

# 2018 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 正多邊形三角剖分的探討

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 楊宗穎、陳宏賓

作者姓名 林佳萱、覃業昀

關鍵詞 三角剖分、卡特蘭數、Losanitsch's Triangle

## 作者簡介



我是林佳萱(右)，目前就讀於臺北市立第一女子高級中學三年級。平時的興趣很廣泛，喜歡看各式各樣的書籍。過去兩年多來的專研生活，從一開始尋找題目，到後來漸入佳境，中間遇到了不少挫折，但仍舊很享受這些研究數學的時光。在專研這條路上，得到了專研老師很多的指導和幫助，很高興有這個機會能夠將作品呈現給大家看，也希望未來能有更多機會繼續進行數學的研究。

我是覃業昀(左)，目前就讀臺北市立第一女子高級中學三年級。喜歡閱讀各式書籍、聆聽不同類型的音樂。兩年多專題研究的日子，從定下心儀的研究主題，而開始跌跌撞撞的研究歷程，到後來找到明確的方向，雖然過程中時常碰壁，但也使我在碰撞中成長，更得到許多研究的樂趣。在研究的路途中，很感謝專研老師及教授辛苦的指導和協助，很榮幸能將這份作品分享給大家，也期盼未來的我們可以帶著研究的精神，探索更多不同的領域。

## 摘要

給定正  $n$  邊形，於內部區域新增對角線，使得對角線不交叉且內部區域皆為三角形，則將此圖形稱為正  $n$  邊形的一個『三角剖分』。考慮正  $n$  邊形的所有三角剖分，已知其數量為卡特蘭數  $catalan(n-2)$ 。在所有三角剖分的情形中，考慮旋轉與翻轉，將同構的情形視為相同，則將所有不同構的三角剖分總數記為  $D_n$ 。本文對於正  $n$  邊形的不同構三角剖分進行研究，以三種面向進行探討，首先我們以不同構三角剖分的對稱性分類，發現其和化學式  $C_nH_{n+2}$  的同分異構物有相關性；再者，以相鄰三角形的最大數量進行分類，當相鄰三角形的最大數量為  $n-2$ 、 $n-3$ 、 $n-4$  與  $n-5$  時，得出不同構三角剖分的計算通式；最後，以三個相鄰頂點組成的外圍三角形進行分類，將『恰包含兩個外圍三角形的不同構三角剖分』、『圖論中的毛毛蟲圖 (Caterpillar)』以及『化學結構相關的 Losanitsch's triangle』進行深入探討。

## Abstract

Given a regular  $n$ -gon, adding diagonals in internal area to make any two diagonals uncrossed and internal area triangulated, then we call this graph a triangulation of the original regular  $n$ -gon. It is well known that the number of all triangulations of a regular  $n$ -gon is catalan number  $catalan(n-2)$ . In this paper we treat two triangulations to be the same one if they are the same under rotation and reflection, in this case, we call they are isomorphic and denote  $D_n$  as the amount of all non-isomorphic triangulations. We discuss  $D_n$  through three aspects: first, we classify by the symmetry of non-isomorphic triangulation, discussing linear symmetry, point symmetry, rotational symmetry, star symmetry, and complete symmetry separately, discover that they have the same quantity as isomers of chemical formula  $C_nH_{n+2}$ , and try to further discuss the relation between them; second, we use the maximum number of triangles sharing one vertex to classify, and for regular  $n$ -gon, when the maximum number of triangles sharing one vertex is  $n-2$ ,  $n-3$ ,  $n-4$  and  $n-5$ , we can obtain the general formula of non-isomorphic triangulations; finally, we classify them by the ear triangles, and discuss two-ear non-isomorphic triangulations, caterpillars in graph theory, and Losanitsch's triangle related to chemical structure.

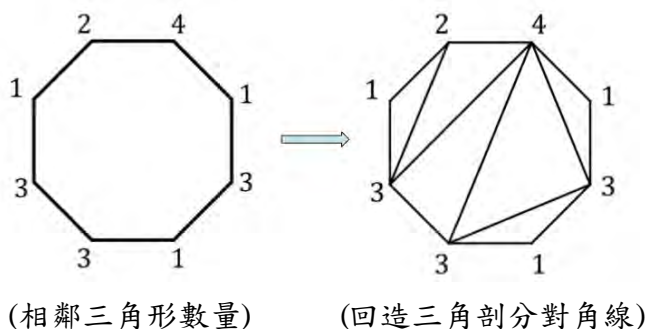
# 壹、前言

## 一、研究動機

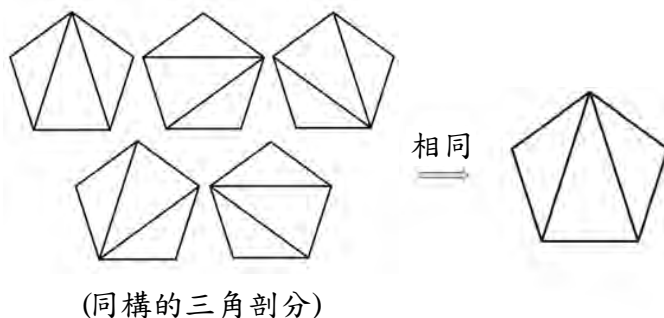
在一次因緣際會下，我們涉略到環球城市數學競賽 2001 年春季賽的題目，其中有一題吸引了我們的注意，題目如下：

『在一個正多邊形中，將點與點相連，使此正多邊形分割成多個三角形，且這些對角線彼此只在正多邊形的頂點有交點。而後在正多邊形的每一個頂點寫上以這一個點為頂點的三角形個數。再將這個正多邊形的所有對角線擦掉，是否能夠根據正多邊形上所有頂點上的數，將原有的對角線重新畫出？』

如下圖所示，有一正 8 邊形，每個頂點上皆有註記三角剖分後與該頂點相鄰的三角形之數量，則我們可以依據頂點上所註記的數字重新回造該三角剖分。此外，我們亦可以說明該三角剖分具有唯一性。



研究此問題的過程中，引發我們好奇的是，在正  $n$  邊形中，考慮所有的三角剖分，若兩個三角剖分情形具有旋轉或翻轉的關係，則我們稱此兩個三角剖分為『同構 (isomorphic)』。我們欲研究的議題是，在正  $n$  邊形中，若將同構的三角剖分歸成同一類，則不同構的三角剖分究竟有多少類型？再進一步利用圖形的結構分類後，能否刻畫其精確的數量？



## 二、研究目的

給定一個正  $n$  邊形，將其中的點與點於內部區域相連，且任兩條對角線不交叉，將內部區域分割成多個三角形，其中考慮翻轉及旋轉視為三角剖分同構的可能性，欲探討正  $n$  邊形共有幾種不同構的三角剖分數量，我們將不同構的三角剖分數量記為  $D_n$ 。

不同構的三角剖分並不容易刻畫，因此我們從『對稱性』、『最大相鄰三角形數』以及『外圍三角形數』進行研究，皆獲得許多研究成果。在研究的過程中，亦發現三角剖分的問題與化學領域中的 Losanitsch's triangle 具有相關性。

此篇研究目的如下：

1. 對於正  $n$  邊形，若給定每個頂點相鄰的三角形數量，則是否有存在且唯一的三角剖分？若存在三角剖分，能否設計一個演算法來造出該三角剖分圖形？
2. 對於正  $n$  邊形，考慮不同構的三角剖分，根據不同的對稱分類，是否能找到『完全對稱』、『星形對稱』、『點對稱』、『旋轉對稱』、『線對稱』以及『不對稱』的一般通式？並能否依此建立不同構三角剖分數  $D_n$  的通式？進一步研究三角剖分圖與  $C_n H_{n+2}$  化學結構上的對應關係。
3. 對於正  $n$  邊形的三角剖分，加入頂點相鄰最多的三角形數量之限制，在『最多相鄰  $n-2$  個三角形』、『最多相鄰  $n-3$  個三角形』、『最多相鄰  $n-4$  個三角形』、『最多相鄰  $n-5$  個三角形』等條件下，是否能找到不同構三角剖分數的算式？此外，能否再以頂點相鄰最多的三角形數量變動下，建立其三角剖分數的遞迴關係？
4. 考慮一個三角剖分的內部三角形，若該三角形恰包含一條對角線，則稱該三角形為『外圍三角形』；若該三角形三邊皆為對角線，則稱該三角形為『內圍三角形』。進一步我們以外圍三角形的數量進行分類，對於正  $n$  邊形，是否能找到恰兩個外圍三角形狀況下，不同構三角剖分數的一般通式？同時探討與化學領域中的 Losanitsch's triangle 的關連性。對於三角剖分圖，研究其外圍三角形與內圍三角形數量的必然關係，進一步欲從圖論的觀點探討恰三個外圍三角形的不同構三角剖分數。

## 貳、研究方法與過程

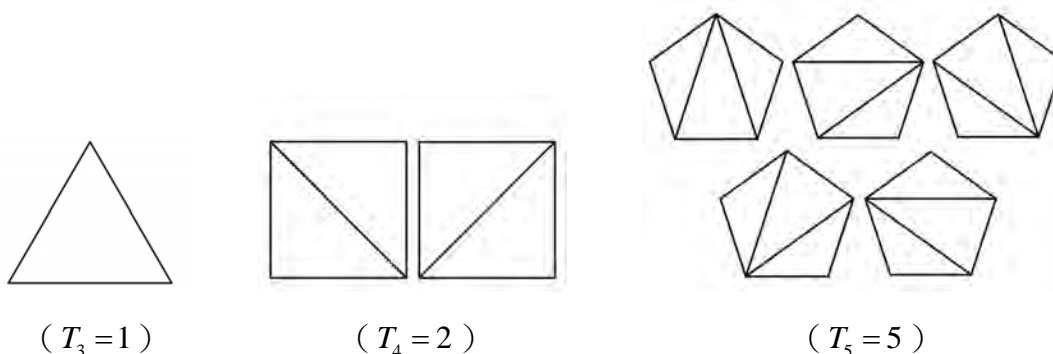
### 一、基本概念、名詞解釋與先備知識

已知正  $n$  邊形的三角剖分數與第  $(n-2)$  項的卡特蘭數  $catalan(n-2)$  具有等價關係。在許多組合學的教科書中皆已有完整的說明。以下我們將針對『三角剖分』、『卡特蘭數』、『不同構三角剖分』、『頂點相鄰三角形數』以及『相鄰三角形數序列』進行名詞解釋。

### 三角剖分數 $T_n$

給定一個正  $n$  邊形 ( $n \geq 3$ )，在其內部區域新增對角線，使其任意對角線皆不相交且內部區域被分割為  $n-2$  個三角形，我們將此最終圖形稱為此正  $n$  邊形的一個『三角剖分』，此外我們將正  $n$  邊形的所有三角剖分數以符號記為『 $T_n$ 』。

例如：考慮正  $n$  邊形，當  $n=3$ 、 $4$ 、 $5$  時，其三角剖分數分別為  $T_3=1$ 、 $T_4=2$ 、 $T_5=5$ ，如下圖所示。



### 三角剖分的頂點 Degree

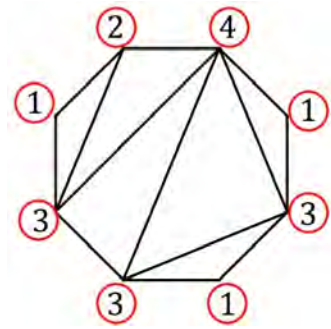
一個平面圖指的是已將點與邊畫在平面上使其邊皆不相交的圖。若平面圖的內部區域皆為三角形（最外部區域可非三角形），則稱此平面圖為『近三角化 (Near-Triangular)』。若平面圖的頂點皆落在最外部區域的邊界上，則稱此平面圖為『外平面圖 (Outer-Planar Graph)』。

給定一個正  $n$  邊形 ( $n \geq 3$ )，考慮任意一種三角剖分情形，皆可將其視為  $n$  個點與  $2n-3$  條邊所構成的平面圖  $G$ ，將此平面圖  $G$  稱為此正  $n$  邊形的一個『三角剖分圖』，不難得知  $G$  必為一個近三角化的外平面圖。若  $G$  的內部三角形恰包含一條對角線，則稱該三角形為『外圍三角形』；

若  $G$  的內部三角形三邊皆為對角線，則稱該三角形為『內圍三角形』。令  $G$  的頂點與邊所形成的集合分別為『 $V(G)$ 』與『 $E(G)$ 』。考慮圖  $G$  的頂點  $v \in V(G)$ ，若  $v$  恰與  $k$  條邊相連，則我們稱該頂點  $v$  的『度數 (Degree)』為  $k$ ，並以符號記為『 $\deg(v) = k$ 』。若頂點  $u, v$  有邊相連，則將  $u$  與  $v$  的連邊記為  $uv \in E(G)$ 。若  $v$  為三角形的頂點，則稱此三角形與頂點  $v$  『相鄰』。若頂點  $v$  恰與  $t$  個三角形相鄰，則稱  $t$  為頂點  $v$  的『相鄰三角形數』，以符號記為『 $\Delta(v) = t$ 』。不難明白，有關頂點的度數與相鄰三角形數有以下關係：

**相鄰三角形數：**給定正  $n$  邊形，令外平面圖  $G$  為其中一種三角剖分。對任意頂點  $v \in V(G)$ ，若  $\deg(v) = k$ ，則  $v$  恰與  $k - 1$  個三角形相鄰。換句話說，相鄰三角形數為  $\Delta(v) = \deg(v) - 1$ 。

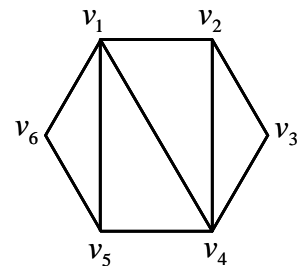
例如：考慮正 8 邊形的一個三角剖分，令此三角剖分對應一個近三角化的外平面圖  $G$ （如右圖所示）。考慮每個頂點的相鄰三角形數，將其記錄在各頂點上（紅圈內的數字）。



**相鄰三角形數序列**

給定一個三角剖分圖  $G$ ，令其頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，為了方便表達各頂點的相鄰三角形數，依順時針記錄每一点的相鄰三角形數，即可得到一個序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，並將其記為『 $S_G$ 』，意即對任意  $i = 1 \sim n$ ， $\Delta(v_i) = a_i$ 。同時我們將此序列  $S_G$  稱為三角剖分圖  $G$  的『相鄰三角形數序列』。

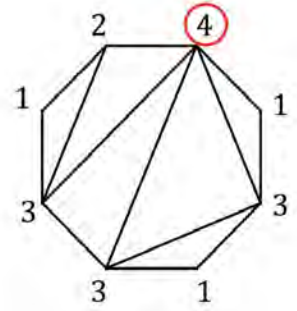
例如：考慮右圖正六邊形三角剖分圖，記錄每一頂點的相鄰三角形數，可得相鄰三角形數序列為  $(3, 2, 1, 3, 2, 1)$ 。



**最大相鄰三角形數  $\Delta_{max}$**

考慮正  $n$  邊形的一個三角剖分圖  $G$ ，考慮每個頂點的相鄰三角形數，其中最大值稱為『最大相鄰三角形數』，並以符號記為『 $\Delta_{max}$ 』，意即  $\Delta_{max} = \max \{ \Delta(v) : v \in V(G) \}$ 。

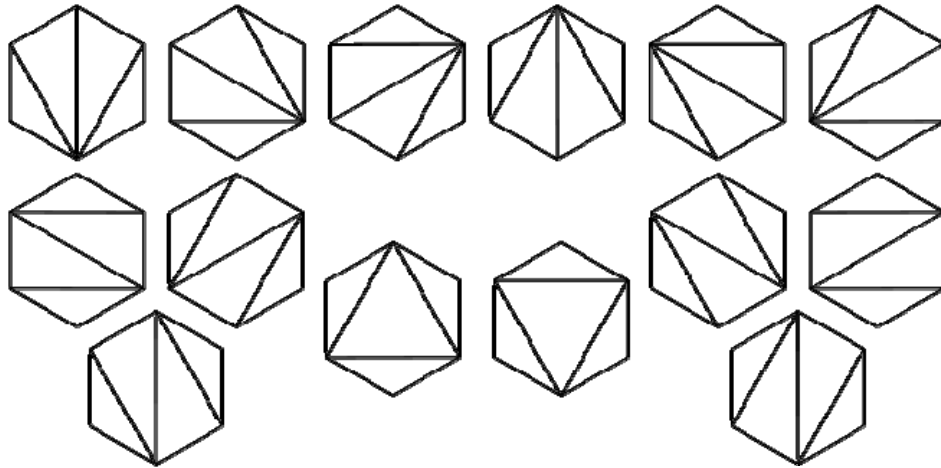
例如：考慮正8邊形的一個三角剖分圖  $G$ （如右圖所示），則  $G$  的最大相鄰三角形數  $\Delta_{max} = 4$ 。



