的平面方程式為 $z = \frac{\eta}{\gamma} y$ ，

假設 $\vec{\zeta}_0 = (x, y, \frac{\eta}{\gamma} y)$ ， $\vec{\zeta} = (x, y, \frac{\eta}{\gamma} y) + (0, 0, A_1(x^2 - y^2))$

設 $f_1(A_1, \theta) = \sum_{j=1}^5 \left\{ \frac{\eta}{\gamma} y_j + A_1 [(x_j^2 - y_j^2) \cos 2\theta + 2x_j y_j \sin 2\theta] - z_j \right\}^2$ 我們對 θ 與 A_1 偏微得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A_1 \cos 2\theta = 0.01h - 0.04 \text{ or } \sin 2\theta = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial A_1} = -0.91A_1 \cos^2 2\theta + 0.82 \cos 2\theta - 0.09h \cos 2\theta + 1.70A_1 = 0 \end{cases}$$

此時得到三組解：

$$\begin{cases} \theta = \frac{n\pi}{2} \\ A_1 = 0.00978h - 0.03844 \end{cases}, n \in Z$$

或 $\begin{cases} \theta = \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.08h}{0.85 - 0.10h} \right) \\ A_1 = \frac{0.01h - 0.04}{\cos 2\theta} \end{cases}$ 與它的補角 $\begin{cases} \theta = \pi - \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.08h}{0.85 - 0.10h} \right) \\ A_1 = \frac{0.01h - 0.04}{\cos 2\theta} \end{cases}$

接著討論這三組數據的重要物理意義。

經過相當繁複的計算，(但受限於篇幅，細節在此處省略，惟完整詳細計算過程均留存
在附錄內，可供參考) 我們可以推出這三組解而重點是：

經過計算後，發現 θ 有三個解，他們其實是有相當重要的物理意義；第一個 $\theta = \frac{n\pi}{2}$ ，這和我們的直覺吻合，因為 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 是有對稱的！可是有趣的是，我們在數學上有另外兩個解，它顯然是不對稱的！ $\theta = \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.08h}{0.85 - 0.10h} \right)$ 和它的補角，這兩個解本身是有鏡像的對稱，這在物理特別有趣，因為這告訴我們說：其實改變參數 h 的時候，也許這個系統會在某些數值下偏好特殊角的解，而在別的數值下卻會喜歡非對稱的解。因此我們將某參數調整時，它就可能自動由一種對稱的皂膜形狀自發地跳躍成為不對稱的形狀。關於這點，顯然是和分岔理論的精神一致。

接著我們考慮利用電腦模擬、一次近似、二次近似、向量積分等計算皂膜表面面積：

與我們積分的邊界有關的直線方程式如下：

$$\vec{AP}_1: y = \frac{\beta}{2\alpha - 1}(2x - 1), \quad \vec{P_1Q_1}: y = \frac{\beta - \gamma}{\alpha}x + \gamma, \quad \vec{BP}_1: y = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}(x - \alpha) + \beta$$

$$\vec{AB}: y = \frac{\beta_1}{2\alpha_1 - 1}(2x - 1), \quad \vec{BC}: y = \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(x - \alpha_1) + \beta_1$$

$$f(x, y) = A_1(x^2 - y^2), \text{ 其中 } x^2 - y^2 = (x^2 - y^2) \cos 2\theta + 2xy \sin 2\theta$$

$$\text{令 } \vec{\zeta} = (x, y, \frac{\eta}{\gamma} y) \text{、 } A_1 \vec{\zeta} = (x, y, A_1(x^2 - y^2) \cos 2\theta_1 + 2A_1xy \sin 2\theta_1) \text{、}$$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial y} = (1, 0, 0) \times (0, 1, \frac{\eta}{\gamma})$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\eta}{\gamma} & \frac{\eta}{\gamma} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= (0, -\frac{\eta}{\gamma}, 1)$$

$$|\vec{A}|^2 = \frac{\eta^2}{\gamma^2} + 1 = \frac{\gamma^2 + \eta^2}{\gamma^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial x} \times \frac{\partial A_1 \vec{\zeta}}{\partial y} + \frac{\partial A_1 \vec{\zeta}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial y}$$

