

2018 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 100013

參展科別 工程學

作品名稱 A New Approach to Recycling
Aluminum/Iron Cans

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 國立新竹高級中學

指導教師 洪在明

作者姓名 李致宇

關鍵詞 鐵鋁罐回收、摺痕、扭轉變形

作者簡介



大家好，我是新竹高中三年級學生李致宇，這次是我第二次參與台灣國際科展。對於能夠參與如此盛大的科學饗宴，實屬本人之榮幸。我也期許自己能夠在這樣的場合中，與其他來自全臺各地，甚至是全球的優秀青年科學家們有所切磋，互相砥礪，成為能夠改變這個社會，讓人類生活更加美好的人。對我來說，這次科展是高中專題研究過程的休止符，但同時，我也希望這是開啟我人生新一篇章的一個契機，共勉之。

摘要

本次研究提供一個更安全、效率、節省空間的回收鐵鋁罐新方法 — 扭轉。藉由預期圓筒在扭轉過程，對於固定半徑和長度會自發產生的摺痕數，事先在表面壓痕，一旦喝完飲料，只要輕輕一扭，馬上能將罐子安全地變扁，不用擔心割到手或罐子在踩壓時飛噴傷人。

我們系統地從實驗觀察和歸納不同半徑、長度、厚度、材料及拉伸力對於圓筒摺痕數目(N)和偏斜角(α)的影響，並從幾何和能量考量，推導出符合實驗結果的簡單公式，得到不同參數下的擬合曲線，用來實際製作各種材料的回收模型。

由於日常容器有其他形體，我們接下來推廣到兩端半徑不同的圓筒和正多角柱。藉由實驗數據及修正圓筒理論，得到較廣義的規律摺痕理論公式，預期同樣能夠利用此公式來設計摺痕；正多角柱與圓筒類似，在扭轉後產生規律的摺痕，只是數目和種類需要修正，因此也能夠利用扭轉達到壓縮的效果。

Abstract

Our study provides a safer and more efficient and economic way to recycle Aluminum/Iron cans via twisting. We demonstrate this by twisting a thin cylinder. A periodic and ordered array of creases emerge, whose number turns out to depend only on the ratio of radius and cylinder length. The fact that the crease number is insensitive to the material property and thickness allows our fitting function to predict and prepare pre-pressed lines onto various sizes of can. Once the beverage is consumed, an easy twist will trigger the creases to emerge along these lines and press the can into a flat metal chunk, ready for recycling.

In eye of the existence of other shapes in daily utensils, we also studied and obtained similar properties for cones, triangular prisms, pentagonal pillars, etc. Overall, their crease number follows the similar pattern and is predictable from our empirical formula. Therefore, we can utilize the same technique by twisting them to achieve a safer and more efficient and economic way of recycling.

壹、研究動機

夏日午後，我們總會來一瓶清涼的飲料，然而某次在喝完鐵鋁罐飲料後，正用手將其壓扁回收時，意外被突出的尖銳處割傷。這使我好奇有沒有可能在兼顧收納性的狀況下，設計出一種回收時更安全的鐵鋁罐，以達成環保及安全雙重需求的可能性？

確定目標之後，我們開始利用手邊的材料進行簡單的實驗，首先利用「紙管」模擬鐵鋁罐，將兩邊利用膠帶黏貼固定後，以壓縮或扭轉等方式試著節省其空間；從多次的實驗中發現，「壓縮」結果無法百分百重複，但是「扭轉」後的紙管總會出現「規律」三角形摺痕，並且非常柔順安全地被壓扁。

於是，我們想到可以利用在鐵鋁罐上，事先設計好摺痕，就能在回收時，輕輕一扭，便將罐子沿著摺痕壓縮，完全不用擔心被突出的尖端割傷，也比傳統的用手或腳去壓縮要來得省力，且更節省空間。在了解其應用潛力後，我們著手進行相關實驗，並探討摺痕和材料、厚度等參數的關聯性，藉以得到更一般化的結果，來改良鐵鋁罐等飲料容器，甚至是生活中其他柱狀器皿的收納。