### 卡特蘭數 Catalan Number

給定一個正  $(n+2)$  邊形，考慮其三角剖分數  $T_{n+2}$  即為卡特蘭數列中第  $n$  個元素，以符號記為『 $catalan(n)$ 』，意即  $T_{n+2} = catalan(n)$ 。有關卡特蘭數  $catalan(n)$  已有相當豐碩的研究結果，研究指出卡特蘭數具有相當多種等價的組合定義，同時對於一般項的卡特蘭數也有一般的通式，可單純運用高中排列組合的知識得知以下通式：

卡特蘭數：給定正  $(n+2)$  邊形，其三角剖分數為  $T_{n+2} = catalan(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ 。



(  $T_6 = catalan(4) = 14$  )

例如：考慮正6邊形的三角剖分數  $T_6 = catalan(4)$ ，根據卡特蘭數的一般通式可知，其三角剖分數

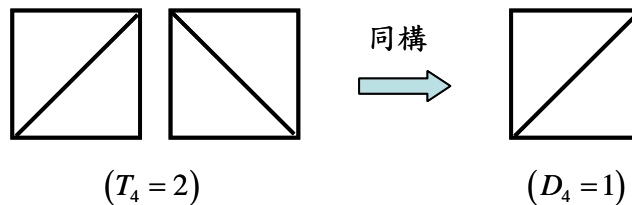
為  $T_6 = catalan(4) = \frac{1}{4+1} \binom{8}{4} = 14$ 。所有三角剖分數情形如上圖所示。



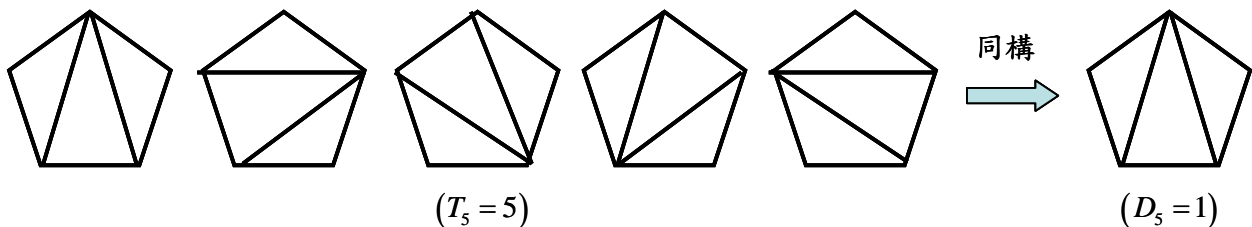
## 不同構三角剖分數 $D_n$

已知正  $n$  邊形的三角剖分數  $T_n$  與卡特蘭數  $catalan(n-2)$  具有等價關係，由此可知正  $n$  邊形的三角剖分數增長得特別快速，因此我們好奇的是，在考慮旋轉與翻轉的情形下，許多三角剖分的結構可以視為同一種狀態，倘若其中一種三角剖分可以透過旋轉或翻轉得到另一種三角剖分，則我們稱此兩種三角剖分是『同構』。考慮正  $n$  邊形，令所有不同構的三角剖分數量記為『 $D_n$ 』，稱為正  $n$  邊形的『不同構三角剖分數』。不難得知  $D_3 = T_3 = 1$ ，此外對任意自然數  $n \geq 4$ ， $D_n < T_n$  恆成立。

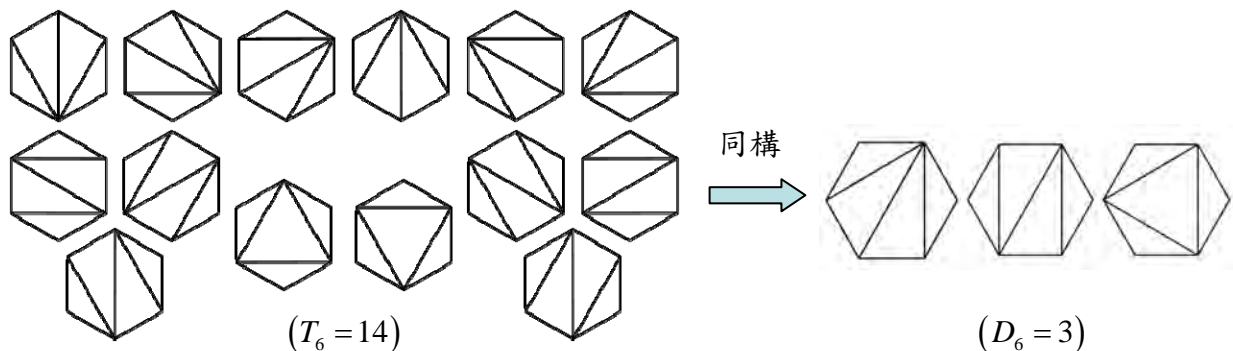
例如：(1) 考慮正 4 邊形的三角剖分數  $T_4 = 2$ ，但因為兩個三角剖分情形具有旋轉的關係，因此正 4 邊形的不同構三角剖分數為  $D_4 = 1$ 。



(2) 考慮正 5 邊形的三角剖分數  $T_5 = 5$ ，但因為任意兩個三角剖分情形皆具有旋轉的關係，因此正 5 邊形的不同構三角剖分數為  $D_5 = 1$ 。



(3) 考慮正 6 邊形的三角剖分數  $T_6 = 14$ ，則不同構三角剖分數為  $D_6 = 3$ 。



## 二、相鄰三角形數唯一決定三角剖分

給定正  $n$  邊形，考慮其中一種三角剖分圖  $G$ ，即可得知每個頂點  $v$  的相鄰三角形數  $\Delta(v)$ 。我們欲研究的是，若僅給定各頂點  $v$  的相鄰三角形數  $\Delta(v)$ ，是否能唯一決定其三角剖分圖？由於正  $n$  邊形的三角剖分圖  $G$  為近三角化的外平面圖，其中  $|V(G)| = n$ ， $|E(G)| = 2n - 3$ ，則頂點的相鄰三角形數必有以下特性：

**Lemma 1**：令  $G$  為正  $n$  邊形 ( $n \geq 4$ ) 的三角剖分圖，則存在相異兩頂點  $u, v \in V(G)$ ，滿足  $\Delta(u) = \Delta(v) = 1$  且  $u$  與  $v$  在  $G$  中不相連，意即  $uv \notin E(G)$ 。

**【證明】**：

考慮  $n = 4$  時，由於正 4 邊形的三角剖分圖僅有一條對角線； $n = 5$  時，由於正 5 邊形的三角剖分圖恰有兩條相鄰的對角線，所以兩者皆必存在不相連的兩頂點  $u, v$  使得  $\Delta(u) = \Delta(v) = 1$ 。故命題成立。

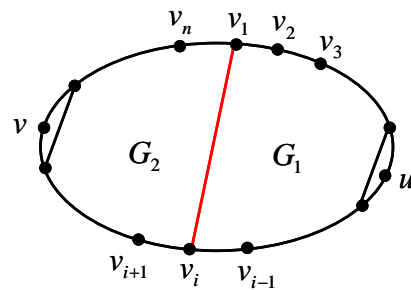
假設  $n \leq k$  ( $5 \leq k$ ) 時，命題皆成立。

考慮  $n = k + 1$ ，令  $G$  為正  $(k + 1)$  邊形的三角剖分圖，其中頂點依順時針依序為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。不失一般性，令  $v_1 v_i \in E(G)$  為對角線使得  $G$  可被分割成兩個非三角形的子圖  $G_1, G_2$ ，其中  $G_1$  與  $G_2$  分別是由頂點  $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$  與  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_1\}$  所生成的三角剖分圖。

根據歸納法假設，可知存在  $u \in V(G_1) \setminus \{v_1, v_i\}$ ，

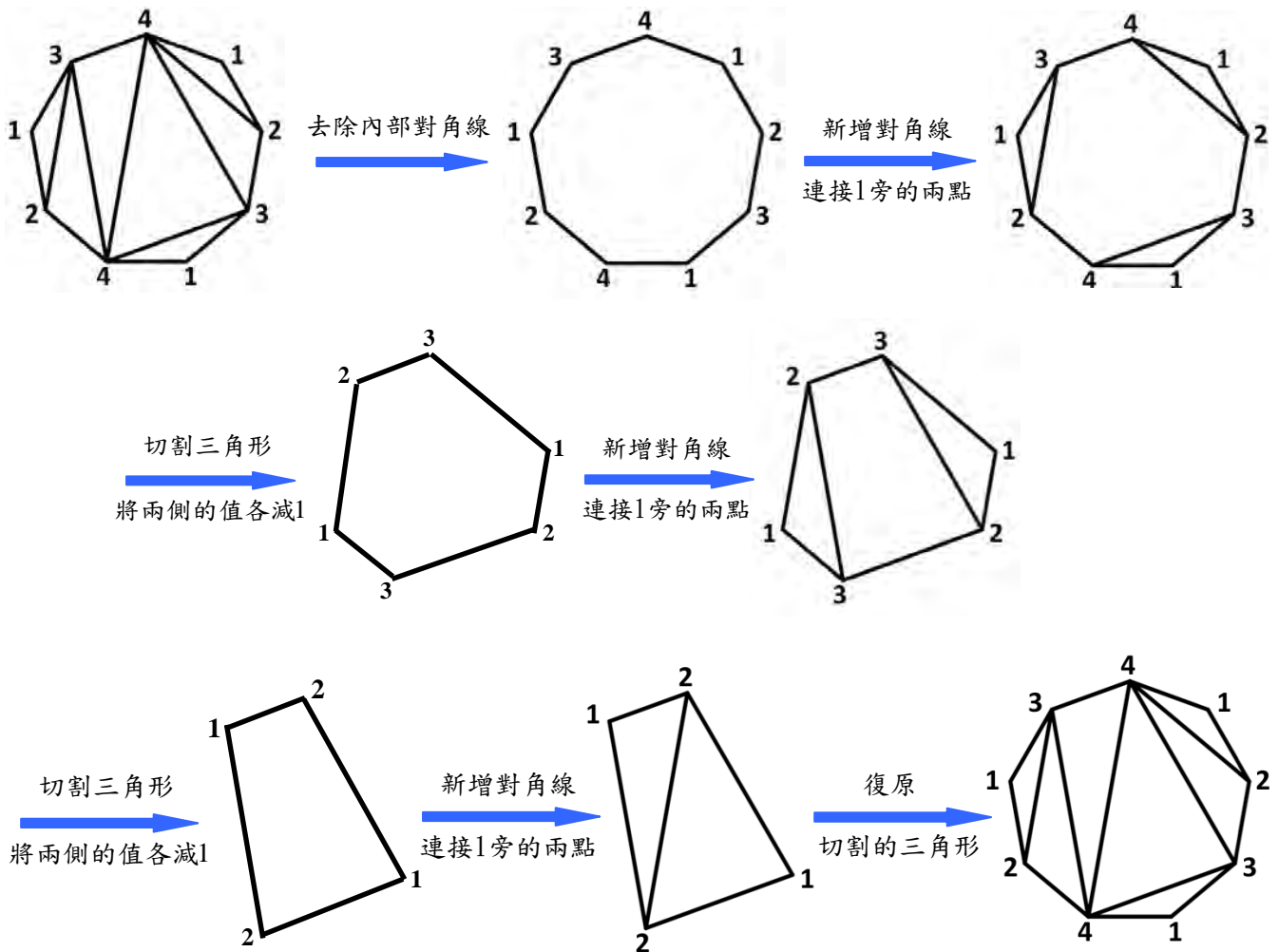
$v \in V(G_2) \setminus \{v_1, v_i\}$  滿足  $\Delta(u) = \Delta(v) = 1$  且  $uv \notin E(G)$ 。

故對於正  $(k + 1)$  邊形的三角剖分圖  $G$ ，命題亦成立。



根據數學歸納法得證，任意正  $n$  邊形 ( $n \geq 4$ ) 的三角剖分圖，存在不相鄰兩頂點  $u, v$  滿足  $\Delta(u) = \Delta(v) = 1$ 。 ■

以下我們先觀察正 9 邊形作為例子，用以說明給定各頂點的相鄰三角形數，則可依序建構出唯一的三角剖分圖。以下則為分解流程圖：



上述的例子給了我們一個啟示，透過數學歸納法，我們可以證明，若給定三角剖分圖  $G$  各頂點的相鄰三角形數，則可唯一決定三角剖分圖  $G$ 。因此我們有了以下定理：

**Theorem 1**：給定正  $n$  邊形 ( $n \geq 3$ ) 各頂點的相鄰三角形數，則唯一決定三角剖分圖  $G$ 。

**【證明】：**

當  $n = 3$  時，由於正 3 邊形本身即為三角剖分圖，故命題成立。

假設當  $n = k$  時，命題成立。

考慮  $n = k + 1$  時，正  $(k + 1)$  邊形中，令頂點依順時針分別為  $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ ，給定各頂點的相鄰三角形數  $\{\Delta(v_1), \Delta(v_2), \dots, \Delta(v_{k+1})\}$ ，令  $G$  為其三角剖分圖。

根據 Lemma 1，不失一般性，可令頂點  $v_{k+1} \in V(G)$ ，滿足  $\Delta(v_{k+1})=1$ 。

令  $G' = G - \{v_{k+1}\}$ ，則  $\{\Delta(v_1)-1, \Delta(v_2), \Delta(v_3), \dots, \Delta(v_{k-1}), \Delta(v_k)-1\}$  為  $G'$  各頂點的相鄰三角形數。

因為  $V(G') = k$ ，根據數學歸納法假設，可知各頂點的相鄰三角形數唯一決定三角剖分圖  $G'$ 。

由於  $G'$  被唯一決定，因此三角剖分圖  $G$  亦被唯一決定。

由此可知當  $n = k+1$  時，命題亦成立。

根據數學歸納法得證，給定各頂點的相鄰三角形數可唯一決定三角剖分圖。 ■

此外我們亦想研究，給定正  $n$  邊形，令其頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，給定一個  $n$  元自然數序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，則序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  需滿足什麼充分必要條件方可存在  $n$  個點的三角剖分圖  $G$ ，其中對任意  $i = 1 \sim n$ ，滿足  $\Delta(v_i) = a_i$ ？這意味著我們是否能夠找到一個有效的判斷法則，判別序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是否為某個三角剖分圖的相鄰三角形數序列？

已知當  $n = 3$  時，考慮正 3 邊形的三角剖分圖，則序列  $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$  即表示頂點的相鄰三角形數；已知當  $n = 4$  時，考慮正 4 邊形的三角剖分圖，則序列  $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 1, 2)$  即表示頂點的相鄰三角形數；已知當  $n = 5$  時，考慮正 5 邊形的三角剖分圖，則序列  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 3, 1, 2, 2)$  即表示頂點的相鄰三角形數。對於自然數  $n$  ( $n \geq 4$ )，我們提出序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  為相鄰三角形數序列的必要條件，同時我們亦提供一個遞迴式的判斷法則，可以有效的來判別自然數序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是否能決定三角剖分圖。我們將其結果表示為以下定理：

**Theorem 2**：給定正  $n$  邊形 ( $n \geq 4$ )，令其頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $v_0 = v_n$  與

$v_{n+1} = v_1$ 。對於自然數  $n$  元序列  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，有以下結論：

- (1) 若  $S_G$  為相鄰三角形數序列，則  $\sum_{i=1}^n a_i = 3n - 6$ ；
- (2) 若  $S_G$  為相鄰三角形數序列，則存在  $i \neq j$  且  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得  $a_i = a_j = 1$ ；
- (3) 若  $S_G$  為相鄰三角形數序列，則  $(a_i, a_{i+1}) \neq (1, 1)$ ， $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ；

(4) 若  $a_i = 1$ ，則

『 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  為相鄰三角形數序列』等價於『 $(a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$  為相鄰三角形數序列』。