$$= (1, 0, 0) \times (0, 1, -2A_1y \cos 2\theta_1 + 2xA_1 \sin 2\theta_1) + (1, 0, 2A_1x \cos 2\theta_1 + 2A_1y \sin 2\theta_1) \times (0, 1, \frac{\eta}{\gamma})$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2A_1y \cos 2\theta_1 + 2A_1x \sin 2\theta_1 & -2A_1y \cos 2\theta_1 + 2A_1x \sin 2\theta_1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= (-2A_1x \cos 2\theta_1 - 2A_1y \sin 2\theta_1, 2A_1y \cos 2\theta_1 - 2A_1x \sin 2\theta_1 - \frac{\eta}{\gamma}, 2)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{\eta}{\gamma} (-2A_1y \cos 2\theta_1 - 2A_1x \sin 2\theta_1 - \frac{\eta}{\gamma}) + 2$$

$$\frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}|} + \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|}$$

$$= \frac{1}{|\vec{A}|} (|\vec{A}|^2 + \vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \left[\frac{\gamma^2 + \eta^2}{\gamma^2} + 2 - \frac{\eta}{\gamma} (2A_1y \cos 2\theta_1 - 2A_1x \sin 2\theta_1 - \frac{\eta}{\gamma}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \left[\frac{\gamma^2 + \eta^2 + 2}{\gamma^2} - 2A_1\eta \cos 2\theta_1 y + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x - \eta \right]$$

考慮五邊形 $APQRE$ 對應的曲面面積 $W = 2(W_1 + W_2)$ ，我們分兩段積分如圖 40：

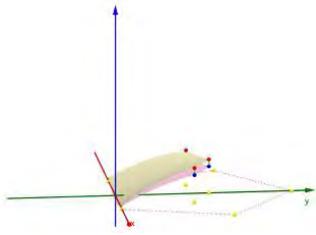


圖 40(a)：五邊形對應曲面

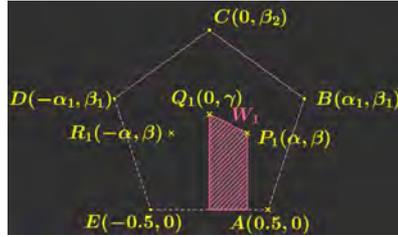


圖 40(b)：五邊形分段積分

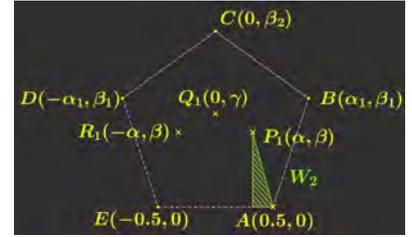


圖 40(c)：五邊形分段積分

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_0^\alpha \int_0^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x+\gamma} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x - 2A_1\eta \cos 2\theta_1 y \right] dy dx \\
 &= \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x \right] y - A_1\eta \cos 2\theta_1 y^2 \Big|_0^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x+\gamma} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \int_0^\alpha \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x + \gamma \right) - A_1\eta \cos 2\theta_1 \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}x + \gamma \right)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \int [Ax^2 + Bx + C] dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \right]_0^\alpha \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[\frac{\alpha^3}{3}A\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}B\alpha + \alpha C \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{其中, } A = \frac{2A_2\eta(\beta-\gamma)\sin 2\theta_1}{\alpha} - A_1\eta \cos 2\theta_1 \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha} \right)^2$$

$$B = 2A_1\eta\gamma \sin 2\theta_1 - 2A_1\eta\gamma \cos 2\theta_1 \frac{(\beta-\gamma)\gamma}{\alpha}$$

$$C = (\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} - A_1\eta \cos 2\theta_1 \gamma^2$$

$$W_2 = \int_0^\alpha \int_0^{\frac{\beta}{2\alpha-1}(2x-1)} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x - 2A_1\eta \cos 2\theta_1 y \right] dy dx$$

$$= \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x \right] y - A_1\eta \cos 2\theta_1 y^2 \Big|_0^{\frac{\beta}{2\alpha-1}(2x-1)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \int_0^\alpha \left[(\gamma-\eta) + \frac{\eta^2+2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x \right] y - A_1\eta \cos 2\theta_1 y^2 \Big|_0^{\frac{\beta}{2\alpha-1}(2x-1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \int_0^\alpha \left[(\gamma - \eta + \frac{\eta^2 + 2}{\gamma} + 2A_1\eta \sin 2\theta_1 x) \left(\frac{2\beta x - \beta}{2\alpha - 1} \right) - A_1\eta \cos 2\theta_1 \left(\frac{2\beta x - \beta}{2\alpha - 1} \right)^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \int_0^\alpha (Ax^2 + Bx + C) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \left[\frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx \right]_0^\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2}} \left[\frac{A}{3} \alpha^3 + \frac{B}{2} \alpha^2 + C\alpha \right]
\end{aligned}$$