貳、研究目的

由於我們希望將「扭轉」應用於回收鐵鋁罐上，因此必須了解扭轉產生的圖形、摺痕狀態等性質；同時，我們也期盼能夠推廣至不同形體，於是進行了以下的實驗目的探討：

一、探討扭圓筒摺痕分佈：

(一)檢視不同實驗參數與**摺痕數**之關係：

- 1.半徑長度比。
- 2.軸向拉伸力。
- 3.材質(紙管、銅管、鋁箔管與塑膠管)。
- 4.厚度(紙管、鋁箔管)。

(二)分析不同實驗參數與**凹痕偏斜角(α)**之關係：

- 1.半徑長度比。
- 2.軸向拉伸力。

二、建構理論描述圓筒實驗參數與摺痕數、凹痕偏斜角(α)的關係。

三、記錄扭轉過程之扭矩及扭轉角度以量測過程中所需之能量。

四、檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析：

(一)紙管幾何(半徑與長度比, Rav/w)與摺痕數之關係。

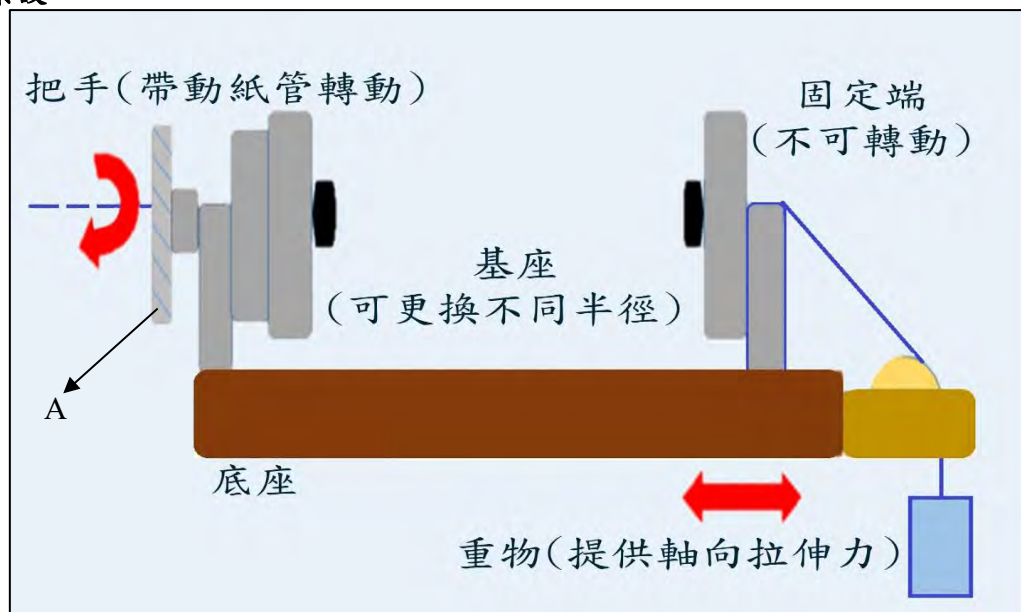
五、推廣圓筒理論至兩端不同半徑之大小管摺痕數與半徑長度比之關係。

六、檢視正 m 角柱($m=3,4,5,6$)摺痕數與半徑長度比關係。

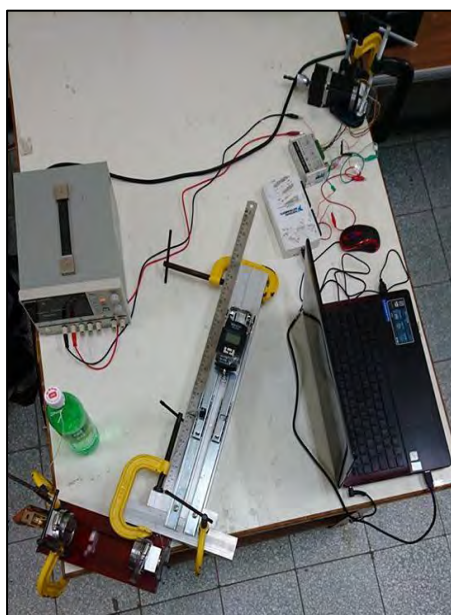
七、描述正 m 角柱($m=3,4,5,6$)摺痕數與半徑長度比關係之現象。

參、研究設備及器材

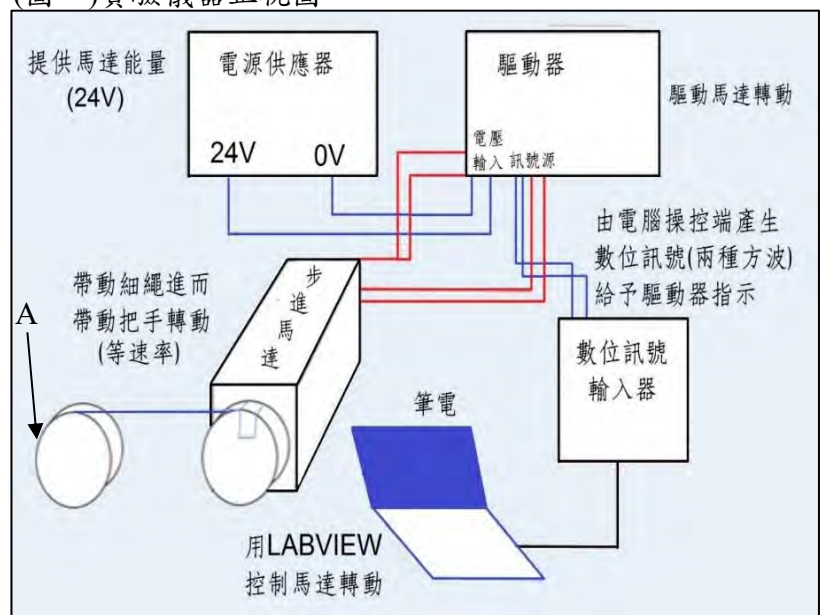
一、實驗架設：



(圖一)實驗儀器正視圖



(圖二)儀器架設全貌圖



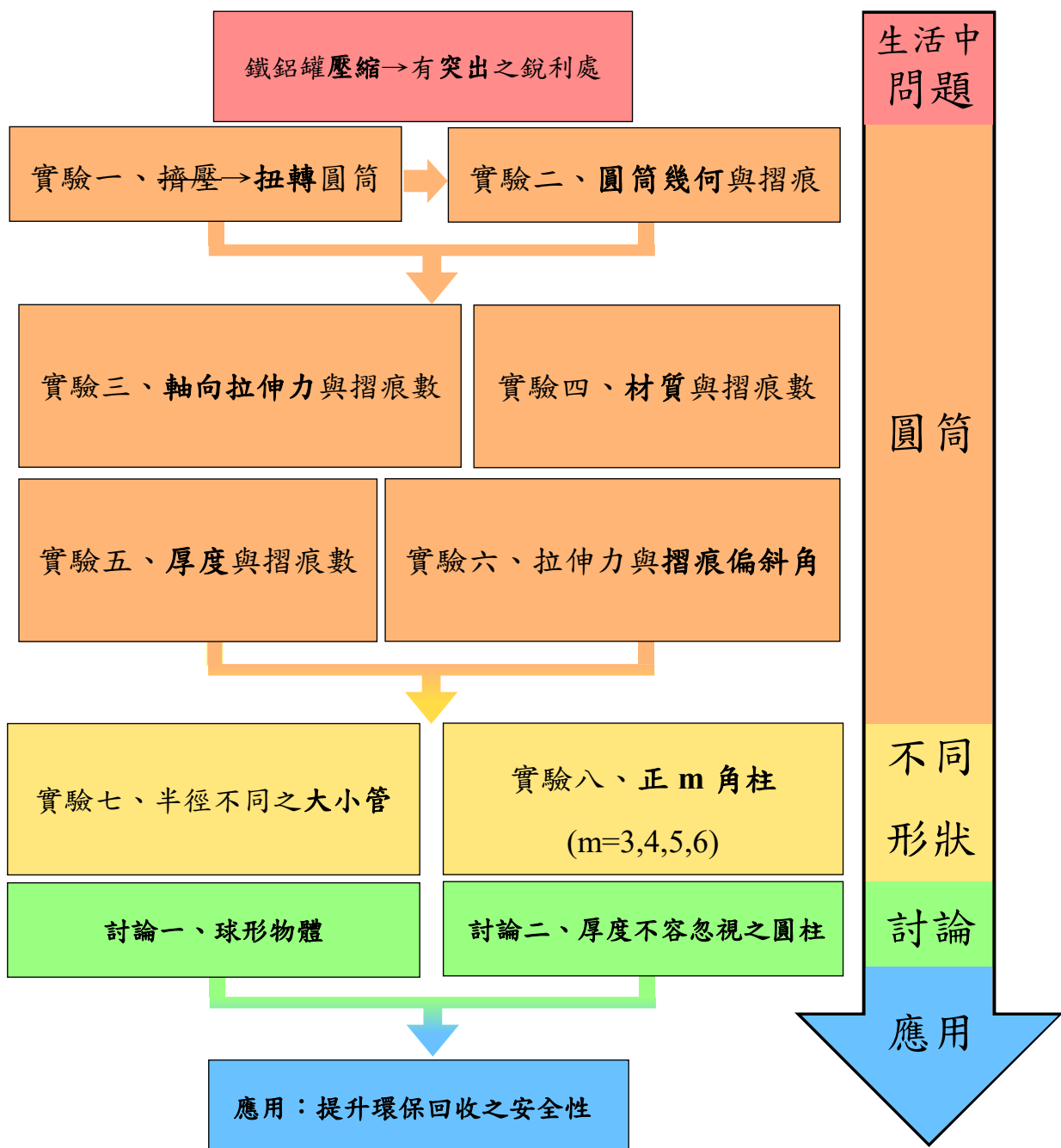
(圖三)儀器架設示意圖，圖一和圖三的 A 構造相同

二、實驗器材：

- (一)釣魚線。(二)針車油。(三)直鐵尺。(四)G型夾。(五)游標尺。(六)軌道(含鋁材)。
- (七)A4紙、剪刀、膠帶。(八)鐵束環。(九)拉力秤。(十)扭轉儀器。(十一)電子天平。
- (十二)電源供應器。(十三)NI-DAQ USB-6211。(十四)筆記型電腦(內安裝 LABVIEW)。
- (十五)步進馬達與驅動器。

肆、研究過程與方法

一、實驗架構及流程圖：



二、實驗設計：

(一)實驗一：探討扭圓筒摺痕分佈

實驗目的：觀察扭轉圓筒產生之摺痕，記錄摺痕數及偏斜角，更換不同實驗參數(軸向拉伸力、材質、厚度)，記錄它們對圓筒摺痕狀態之影響，並以幾何及能量理論解釋之。

實驗步驟：

1. 半徑長度比與摺痕數、偏斜角：

- (1)在(圖一)基座上用鐵束環鎖緊紙管，測量兩端距離後，環繞固定另一端。
- (2)將步進馬達、電源供應器、驅動器、數位訊號產生器及電腦相連接。
- (3)將(圖一)把手以細繩連接步進馬達，並利用 LabView 程式操控步進馬達。
- (4)紙張產生摺痕後，將其拆下更換，記錄摺痕數及偏斜角，重複步驟(1)至(3)。

2. 軸向拉伸力與摺痕數、偏斜角：

- (1)重複實驗 1. 步驟(1)至(4)，並增減(圖一)重物之質量以改變軸向拉伸力。

3. 材質與摺痕數：

- (1)重複實驗 1. 步驟(1)至(4)，並將紙張依序更換至塑膠、鋁箔、銅片等材料。

4. 厚度與摺痕數：

- (1)重複實驗 1. 步驟(1)至(4)，並依序更改紙張厚度至 0.09、0.19、0.24 毫米。

(二)實驗二：記錄扭轉過程之扭矩及扭轉角度以量測過程中所需之能量

實驗目的：藉量測過程中所需之能量，驗證幾何、能量理論所推論摺痕數之正確性。

實驗步驟：

1. 在(圖一)基座上用鐵束環鎖緊紙管，測量兩端距離後，環繞固定另一端。
2. 將拉力秤、步進馬達、電源供應器、驅動器和數位訊號產生器聯結到電腦。
3. 將(圖一)把手以細繩連接拉力秤及步進馬達，並利用 LabView 程式操控步進馬達。
4. 讀取拉力秤位置，每隔 0.5 秒停止程式以記錄其讀數並觀察紙管是否有摺痕產生。
5. 記錄每一位置之力與位移，待紙張產生摺痕後，拆下更換，重複步驟(1)至(4)。

(三)實驗三：檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析

實驗目的：觀察大小管其摺痕分布與圓筒之關聯性及差異，並建構理論解釋之。

實驗步驟：

1. 裝上兩端不同半徑之基座，並用鐵束環鎖緊大小管，測量兩端距離後，環繞固定另一端。
2. 將步進馬達、電源供應器、驅動器、數位訊號產生器及電腦相連接。
3. 將(圖一)把手以細繩連接步進馬達，並利用 LabView 程式操控步進馬達。
4. 紙張產生摺痕後，將其拆下更換，記錄摺痕數，重複步驟(1)至(3)。

(四)實驗四：檢視正 m 角柱($m=3,4,5,6$)摺痕數與半徑長度比關係

實驗目的：由圓形底面之立體構造更換成 m 角形之角柱，並觀察其摺痕分布與圓筒之關聯性及差異，並加以建構理論解釋之。

實驗步驟：

1. 裝上正 m 邊形之基座，並用膠帶黏貼角柱，測量兩端距離後，環繞固定另一端。
2. 將步進馬達、電源供應器、驅動器、數位訊號產生器及電腦相連接。
3. 將(圖一)把手以細繩連接步進馬達，並利用 LabView 程式操控步進馬達。
4. 紙張產生摺痕後，將其拆下更換，記錄摺痕數，重複步驟(1)至(3)。

(五)討論一：探討球形物體之摺痕數及型態

實驗目的：藉由扭轉圓球兩端固定緯度，探討有曲率之曲面與摺痕分布狀態之關聯。

實驗步驟：

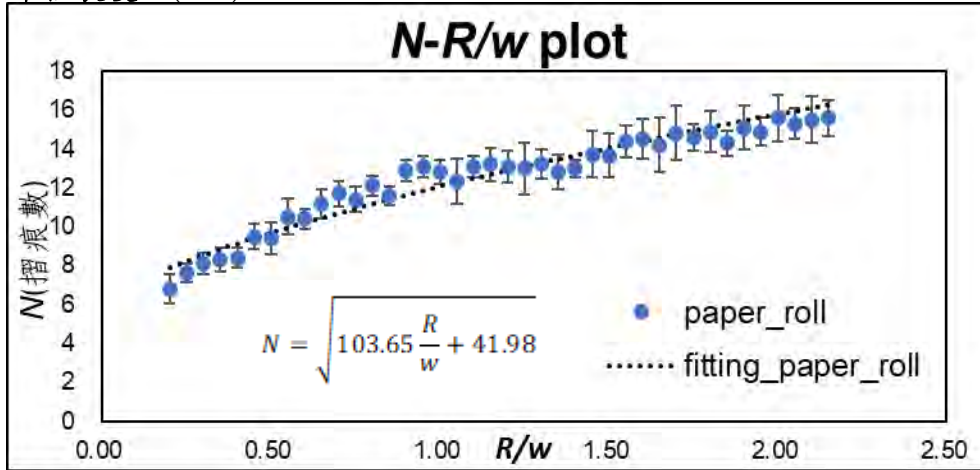
1. 裝上兩圓型基座(半徑任選)，將圓球依基座之半徑剪開特定緯度後套上基座，並利用鐵束環固定兩端後，測量兩端距離。
2. 將步進馬達、電源供應器、驅動器、數位訊號產生器及電腦相連接。
3. 將(圖一)把手以細繩連接步進馬達，並利用 LabView 程式操控步進馬達。
4. 圓球產生摺痕後，將其拆下更換，拍照記錄摺痕分布狀態，重複步驟(1)至(3)。

伍、研究結果

一、探討扭圓筒摺痕分佈：

(一)檢視不同實驗參數與摺痕數之關係：

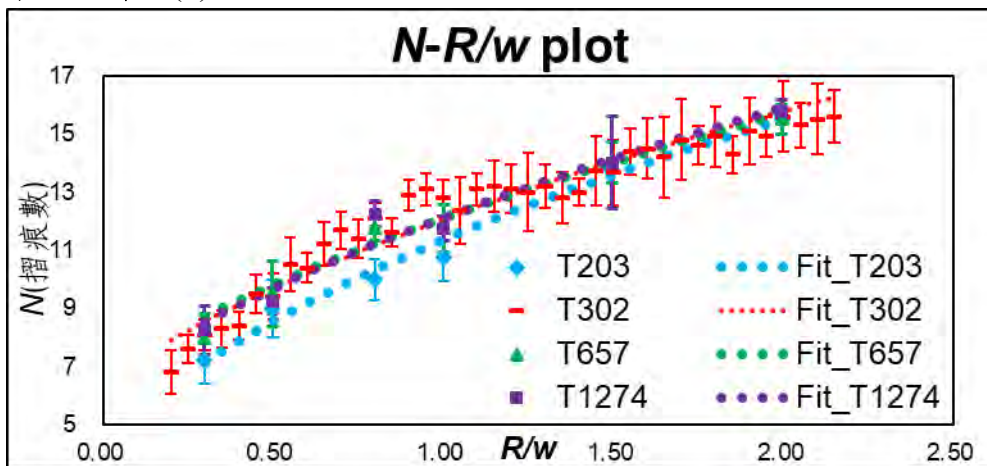
1.半徑長度比(R/w)。



(圖四)紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖藍點為紙管 $R/w=0.20$ 到 2.15，以 0.05 為間距之四十個數據點。黑色虛線($N = \sqrt{103.65 \frac{R}{w} + 41.98}$)為迴歸曲線。摺痕數(N)整體隨紙管半徑長度比(R/w)增加而遞增，最佳迴歸曲線為凹向下之乘冪關係，用以擬合 N 隨 R/w 的趨勢。為了方便研究，後方實驗將 R/w 從 0.20 到 2.15 取六(或十)份，分別為(0.20),0.30,(0.40), 0.50, 0.80, 1.00,(1.20), 1.50,(1.80), 2.00。

2.軸向拉伸力(T)。



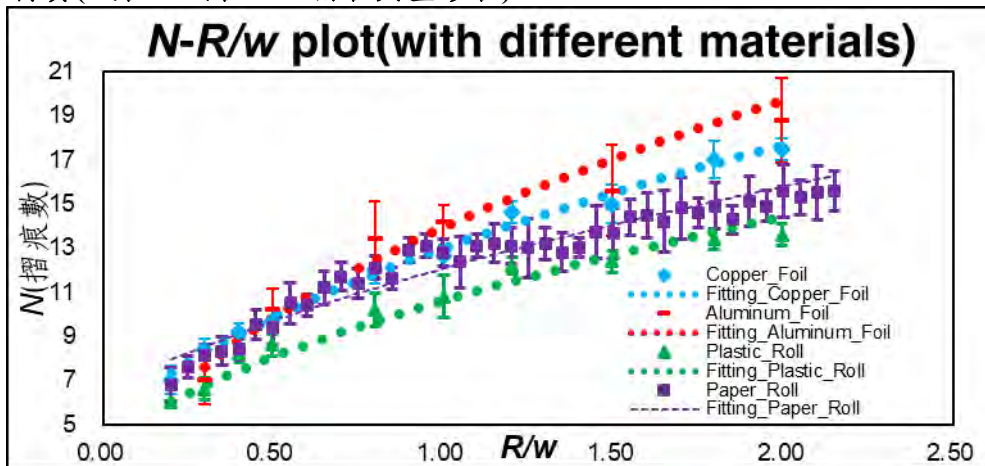
(圖五)不同軸向拉伸力之紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