(5) 若  $n \geq 5$  且  $S_G$  為恰兩元素為 1 的相鄰三角形數序列，其中  $a_i = 1$ ，則  $\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$  恰有一數值為 2。

**【證明】：**

(1) 令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，其相鄰三角形數序列  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，則  $G$  的内部恰包含  $n - 2$  個三角形。由於每一個內部三角形皆與 3 個頂點相鄰，因此  $\sum_{i=1}^n a_i = 3(n - 2)$ 。

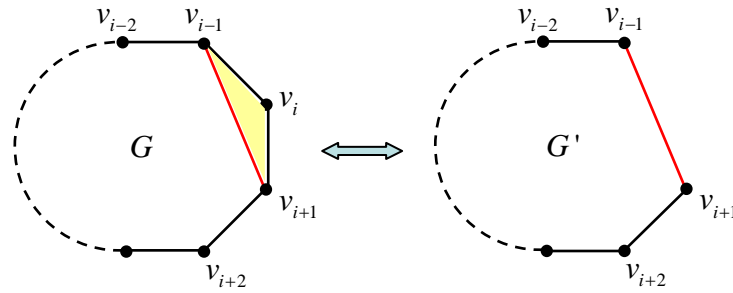
(2) 令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，其相鄰三角形數序列  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。  
根據 Lemma 1 可知，存在相異兩頂點  $u, v \in V(G)$ ，滿足  $\Delta(u) = \Delta(v) = 1$ 。  
這表示存在  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得  $a_i = a_j = 1$ 。

(3) 令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，其相鄰三角形數序列  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。  
若  $(a_i, a_{i+1}) = (1, 1)$ ，則  $v_i, v_{i+1}$  必不與任何對角線相鄰。這表示  $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$  所圍成的內部區域必然不為三角形，此與  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖矛盾。故相鄰三角形數序列  $S_G$  中，  
 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ， $(a_i, a_{i+1}) \neq (1, 1)$ 。

(4) ( $\Rightarrow$ )

令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，其相鄰三角形數序列為  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

因為  $a_i = 1$ ，根據先前 (3) 的推論可知  $a_{i-1} \neq 1$  且  $a_{i+1} \neq 1$ 。由此得知  $v_{i-1}v_{i+1} \in E(G)$ ，所以  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  必為外圍三角形的三頂點。考慮  $G$  刪除掉頂點  $v_i$  所形成的子圖  $G'$ ，其中  $V(G') = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ 。不難得知  $G'$  亦可視為三角剖分圖。因為在  $G'$  中  $v_{i-1}$  與  $v_{i+1}$  相鄰的三角形數皆比在  $G$  中減少 1，所以可知三角剖分圖  $G'$  的相鄰三角形數序列為  $S_{G'} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$ 。



( $\Leftarrow$ )

令  $S_{G'} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$ ， $S_{G'}$  為正  $(n-1)$  邊形三角剖分圖  $G'$  的相鄰三角形數序列，其中  $V(G') = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ 。考慮  $V(G) = V(G') \cup \{v_i\}$ ，其中  $E(G) = E(G') \cup \{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ ，則圖  $G$  可視為將三角剖分圖  $G'$  的邊緣新增一個三角形區域。故  $G$  亦為三角剖分圖，此時  $a_i = 1$  且  $v_{i-1}$  與  $v_{i+1}$  分別於  $a_{i-1}$  與  $a_{i+1}$  個內部三角形相鄰。因此三角剖分圖  $G$  的相鄰三角形數序列為  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

- (5) 由 (4) 可知  $S_{G'} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$  為相鄰三角形數序列。根據 (2) 可知  $S_{G'}$  中必存在兩相異元素的值為 1。根據 (3) 可知  $a_{i-1} \neq 1$  且  $a_{i+1} \neq 1$ ，因為  $a_i = 1$ ，所以  $\{a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i+2}, \dots, a_n\}$  恰有一個元素的值為 1，所以  $\{a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1\}$  恰有一數值為 1。故  $\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$  恰有一數值為 2。 ■

例如：(1) 考慮  $n = 5$ ，給定自然數 5 元序列  $(2, 3, 1, 2, 2)$ 。

因為此序列的各元素總和為  $2 + 3 + 1 + 2 + 2 = 10 \neq 3 \times 5 - 6 = 9$ ，所以根據 Theorem 2，可知序列  $(2, 3, 1, 2, 2)$  不為相鄰三角形數序列。

(2) 考慮  $n = 9$ ，給定自然數 9 元序列  $S_9 = (4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3)$ 。根據 Theorem 2 可知：

$S_9 = (4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3)$  等價  $S_8 = (3, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 3)$  為相鄰三角形數序列；

同理， $S_8 = (3, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 3)$  等價  $S_7 = (2, 2, 1, 4, 2, 1, 3)$  為相鄰三角形數序列；

同理， $S_7 = (2, 2, 1, 4, 2, 1, 3)$  等價  $S_6 = (2, 1, 3, 2, 1, 3)$  為相鄰三角形數序列；

同理， $S_6 = (2, 1, 3, 2, 1, 3)$  等價  $S_5 = (1, 2, 2, 1, 3)$  為相鄰三角形數序列；

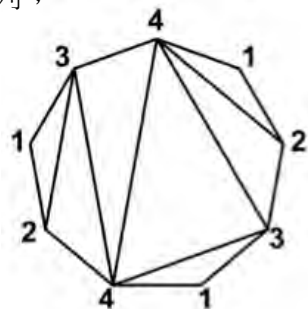
同理， $S_5 = (1, 2, 2, 1, 3)$  等價  $S_4 = (1, 2, 1, 2)$  為相鄰三角形數序列；

同理， $S_4 = (1, 2, 1, 2)$  等價  $S_3 = (1, 1, 1)$  為相鄰三角形數序列；

因為  $S_3 = (1, 1, 1)$  明顯為相鄰三角形數序列，故序列

$S_9 = (4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3)$  必為相鄰三角形數序列。意即，

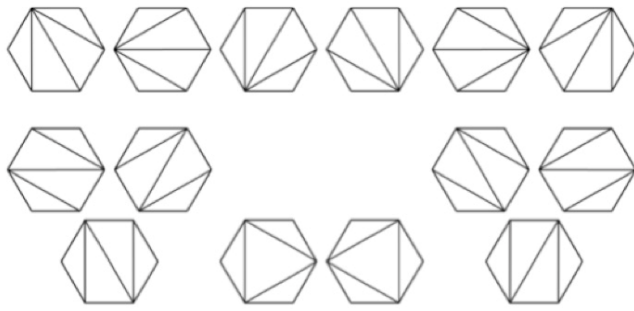
存在正 9 邊形的三角剖分圖使得各頂點的相鄰三角形數依序為 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3 (如上圖所示)。



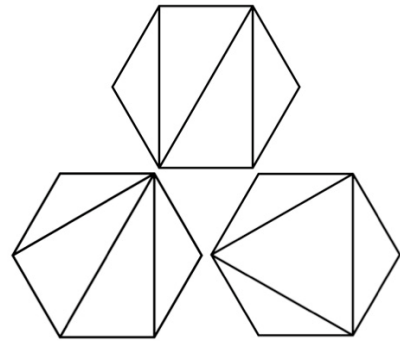
Theorem 2 主要提供了三個必要條件，用以來判斷一個自然數  $n$  元序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是否為某個正  $n$  邊形三角剖分圖的相鄰三角形數序列。由於 Theorem 2 中的 (1)、(2) 與 (3) 皆為必要條件而非充分條件，因此 Theorem 2 中的 (4) 提供了一個簡單的演算法用以來判斷自然數  $n$  元序列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是否為相鄰三角形數序列。在序列  $S_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  中，挑選元素為 1 的分量，將其從序列中刪除並且將相鄰兩項的值各減去 1，可得新的自然數  $(n-1)$  元序列  $S_{n-1}$ 。依序對  $S_{n-1}$  進行一樣的步驟，則可得新的自然數  $(n-2)$  元序列  $S_{n-2}$ 。重複此步驟，最後可得自然數 3 元序列  $S_3$ ，由於正 3 邊形三角剖分圖有唯一的相鄰三角形數序列  $(1, 1, 1)$ ，若序列  $S_3 = (1, 1, 1)$ ，則表示原始序列  $S_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  即為相鄰三角形數序列；反之，若序列  $S_3 \neq (1, 1, 1)$ ，則表示原始序列  $S_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  不為相鄰三角形數序列。這說明了自然數 3 元序列  $S_3 = (1, 1, 1)$  即為序列  $S_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  為相鄰三角形數序列的充分必要條件。由此可設計一個有效率的演算法，用以來判別相鄰三角形數序列的可能性。

### 三、不同構三角剖分以對稱分類

在卡特蘭數中定義過，將  $catalan(n-2)$  表示為正  $n$  邊形的三角剖分數，但他所計算的個數中旋轉與翻轉皆視為不同的情形，而以下我們欲探討的正  $n$  邊形的三角剖分數，將視旋轉與翻轉為相同結構，意即我們探討的是不同構三角剖分情形的總數。



(正6邊形三角剖分的情形，共14種)



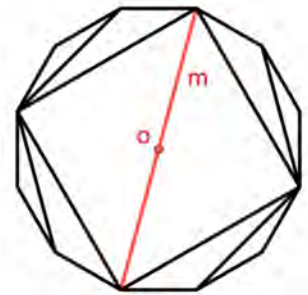
(正6邊形不同構三角剖分，共3種)

以下我們將針對不同構三角剖分圖的對稱性來進行分類討論，將不同對稱類型的不同構三角剖分數建立與卡特蘭數的關係，進一步得到一般通式。

### 對稱分類

我們將所有不同構三角剖分圖依對稱性質進行分類，並依序命名為『完全對稱』、『星形對稱』、『點對稱』、『旋轉對稱』、『線對稱』以及『不對稱』。以下我們將針對每一種對稱分類加以說明。

**完全對稱**：給定一個正  $n$  邊形的三角剖分圖，若沿中線  $m$  對折，會互相重合，並從中點  $o$  旋轉  $180^\circ$  後會和原圖完全重合，則我們將其定義為『完全對稱』。所有正  $n$  邊形所形成的完全對稱的三角剖分圖數量定義為『完全對稱數』，以符號『 $Q_n$ 』表示。



**完全對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有完全對稱的不同構三角剖分圖數量，將其定義為『完全對稱數』，以符號『 $Q_n$ 』表示。

**星形對稱**：給定一個正  $n$  邊形的三角剖分圖，若對折後會互相重合，且將其平均分成形式相同的三部分，從中點  $o$  旋轉  $120^\circ$  後能與原圖完全重合，則我們將其定義為『星形對稱』。



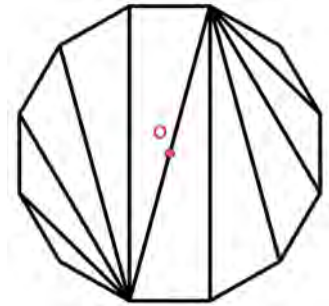


所有正  $n$  邊形所形成的星形對稱的三角剖分圖數量定義為

『星形對稱數』，以符號『 $S_n$ 』表示。

**星形對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有星形對稱的不同構三角剖分圖數量，將其定義為『星形對稱數』，以符號『 $S_n$ 』表示。

**點對稱**：給定一個正  $n$  邊形的三角剖分圖，若從中點  $o$  旋轉  $180^\circ$  後會和原圖完全重合，且非『完全對稱』的圖形，則我們將其定義為『點對稱』。所有正  $n$  邊形所形成的點對稱的三角剖分圖數量定義為『點對稱數』，以符號『 $R_n$ 』表示。



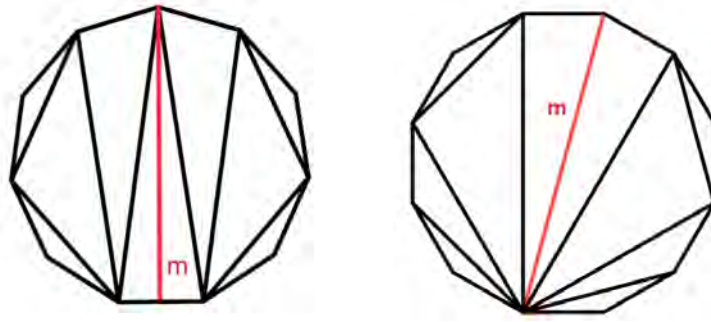
**點對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有點對稱的不同構三角剖分圖的數量，將其定義為『點對稱數』，以符號『 $R_n$ 』表示。

**旋轉對稱**：給定一個正  $n$  邊形的三角剖分圖，若可平均分成形式相同的三部分，從中點  $o$  旋轉  $120^\circ$  後能和原圖完全重合，且非『星形對稱』的圖形，則我們將其定義為『旋轉對稱』。而所有正  $n$  邊形所形成的旋轉對稱的三角剖分圖數量定義為『旋轉對稱數』，以符號『 $W_n$ 』表示。



**旋轉對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有旋轉對稱的不同構三角剖分圖數量，將其定義為『旋轉對稱數』，以符號『 $W_n$ 』表示。

**線對稱**：給定一個正  $n$  邊形三角剖分圖，若沿中線  $m$  對折後會互相重合，且非『完全對稱』亦非『星形對稱』的圖形後，則將其定義為『線對稱』。將所有正  $n$  邊形所形成的線對稱的三角剖分數量定義為『線對稱數』，以符號『 $A_n$ 』表示。



**線對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有線對稱的不同構三角剖分圖的數量，將其定義為『線對稱數』，以符號『 $A_n$ 』表示。

**不對稱**：給定一個正  $n$  邊形的三角剖分圖，若不屬於完全對稱、星形對稱、點對稱、旋轉對稱和線對稱的三角剖分圖，則我們將其定義為『不對稱』。所有正  $n$  邊形所形成的不對稱的三角剖分圖數量定義為『不對稱數』，以符號『 $U_n$ 』表示。

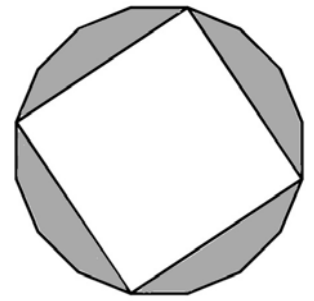
**不對稱數**：給定一個正  $n$  邊形，考慮所有具有不對稱的不同構三角剖分圖數量，將其定義為『不對稱數』，以符號『 $U_n$ 』表示。

研究初期，我們畫出正 4 邊形到正 10 邊形所有的不同構三角剖分圖，將其分成『完全對稱』、『星形對稱』、『點對稱』、『旋轉對稱』、『線對稱』以及『不對稱』。製表如下所示，進一步試圖從中尋找各對稱類型的不同構三角剖分圖在數量上的規律與特性：

$n$ 邊形	線對稱 ( $A_n$ )	點對稱 ( $R_n$ )	旋轉對稱 ( $W_n$ )	完全對稱 ( $Q_n$ )	星形對稱 ( $S_n$ )	不對稱 ( $U_n$ )
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	1	0
7	2	0	0	0	0	2
8	4	2	0	1	0	5
9	5	0	1	0	0	21
10	14	7	0	0	0	61