其中，

$$A = \frac{4A_1\beta\eta \sin 2\theta_1}{2\alpha - 1} + \frac{4A_1\beta\eta \cos 2\theta_1}{(2\alpha - 1)^2}$$

$$B = \frac{2\beta\gamma - 2\beta\eta + \frac{2\beta\eta^2 + 4\beta}{\gamma} - 2A_1\beta\eta \sin 2\theta_1}{2\alpha - 1} + A_1\eta \cos 2\theta_1 \frac{4\beta^2}{(2\alpha - 1)^2}$$

$$C = \frac{-\beta}{2\alpha - 1} (\gamma - \eta + \frac{\eta^2 + 2}{\gamma}) - \frac{A_1\beta^2\eta \cos 2\theta_1}{(2\alpha - 1)^2}$$

當 $\theta = \frac{n\pi}{2}$ 時， $n \in Z$ ， $\theta = 0$ 與 $\theta = \pi$ 時一樣， $\theta = \frac{\pi}{2}$ 與 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 也一樣，所以我們可以一

併討論。而當代值時發現， $\theta = \frac{n\pi}{2}$ 時，會造成 $A_1 < 0$ ，所以不合。將我們正五角柱實驗的

數值 h 帶入上述 2 組 θ ，可得表 8。

$$\text{表 8: } \theta = \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.80h}{0.85 - 0.10h} \right)$$

h	2.2	2.6	3	3.4	3.8
θ	0.70	0.71	0.72	0.74	0.76
A_1	0.11	0.15	0.20	0.30	0.71
$\pi - \theta$	2.44	2.43	2.42	2.41	2.38
A_1	0.11	0.15	0.20	0.30	0.71

當 $h = 2.2$ 、 2.6 、 3 、 3.4 時，最小面積發生在 $\theta = \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.08h}{0.85 - 0.10h} \right)$ ，而有趣的事

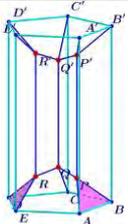
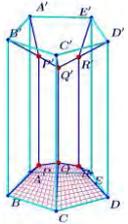
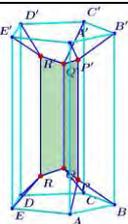
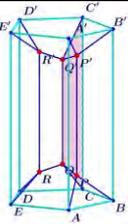
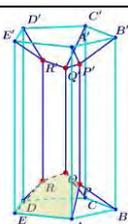
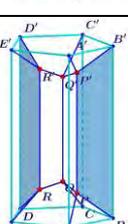
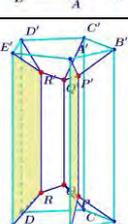
情發生在 $h = 3.4$ 到 $h = 3.8$ 之間，此時皂膜為了維持最低能量也就是保持最小面積，它轉

到 $\theta = \pi - \frac{1}{4} \cos^{-1} \left(\frac{-0.77 + 0.08h}{0.85 - 0.10h} \right)$ 。

接下來我們希望以上述的方法計算正五角柱皂膜 Type II 各部分面積，如表 9。

故正五角柱 Type II 的面積為 $f(h) = 4(S+T) + 2(W+U+X+Y) + V$ 。

表 9：不同高度正五角柱 Type II 面積

h	2.10	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8
	0.74	0.74	0.72	0.71	0.7	0.68
S						
	0.26	0.31	0.29	0.28	0.27	0.26
T						
	0.54	0.53	0.52	0.5	0.49	0.48
$U = (h - \lambda - \eta)\sqrt{\alpha^2 + (\beta - \gamma)^2}$						
	0.36	0.41	0.57	0.74	0.91	1.07
$V = (h - \eta)(\beta_2 - \gamma)$						
	1.08	1.16	1.47	1.78	2.09	2.4
W						
	0.91	0.97	1.22	1.46	1.7	1.95
$X = (h - \lambda)\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2}$						
	1.09	1.16	1.45	1.74	2.03	2.32
$Y = (3h - 2\lambda)\sqrt{(\alpha - 0.5)^2 + \beta^2}$						
$f(h)$	10.48	11.08	12.63	14.2	15.81	17.4

(三) 正五角柱的皂膜形狀與面積的討論

- 對我們來說，這可能是至目前為止最難、最有挑戰性的系統。但我們的詳細理論計算與實驗卻在在顯示出來，它會非常有趣，而且似乎沒有文獻討論過此中的對稱破缺現象。假設只論皂膜的拓樸結構，也就是假設不管模型的高度，都有 Type I 與 Type II 兩種皂膜會出現，當然 Type II 是由 Type I 的結構中，中央正五邊形先變成一點，再變到 Type II，如圖 41，我們也想比較兩種情形的面積和。而在實驗中發現模型高度在 $h = 2.08$ 時，先出現 Type I，再縮成一點，最後張開變成 Type II。