藍色菱形點為軸向拉伸力 203 克重之數據，紅色橫線、綠色三角形與紫色方形點則分別使用 302、657 與 1274 克重，其對應之虛線($N = \sqrt{111.74 \frac{R}{w} + 17.33}$ 、 $\sqrt{103.65 \frac{R}{w} + 41.98}$ 、

$\sqrt{100.40 \frac{R}{w} + 46.02}$ 、 $\sqrt{106.19 \frac{R}{w} + 40.68}$ 為迴歸曲線。隨著軸向拉伸力(T)增加， N 會些微增加。

根據物理因次分析，紙管 R/w 與 N 皆沒有單位，然而 T 的單位為牛頓，由此猜測若 T 與 N 有關聯，楊氏模量(E)和薄膜厚度(t)很自然需要被考慮進來，並且它們相對的冪次也可以透過物理因次分析被唯一決定。

3. 材質(紙管、銅管、鋁箔管與塑膠管)。



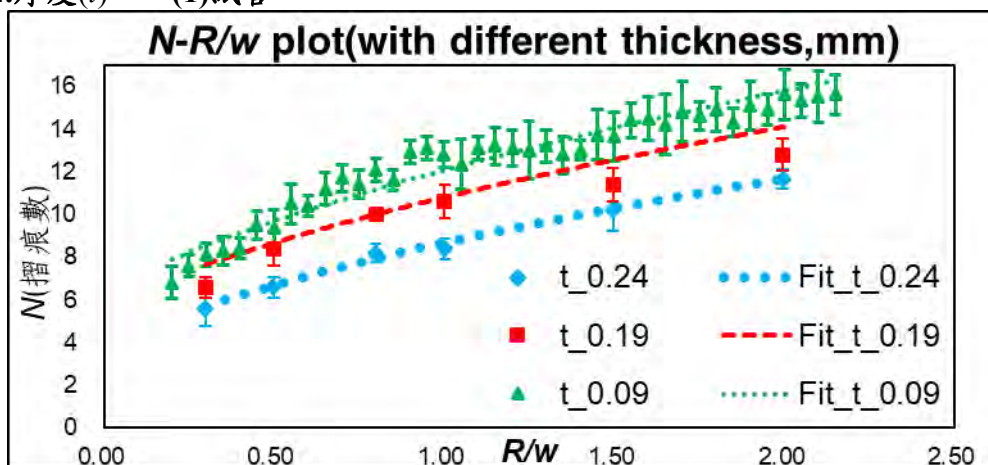
(圖六)紙管、銅管、鋁箔管和塑膠管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖實驗皆在拉伸力 302 克重下進行，藍色菱形、紅色橫線、綠色三角形與紫色方形分別為銅管、鋁箔管、塑膠管與紙管，其對應之虛線

$(N = \sqrt{143.66 \frac{R}{w} + 24.92}$ 、 $\sqrt{194.25 \frac{R}{w} - 0.31}$ 、 $\sqrt{95.50 \frac{R}{w} + 16.92}$ 、 $\sqrt{103.65 \frac{R}{w} + 41.98}$) 為迴歸曲線。從圖六，可以歸納銅片、鋁箔管、塑膠管之

$N-R/w$ 圖形，大致與實驗一之趨勢相同，因此推論材質僅為修正項。然而，對於相同 R/w ，不同材質之 N 大致滿足：鋁箔管 > 銅片管 > 紙管 > 塑膠管。由此推測除了楊氏模量外，材料的塑性程度也會些微影響紙筒的扭轉性質。

4. 厚度(t)——(1)紙管。

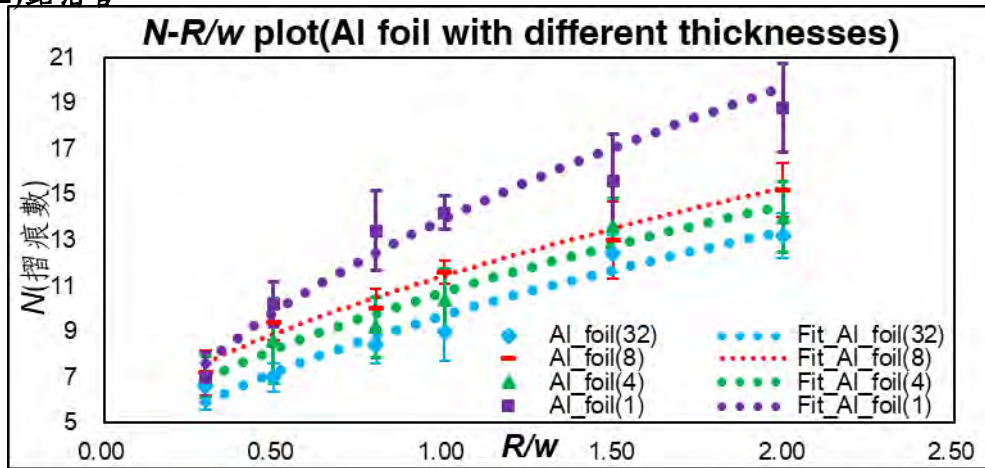


(圖七)不同厚度之紙管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖藍色菱形、紅色方形與綠色三角分別為拉伸力 302 克重的紙管厚度(毫米)0.24、0.19 及 0.09，對應虛線($N = \sqrt{61.05 \frac{R}{w} + 14.14}$ 、 $\sqrt{82.63 \frac{R}{w} + 33.95}$ 、 $\sqrt{103.65 \frac{R}{w} + 41.98}$)為迴歸曲線。

當 t 增加，相同 R/w 的 N 會下降，就好比影印紙比起厚紙板容易皺，也皺的嚴重，因此圓筒在 t 較大時，傾向 N 較少的現象是可以預期的；經由理論及物理因次分析，我們推斷 t 可能會以其倒數乘冪之形式影響 N 。另外，因為 N 無物理因次，不可能僅跟 t 有關，材料性質 E 及 T 一定得一起被考慮。

(2) 鋁箔管。



(圖八)不同厚度之鋁箔管半徑、長度比值與摺痕數關係圖

菱形(藍)、橫線(紅)、三角(綠)與方形(紫)為拉伸力 302 克重鋁箔厚度(層)32,8,4,1，對應虛線($N = \sqrt{85.27 \frac{R}{w} + 9.25}$ 、 $\sqrt{103.46 \frac{R}{w} + 27.59}$ 、 $\sqrt{95.97 \frac{R}{w} + 19.44}$ 、 $\sqrt{194.25 \frac{R}{w} - 0.31}$)為迴歸曲線。

圖八呈現與圖七相同的趨勢，但在厚度相近(8 層鋁箔管(0.1 毫米)與 0.09 毫米之紙管)、 R/w 相同下，紙管與鋁箔管的 N 及整體趨勢並不相同。結合實驗二之結果，我們推測這是由於兩者的 E 不同，導致在相似幾何條件下，得到不同的 N 。對於相同的 R/w ，圖形趨勢皆隨著 t 增加， N 下降，這點於紙管與鋁箔管皆符合。

(3) 歸納圓筒(塑膠管、鋁箔管)之厚度與摺痕數之關係。

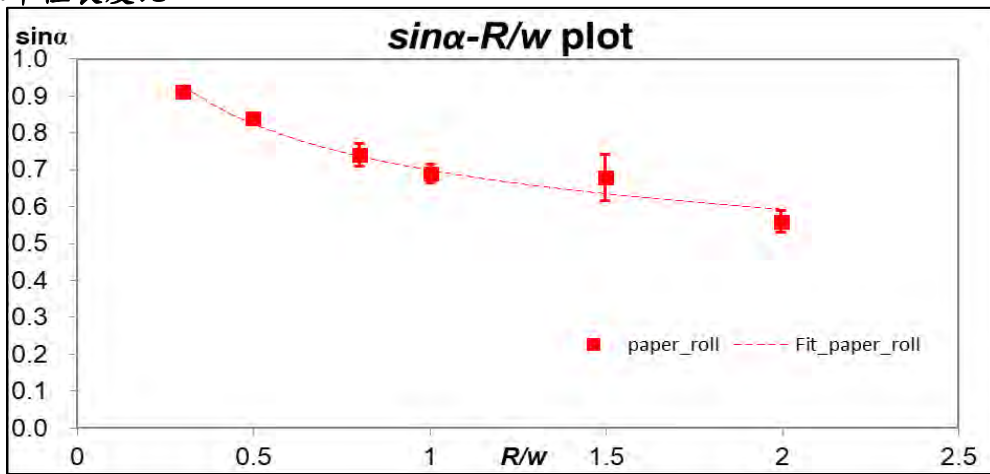
藉由圖五、圖七及圖八觀察到， T (尺度較小)及 t (尺度較大)皆會些微影響 N ，可視為先前理論的修正。因 N 無因次，根號內影響每一項修正項也必須無因次；考量楊氏模量(E)=正向應力(σ ，因次為 $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$ ，此處為 T 除以 t 平方)/正向應變(ε ，因次為 0)，並由因次分析，推測 t 應為平方，亦即後者對於 N 的影響應該比前者(T)較為靈敏。

因 R/w 對 N 影響遠大於厚度、楊氏模量或拉伸力，因此 $\left(\frac{T}{Et^2}\right)$ 可視為微小的修正項加在原

公式後頭。至於為何對相同 R/w ，不同材質的 N 大致滿足：鋁箔管 > 銅片管 > 紙管 > 塑膠管？理解方式如下：首先， E 和 t 是以 $\frac{1}{Et^2}$ 關係進到 N 的公式。銅片、鋁箔、塑膠、紙管的 E 大致為 100:50:1:0.2；厚度為 1:0.8:0.5:0.2，因此 $\frac{1}{Et^2}$ 滿足 0.01:0.31:4:12.5。接著，由於塑膠和紙管的塑性較銅片和鋁箔明顯，因此容易變形而額外增長，根據 $N(\frac{R}{w})$ 的遞增趨勢， w 等效變長會使 N 變少，綜合兩者考量， $\frac{1}{Et^2}$ 的比例 0.01:0.31:4:12.5 扣除塑性所減少的 N ，變成 0.01:0.31:0.005:0.007，亦即 N 的數目依序是鋁箔最多，其次為銅片、紙管和塑膠。

(二)分析不同實驗參數與凹痕偏斜角(α)之關係：

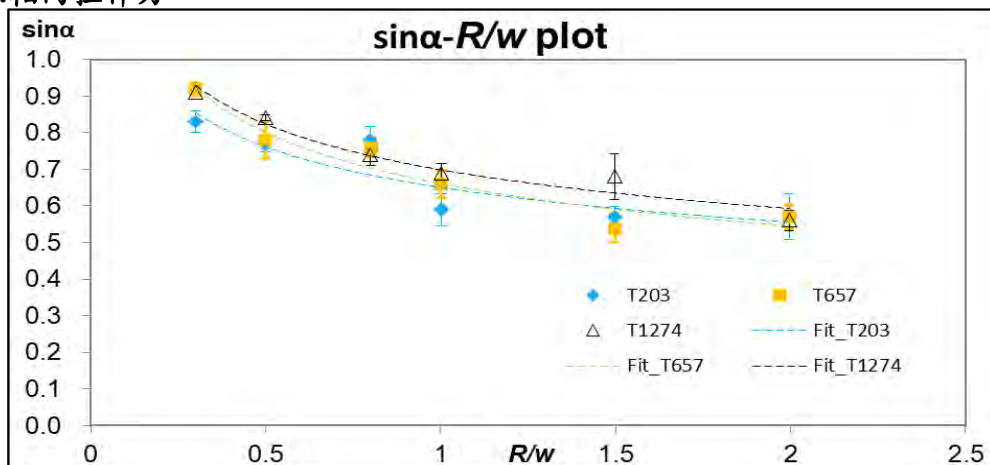
1.半徑長度比。



(圖九)紙管半徑、長度比值與凹痕偏斜角(α)關係圖

紅色方塊及虛線為六個特定紙管($R/w=0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0$)之數據及迴歸曲線。圖九中，凹痕偏斜角正弦值($\sin\alpha$)隨著半徑長度比(R/w)之上升而下降，卻僅能看出 $\sin\alpha-R/w$ 之關係可能為乘冪、對數或線性；必須透過幾何分析，才能唯一決定為： $\sin\alpha \approx \sqrt{\frac{w}{2R}} \Rightarrow \frac{R}{w} \propto (\sin\alpha)^{-2}$ 。