### 完全對稱 $Q_n$

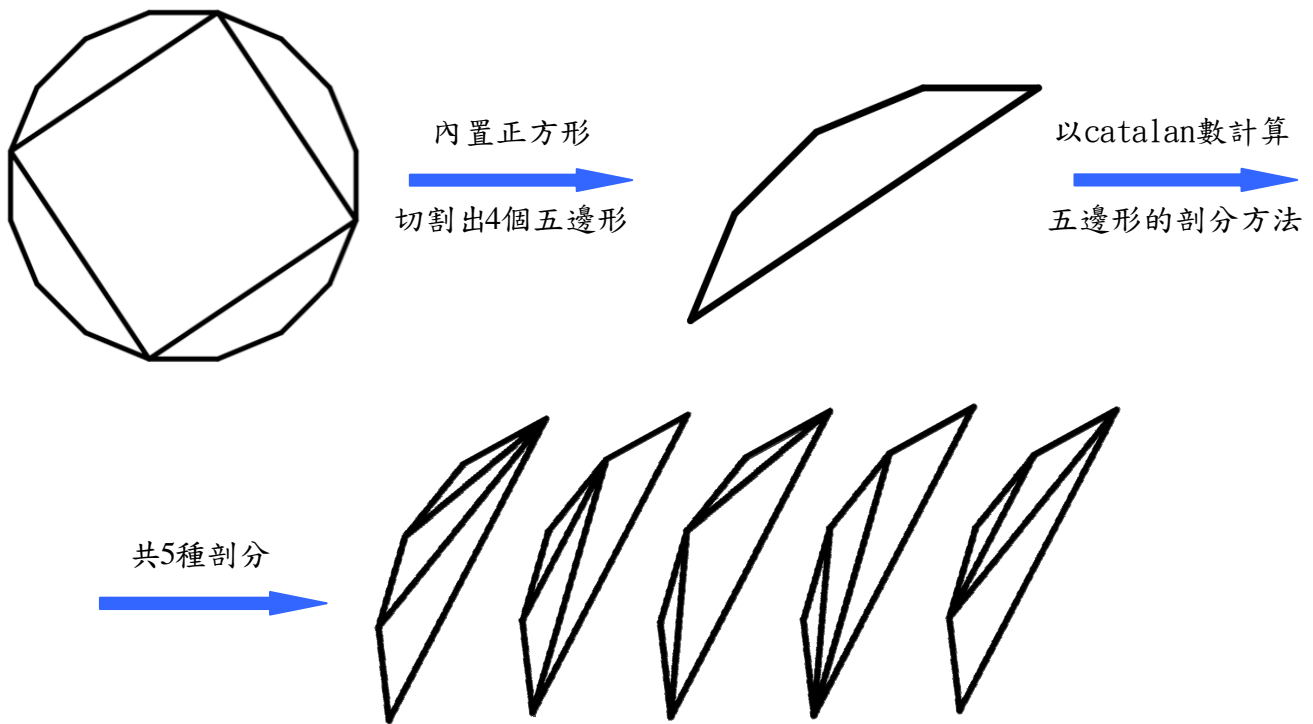
完全對稱只會在  $n$  為 4 的倍數時出現，而在探討數量時，我們將中間由兩個三角形組成的 4 邊形固定不變，切出  $n$  邊形周遭的  $(\frac{n}{4}+1)$  邊形進行討論：



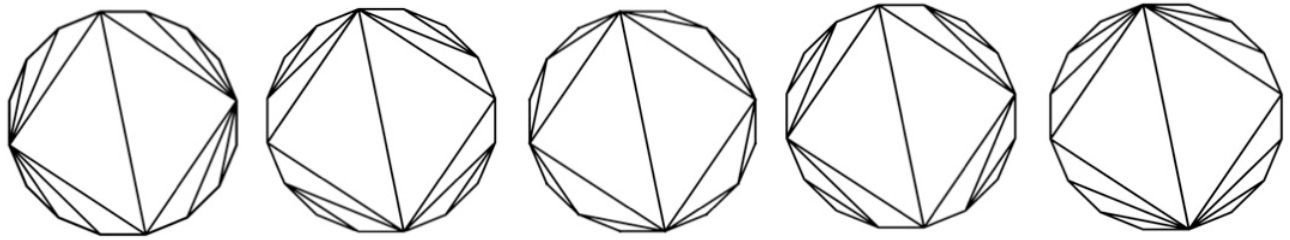
因為此圖形必須既是線對稱又是點對稱，所以切割出的 4 個  $(\frac{n}{4}+1)$  邊形必為相同的剖分方法，才能使中線兩旁的部分能互相重合又能在旋轉  $180^\circ$  後和原圖完全重合，因此我們可以得知，只要計算出  $(\frac{n}{4}+1)$  邊形包含翻轉和旋轉的三角剖分數量（即是  $catalan\left(\left(\frac{n+4}{4}\right)-2\right)$ ），即可求出  $n$  邊形完全對稱的數量，因此我們可以得到：

$$\text{『若 } \frac{n}{4} \in \mathbb{N} \text{，則 } Q_n = catalan\left(\left(\frac{n+4}{4}\right)-2\right) \text{；但若 } \frac{n}{4} \notin \mathbb{N} \text{，則 } Q_n = 0 \text{』}$$

例如：以 16 邊形為例：



因此可得到  $Q_{16} = 5$ ，五種完全對稱的三角剖分圖如下圖所示。



**結論 1**：若  $\frac{n}{4} \in \mathbb{N}$ ，則  $Q_n = catalan\left(\frac{n+4}{4}-2\right)$ ；若  $\frac{n}{4} \notin \mathbb{N}$ ，則  $Q_n = 0$ 。

**星形對稱  $S_n$**

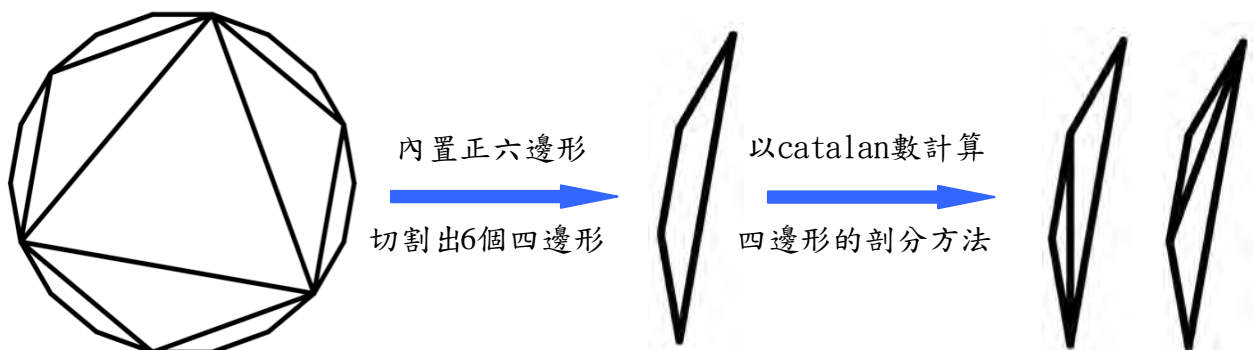
星形對稱只會在  $n$  為 6 的倍數時出現，而在探討數量時，我們將中間包含一個正三角形的正 6 邊形固定不變，並切出  $n$  邊形周遭的  $(\frac{n}{6}+1)$  邊形進行討論：



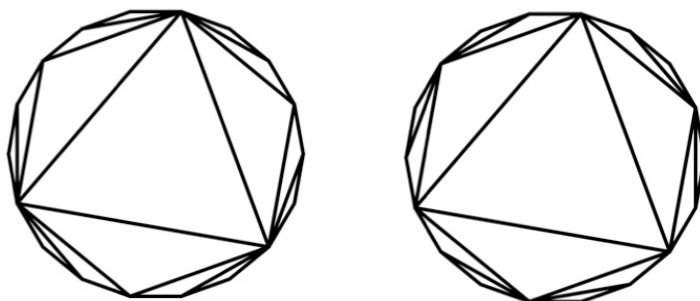
因為此圖形必須既是線對稱又是旋轉對稱，所以切割出的  $(\frac{n}{6}+1)$  邊形必須完全相同，才能使其旋轉  $120^\circ$  後和原圖相同又定正三角形其中一點對折會重合，因此我們可以得知，只要計算出  $(\frac{n}{6}+1)$  邊形包含翻轉和旋轉的三角剖分數量（即是  $catalan\left(\frac{n+6}{6}-2\right)$ ），即可求出  $n$  邊形星形對稱的數量，因此我們可以得到：

『若  $n$  邊形的  $\frac{n}{6} \in \mathbb{N}$ ，則  $S_n = catalan\left(\frac{n+6}{6}-2\right)$ ；但若  $n$  邊形的  $\frac{n}{6} \notin \mathbb{N}$ ，則  $S_n = 0$ 』

例如：以 18 邊形為例：



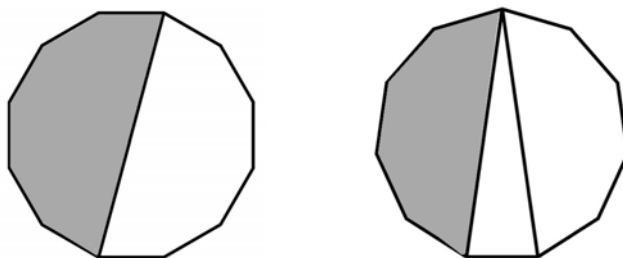
因此可得到  $S_{18} = 2$ ，兩種星形對稱的三角剖分圖如下圖所示。



**結論 2：**若  $\frac{n}{6} \in \mathbb{N}$ ，則  $S_n = catalan\left(\frac{n+6}{6}-2\right)$ ；若  $\frac{n}{6} \notin \mathbb{N}$ ，則  $S_n = 0$ 。

### 線對稱 $A_n$

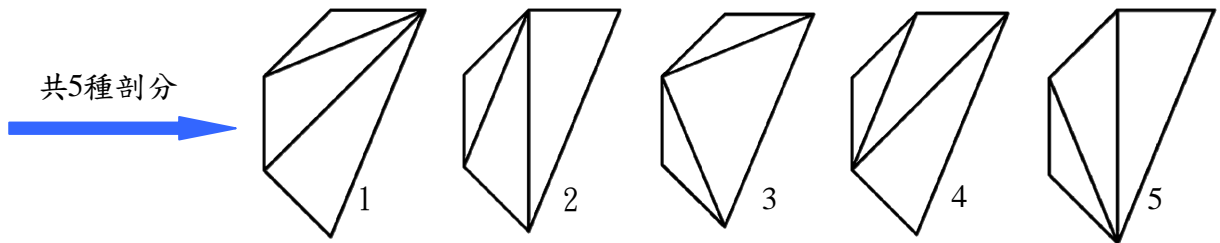
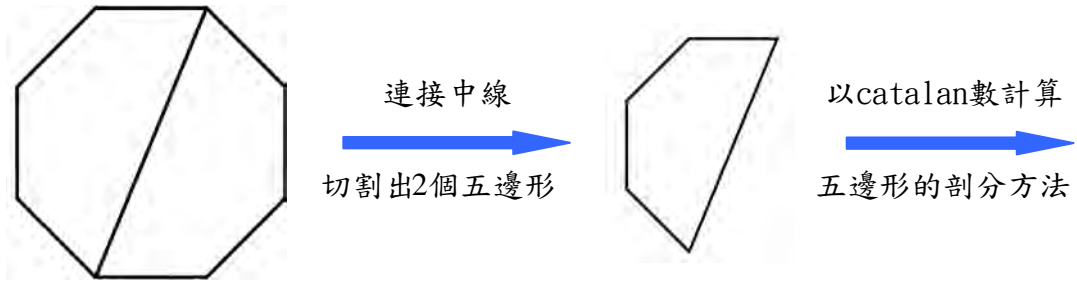
在探討線對稱時，我們將其分成一半，切出  $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$  邊形討論：



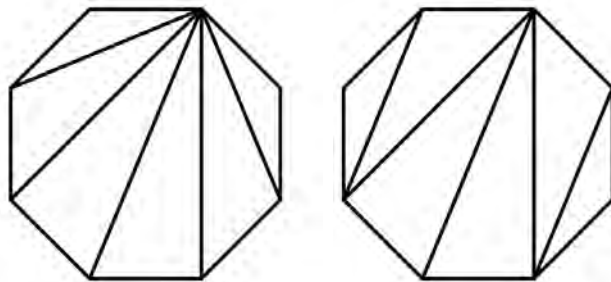
因為此圖形以中線對折必重合，所以我們用切割出的  $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$  邊形討論，依照完全對稱和旋轉對稱的想法來看，我們一樣算出  $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$  邊形包含翻轉和旋轉的三角剖分數量（即是  $catalan\left(\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - 2\right)$ ），而其中會產生翻轉相同，需除以 2，但將中線轉向後，會產生另一種形式的線對稱，因此將其再乘以 2，消去前面的除以 2，則由於其中還會包含完全對稱和星形對稱，因此要將其減去，最後得到算式：

$$\text{『 } A_n = catalan\left(\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - 2\right) - Q_n - S_n \text{ 』}$$

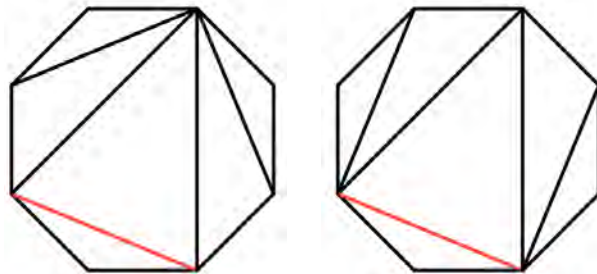
例如：以8邊形為例：



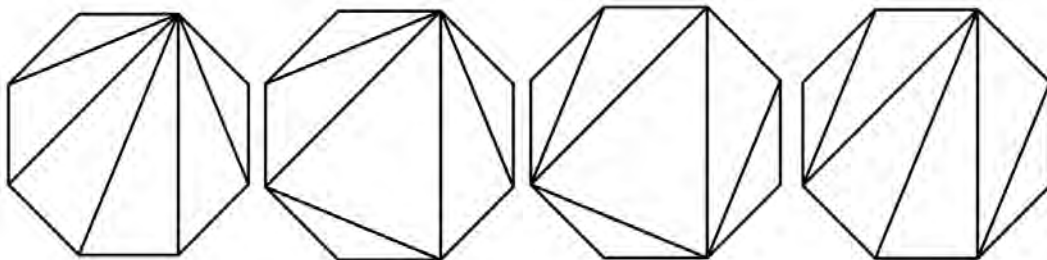
1與5，2與4形成的圖形為同構  
3形成的圖形為完全對稱  
有2個不同構剖分



改變中線位置  
使中間形成等腰三角形  
有2個不同構剖分



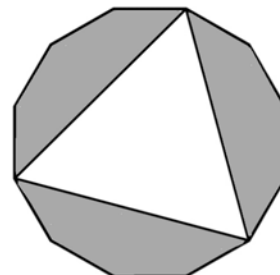
因此可得到  $A_8 = 4$ ，四種線對稱的三角剖分圖如下圖所示。



**結論 3 :**  $A_n = catalan\left(\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - 2\right) - Q_n - S_n$ 。

**旋轉對稱  $W_n$**

旋轉對稱只會在  $n$  為 3 的倍數時出現，中間形成一個正三角形，  
 在探討數量時，我們將中間的三角形固定不變，從旁邊切割出  $\left(\frac{n}{3} + 1\right)$   
 邊形討論：

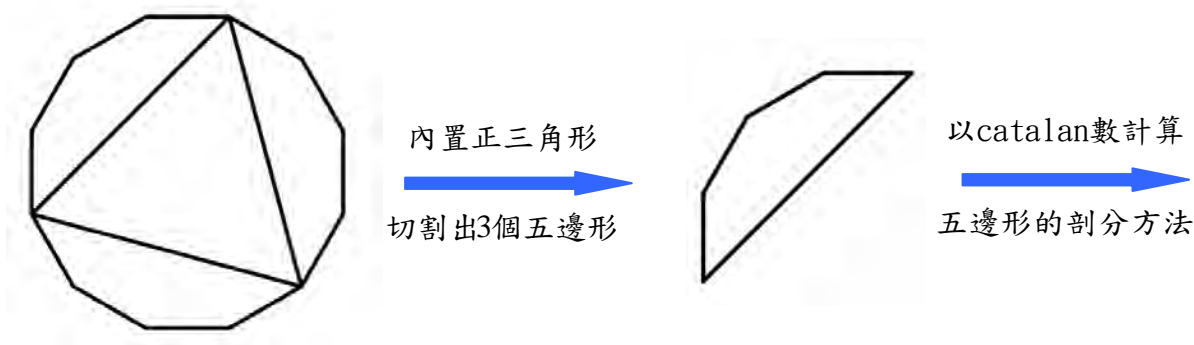


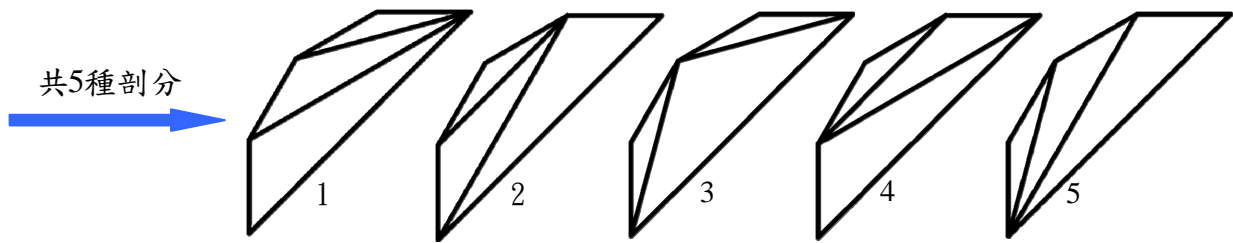
因為其旋轉  $120^\circ$  後會和原圖完全重合，則只要計算出此  $\left(\frac{n}{3} + 1\right)$  邊形包含翻轉和旋轉的三角  
 剖分數量（即是  $catalan\left(\left(\frac{n+3}{3}\right) - 2\right)$ ），而其中若  $\frac{n+3}{3}$  為奇數便會包含星形對稱，則欲形成星形  
 對稱， $\frac{n+3}{3}$  邊形必為線對稱，因此可將其扣除（即是扣除  $A_{\frac{n+3}{3}}$ ），但其中還會產生翻轉相同，所  
 以需除以 2，最後可以從上述得到算式：