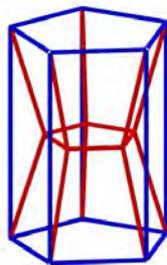


圖 41(a)：相同高度時的 Type I 正五角柱皂膜形狀

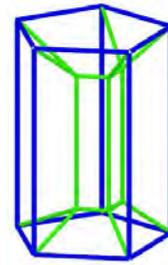


圖 41(b)：相同高度時的 Type II 正五角柱皂膜形狀

- 在圖 42 中，我們將橫坐標放大 5 倍。再以藍色表示 Type I，紅色表示 Type II。Type I 與 Type II 在皂膜實驗中各有 5 個高度，很明顯 Type I 與 Type II 的實驗值各在一條直線上。

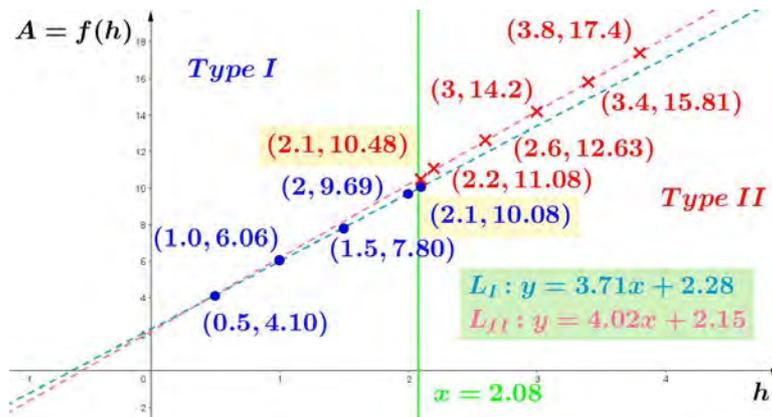


圖 42：不同高度 Type I 模型對應正五角形邊長與最小面積關係圖

因為實際操作時我們不易將模型高度調整至臨界值 2.08，所以我們將高度調整至 2.1。Type I 與 Type II 的迴歸直線分別為 $L_I: y = 2.28 + 3.71x$ 與 $L_{II}: y = 2.15 + 4.02x$ 。當初實驗設計是高度大於 0.5 開始做，而高度為 2.08 時是臨界點。Type I 我們做到 (2.1, 10.48)；而 Type II 我們做到 (2.1, 10.08)。此時 Type II 恆大於 Type I。我們發現一件值得研究的事情，本來面積應該往能量低的 Type I 跑，現在跑到能量較高的 Type II 了。

四、利用薄膜干涉測皂膜厚度

(一) 邦德數的討論

在正五角柱模型 TypeII 中，我們發現皂膜形狀竟然是不對稱圖形，如圖 44。為什麼對稱的正五角柱模型的皂膜形狀是不對稱的？我們利用邦德數來探討。以下定義單位皆為 SI 制， w 為皂膜厚度； L 為系統的特性長度； ρ 為液體的質量密度； g 為當地的重力加速度； γ 為表面張力係數。薄膜中有兩個很接近的表面，從其中一個表面反射的光與另一個表面反射的光相互干涉而產生的現象稱為虹彩，而通常看得到有虹彩的皂膜厚度的數量級為 $w = 10^{-6}$ 。此時我們考慮重力對皂膜的影響與表面張力對皂膜影響的比值數量級為：

$$\frac{\text{weight of soapy film}}{\text{surface tension force}} \approx \frac{wL^2\rho g}{\gamma L} = \frac{wL\rho g}{\gamma} \approx \frac{10^{-6} \times 10^{-1} \times 10^3 \times 10}{70 \times 10^{-3}} \approx 10^{-2}$$