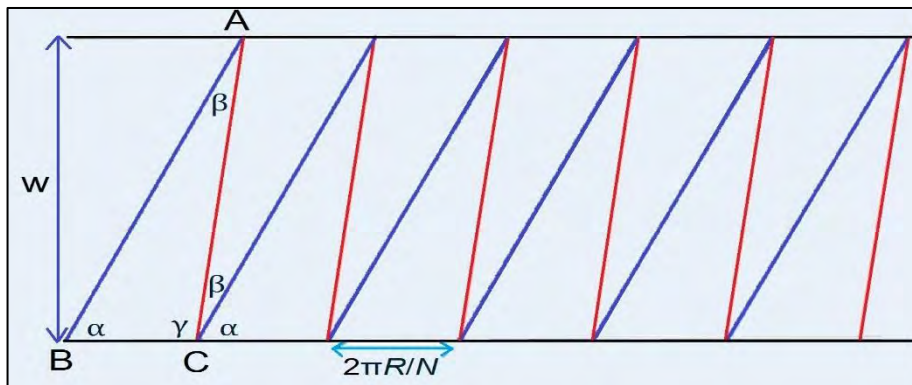
2.軸向拉伸力。



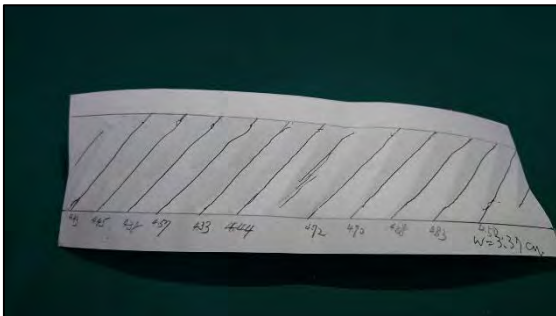
(圖十)紙管半徑、長度比值與凹痕偏斜角正弦值關係圖

上圖之藍色方塊點及虛線為軸向拉伸力(T)203 克重之數據及迴歸曲線、黃色方形點及虛線為 657 克重、黑色三角形點及虛線則為 1274 克重。由圖十，可以歸納出 T 並不影響整體圖形走向，且隨著 T 的增加， $\sin\alpha$ 會略為上升。另外，由圖中之三條迴歸曲線可以推論 T 幾乎不影響圖形之走向，若以物理因次觀點去推測， T (單位為克重，物理因次為 $[M][L][T]^{-2}$) 比起紙管 R/w (沒有單位，物理因次為 0) 對於 $\sin\alpha$ (沒有單位，物理因次為 0) 之關聯性應該較低，因此我們便不針對凹痕偏斜角進行材質與厚度探討。

二、建構理論描述圓筒實驗參數與摺痕數、凹痕偏斜角(α)的關係。



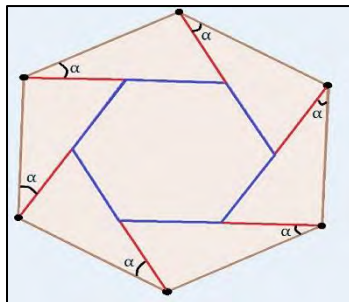
(圖十一)幾何模型(藍色為凹痕、紅色為凸痕)



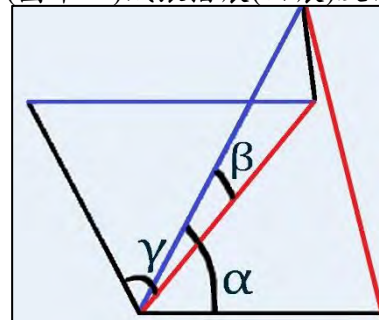
(圖十二)紙張摺痕(凹痕)正面



(圖十三)紙張摺痕(凹痕)反面



(圖十四)紙管產生正多邊形之平面結構



(圖十五)正 N 邊形之平面圖

$$\text{由幾何關係可得知：} \beta = \frac{\pi}{N} - (1) ; \quad \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \approx \sin^{-1} \frac{w}{2R} - \frac{\pi}{2N} - (2)$$

從能量觀點，我們推測外力對摺痕做功 W 與摺痕數(N)、摺痕長成正比，並預期需要另一個會隨 N 增加而減小的功，來和前者制衡。當紙筒兩端從圓形變成正多邊形，曲線被壓成

直線造成附近紙面出現挫曲(buckling)，兩端凹痕重疊，可視為它們的交互作用；顯然紙筒越短，交互位能應當增加，且邊長越大，凹痕也越明顯，使交互位能加強。綜合這些理由能推出下式：

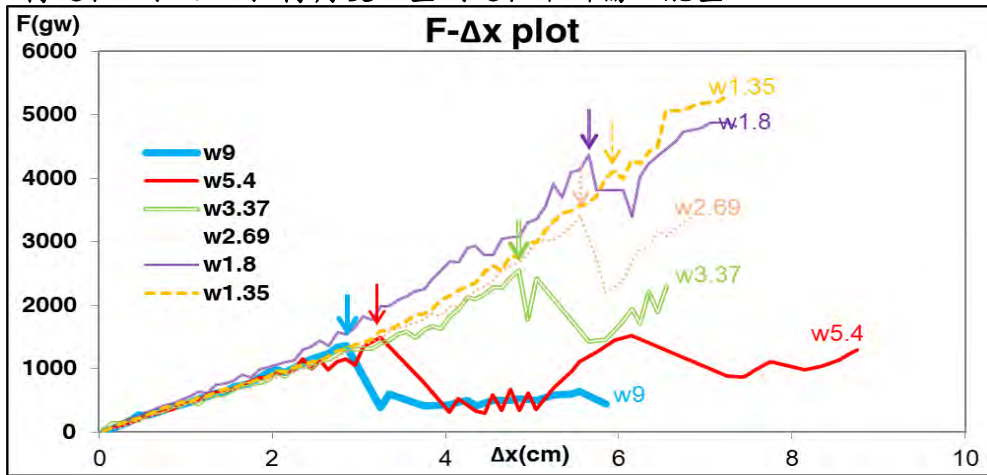
$$W = N\varepsilon \left[\frac{w}{\sin \alpha} + \frac{w}{\sin \gamma} \right] + \eta N \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \frac{\sin \alpha}{w} - (3)$$

並藉 W 對 N 微分為零(能量最低)：

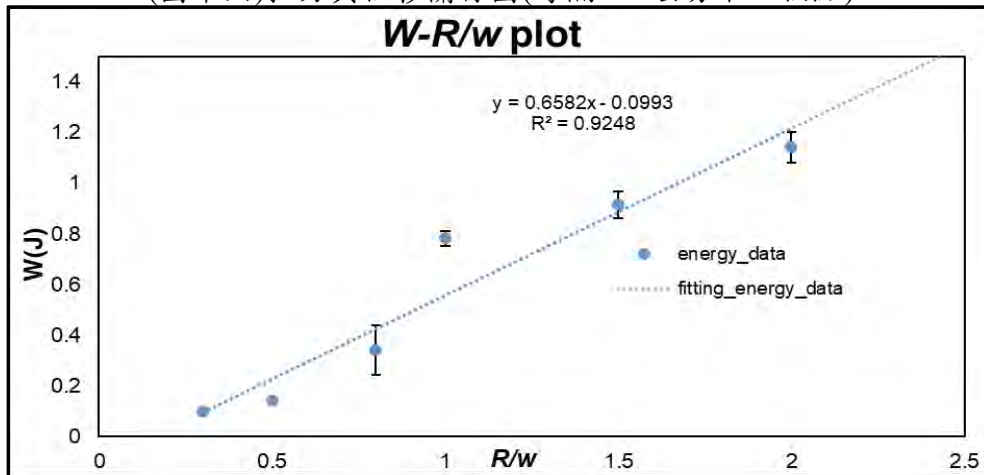
$$N^* = \pi \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) \left(\frac{R}{w} \right) - \frac{1}{8}} - (4)$$

推論出 $N-R/w$ 圖應為「嚴格遞增」且「凹向下」。

三、紀錄扭轉過程之扭矩及扭轉角度以量測過程中所需之能量。



(圖十六)扭力與位移關係圖(每隔 0.1 公分取一個點)

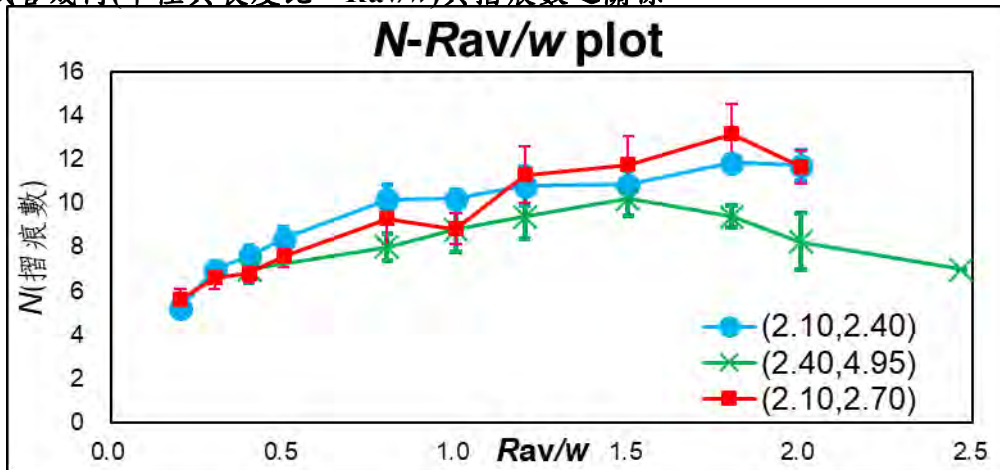


(圖十七)能量與半徑長度比關係圖

圖十六中，紙管長度為 9.00 公分($R/w=0.3$)、5.40 (0.5)、3.37 (0.8)、2.69 (1.0)、1.80 (1.5)、1.35 (2.0)之扭力與位移關係圖分別為實線(藍)、實線(紅)、實線(綠)、虛線(米色)、實線(紫)及虛線(黃)，而對應之箭頭代表表面產生全部摺痕及拉力秤讀數最大值；座標軸橫軸為拉力秤之位移、縱軸為拉力秤之力讀數；藉由積分運算，得到圖十七、能量 - R/w 圖，並發現其趨勢大致呈現一斜直線，除了推測當半徑長度比(R/w)越大，所施予外力做功越大外，還能將測得之能量，代回前方所推測之能量理論，發現與公式吻合，不僅可以求出摺痕數之擬合曲線，還能夠藉由測得能量呼應前方之實驗結果，這也更加使我們確定理論之正確性及可用性。

四、檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析：

(一)紙管幾何(半徑與長度比， R_{av}/w)與摺痕數之關係。



(圖十八)半徑不同之大小管平均半徑、長度比值與摺痕數關係圖

上圖之圓點(藍)、方形(紅)、交叉(綠)為兩端半徑(公分)(2.10,2.40)、(2.10,2.70)、(2.40,4.95)。由圖十八，可以清楚發現大小管違背圓筒之一主要特性——摺痕數(N)隨著半徑長度比(R/w)之上升而增加，尤其以 $(R_1, R_2)=(2.40 \text{ cm}, 4.95 \text{ cm})$ 之數據尤為明顯，於 $R_{av}/w=1.5$ 之後摺痕數量便一路遞減，藉由 $(R_1, R_2)=(2.10 \text{ cm}, 2.70 \text{ cm})$ 的數據亦有上升後下降趨勢，我們推測在 $\frac{R_1}{R_2}$ 過小(理論估計約在 $\frac{R_1}{R_2} = 0.78$)的狀況下，會在中間出現最高值，隨後遞減的趨勢，且當數值趨近零，其圖形的尖峰(前段上升、中後段下降)位置會在橫軸前移且下降趨勢會更加明顯；另外，在實驗中我們也發現在「摺痕規律性」之性質，大小管與圓筒的界線雖不完全相同但趨勢相似——大小管摺痕數整體的 N 隨著 R/w 上升而增加，因此，我們推測在大小管的理論中，可以將原本的幾何及能量理論加以擴充至任意兩端半徑大小之圓筒，以執行更廣、更加生活化的應用(例如：兩端半徑不同之拋棄式紙杯)。