『若  $\frac{n}{3}$  為偶數，則  $W_n = \frac{1}{2} \left( catalan\left(\left(\frac{n+3}{3}\right) - 2\right) - A_{\frac{n+3}{3}} \right)$  ；

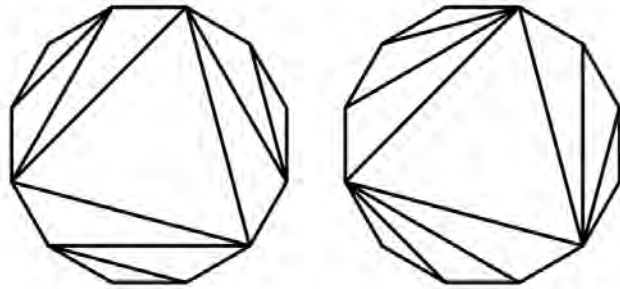
『若  $\frac{n}{3}$  為奇數，則  $W_n = \frac{1}{2} catalan\left(\left(\frac{n+3}{3}\right) - 2\right)$ ；但若  $\frac{n}{3} \notin \mathbb{N}$ ，則  $W_n = 0$  』

例如：以 12 邊形為例：

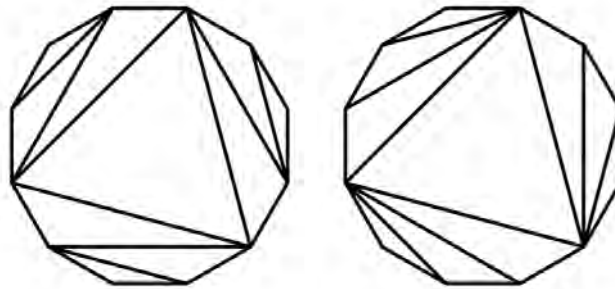




1與5，2與4形成的圖形為同構  
3形成的圖形為星形對稱  
有2個不同構剖分



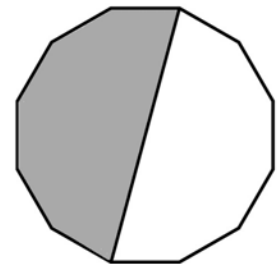
因此可得到  $W_{12} = 2$ ，兩種旋轉對稱的三角剖分圖如下圖所示。



**結論 4：** 若  $\frac{n}{3}$  為偶數，則  $W_n = \frac{1}{2} \left( catalan \left( \left( \frac{n+3}{3} \right) - 2 \right) - A_{\frac{n+3}{3}} \right)$  ；  
 若  $\frac{n}{3}$  為奇數，則  $W_n = \frac{1}{2} catalan \left( \left( \frac{n+3}{3} \right) - 2 \right)$  ；  
 若  $\frac{n}{3} \notin \mathbb{N}$ ，則  $W_n = 0$  。

**點對稱  $R_n$**

點對稱只會在  $n$  為 2 的倍數時出現，在探討數量時，我們將其分成一半，切出  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  邊形討論：

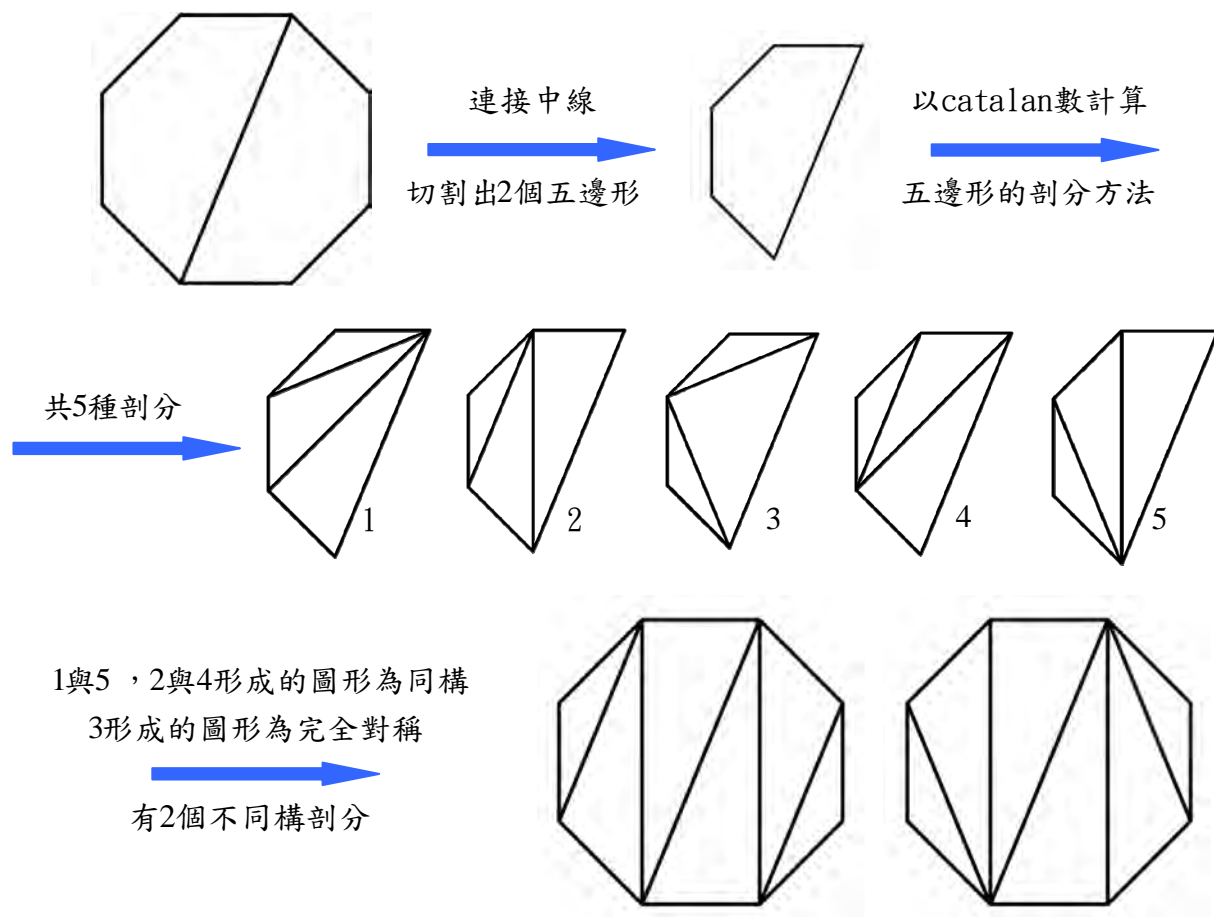




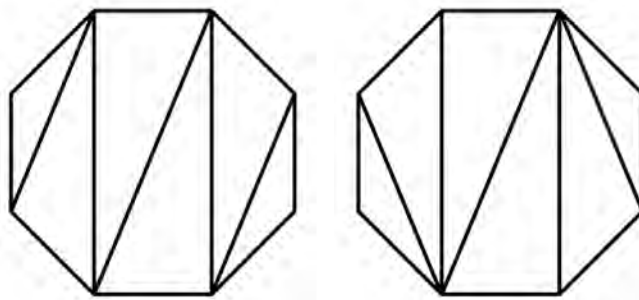
因為此圖形旋轉 $180^\circ$ 後和原圖須完全重合，所以我們用切割出的 $(\frac{n}{2}+1)$ 邊形討論，算出 $(\frac{n}{2}+1)$ 邊形包含翻轉和旋轉的三角剖分數量（即是 $catalan\left(\left(\frac{n+2}{2}\right)-2\right)$ ），其中包含完全對稱，因此需將其扣除（即扣除 $Q_n$ ），而其中還會產生翻轉相同，需再除以2，經過上述的討論後，可以得到算式：

$$\lceil R_n = \frac{1}{2} \left( catalan\left(\left(\frac{n+2}{2}\right)-2\right) - Q_n \right) \rceil$$

例如：以8邊形為例：

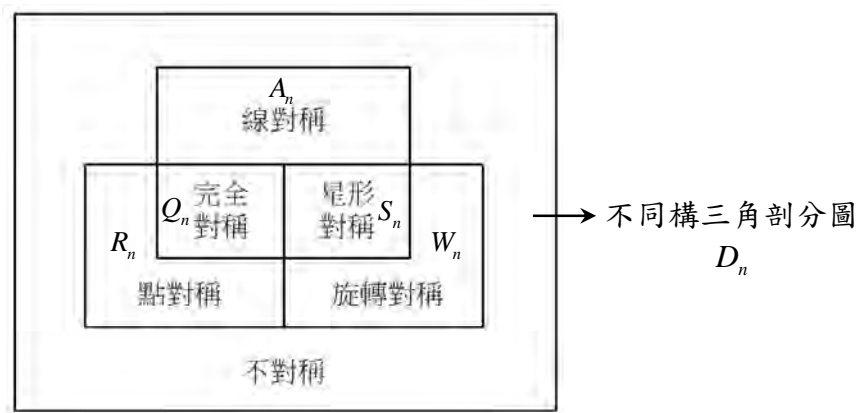


因此可得 $R_8 = 2$ ，兩種點對稱的三角剖分圖如下圖所示。



**結論 5：**若  $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ，則  $R_n = \frac{1}{2} \left( \text{catalan} \left( \frac{n+2}{2} \right) - 2 \right) - Q_n$ ；若  $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ ，則  $R_n = 0$ 。

對於不同構的三角剖分圖，有關『線對稱  $A_n$ 』、『點對稱  $R_n$ 』、『旋轉對稱  $W_n$ 』、『完全對稱  $Q_n$ 』以及『星形對稱  $S_n$ 』之間的關係，可以用文氏圖表示如下：



在以眾多不同對稱類型的三角剖分數之後，我們欲持續研究一般不同構三角剖分數  $D_n$  的精確值與其他特殊分類。

### 化學式 $C_n H_{n+2}$ 和不同構三角剖分數 $D_{n+2}$ 的相關性

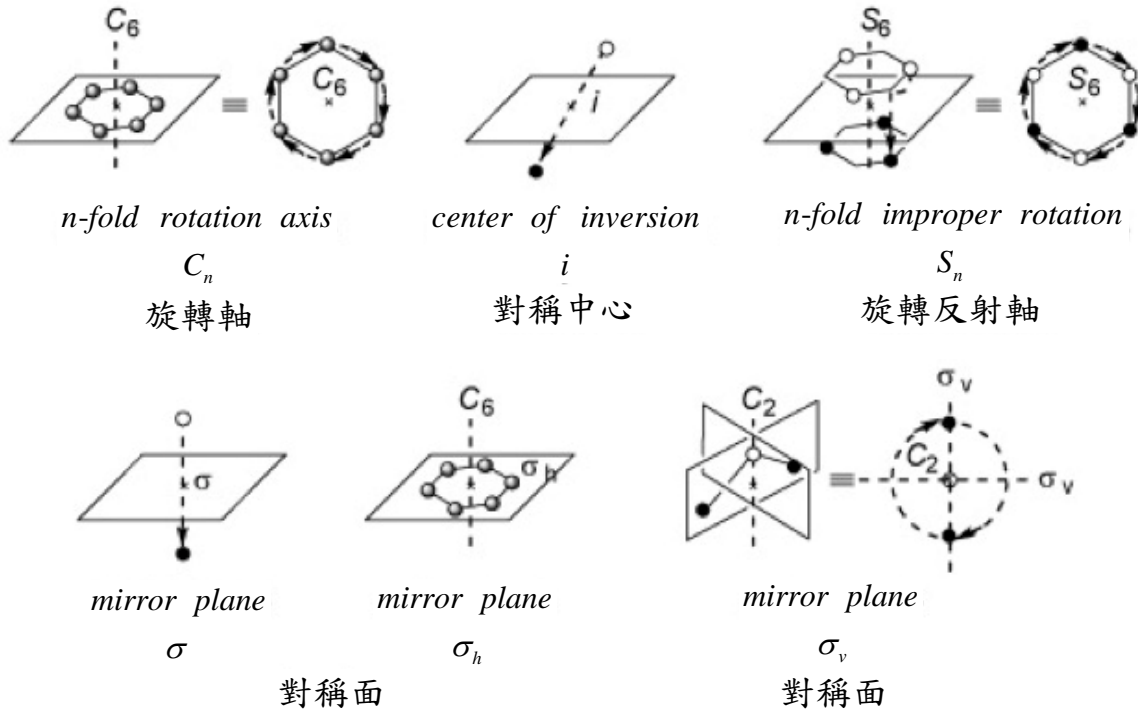
在搜索資料的過程中，我們發現『化學式  $C_n H_{n+2}$  的同分異構物』和『不同構三角剖分數  $D_{n+2}$ 』有相同的數值，因此我們欲找出兩者之間的關聯性，如下表格所示：

正 $n$ 邊形不同構三角剖分的對稱分類							
$n$ 邊形	線對稱 ( $A_n$ )	點對稱 ( $R_n$ )	旋轉對稱 ( $W_n$ )	完全對稱 ( $Q_n$ )	星形對稱 ( $S_n$ )	不對稱 ( $U_n$ )	總數 $D_n$
$n = 4$	0	0	0	1	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	1	0	0	1	0	3
7	2	0	0	0	0	2	4
8	4	2	0	1	0	5	12
9	5	0	1	0	0	21	27
10	14	7	0	0	0	61	82
11	14	0	0	0	0	214	228
12	39	20	2	2	1	669	733

$C_n H_{n+2}$ 同分異構物的點群分類							
$C_n H_{n+2}$	$C_{2v}$	$C_{2h}$	$C_{3h}$	$D_{2h}$	$D_{3h}$	$C_s$	總數
$n = 2$	0	0	0	1	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	1
4	1	1	0	0	1	0	3
5	2	0	0	0	0	2	4
6	4	2	0	1	0	5	12
7	5	0	1	0	0	21	27
8	14	7	0	0	0	61	82
9	14	0	0	0	0	214	228
10	39	20	2	2	1	669	733

上面的第二個表格是  $C_n H_{n+2}$  的化學結構式以不同對稱為分類的各個數量，化學式  $C_n H_{n+2}$  中 C 代表碳原子，H 代表氫原子，不同的分類則稱為『點群』，而這些分類主要依據該分子是否存在『旋轉軸』、『對稱面』、『對稱中心』及『旋轉反射軸』來做判斷。可讓分子繞著旋轉一定角度使分子復原的軸就為『旋轉軸』(axis of rotation)， $n$  次旋轉軸記為『 $C_n$ 』，使物體復原的最小旋轉角 ( $0^\circ$  除外) 稱為『基轉角  $\alpha$ 』， $C_n$  軸的基轉角  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ，而分子中若有多個旋轉軸，軸次  $n$  最高的軸一般稱為『主軸』；『對稱面』(plane of symmetry) 則是平分分子的平面，在分子中除位於鏡面上的原子外，其他成對地排在鏡面兩側，記為『 $\sigma$ 』，其中和主軸垂直的對稱面稱為水平

鏡面以『 $\sigma_h$ 』表示、通過主軸與分子平面垂直的對稱面則稱為垂直鏡面以『 $\sigma_v$ 』表示；從分子中任一原子到分子中心連直線，若延長至中心另一側相等距離處有一個相同原子，且對所有原子都成立，則該中心稱為『對稱中心』(center of symmetry)，以『 $i$ 』表示；『旋轉反射軸』(rotary-reflection axis)則代表使分子繞軸旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，再相對垂直於軸的平面進行反射後可讓分子形成等價圖形的軸，記為『 $S_n$ 』。