由此可以推測表面張力的影響遠大於重力。但是我們期望能確認皂膜厚度，以便作力圖分析，所以考慮設計薄膜干涉實驗測量皂膜的厚度，而此部分實驗尚在進行中。

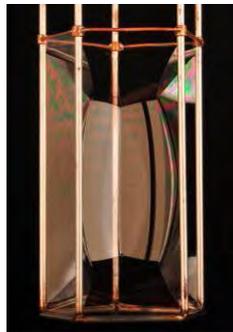


圖 43(a)：
固定高度正五角柱皂膜形狀

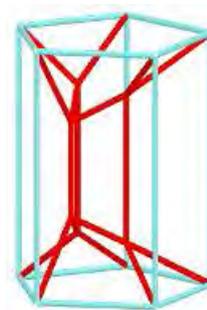


圖 43(b)：
固定高度正五角柱皂膜形狀示意圖

(二) 薄膜干涉實驗設計

實驗設計如下：在光源的選擇上，如果使用不同波長的光源，會使某波長的光產生的暗紋被另一種波長的光產生的亮紋覆蓋，最後無法形成清晰的條紋圖案。又藍光的波長約為紅光的波長的一半，波長較短產生的條紋間隔較密，不易觀察分析，所以我們選擇紅光。我們在暗房裡，使用波長 $\lambda = 632\text{nm}$ 的紅色 LED 光條，垂直模型擺設，並在光條後方墊一張 B4 的白紙反光，如圖 44。



圖 44(a)：薄膜干涉實驗設置圖



圖 44(b)：相對位置示意圖

首先我們用外徑邊長為 $6\text{cm} \times 6\text{cm} \times 32\text{cm}$ ，直徑 0.6cm 的正四角柱的模型，一面浸入肥皂溶液中，拿起來放在兩個正立方體模型上並拍照如圖 44(a)和圖 44(b)。在照相的過程中有設定連拍，我們發現皂膜是在流動的，因此每一個時間點每一個位置皂膜的厚度都不一樣。一般薄膜產生的斜向干涉光程差為 δ ，我們定義折射率為： $n = \frac{v_1}{v_2}$ ，其中 v_1 表光在

真空中的速率， v_2 表光在物質中的速率，且 $\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}$ ， $n_2 > n_1$ ，如圖 45。

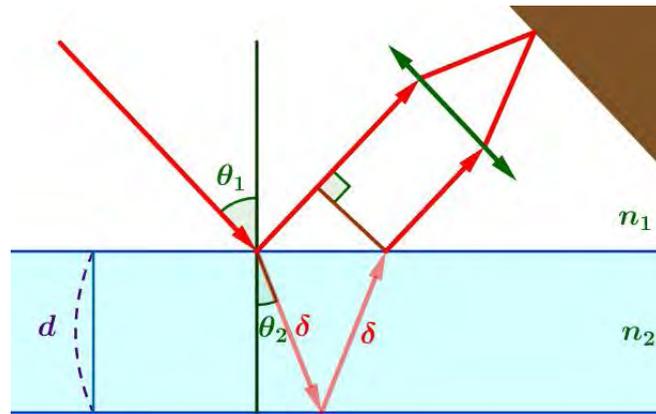


圖 45：薄膜干涉示意圖

以垂直角度討論可得如圖 46。當 $n_2 > n_1$ 時，表面反射與底面反射光的光程差 δ 為 $2dn_2$ ，發生破壞性干涉時 $2dn_2 = n\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}$ ， n 為正整數。因此，當薄膜厚度為連續變化時，相鄰兩條暗紋之間的光程差，我們可以把第一次反射的路徑視為 d_1 ，第二次反射的路徑視為 d_2 ，此時：

$$\begin{aligned}
 2d_2n_2 - 2d_1n_2 &= (n+1)\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} - (n\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}) = \lambda_0 \\
 &\Rightarrow n_2(d_2 - d_1) = \lambda_0 \\
 \Rightarrow d_2 - d_1 &= \frac{\lambda_0}{n_2} = \lambda \quad (\lambda \text{ 為介質中之對應光波長})
 \end{aligned}$$

適合曲線逼近。目前觀察曲線應該是近似二次函數或是指數函數 $y = a \cdot e^{bx} + c$ 等的型式，所以我們將 $Q_1(0, d_0)$ 、 $R_1(0.75, d_0 + \frac{\lambda}{2})$ 、 $S_1(1.29, d_0 + \lambda)$ 、 $T_1(1.74, d_0 + \frac{3\lambda}{2})$ 、 $U_1(2.11, d_0 + 2\lambda)$ 代入可得皂膜厚度的變化曲線方程式。