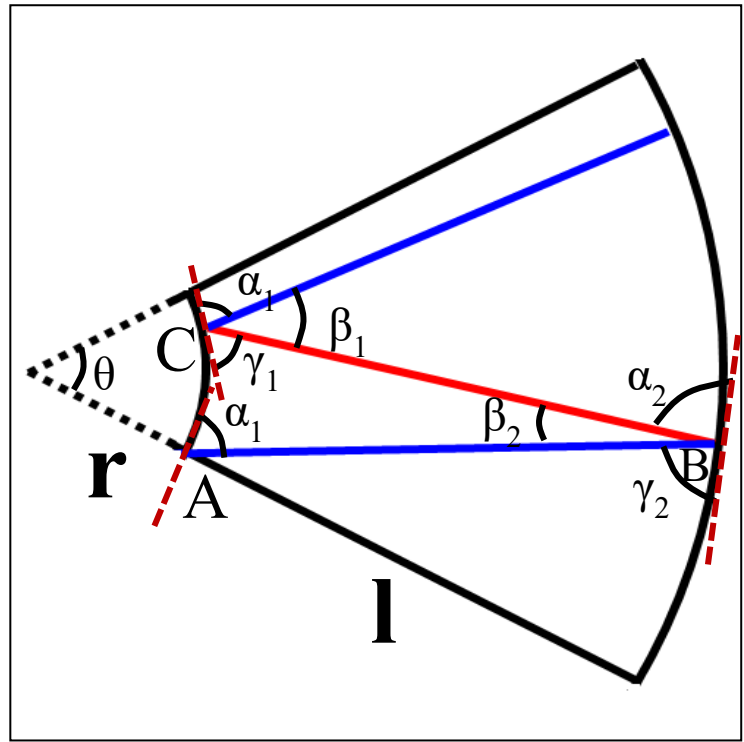
五、推廣圓筒理論至兩端不同半徑之大小管摺痕數與半徑長度比之關係。



(圖十九)大小管立體圖模型(圖二十)大小管立體圖(未扭轉)(圖二十一)大小管立體圖(扭轉後)



(圖二十二)大小管展開圖



(圖二十三)大小管平面圖幾何模型(凹痕(藍)、凸痕(紅))

從幾何(圖十九、二十三)的觀點：

$$\begin{cases} r\theta = 2\pi R_1 \\ (r+l)\theta = 2\pi R_2 \\ l = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + w^2} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{R_1 l}{R_2 - R_1} \quad (5); \quad \theta = \frac{2\pi(R_2 - R_1)}{l} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi \\ N(\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2) + \theta = (N-2)\pi \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = \frac{\pi}{N} + \frac{\theta}{2N} = \frac{\pi(l+R_2-R_1)}{Nl} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi \\ N(\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1) - \theta = (N-2)\pi \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\pi}{N} - \frac{\theta}{2N} = \frac{\pi(l-R_2+R_1)}{Nl} \quad (8)$$

由正弦定理(考慮三角形 BCD)：

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha_2 - \frac{\theta}{2N})} = \frac{\frac{2\pi R_2}{N}}{\sin\beta_1}$$

且摺痕規律時， $\overline{AB} \leq (R_1 + R_2) \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{N}}$ ，推得 $(R_2 - R_1 - \frac{l}{2})(R_2 - R_1) = \frac{l^2(R_1^2 - R_2^2)}{(R_1 + R_2)^2}$ ，最後再

利用 $w \gg (R_2 - R_1)$ 時， $l \approx w$ ，得出： $(\frac{R_2}{w} + 0.25)^2 - (\frac{R_1}{w} - 0.25)^2 = 0.5$

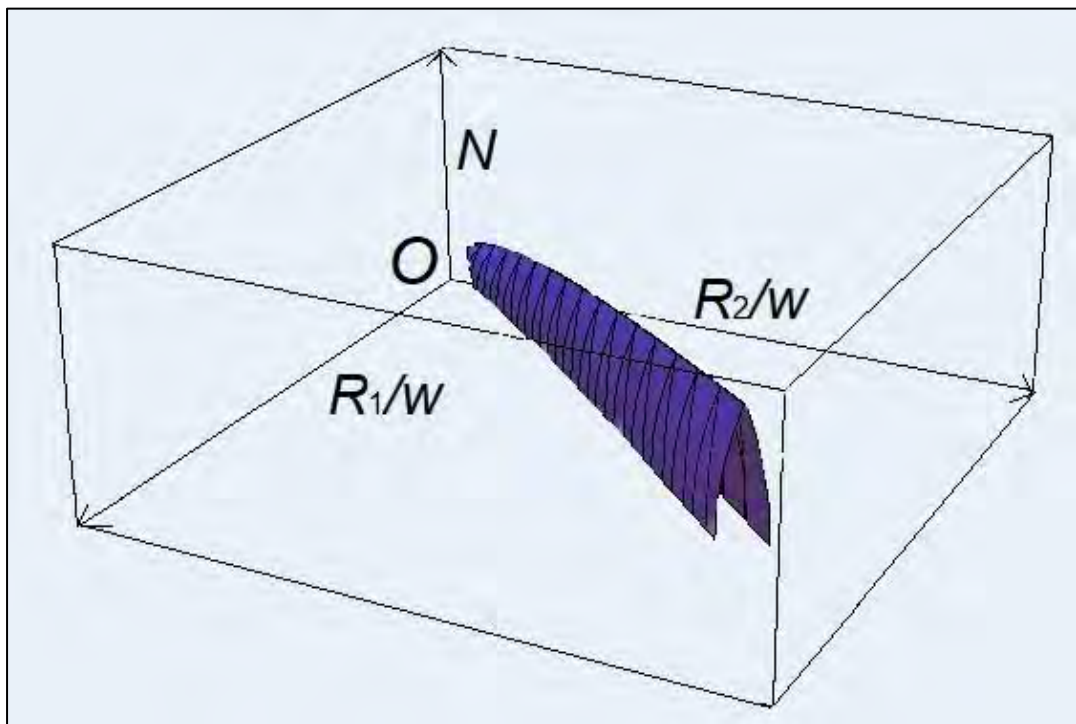
及其(y=x 對稱圖形)： $(\frac{R_1}{w} + 0.25)^2 - (\frac{R_2}{w} - 0.25)^2 = 0.5$ 所包含之區域為規律摺痕邊界。

這兩個對稱的邊界函數形式正是高中數學教過的雙曲線，能夠在繁複的計算後，得到這個函數有點像異鄉遇故人，也對二次曲線相關的性質(例如中點和焦點)有了更深的印象。



(圖二十四)大小管兩端半徑長度比(R_1/w 、 R_2/w)之規律摺痕邊界圖

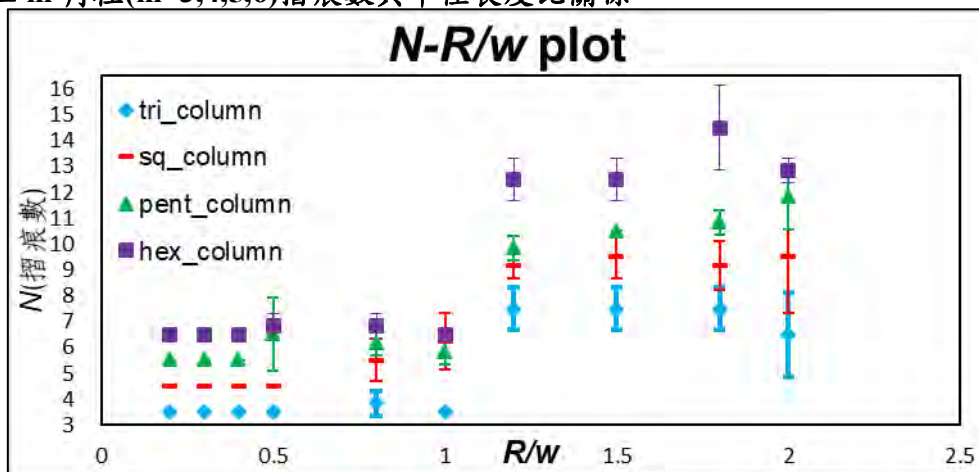
由能量的觀點，我們修正理論(3)式： $W = N\varepsilon \left[\frac{w}{\sin \alpha} + \frac{w}{\sin \gamma} \right] + \eta N \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \frac{\sin \alpha}{w}$ ，並將其推廣修正至： $W = N\varepsilon \left[\frac{w}{\sin \alpha_2} + \frac{w}{\sin \gamma_2} \right] + \eta N \left(\frac{2\pi R_1}{N} \right) \left(\frac{2\pi R_2}{N} \right) \frac{\sin \alpha_2}{w}$ ，並得出下圖之兩端半徑長度比、摺痕數三維關係圖。



(圖二十五)大小管兩端半徑長度比(R_1/w 、 R_2/w)、摺痕數(N)三維關係圖

圖二十四的兩條黑色曲線所包圍出摺痕規律區域，而曲線對稱於紅色 $y=x$ 之直線，另外，綠色直線為曲線切線(由於圖形對稱於 $y=x$ ，因此僅示圖上直線)，而其切線斜率分別約為 $1.28(-\frac{-1.13}{0.88})$ 及其倒數 0.78 ，而這也解釋了為什麼當 $\frac{R_1}{R_2} < 0.78$ 時， $(R_1, R_2)=(2.10 \text{ cm}, 2.70 \text{ cm})$ 及 $(R_1, R_2)=(2.40 \text{ cm}, 4.95 \text{ cm})$ 的數據點會不滿足原本圓筒趨勢；圖二十五之紫色區域為摺痕規律之區域，能藉由這張圖表，了解當 R_1/w 及 R_2/w 固定時，大小管會產生對應摺痕數。另外，這張三維關係圖也解釋圖十八中 $\frac{R_1}{R_2} < 0.78$ 之數據點皆有個最大值的高峰，因為其曲線對應為一個截到最大值的截面；兩端半徑相同之圓筒也可以藉由圖二十五的一個截面($\frac{R_1}{w} = \frac{R_2}{w}$)去呈現。

六、檢視正 m 角柱($m=3,4,5,6$)摺痕數與半徑長度比關係。



(圖二十六)正 m 角柱($m=3,4,5,6$)半徑、長度比值與摺痕數關係圖

菱形(藍)、橫線(紅)、三角(綠)與方形(紫)為正 3,4,5,6 角柱於拉伸力 302 克重之數據，且由圖二十六所呈現的，我們可以歸納四種角柱的共同特性：

- (一)當 R/w 介在 0.2 至 1.0 之間，其摺痕數大致為 m 條。($m=3,4,5,6$ ，為正 m 角柱之面數)
- (二)當 R/w 介在 1.2 至 2.0 之間，其摺痕數大致為 $2m$ 條。
- (三)當 R/w 介在 0.2 至 0.4 之間，其摺痕分布狀態為整體數據中最穩定規律的。

除此之外，在 $R/w=0.2\sim 1.0$ 之間，正三角柱的摺痕數都為 3 條、正四角柱則是在 0.2~0.5 之間為 4 條，而 0.8~1.0 有從 4 條逐漸上升(過渡)至 8 條的趨勢、而正五、六角柱則是在 0.5~1.0 之間摺痕數在實驗上無法重複——介在 5~8 及 6~7 條之間；在 $R/w=1.2\sim 2.0$ 之間則是正三、四、五、六角柱之摺痕數大致為 6,8,10,12 條，但是卻會因為結構不穩定(每面要產生兩條摺痕)，且摺痕有跨越正 m 邊形邊界可能性，而使得摺痕數介在 4~8、6~11、9~13、11~16 條之間。