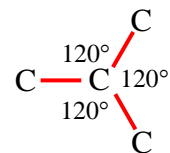
$C_{2v}$  為具有旋轉軸  $C_2$  及對稱面  $\sigma_v$  的化學結構； $C_{2h}$  包含旋轉軸  $C_2$ 、對稱面  $\sigma_h$  及對稱中心  $i$ ； $C_{3h}$  的化學結構式則具旋轉軸  $C_3$ 、對稱面  $\sigma_h$  及旋轉反映軸  $S_3$ ；而  $D_{2h}$  的結構有旋轉軸  $C_2$ 、對稱中心  $i$  和對稱面  $\sigma$ ； $D_{3h}$  為包含旋轉軸  $C_2$ 、 $C_3$ ，對稱面  $\sigma_h$ 、 $\sigma_v$  及旋轉反映軸  $S_3$  的化學結構；最後， $C_s$  則為具對稱面  $\sigma_h$  的結構式。

由上述表格可看出當  $n = 2 \sim 10$  時，『 $C_n H_{n+2}$  的同分異構物』與『正  $(n+2)$  邊形不同構三角剖分』的數量具有一致性，以下我們將刻畫這兩者之間的一一對應關係，利用三角剖分建構出  $C_n H_{n+2}$  的結構式。其中對應關係有以下初步的原則：

(原則 1)：三角剖分圖  $G$  中的每一個三角形皆對應到一個碳原子  $C$ ，因此正  $(n+2)$  邊形的三角剖分圖將對應  $n$  個碳原子。

(原則 2)：若  $G$  中的兩個三角形有共同邊，則對應的兩個碳原子之間具有化學鍵結。  $C - C$

(原則 3)：若兩個化學鍵同時連結相同的碳原子，則此兩個化學鍵夾  $120^\circ$ 。

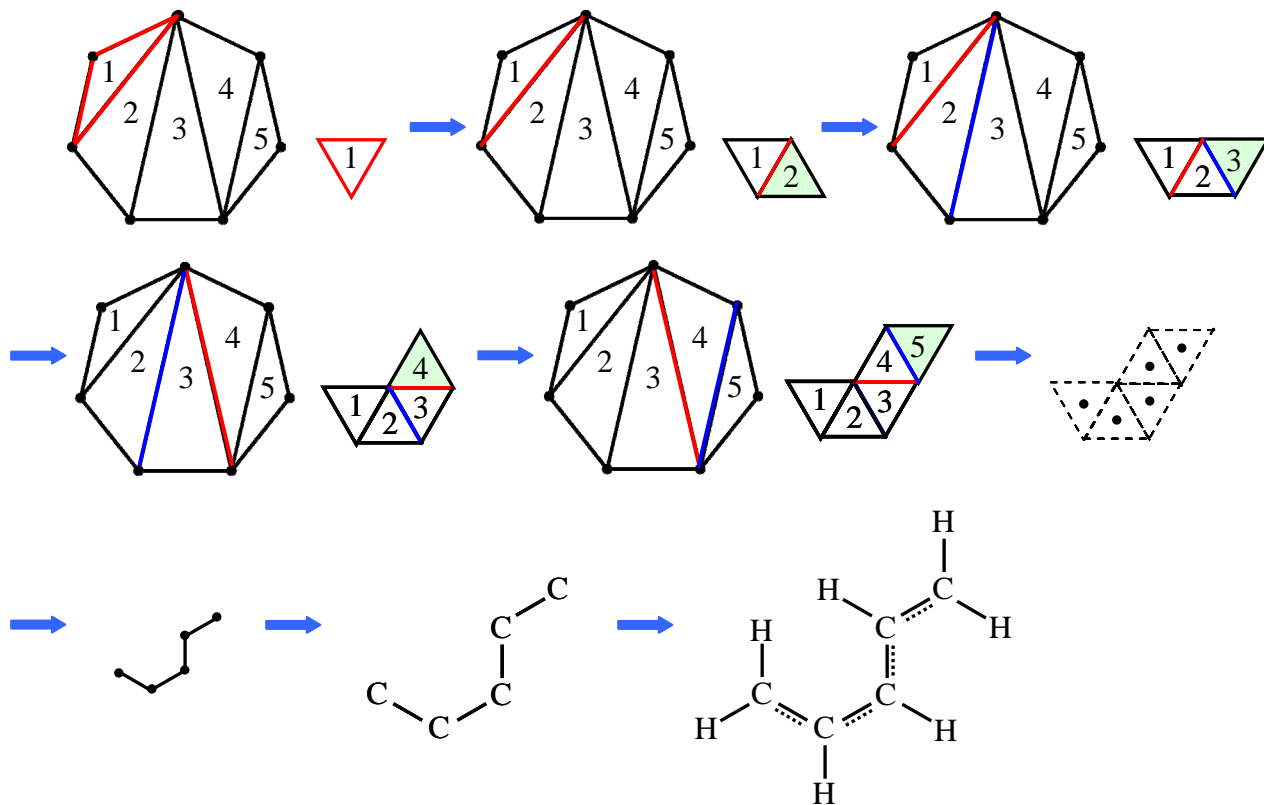


(原則 4)：將三角剖分圖內的每個三角形調整為正三角形，並維持所有三角形的相鄰關係，保持原本的相對位置，則各正三角形的重心即可決定碳原子的骨架。

(原則 5)：依照碳原子的骨架，決定單鍵、雙鍵以及共振鍵的位置，同時氫原子的鍵結位置也將隨之決定，即可建構出  $C_nH_{n+2}$  的結構式（碳原子的骨架即決定  $C_nH_{n+2}$  的結構式）。

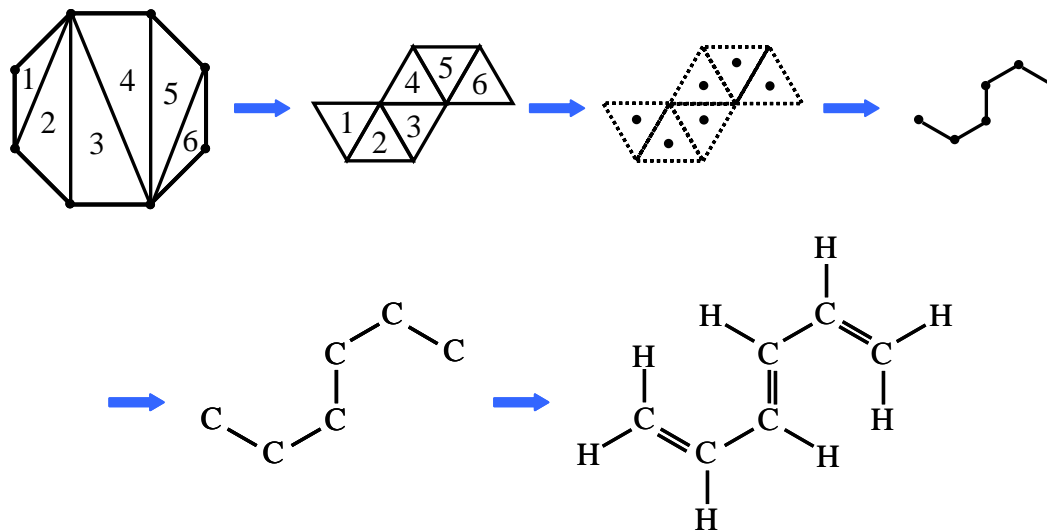
例如：

(1) 利用上述五大原則，給定正 7 邊形的一個三角剖分，即可依序建構出碳原子骨架，進一步決定一個  $C_5H_7$  的結構式。



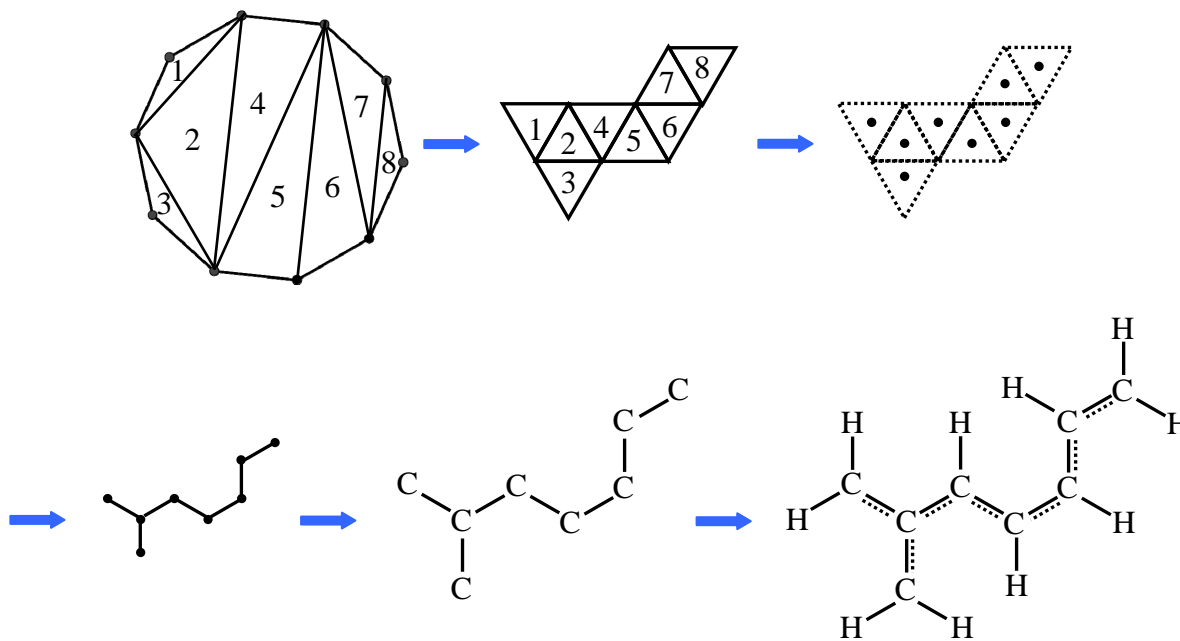
(由正 7 邊形三角剖分圖對應  $C_5H_7$  結構式)

(2) 給定正8邊形的一個三角剖分，可建構出碳原子骨架，進一步決定一個 $C_6H_8$ 的結構式。



(由正8邊形三角剖分圖對應 $C_6H_8$ 結構式)

(3) 給定正10邊形的一個三角剖分，可建構出碳原子骨架，進一步決定一個 $C_8H_{10}$ 的結構式。



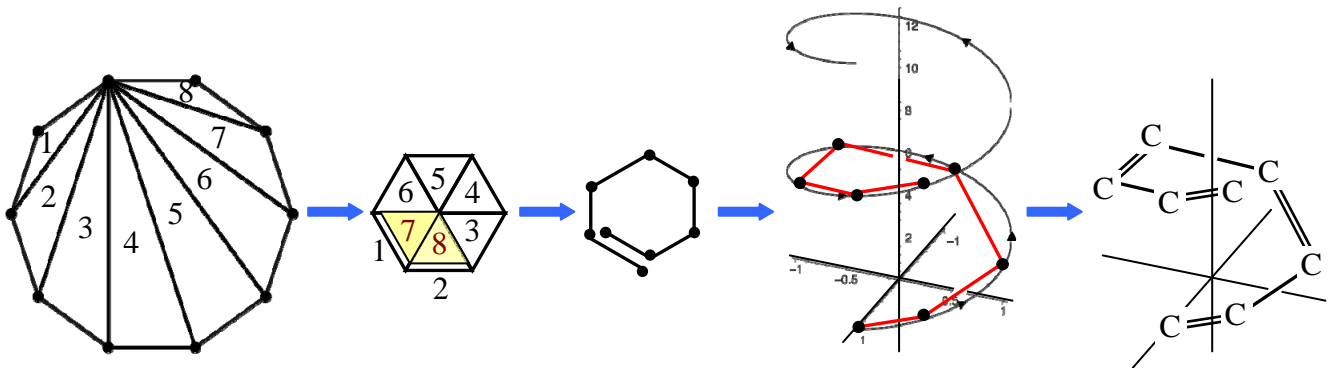
(由正10邊形三角剖分圖對應 $C_8H_{10}$ 結構式)

原則 4 中說明著三角形的相對位置，將決定碳原子之間鍵結的方位。然而三角剖分圖中，從兩個有共同邊的三角形相對位置，即可決定兩個化學鍵之間的相對方位。給定三角剖分圖  $G$ ，

令  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  皆為  $G$  內部的三角形，其中  $\Delta$  分別皆與  $\Delta_1, \Delta_2$  相鄰（有共同邊）， $\Delta$  與  $\Delta_1, \Delta_2$  的共同邊分別為  $e_1, e_2$ 。考慮  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  對應的碳原子分別為  $C, C_1, C_2$ 。若  $e_1, e_2$  在  $\Delta$  的周圍上形成順時針方向的連續兩個邊，則  $C$  與  $C_1, C_2$  的化學鍵形成『Type-1』；若  $e_1, e_2$  在  $\Delta$  的周圍上形成逆時針方向的連續兩個邊，則  $C$  與  $C_1, C_2$  的化學鍵形成『Type-2』，如下圖所示。

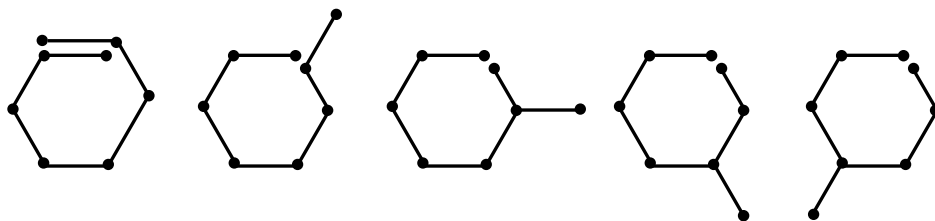


由三角剖分圖  $G$  對應至化學結構式的過程中，將  $G$  內部的三角形調整為正三角形時，因為角度的限制，雖然  $G$  為平面圖，但當有一點連出大於等於 6 條對角線時，將內部調整為正三角形後，則為立體的圖形，為了在平面上表達這樣的情形，我們透過些許的調整，將碳原子的骨架以平行線表示，但實際上所對應的化學結構式是立體螺弦狀。



(由正 10 邊形三角剖分圖對應  $C_8H_{10}$  的立體結構式)

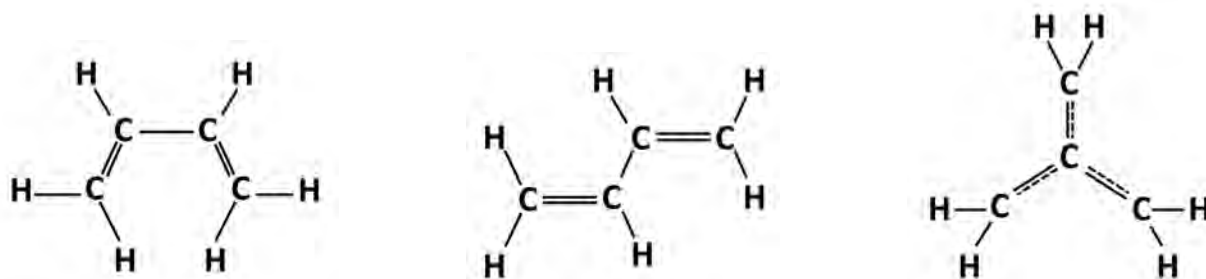
事實上，所有的正 10 邊形三角剖分圖中，共可對應出 5 種  $C_8H_{10}$  的立體結構式。



( $C_8H_{10}$  的 5 種立體碳原子骨架)

上述由三角剖分圖轉換為化學結構式的例子中，碳原子的骨架若為平面圖，我們將此稱為平面化（geometrically planar）的結構式。然而在轉換的過程中，當  $n \geq 7$  時，正  $(n+2)$  邊形可能會出現大於等於 6 條對角線連到同一頂點  $v$  的三角剖分圖，當將內部三角形調整為正三角形時，必須以立體的方式呈現，其所決定的碳原子骨架即為立體的情形，我們利用點與邊在平面上繪製圖形呈現立體結構投影在平面上的表徵。因此我們將會建構出一個非平面化（geometrically nonplanar）的結構式，這表示雖然建構出的圖形中有平行的邊，但事實上在實際立體結構中，兩鍵結是為歪斜線的關係。因此當化學結構式繞了一圈形成一個六邊形時，碳原子並不會連回起始點而是在三度空間中呈現螺弦狀而形成的立體結構，依舊能與不同構三角剖分圖形成一一對應的關係。顯然的，不同構的三角剖分圖將對應至不同的化學結構式。令我們感到興趣的是，在二維平面上的三角剖分圖，竟然可以與三維空間中的立體化學結構式具有對應關係。