我們把上述現象畫成立體的示意圖，如圖 49 所示，其中黑色是暗紋，紅色是亮紋。

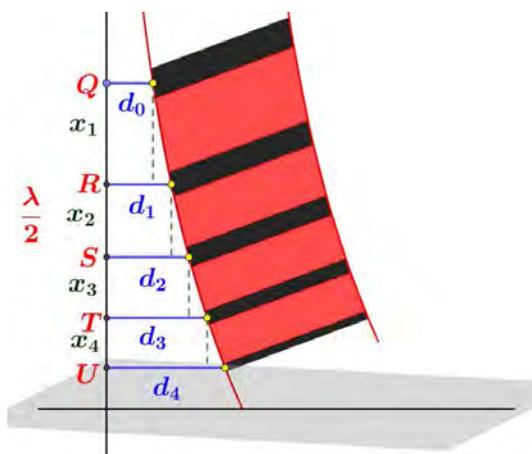
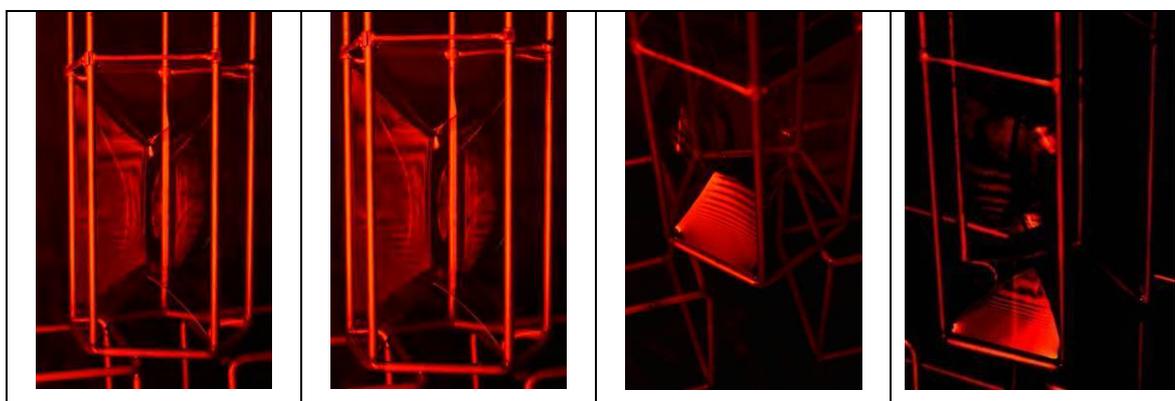


圖 49：皂膜干涉亮暗紋立體示意圖

確定皂膜厚度的基本變化後，接著測量正五角柱形成之皂膜干涉條紋。本來我們以為如同正四角柱將相機用腳架架在固定的角度就可以得到我們要的相片。但是因為正五角柱的皂膜形狀不對稱，也就是每次呈現的面都不一樣(如表 10)！而且因為測面類似梯形部分的皂膜會重複，更增加了我們辨識的困難。每次實驗平均穩定 3 秒鐘左右，要取得相機與 LED 燈條方便觀察的角度非常困難。我們最後用連拍，再將紅色波峰部份增亮，黑色波谷部分減暗，將相片整理在表 10。