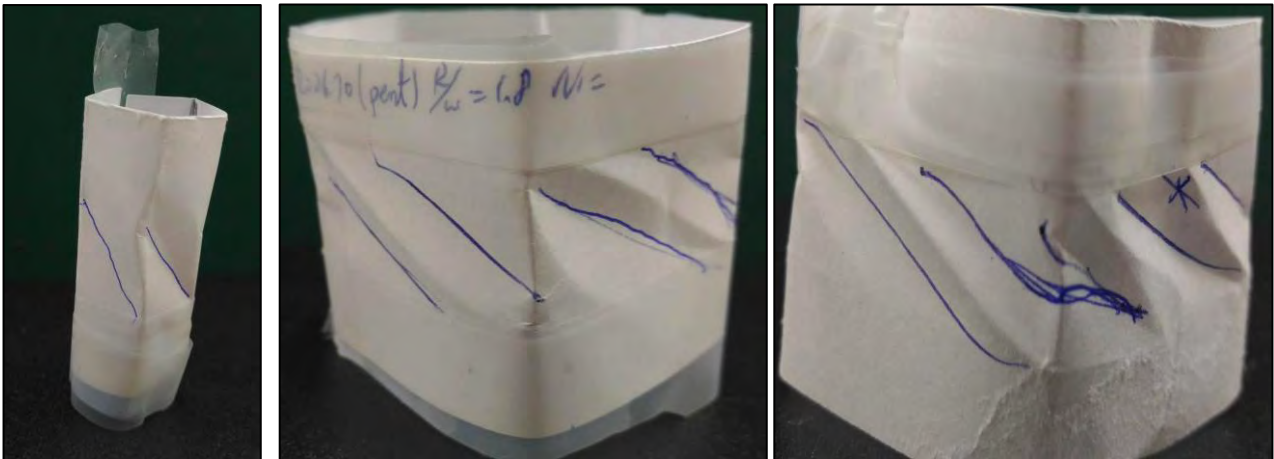
七、描述正 m 角柱($m=3,4,5,6$)摺痕數與半徑長度比關係之現象。

在正 m 角柱的摺痕圖形中，我們發現摺痕主要分成兩種生成方式及各自的特徵：

(一)穩定型：摺痕數量 $N = km, k \in \mathbb{N}$ 具有對稱性。

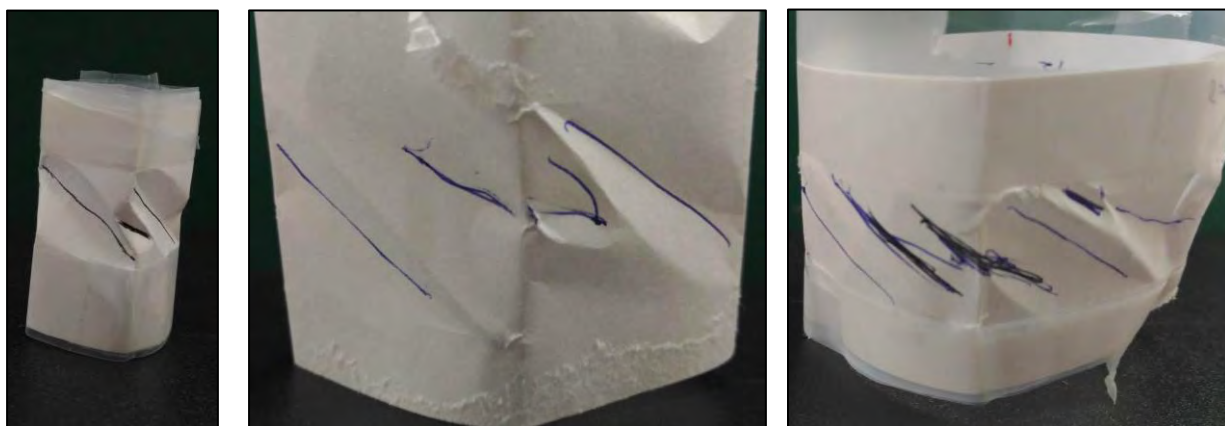
穩定型摺痕意味每個面可視為獨立，角柱面的摺痕由兩側端點凹陷(如圖二十七，左上端點到右下端點)出發，當凹陷處連接就會產生 m 條摺痕數；若錯開就會產生 $2m$ 條摺痕。錯開機制是如何發生的呢？當 w 變小，摺痕隨之縮短，摺痕與水平方向之夾角 α 也隨之縮小，使得一面出現能夠容納其他摺痕之預留空間。如圖二十八，一側由頂點產生一個凹陷與未凹陷的預留空間，當凹陷頂到對邊預留空間，就會形成兩條摺痕。

從 $k = 1 \rightarrow k = 2$ 是特別的，從實驗能看出此時 R/w 介在 1.0 至 1.2 之間，因為每一個面仍可視為獨立，多邊形邊界的主宰能力大過於整個紙筒想要產生摺痕的趨勢；但在 $k = 2 \rightarrow k = 3$ 過程，摺痕會變成跨越型(於(二)解釋)，每一個多邊形面不再獨立，需要考量面與面之間的交互作用，這使得摺痕分佈變得不穩定，難以產生 $k = 3$ 的規律摺痕。



(圖二十七) $N=m$ 樣品圖 (圖二十八) $N=2m$ 樣品圖 (圖二十九)一面不產生 3 條摺痕樣品圖

(二)跨越型： $N \neq km, k \in \mathbb{N}$ ，因為多邊形的邊界效應，導致摺痕不對稱，且會跨越邊界。跨越型摺痕有兩種類型：(1).當 $R/w \leq 1.0, m \geq 4$ ，多邊形角度不夠尖銳，邊界隔絕效應可能因為扭轉過程的不穩定(多邊型邊界可能因為扭轉輕微浮空)降低，使得多邊形面間產生交互作用，形成跨越型摺痕。(2). $R/w > 1.0$ ，任何 m 都可能產生跨越型摺痕。在 $k = 2 \rightarrow k = 3$ 過程，摺痕長度、摺痕與水平夾角 α 都會變小，產生新的預留空間。但是夾角 α 具有下限(可從圓筒之實驗數據確認)，新的預留空間不足以產生新的摺痕，為了彌補這個空缺，鄰近面的摺痕會產生跨越的趨勢，從而形成跨越型摺痕。



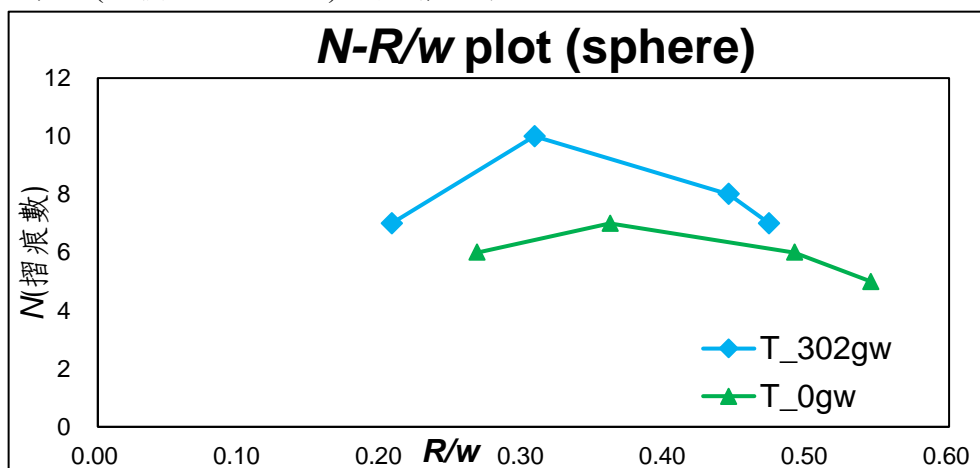
(圖三十) $N=m$ 跨越樣品圖(圖三十一) $N=2m$ 跨越樣品圖(圖三十二)一面 3 條摺痕(跨越)樣品圖

陸、討論

一、探討球形物體之摺痕數及型態。

在前述的結果中，我們藉由重複執行實驗及建構理論的方式充分了解廣義圓筒(含大小管)及正 m 角柱這類對稱性高的簡易立體圖形摺痕分布，並預測其摺痕數來應用於生活中。

然而，對於「球體」這種對稱性極高，但相對來說不易執行的立體構造，我們僅針對其摺痕分布狀態和摺痕數做定性上及初步定量上的描述，以下為球形皮球摺痕數與半徑(橫切緯度之半徑)、長度(兩橫切面之距離)比值關係圖。



(圖三十三)球形皮球半徑、長度比值與摺痕數關係圖

圖三十三中，菱形(藍)、三角(綠)分別為拉伸力為 302、0 克重時扭轉圓球之數據，另外我們可以觀察到以下幾個現象：

(一)扭轉圓球摺痕數與拉伸力的關係如同實驗一、探討扭圓筒摺痕分佈：**檢視軸向拉伸力與摺痕數之關係**所得到的圓筒性質——摺痕數隨軸向拉伸力增加而遞增。

(二)同個基座(相同 R)所執行的實驗，當拉伸力越大會些微增加圓球長度(w)，因此後方內容主要以 $T=0$ gw 之數據點進行分析。

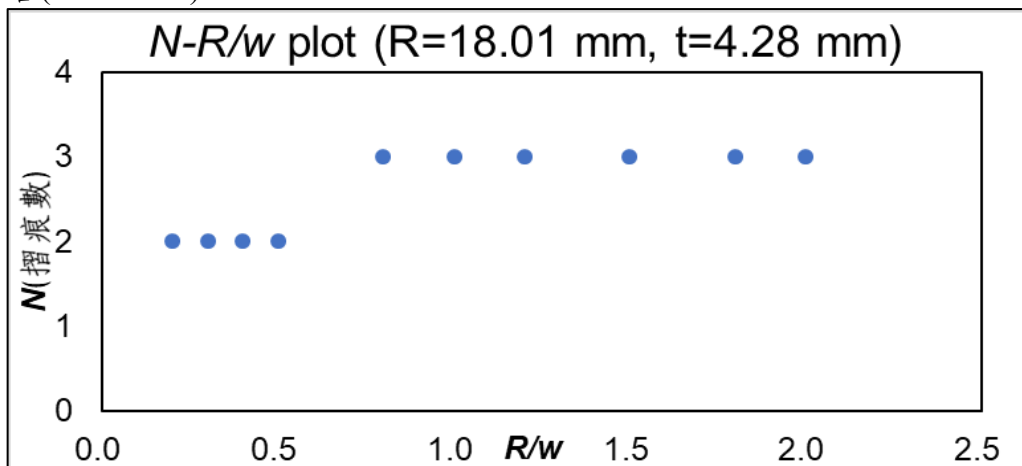
(三)在 $R/w=0.21\sim 0.54$ 區間中，我們發現其摺痕數隨著 R/w 增加至 $0.30\sim 0.40$ 時，摺痕數(N)上升，另外於之後 R/w 上升時，摺痕數(N)隨之下降。

我們推測這現象是由於在 $R/w =0.21\sim 0.54$ 區間，摺痕狀態十分不穩定，使其進入「摺痕不規律區」，類似圓筒中的不穩定區。在這樣十分混亂的摺痕分布狀態中，其摺痕數大致位於 5 至 7 條之間，整體呈現一個波動但變化不大的情形，雖然摺痕數(N)隨 R/w 上升之趨勢不明顯，但也沒有違背圓筒所得到的結論。