**結論 6：**化學式  $C_nH_{n+2}$  的同分異構物總數等於不同構三角剖分數  $D_{n+2}$ 。



（ $C_4H_6$  的 3 個同分異構物）

從以上  $C_4H_6$  的化學結構式中，我們可以發現要單憑三維的  $C_nH_{n+2}$  的化學結構式判斷其分屬的點群是有些困難的，但若我們能通過以上所敘述的方式將化學結構進行轉換，將其對應成二維的不同構三角剖分圖，就可以使得問題簡化，輕易地找出其所述的分類，且要計算  $C_nH_{n+2}$  各分類的化學結構的數量時，也可以用不同對稱分類的不同構三角剖分圖的數量進行計算。其中耐人尋味的是，三維的  $C_nH_{n+2}$  的化學結構式竟然能與二維的正  $(n+2)$  邊形不同構三角剖分圖形成一一對應關係，讓人不禁好奇是否所有化學結構式的點群都能依循某種規則轉換成二維的圖形。



#### 四、不同構三角剖分以最大相鄰三角形數 $\Delta_{max}$ 分類

考慮正  $n$  邊形的三角剖分圖  $G$ ，每個頂點  $v$  相鄰的三角形數我們記為  $\Delta(v)$ ，根據三角剖分圖  $G$  的性質可知  $\Delta(v) = \deg(v) - 1$ 。對於一個固定的三角剖分圖  $G$ ，相鄰最多三角形的頂點，其相鄰三角形數記為  $\Delta_{max}$ ，意即  $\Delta_{max} = \max\{\Delta(v) : v \in V(G)\}$ 。對於  $n = 4 \sim 12$ ，我們限制  $\Delta_{max}$  的值，進一步考慮正  $n$  邊形的不同構三角剖分數  $D_n(\Delta_{max})$ ，將其結果紀錄於下列表格：

$n$ 邊形	$D_n$	$\Delta_{max} = n - 2$	$n - 3$	$n - 4$	$n - 5$	$n - 6$	$n - 7$
4	1	1					
5	1	1					
6	3	1	2				
7	4	1	2	1			
8	12	1	3	7	1		
9	27	1	3	11	11	1	
10	82	1	4	15	37	24	1
11	228	1	4	19	55		
12	733	1	5	24	79		

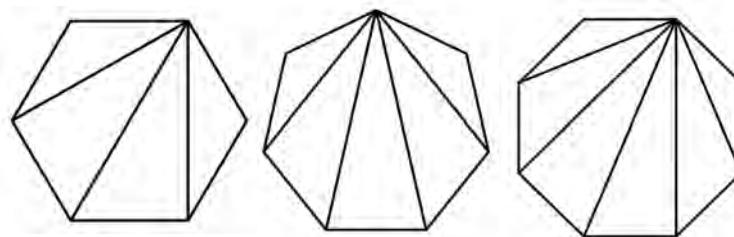
從中我們猜測：當  $\Delta_{max} = n - 2$  時，數列  $\langle D_n(\Delta_{max}) \rangle = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ 。

當  $\Delta_{max} = n - 3$  時，數列  $\langle D_n(\Delta_{max}) \rangle = \langle 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \dots \rangle$ 。

當  $\Delta_{max} = n - 4$  與  $\Delta_{max} = n - 5$  時，我們亦想求得  $D_n(\Delta_{max})$  的規律。

#### $\Delta_{max} = n - 2$

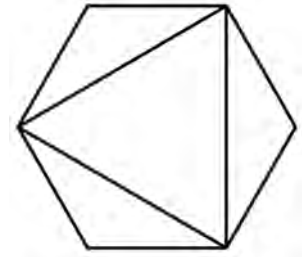
對於正  $n$  邊形 ( $n \geq 3$ ) 的三角剖分圖  $G$ ，考慮  $\Delta_{max} = n - 2$ 。若要使某頂點  $v$  與  $n - 2$  個三角形相鄰，則所有對角線必從  $v$  點連出，因此當  $n \geq 3$  時，不同構三角剖分數  $D_n(\Delta_{max}) = 1$ 。



$$\Delta_{max} = n - 3$$

對於正  $n$  邊形 ( $n \geq 6$ ) 的三角剖分圖  $G$ ，考慮  $\Delta_{max} = n - 3$ 。若要使頂點  $v$  與  $n - 3$  個三角形相鄰，則除了一條對角線外，其餘都要從同一頂點連出，因此共有  $n - 3$  個可能性，又我們將翻轉視為同一種，所以必須減少一半會翻轉同構的可能，因此可以得到  $\frac{n-3}{2}$  種。但因為當  $n$  為偶數時，其中有一個圖形並不會重複（如右圖），所以我們必須把他加回去，因此得到：當  $n$  為偶數，則不同構三角剖分數為  $\frac{(n-3)+1}{2}$ ；當  $n$  為奇數，則不同構三角剖分數為  $\frac{n-3}{2}$ 。

因此當  $n \geq 6$ ，則可得不同構三角剖分數  $D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ 。



$$\Delta_{max} = n - 4$$

對於正  $n$  邊形 ( $n \geq 9$ ) 的三角剖分圖  $G$ ，考慮  $\Delta_{max} = n - 4$ 。若要使頂點  $v$  與  $n - 4$  個三角形相鄰，則除了 2 條對角線外，其餘  $n - 5$  條對角線皆要從同一頂點  $v$  連出。令  $u \in V(G) \setminus \{v\}$ ，因為  $n \geq 9$ ，則  $\Delta(u) \leq 2 + 2 = 4 < \Delta(v) = n - 4$ 。這表示  $\forall u \in V(G) \setminus \{v\}$ ， $\Delta(u) \neq \Delta(v)$ ，而由於依照我們的方法為固定一點為最大相鄰三角形數進行計算，因此若當一個不同構三角剖分圖中有  $\geq 2$  個最大相鄰三角形數，則會重複計算，所以在此先不做討論。令  $L_1, L_2$  為不與  $v$  相連的 2 條對角線。因為  $v$  連出的  $n - 5$  條對角線將正  $n$  邊形的內部區分為  $n - 4$  個區域，我們將根據  $L_1, L_2$  所在的區域來計算三角剖分數，同時利用  $n$  的奇偶性來分類討論。

(1) 當  $n$  是偶數：

①：若  $L_1, L_2$  在同一區域，則共有  $n - 4$  個區域可選擇。此外， $L_1, L_2$  在同一區域中共有 2 種剖分的方式，進一步排除對稱性，可知有  $\frac{(n-4) \times 2}{2} = n - 4$  種不同構三角剖分。

②：若  $L_1, L_2$  在不同區域，則共有  $C_2^{n-4}$  個區域可選擇。其中共有  $\frac{n-4}{2}$  種剖分具有線對稱的特性；其餘  $C_2^{n-4} - \frac{n-4}{2}$  種剖分情形，為兩兩同構。

因此排除對稱性，共有  $(n-4) + \left( \frac{n-4}{2} + \frac{1}{2} (C_2^{n-4} - \frac{n-4}{2}) \right) = \frac{n^2}{4} - n$  種不同構三角剖分。

(2) 當  $n$  是奇數：

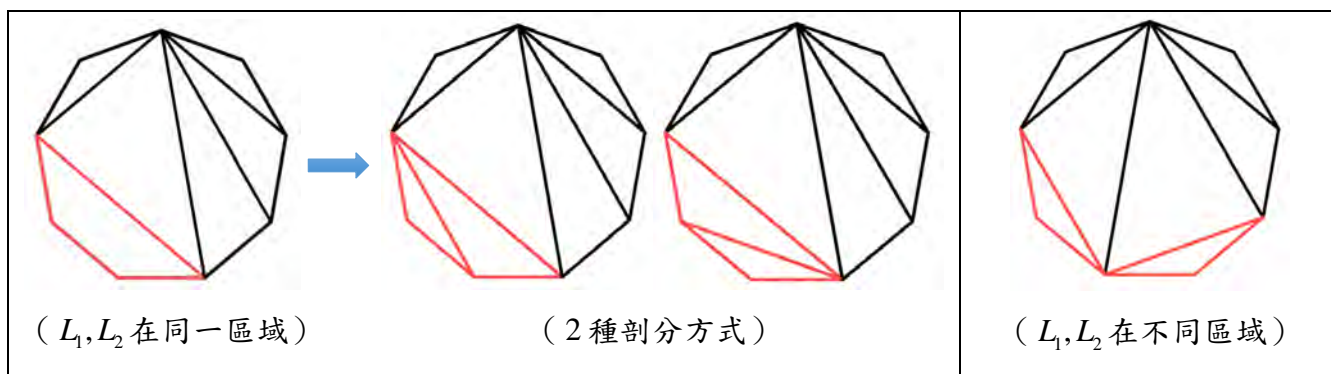
①：若  $L_1, L_2$  在同一區域，則共有  $n-4$  個區域可選擇。此外， $L_1, L_2$  在同一區域中共有 2 種

剖分的方式，進一步排除對稱性，可知有  $\frac{(n-4) \times 2}{2} = n-4$  種不同構三角剖分。

②：若  $L_1, L_2$  在不同區域，則共有  $C_2^{n-4}$  個區域可選擇。其中共有  $\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor = \frac{n-5}{2}$  種剖分具有

線對稱的特性；其餘  $C_2^{n-4} - \frac{n-5}{2}$  種剖分情形，為兩兩同構。

因此排除對稱性，共有  $(n-4) + \left( \frac{n-5}{2} + \frac{1}{2}(C_2^{n-4} - \frac{n-5}{2}) \right) = \frac{n^2-1}{4} - n$  種不同構三角剖分。



綜合 (1) (2) 的結果，可知當  $n \geq 9$ ， $\Delta_{max} = n-4$  時，不同構三角剖分數  $D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n$ 。

此外，當  $n=7,8$  時，正  $n$  邊形在  $\Delta_{max} = n-4$  限制下的不同構三角剖分數分別為  $D_7(\Delta_{max}) = 1$  與  $D_8(\Delta_{max}) = 7$ 。

$$\Delta_{max} = n - 5$$

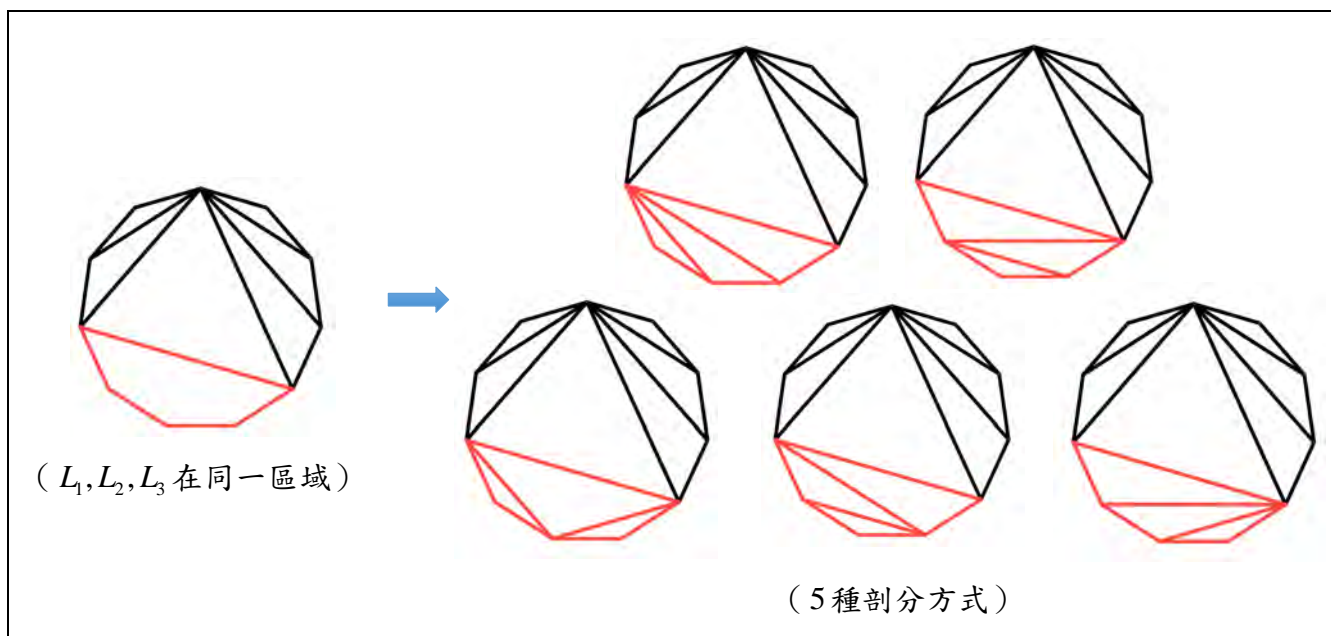
對於正  $n$  邊形 ( $n \geq 11$ ) 的三角剖分圖  $G$ ，考慮  $\Delta_{max} = n-5$ 。若要使頂點  $v$  與  $n-5$  個三角形相鄰，則除了 3 條對角線外，其餘  $n-6$  條對角線皆要從同一頂點  $v$  連出。令  $u \in V(G) \setminus \{v\}$ ，因為  $n \geq 11$ ，則  $\Delta(u) \leq 2+3=5 < \Delta(v) = n-5$ 。這表示  $\forall u \in V(G) \setminus \{v\}$ ， $\Delta(u) \neq \Delta(v)$ ，而由於依照我們的方法為固定一點為最大相鄰三角形數進行計算，因此若當一個不同構三角剖分圖中有  $\geq 2$  個最大相鄰三角形數，則會重複計算，所以在此先不做討論。令  $L_1, L_2, L_3$  為不與  $v$  相連的 3 條對角線。

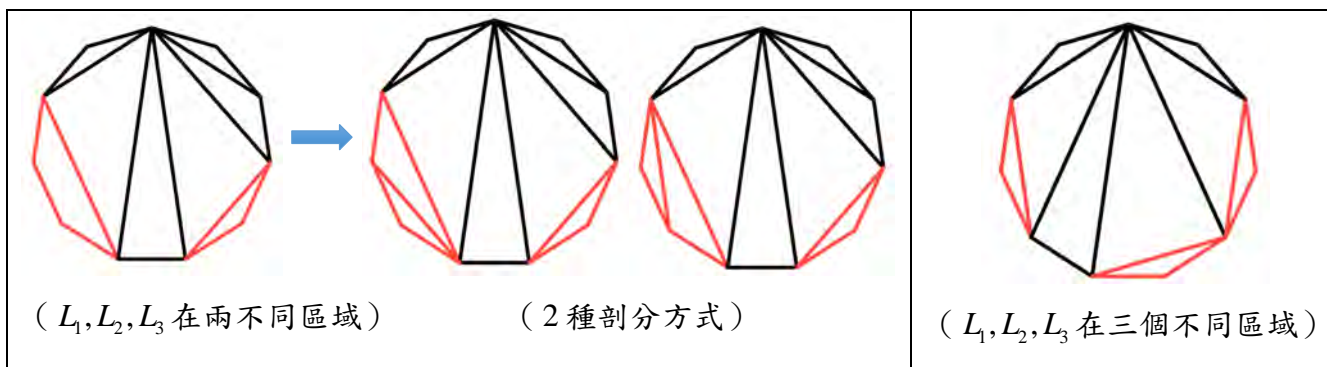
因為 $v$ 連出的 $n-6$ 條對角線將正 $n$ 邊形的內部區分為 $n-5$ 個區域，內部依順時針將此 $n-5$ 個區域依序記為 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-5}$ ，我們將根據 $L_1, L_2, L_3$ 所在的區域來計算三角剖分數，同時利用 $n$ 的奇偶性來分類討論。