表 10：正五角柱皂膜干涉條紋



接著我們開始分析正五角柱的皂膜，如表 11，目前比較清楚的是通過五點的曲面與通過三點的曲面，首先我們從過五點的曲面開始分析。

表 11：過五點曲面干涉暗亮紋

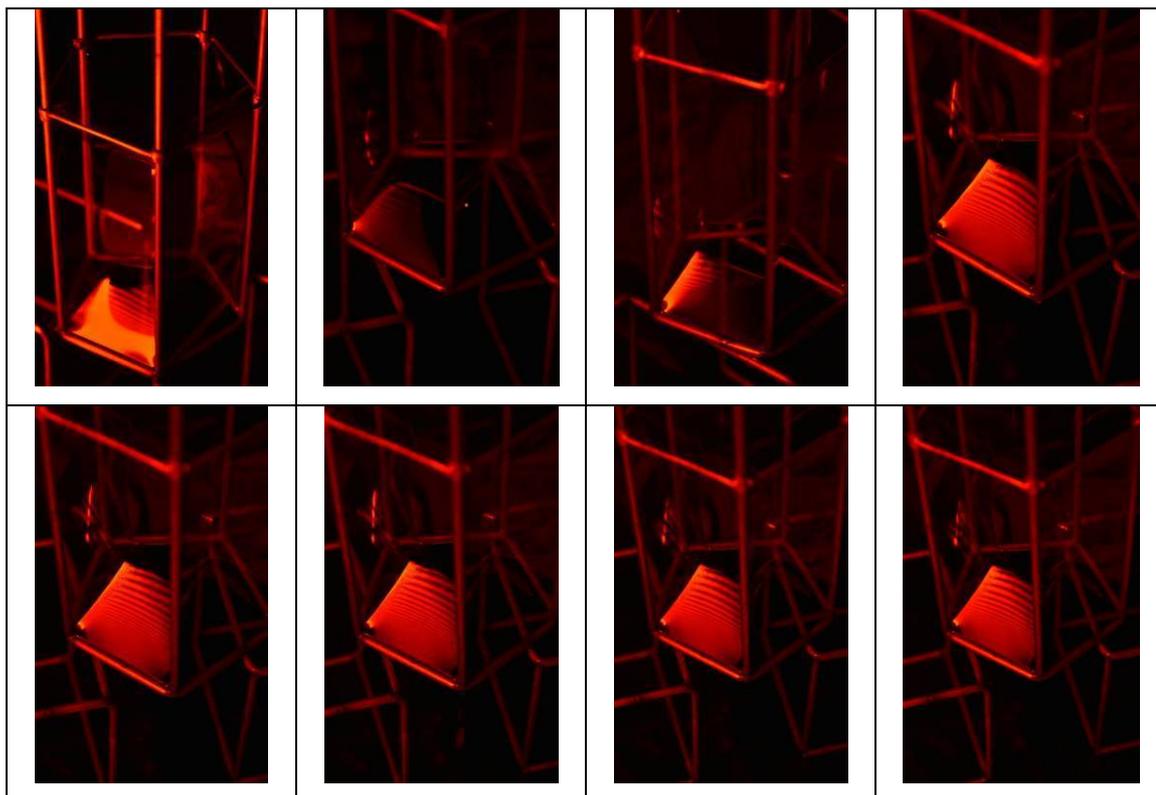


表 12 是我們實驗與計算過程：

表 12：過五點曲面干涉暗亮紋分析

	<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989</p>		<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989</p>
<p>Step 1：選取編號 DSC-1989 照片插入軟體中。</p>		<p>Step 2：設定 ZomIn 參數放大照片</p>	
	<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989 $\overline{AB} = 1$ 單位</p>		<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989 $\overline{AB} = 1$ 單位</p>
<p>Step 3：因為模型邊長為 6 公分，我們在照片上定義 $\overline{AB} = 1$ 單位，即 6 公分</p>		<p>Step 4：在 \overline{AB} 上取一點 P，過 P 作垂線</p>	
	<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989 $\overline{AB} = 1$ 單位</p>		<p>目錄：20170901 照片：DSC - 1989 $\overline{AB} = 1$ 單位 $\overline{M_1M_2} = 0.44$ $\overline{M_2M_3} = 0.35$ $\overline{M_3M_4} = 0.29$</p>
<p>Step 5：在直線上標暗紋的端點</p>		<p>Step 6：取暗紋中點 M_1、M_2、M_3 與 M_4</p>	

得 $y_1 = \overline{M_1M_2} = 0.44\text{cm}$ 、 $y_2 = \overline{M_2M_3} = 0.35\text{cm}$ 與 $y_3 = \overline{M_3M_4} = 0.29\text{cm}$ 。此時發現 $d'_1 - d'_0 = d'_2 - d'_1 = d'_3 - d'_2 = \frac{\lambda}{2}$ ，如圖 50。

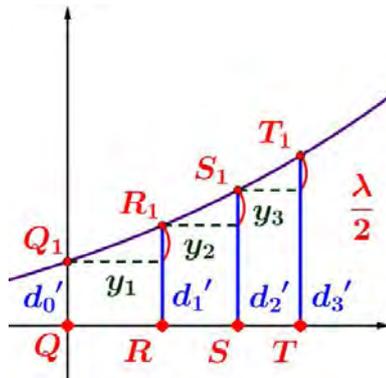


圖 50：5 點所在曲面皂膜某截面厚度

接著我們對過三點的曲面開始分析。在實驗中我們發現，任一片皂膜，上方穩定的較慢，有不均勻的干涉情形，也就是說越靠近下面的部分穩定得越快，如表 13。關於過三點曲面的干涉條紋這部分目前還在分析中。

表 13：過三點曲面干涉條紋



(三) 皂膜厚度討論

1. 在考慮皂膜厚度實驗時，本來有考慮加入甘油讓皂膜更穩定以便拍攝。但由於不同溶質會影響皂膜表面張力特性與厚度，所以沒加入甘油，因此在照相的過程更加困難，未來可加入甘油，並拍攝影片，以便於討論。
2. 在現有的條件下，利用高速連拍紀錄皂膜干涉條紋，進行後續光學分析，藉由相鄰暗紋之光程差，以連續變化歸納出皂膜厚度變化之曲線方程式，未來將可再進一步藉由光學測量討論皂膜前緣厚度，將能更清楚皂膜厚度與流動影響之薄膜形成關