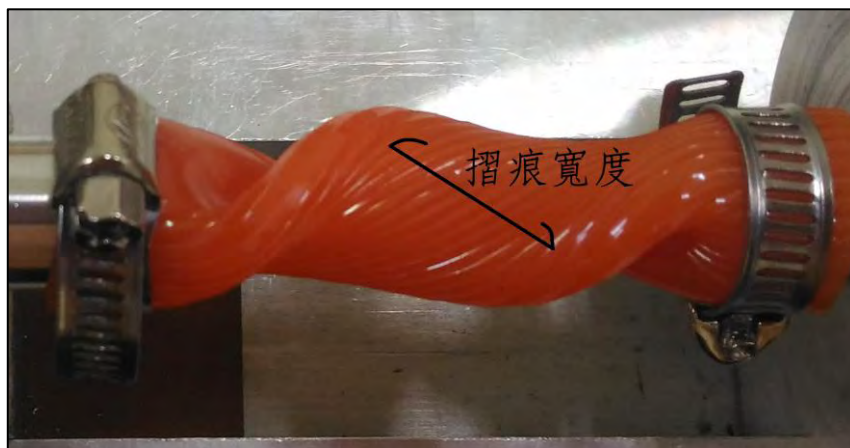
二、探討厚度不容忽視之圓柱摺痕數與半徑長度比之關係。

在探討完廣義圓筒(含大小管)、角柱、球形後，我們想到生活中有許多圓筒的厚度不容忽視(甚至是實心的)，不能像先前薄圓筒的情況被視為微擾或小修正，因此有必要針對水管(有厚度)及粉筆(實心)，做定性上及初步定量上的描述。

(一)水管($t=4.28$ mm)



(圖三十四)厚度不容忽視($t=4.28$ mm)之水管半徑、長度比值與摺痕數關係圖



(圖三十五)水管($R/w=0.30$)扭轉示意圖

從圖三十四中，我們發現厚度不容忽視($t=4.28\text{ mm}$)之水管，就能夠給出一般常理判斷之圓筒應產生整數條摺痕，及其產生之階梯狀 $N-R/w$ 關係圖，然而，圖三十四與實驗一之數據圖最大的差異在其摺痕數之銳減量，雖然兩者皆隨 R/w 增加而 N 遞增，我們發現(圖四)中，在 R/w (0.2~2.15)範圍內之 N 皆大於 6 條，然而水管中的摺痕數則只有 2 至 3 條，且分界點大致位於 $R/w=0.5\sim 0.8$ ，也就是我們前述圓筒所謂之規律摺痕與否之邊界。

在圖三十五中，我們可以清楚看到其摺痕狀態與一般薄膜圓筒有兩點不同：

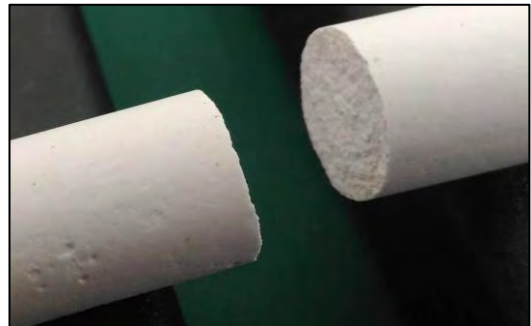
- 1.水管摺痕數明顯較薄膜圓筒少，且摺痕間距較大。
- 2.水管摺痕寬度相較於寬度可以忽略的薄膜圓筒寬，也是導致摺痕僅為 2~3 條之主因。

正如前述實驗一之(一)「檢視厚度與摺痕數」關係中提到的，當厚度越大，其摺痕數傾向減少。明顯地，當圓筒上面所產生之摺痕寬度變大至與長度相近時，其產生相同摺痕數所需之能量必將增加，且摺痕與摺痕間之交互作用力位能(其能量亦與摺痕數成反比)也會較原本兩端之交互作用力來的大，這導致摺痕數會較原本薄膜圓筒之理論預測的數值來的小。

(二)粉筆(實心)



(圖三十六)實心粉筆經扭轉後斷裂圖



(圖三十七)實心粉筆經彎曲折斷後斷裂圖

在圖三十六中，我們能看到一般預期的實心粉筆經扭轉後產生斷裂之現象，注意其圖形非單純的斜面裂痕，而是橫向與縱向交疊的斷裂面，因此粉筆裂痕與前述之摺痕探討差異較大，需要更換其他材質之實心圓筒才能進行更進一步的探討。

在圖三十七中，可以清楚看到扭斷與折斷所產生之摺痕性質、樣貌皆不同，後者可以清楚的看到一個破裂面(截面)，這也證實了**扭轉**與**折斷**是會造成不同斷裂現象的兩個動作。

柒、結論

在本次研究中，我們藉由更換實驗參數，了解不同尺寸、材質、厚度之圓筒摺痕分布，發現當半徑與長度的比值固定時，會產生相同的摺痕分布，因此方便更安全且節省空間的壓縮圓筒推廣到各種尺寸；再者，由於我們證明薄圓筒在扭轉所產生的摺痕數不太隨材質改變，因此此研究所得到的結論皆能應用延伸到生活中各式材料。基於以上兩點，我們成功利用實驗所推得之摺痕數及偏斜角，設計收納方便的鐵鋁罐及其他容器。以下特性為本研究的結論：

一、探討扭圓筒摺痕分佈：

(一)檢視不同實驗參數與摺痕數之關係：

1.半徑長度比：

(1)摺痕數(N)隨著紙管半徑與長度比值(R/w)的上升而增加。

(2) $N-R/w$ 圖之圖形為一嚴格遞增且凹向下之曲線。

2.軸向拉伸力：

(1)相同紙管半徑長度比(R/w)時，軸向拉伸力(T)越大，摺痕數(N)越多。

3.材質(紙管、銅管、鋁箔管與塑膠管)：

(1)相同圓筒半徑長度比(R/w)時，摺痕數(N)大小排序為：

鋁箔管 > 銅片管 > 紙管 > 塑膠管。

4.厚度(紙管、鋁箔管)：

(1)相同圓筒半徑長度比(R/w)時，摺痕數(N)會因厚度增加而下降。

(2)厚度之影響可與楊氏模量(Young's Modulus, E)及軸向拉伸力(T)結合。

(二)分析不同實驗參數與凹痕偏斜角(α)之關係：

1.半徑長度比：

(1)摺痕偏折角(α)因著紙管半徑與長度比值(R/w)的上升而減小。

(2) $\sin\alpha-R/w$ 圖之圖形為一嚴格遞減且凹向上之曲線。

2.軸向拉伸力：

(1)相同紙管半徑長度比(R/w)時，軸向拉伸力(T)之增減與摺痕偏折角(α)之

變化無明顯之關係。

二、建構理論描述圓筒實驗參數與摺痕數、凹痕偏斜角(α)的關係：

(一)由幾何及能量的觀點可得下列兩式：

$$\alpha \approx \sin^{-1} \sqrt{\frac{w}{2R}} - \frac{\pi}{2N}$$
$$N = \sqrt{A \left(\frac{R}{w}\right) + B} \quad (\text{其中 } A、B \text{ 為常數})$$

(二)以厚度(t)、楊氏模量(Young's Modulus, E)及軸向拉伸力(T)，修正公式為：

$$N = \sqrt{A \left(\frac{R}{w}\right) + B + C \left(\frac{T}{Et^2}\right)^\alpha}$$

三、記錄扭轉過程之扭矩及扭轉角度以量測過程中所需之能量：

(一)紙管所受的扭力與位移成正比。

(二)紙管半徑長度比(R/w)越大，扭力對紙管的作功越多。

(三)紙管扭轉能量大致與半徑長度比(R/w)成正比。

四、檢視半徑不同之大小管摺痕分布之分析：

(一)紙管幾何(半徑與長度比， Rav/w)與摺痕數之關係：

1. 當 $0.78 < \frac{R_2}{R_1} < 1.28$ 時，其半徑長度比(Rav/w)與摺痕數(N)趨勢與圓筒相同：

(1)摺痕數(N)隨著大小管半徑與長度比值(Rav/w)的上升而增加。

(2) $N-Rav/w$ 圖之圖形為一**嚴格遞增且凹向下**之曲線。

2. 當 $\frac{R_2}{R_1} \leq 0.78$ 或 $\frac{R_2}{R_1} \geq 1.28$ 時，其 $N-Rav/w$ 圖有以下特徵：

(1) Rav/w 增加初期(0.2~約 1.0)，其摺痕數(N)隨著大小管半徑與長度比值

(Rav/w)的上升而增加。

(2) Rav/w 至特定點時，摺痕數(N)會出現最大值，其後之半徑長度比值

(Rav/w)

增加時，摺痕數(N)會依序遞減。

五、推廣圓筒理論至兩端不同半徑之大小管摺痕數與半徑長度比之關係：

(一)修改原圓筒幾何理論得到更廣義的圓筒(含大小管)規律摺痕邊界：

$$\left(\frac{R_2}{w} + 0.25\right)^2 - \left(\frac{R_1}{w} - 0.25\right)^2 = 0.5 \text{ 及 } \left(\frac{R_1}{w} + 0.25\right)^2 - \left(\frac{R_2}{w} - 0.25\right)^2 = 0.5 \text{ 所包含之區域。}$$

(二)修改原圓筒能量理論：

$$W = N\varepsilon \left[\frac{w}{\sin \alpha_2} + \frac{w}{\sin \gamma_2} \right] + \eta N \left(\frac{2\pi R_1}{N} \right) \left(\frac{2\pi R_2}{N} \right) \frac{\sin \alpha_2}{w}$$

六、檢視正 m 角柱(m=3,4,5,6)摺痕數與半徑長度比關係：

(一)其半徑長度比(R/w)與摺痕數(N)之趨勢與圓筒相同。

(二)其摺痕數(N)約為 m 的倍數：

1. R/w 介在 0.2 至 1.0 之間時，摺痕數(N)約為 m 條。

2. R/w 介在 1.2 至 2.0 之間時，摺痕數(N)約為 2m 條。

七、建立正 m 角柱(m=3,4,5,6)摺痕數與半徑長度比關係之模型：

(一)在正 m 角柱的摺痕圖形中，摺痕主要分成兩種形式：

1.穩定型摺痕：摺痕數量 $N = km, k \in \mathbb{N}$ 具有對稱性。

2.跨越型摺痕： $N \neq km, k \in \mathbb{N}$ ，因為多邊形的邊界效應，導致摺痕不對稱，且會跨越邊界。

(二)我們藉由實驗觀察推測 $k \leq 2$ ，且當 R/w 越大，跨越型摺痕越多。

捌、研究應用與未來展望

一、研究應用：

(一)利用擰扭圓筒可將三維圓筒變成二維平面的性質：

- 1.生活上，我們將此性質藉以收納、壓縮、解省居家方面之放置空間。
- 2.工業上，我們能將伸縮功能應用於機械零件製造，並使機械能更靈敏便利。
- 3.環保上，我們將以更安全且有效的方式回收鐵、鋁罐及其他容器，進而達到環保減碳。(以下為銅管與兩種尺寸之不同紙杯)



(圖三十八)扭轉壓縮前的銅管(示意鐵鋁罐)



(圖三十九)經扭轉壓縮後的銅管



(圖四十一)紙杯 $(R_1, R_2, w)=(18, 25, 48)$



(圖四十二)設計摺痕之紙杯



(圖四十三)扭轉壓縮的紙杯

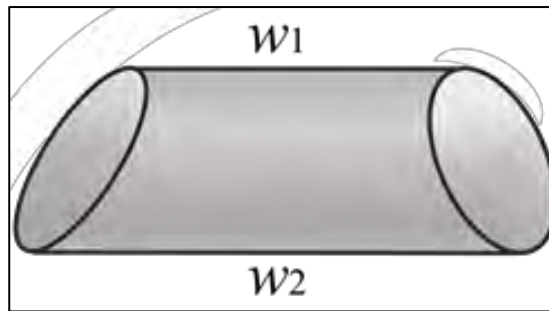


(圖四十四)紙杯 $(R_1, R_2, w)=(25, 33, 70)$ (圖四十五)設計摺痕之紙杯 (圖四十六)扭轉壓縮的紙杯

二、未來展望

(一)不同形體之扭轉後摺痕分布研究：

1.斜切管：圓柱兩端分別以一斜面(不一定平行)切割之管子。



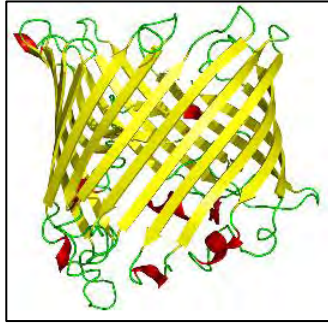
(圖四十)扭斜切管示意圖

2.球形：由於曲面與平面幾何性質的不同，例：曲面之三角形內角和並不一定滿足歐氏幾何之 180 度，因此，我們想進一步了解球形在扭轉過程的性質，以便應用於生活上有曲率的粗糙面容器的扭轉壓縮。

3.厚度大圓筒：在討論二中，我們提到了水管及粉筆兩者，而且也認為在生活中，並不是所有的圓柱都是薄膜狀，因此，有必要針對不同厚度、塑性彈性等性質的圓筒進行更進一步的研究，並加以應用於生活中更多元的領域中。

(二)生物工程：

- 1.簡介： β -筒狀蛋白(Beta Barrel)是個經由扭轉、捲曲且每一條蛋白質條(Beta Strands)均受氫鍵作用的封閉結構形成的大 β 摺板(Beta Sheet)。



(圖四十一) β -筒狀蛋白(Beta Barrel)構造圖

- 2.應用：藉由擰扭圓筒所歸納出的幾何關係，可用來研究相似於圓筒摺痕傾斜現象之蛋白質條(Beta Strands)，及其蛋白質構造 β -筒狀蛋白(Beta Barrel)。

(三)醫學：骨頭可視為厚度不可忽略且內部非空心之圓筒，在受到擰扭外力而造成之骨折現象，能藉由扭圓筒之理論模擬骨折時，骨頭所發生的物理變化及性質，加以提供醫學上診斷及醫治的新方法。

玖、參考資料

- [1]Yamaki, N., and K. Otomo. "Experiments on the postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure." *Experimental Mechanics* 13.7 (1973): 299-304.
- [2]Hunt, G. W., Gabriel J. Lord, and Mark A. Peletier. "Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity." *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 3.4 (2003): 505-518.
- [3]Hunt, Giles W., and Ichiro Ario. "Twist buckling and the foldable cylinder: an exercise in origami." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.6 (2005): 833-843.
- [4]Onal, Cagdas D., Robert J. Wood, and Daniela Rus. "Towards printable robotics: Origami-inspired planar fabrication of three-dimensional mechanisms." *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. IEEE, 2011.
- [5]Onal, Cagdas D., Robert J. Wood, and Daniela Rus. "An origami-inspired approach to worm robots." *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 18.2 (2013): 430-438.
- [6]Silverberg, Jesse L., et al. "Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials." *Science* 345.6197 (2014): 647-650.
- [7]Hu, Nan. "Buckling-induced smart applications: recent advances and trends." *Smart Materials and Structures* 24.6 (2015): 063001.

附錄一 關於圓筒靜態摺痕理論的詳盡推導

由圖十一可知：

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi & - (1) \\ \alpha - \beta + \gamma = \left(1 - \frac{2}{N}\right)\pi & - (2) \end{cases}$$

(1)式-(2)式：

$$\beta = \frac{\pi}{N} - (3)$$

(1)式+(2)式：

$$\alpha + \gamma = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\pi - (4)$$

由 ΔABC 的正弦定理：

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin \beta}$$

$$\text{且 } \overline{AC} = \frac{w}{\sin(\pi-\gamma)} \text{ 及 } \overline{BC} = \frac{2\pi R}{N} :$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{w}{\sin \gamma \sin \alpha} = \frac{2\pi R/N}{\sin \beta} - (5)$$

將(3)式及(4)式代入(5)式，可以得到：

$$\frac{w}{\sin \gamma \sin \alpha} = \frac{2\pi R/N}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{N} + \alpha\right) \sin \alpha} = \frac{2\pi R/N}{\sin \frac{\pi}{N}} - (6)$$

再由實驗中 $\frac{w}{R} = 1$ 時， $N \approx 12$ (條)：

$$\frac{\pi}{N} \ll 1$$

藉由泰勒展開式：

$$\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx \frac{\pi}{N} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3$$

及

$$\text{令 } \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

(α_0 為不受 N 影響之項， $\Delta\alpha$ 為 $f(N)$)

先求出 α_0 ：

$$\because \alpha_0 \gg \Delta\alpha$$

$$\because \frac{\pi}{N} \gg \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^3$$

$$\therefore \frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{N} + \alpha\right) \sin \alpha} = \frac{2\pi R/N}{\sin \frac{\pi}{N}} \Leftrightarrow \frac{w}{\sin^2 \alpha_0} = \frac{2\pi R/N}{\frac{\pi}{N}} \Leftrightarrow 2R \sin^2 \alpha_0 = w - (7)$$

由(7)式可知：

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{w}{2R}} \Rightarrow \frac{R}{w} \geq 0.5 - (8)$$

及

$$\alpha_0 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{w}{2R}} - (9)$$

再求出 $\Delta\alpha$ ：

$$\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{N} + \alpha\right) \sin \alpha} = \frac{2\pi R/N}{\sin \frac{\pi}{N}} \Leftrightarrow \frac{w}{\sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha\right)} = \frac{2\pi R/N}{\frac{\pi}{N} \left(1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right)} - (10)$$

由三角函數積化和差公式：

$$\sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha\right) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{N} - \cos\left(2\alpha_0 + 2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \right] - (11)$$

將(11)式代入(10)式：

$$\cos \frac{\pi}{N} - \cos 2\alpha_0 \cos\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) + \sin 2\alpha_0 \sin\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) = \frac{w}{R} \left[1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \right] - (12)$$

由 $\frac{\pi}{N} \ll 1$ 、 $\Delta\alpha \ll 1$ 可知：

$$\cos \frac{\pi}{N} \approx 1; \cos\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \approx 1; \sin\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \approx 2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}$$

由上述之關係：

$$\cos \frac{\pi}{N} - \cos 2\alpha_0 \cos\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) + \sin 2\alpha_0 \sin\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) = \frac{w}{R} \left[1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha_0 + \left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \sin 2\alpha_0 = \frac{w}{R} \left[1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \right] - (13)$$

最主要的項自然地給出(8)式的結果

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{w}{2R} = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha_0 = \frac{w}{R} - (14)$$

接下來，要求等式兩邊次要項相等，可以得到：

$$\left(2\Delta\alpha + \frac{\pi}{N}\right) \sin 2\alpha_0 = \frac{w}{R} \left[-\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \right] - (15)$$

$$\therefore \Delta\alpha = \frac{-\frac{\pi}{N} \sin 2\alpha_0 - \frac{\pi^2 w}{6N^2 R}}{2\sin 2\alpha_0} = -\frac{\pi}{2N} - \frac{\pi^2 w}{12N^2 R} \frac{1}{2\sin 2\alpha_0} - (16)$$

$$\because \sin 2\alpha_0 = 2\sin\alpha_0 \cos\alpha_0 = 2\sqrt{\frac{w}{2R}} \sqrt{\frac{2R-w}{2R}} = \frac{\sqrt{w}\sqrt{2R-w}}{R}$$

$$\therefore \frac{\pi^2 w}{12N^2 R} \frac{1}{2\sin 2\alpha_0} = \frac{\pi^2 w}{12N^2 R} \frac{R}{2\sqrt{w}\sqrt{2R-w}} = \frac{\pi^2}{24N^2} \sqrt{\frac{w}{2R-w}} - (17)$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{24N^2} \sqrt{\frac{w}{2R-w}} \ll \frac{\pi}{2N}$$

$$\therefore \Delta\alpha \approx -\frac{\pi}{2N} - (18)$$

由(9)及(18)可求出：

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \approx \sin^{-1} \sqrt{\frac{w}{2R}} - \frac{\pi}{2N} - (19)$$

從能量觀點，我們合理推測外力對摺痕所作的功 W 會隨摺痕數(N)、摺痕長成正比，但是這麼一來，大自然豈不只會選擇沒有摺痕，亦即 $N=0$ 的情況。很顯然這和實驗事實不符，因此我們預期還需要考慮第二種會隨 N 增加而減小的功，來和前者制衡，使得總功對 N 的作圖可以出現最低點（因為大自然偏愛能量最低的選擇）---當紙筒兩端從圓形變成正多邊形，曲線被壓成直線的後果是附近的紙面會出現明顯凹痕(buckling)，兩端各自產生的凹痕會有重疊，這可以視成是它們的交互作用；顯然當紙筒變短（也就是 w 變小），交互位能應當增加，而且多邊形之邊長越大，凹痕也會越明顯，使得交互位加強。綜合這些理由可以推出下式：

$$W = N\varepsilon \left[\frac{w}{\sin \alpha} + \frac{w}{\sin \gamma} \right] + \eta N \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \left(\frac{2\pi R}{N} \right) \frac{\sin \alpha}{w} - (20)$$

將(20)式化簡,並將(4)式與(19)式之結果代入(20)式，我們可以得到：

$$W = N\varepsilon w \left[\frac{1}{\sin(\alpha_0 - \frac{\pi}{2N})} + \frac{1}{\sin(\alpha_0 + \frac{\pi}{2N})} \right] + \frac{\eta\pi^2}{N} \left(\frac{2R}{w} \right)^{1.5} - (21)$$

$$\therefore \text{當 } \Delta x \ll x_0 \text{ 時： } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0) (\Delta x)^2$$

且

$$\frac{1}{\sin(\alpha_0 - \frac{\pi}{2N})} + \frac{1}{\sin(\alpha_0 + \frac{\pi}{2N})} \text{ 為 } N \text{ 的偶函數。}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin(\alpha_0 - \frac{\pi}{2N})} + \frac{1}{\sin(\alpha_0 + \frac{\pi}{2N})} \approx 2 \left[\frac{1}{\sin \alpha_0} + \frac{1}{2!} \frac{2 - \sin^2 \alpha_0}{\sin^3 \alpha_0} \left(\frac{\pi}{2N} \right)^2 \right] - (22)$$

再將(8)式代入(22)式：

$$W = N \varepsilon w \left[\sqrt{\frac{2R}{w}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{w}{2R} \right) \frac{\pi^2}{4N^2} \right] + \frac{\eta \pi^2}{N} \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} - (23)$$

我們知道當 $\frac{\partial W}{\partial N} |_{N^*} = 0$ 時，能量最小，所對應之 N^* 值為其所選取之 N 值，且 w 為一常數：

$$\frac{\partial W}{\partial N} |_{N^*} = \frac{\partial(W/w)}{\partial N} |_{N^*} = 0$$

$$2\varepsilon \sqrt{\frac{2R}{w}} - \frac{\pi^2}{N^{*2}} \left\{ \frac{\varepsilon}{4} \left[2 \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \eta \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} = 0 - (24)$$

$$N^{*2} = \frac{\pi^2 \left\{ \frac{\varepsilon}{4} \left[2 \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \eta \left(\frac{2R}{w} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}}{2\varepsilon \sqrt{\frac{2R}{w}}}$$

$$N^* = \pi \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) \left(\frac{R}{w} \right) - \frac{1}{8}} - (25)$$

$$\frac{dN^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) \left(\frac{R}{w} \right) - \frac{1}{8}}} - (26)$$

$$\frac{d^2 N^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)^2} = \frac{-\pi^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2}{\left[\left(2 + \frac{4\eta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{R}{w}\right) - \frac{1}{2}\right] \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{R}{w}\right) - \frac{1}{8}}} - (27)$$

$$\because \varepsilon, \eta > 0 \text{ 且 } \frac{R}{w} > 0$$

$$\therefore \frac{dN^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)} > 0 \left(\forall \frac{R}{w} > 0\right) - (28)$$

$$\because \varepsilon, \eta > 0 \text{ 且 } \frac{R}{w} > 0$$

$$\therefore \frac{d^2 N^*}{d\left(\frac{R}{w}\right)^2} < 0 \left(\forall \frac{R}{w} > 0\right) - (29)$$

由(28)及(29)式可以推論 N - R/w 圖應為一「嚴格遞增」且「凹向下」之圖形。

【評語】 100013

本作品利用數學與物理原則，推導圓柱狀與截頭角錐狀之容器壓扁時的摺痕數，並將其結果應用於金屬罐的回收上面。作品創意良好，研究過程亦符合科學精神，並提供相關的實驗與理論數據，完成度相當高。