係。

3. 皂膜受到邊緣表面張力影響因素作用，故呈現非平整分布，且流體性質受重力影響，故厚度由上端至下端呈現曲線關係之變化分布，實驗中藉由薄膜干涉之光學量測找出此一皂膜厚度變化關係。而細部皂膜厚度觀測研究部分亦可進一步在未來討論其物理現象可能之因素。但由於此與本作品主要研究方向不同，暫不在此討論。

肆、結論與未來展望 (Conclusions and Prospects)

- 一、找到可調整高度的正三角柱、正四角柱不同高度模型皂膜最小面積之間的關係，並計算其一次近似面積。
- 二、在可調整高度的正五角柱中，這個系統的面積是不易測量的，我們利用迴歸直線減少變數，最後找到測量曲面面積的方法。也就是說：使用平均曲率為 0 的雙曲拋物面，透過旋轉與伸縮，再用最小平方法，找到最接近正五角柱中實際曲面，最後用向量積分，求得其面積。
- 三、我們也做了邊長 3 公分高度 10.3 公分的正六角柱，如圖 51(a)及邊長 3.5 公分與高度 15.3 公分的正七角柱的模型，如圖 51(b)。在實驗中，我們還發現一個現象，以正六角柱為例，一開始，我們將皂膜從水中鉛直拉出並且靜置後，皂膜中平行於底邊的小正六邊形會在模型的 $\frac{1}{3}$ 高處；但是若在拉出後上下翻轉 180° ，則皂膜中的平行於底邊的小正六邊形會位在模型的 $\frac{1}{2}$ 高處，如圖 52(a)，同時在正七角柱中也有相同情形。圖 52(b)。但是在正三角柱、正四角柱以及正五角柱時，並沒有觀察到這個現象。



圖 51(a)



圖 51(b)



圖 52(a)



圖 52(b)

- 旋轉前固定高度正六、七角柱皂膜形狀 旋轉後固定高度正六、七角柱皂膜形狀
- 四、正三角柱與正四角柱皂膜形狀是對稱的，而正五角柱、正六角柱與正七角柱當模型高度超過某個臨界值時，皂膜形狀是不對稱的。
 - 五、本研究創新之處在於以數學動態軟體模擬並解析物理實驗，以更精準地計算進行皂膜形成的力變化圖形分析。並解釋先前數學理論研究[3]與物理實驗及現象之間的差異。同時也更微觀地驗證皂膜形成能量平衡原理。

- 六、目前我們嘗試使用光軸(optical axis)與水晶黏土製作更精準的模型，或以 CNC 製作滑動式模型卡榫，以便調動高度時會更順暢。
- 七、從皂膜溶液中將模型拉出來後，每一次皂膜的總重量是不一樣的，所以算出來以後，是否會因為多了一個變項(重量)，因此沒有辦法對應到力學跟總能量的關係？要如何設計更好的實驗解決這個誤差，是我們下一步要思考的。
- 八、關於皂膜厚度部分，因為皂膜是流動的，厚度當然不平均，起初是因為正五角柱 Type II 的皂膜不對稱，所以考慮設計實驗，討論皂膜厚度，進而畫出力圖，分析皂膜形狀。目前我們在考慮牛頓環的實驗等等，只要找出前述 d_0 ，我們就可以算出對應皂膜厚度與厚度曲線方程式。

伍、參考文獻 (References)

- [1] David Lavett(1996).*Demonstration Science with Soap Films*
- [2] 周昕諭(2016)。正多面體之皂膜最小表面能之探討。臺灣國際科學展覽會物理與天文學科三等獎。
- [3] 黃筠涵、康婷雅(2010)。Wonderful Bubbles-不同立體框架與形成之肥皂膜的關係。臺灣國際科學展覽會物理與天文學科三等獎。
- [4] 李瑄儀、許庭瑄、龔治銓(2011)。台北市 100 年度中等學校學生科學研究獎助計畫物理科一等獎。
- [5] 方姿文、林定軒(2014)。當柏拉圖遇上史坦納。第 47 屆臺北市中小學科學展覽會數學科佳作。
- [6] 陳竑廷、陳品儒(2017)正多角柱內皂膜的形狀與對稱性破缺。第 50 屆臺北市中小學科學展覽會物理與天文學科特優。
- [7] 陳竑廷、陳品儒(2017)正多角柱內皂膜的形狀與對稱性破缺。第 57 屆全國科展物理與天文學科佳作。
- [8] Paul G. Hewitt(陳可崗譯，2008)。觀念物理 IV，台北市：天下文化。

【評語】 160019

正多角形內皂膜的形與對稱性破缺在數學理論及演算上不易，皂模上的發生的不對稱觀察很特別，應附予理論上之說明。

很認真的工作，繼續深究，應有突破性的理解。