(1) 當 $n$ 是奇數：

- ①：若 $L_1, L_2, L_3$ 在同一區域，則共有 $n-5$ 個區域可選擇。此外，當 $L_1, L_2, L_3$ 在同一區域，則內部區域的三角剖分情形等同於考慮五邊形的三角剖分數 $T_5 = 5$ ，因此 $L_1, L_2, L_3$ 共可決定5種剖分的方式，進一步排除對稱性，可知有 $\frac{(n-5) \times 5}{2}$ 種不同構三角剖分。
- ②：若 $L_1, L_2, L_3$ 恰有兩條在同一區域，不失一般性，令 $\{L_1, L_2\}$ 與 $\{L_3\}$ 在不同區域，則共有 $C_2^{n-5}$ 個區域可選擇。因為 $L_1, L_2$ 在同一區域內共可決定2種剖分的方式，進一步排除對稱性，可知有 $\frac{C_2^{n-5} \times 2 \times 2}{2} = C_2^{n-5} \times 2$ 種不同構三角剖分。
- ③：若 $L_1, L_2, L_3$ 分別在三個不同區域，則共有 $C_3^{n-5}$ 個區域可選擇。排除對稱性，可知有 $\frac{C_3^{n-5}}{2}$ 種不同構三角剖分。

由上述討論可知，共有 $\frac{(n-5) \times 5}{2} + C_2^{n-5} \times 2 + \frac{C_3^{n-5}}{2}$ 種不同構三角剖分。





(2) 當  $n$  是偶數：

①：若  $L_1, L_2, L_3$  在同一區域，則共有  $n-5$  個區域可選擇，其中區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  為正中間的區域。

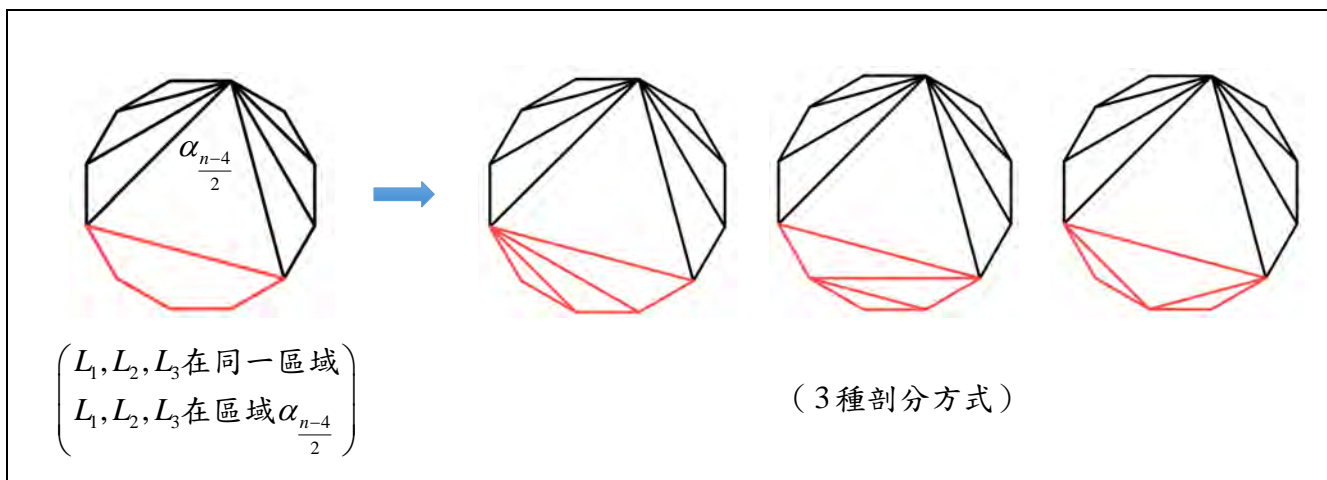
當  $L_1, L_2, L_3$  在區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  時，則內部區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  的三角剖分情形， $\{L_1, L_2, L_3\}$  恰能決定 3 種

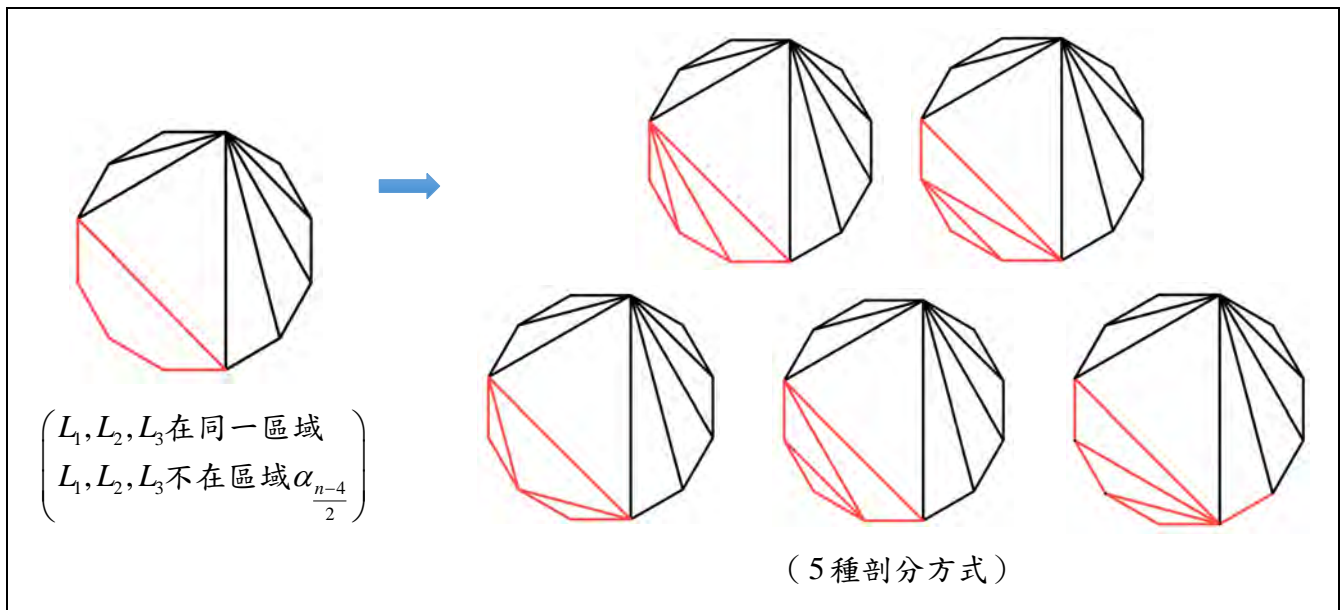
不同構的三角剖分。當  $L_1, L_2, L_3$  不在區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  時，則內部區域等同於考慮五邊形的三

角剖分數  $T_5 = 5$ ，因此  $\{L_1, L_2, L_3\}$  共可決定 5 種剖分的方式，進一步排除對稱性，可知

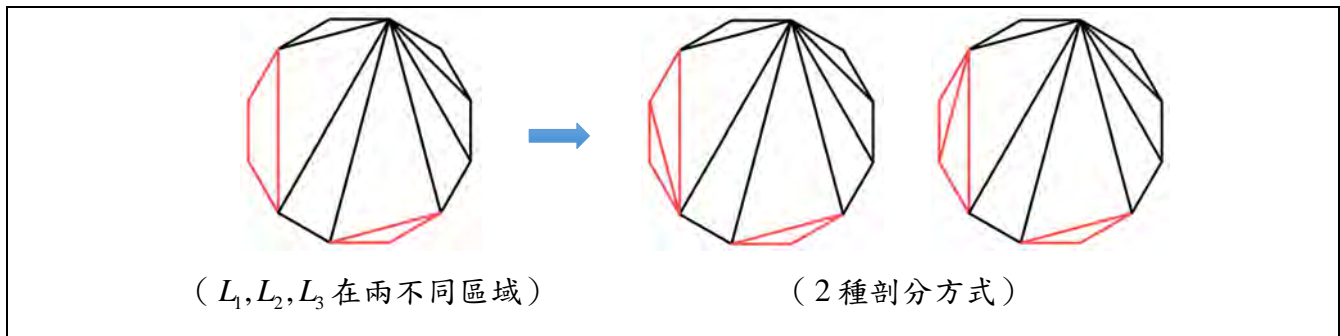
有  $\frac{(n-6) \times 5}{2}$  種不同構三角剖分。

由此可知，當  $L_1, L_2, L_3$  在同一區域時，共有  $3 + \frac{(n-6) \times 5}{2}$  種不同構的三角剖分。





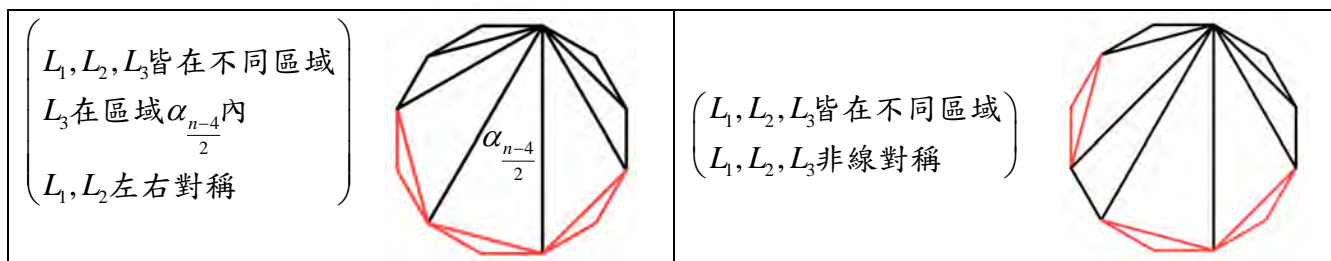
②：若  $L_1, L_2, L_3$  恰有兩條在同一區域，不失一般性，令  $\{L_1, L_2\}$  與  $\{L_3\}$  在不同區域，則共有  $C_2^{n-5}$  個區域可選擇。因為  $L_1, L_2$  在同一區域內共可決定 2 種剖分的方式，進一步排除對稱性，可知有  $\frac{C_2^{n-5} \times 2 \times 2}{2} = C_2^{n-5} \times 2$  種不同構三角剖分。



③：若  $L_1, L_2, L_3$  分別在三個不同區域，則我們討論  $L_1, L_2, L_3$  落在內部區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  的情形進行分類討論。當  $L_1, L_2, L_3$  使得三角剖分圖為線對稱，不失一般性，令  $\{L_3\}$  落在區域  $\alpha_{\frac{n-4}{2}}$  且  $\{L_1, L_2\}$  左右對稱，則  $\{L_1, L_2\}$  可決定  $\frac{n-6}{2}$  種不同構三角剖分。當  $L_1, L_2, L_3$  使得三角剖分圖為非線對稱，則  $\{L_1, L_2, L_3\}$  可決定  $\frac{C_3^{n-5} - \frac{n-6}{2}}{2}$  種不同構三角剖分。由此可知，

當  $L_1, L_2, L_3$  分別在三個不同區域時，共有  $\frac{n-6}{2} + \frac{C_3^{n-5} - \frac{n-6}{2}}{2} = \frac{C_3^{n-5} + \frac{n-6}{2}}{2}$  種不同構三角剖分。

由上述討論可知，共有  $\left(3 + \frac{(n-6) \times 5}{2}\right) + C_2^{n-5} \times 2 + \frac{C_3^{n-5} + \frac{n-6}{2}}{2}$  種不同構三角剖分。



此外，當  $n=8,9,10$  時，透過窮舉法，可知正  $n$  邊形在  $\Delta_{max} = n-5$  限制下的不同構三角剖分數分別為  $D_8(\Delta_{max})=1$ 、 $D_9(\Delta_{max})=11$  與  $D_{10}(\Delta_{max})=37$ 。

總結上述討論，針對最大相鄰三角形數的限制，我們求得一般通式，因此有以下 Theorem 3。

**Theorem 3**：對於最大相鄰三角形數  $\Delta_{max} = n-2$ 、 $n-3$ 、 $n-4$ 、 $n-5$  時，不同構三角剖分數有以下結論：

- (1) 當  $\Delta_{max} = n-2$  時，其中  $\forall n \geq 3$ ，則  $D_n(\Delta_{max}) = 1$ 。
- (2) 當  $\Delta_{max} = n-3$  時，其中  $\forall n \geq 6$ ，則  $D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ 。
- (3) 當  $\Delta_{max} = n-4$  時，其中  $\forall n \geq 9$ ，則  $D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n$ ；

特別的， $D_7(\Delta_{max}) = 1$ 、 $D_8(\Delta_{max}) = 7$ 。

- (4) 當  $\Delta_{max} = n-5$  時，其中  $\forall n \geq 11$ ，則

若  $n$  為奇數，
$$D_n(\Delta_{max}) = \frac{(n-5) \times 5}{2} + C_2^{n-5} \times 2 + \frac{C_3^{n-5}}{2} = \frac{1}{12}(n^3 - 6n^2 + 5n)；$$

若  $n$  為偶數，
$$D_n(\Delta_{max}) = \left(3 + \frac{(n-6) \times 5}{2}\right) + C_2^{n-5} \times 2 + \frac{C_3^{n-5} + \frac{n-6}{2}}{2} = \frac{1}{12}(n^3 - 6n^2 + 8n) - 1；$$

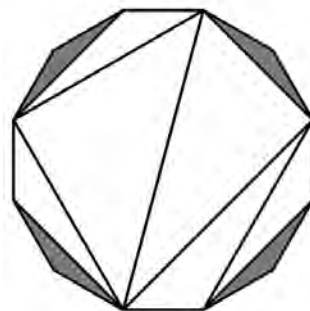
特別的， $D_8(\Delta_{max}) = 1$ 、 $D_9(\Delta_{max}) = 11$ 、 $D_{10}(\Delta_{max}) = 37$ 。

隨著  $\Delta_{max}$  越小，不同構三角剖分情形越複雜，從上述 Theorem 3 的結論中，我們觀察  $D_n(\Delta_{max})$  的數量級別有一定的規律，因此提出下列猜想：

**Conjecture 1 :**  
 當最大相鄰三角形數  $\Delta_{max} = n - k$  時，則不同構三角剖分數的級別為  $(k - 2)$  次多項式。

### 五、不同構三角剖分以外圍三角形數分類

給定一個正  $n$  邊形 ( $n \geq 4$ ) 的三角剖分圖，若三角剖分後的三角形有兩邊為原正  $n$  邊形的邊，則稱此三角形為『外圍三角形』，並將此類三角形以符號記為『 $A$ 』(如右圖灰色三角形所示)。換句話說，外圍三角形的三頂點必為原正  $n$  邊形依順時針方向連續的三個點，反之亦然。若三角剖分圖恰包含  $k$  個外圍三角形，則我們稱此三角剖分圖恰包含『 $kA$ 』(右圖即為恰包含  $4A$  的三角剖分圖)。此外，若三角剖分後的三角形的三邊皆為內部對角線，則稱此三角形為『內圍三角形』，並將此類三角形以符號記為『 $B$ 』。若三角剖分圖恰包含  $k$  個內圍三角形，則我們稱此三角剖分圖恰包含『 $kB$ 』(右圖即為恰包含  $2B$  的三角剖分圖)。



首先，我們以外圍三角形的個數將不同構三角剖分圖進行分類，其數量以下列表格呈現：

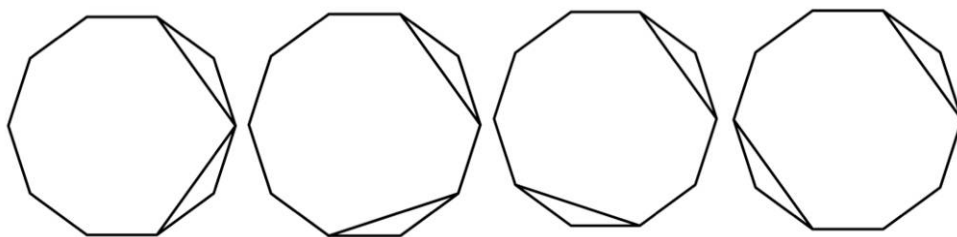
$n$ 邊形	恰包含 $2A$	恰包含 $3A$	恰包含 $4A$	恰包含 $5A$
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0
6	2	1	0	0
7	3	1	0	0
8	6	5	1	0
9	10	14	3	0
10	20	42	19	1



### 恰包含 $2A$

接著，我們針對恰包含  $2A$  的三角剖分圖進行更深入的探討，並將恰包含  $2A$  的不同構三角剖分數量以兩個外圍三角形的分布位置區分計算，考慮兩個外圍三角形之間的距離進行討論。對於正  $n$  邊形恰包含  $2A$  的不同構三角剖分圖，我們將其總數記為『 $D_n(2A)$ 』。

例如：以10邊形為例，考慮兩個外圍三角形的距離，則會有  $\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor - 1 = 4$  大類（如下圖所示）。



事實上，任意  $n$  邊形恰包含  $2A$  的三角剖分圖，考慮兩個外圍三角形的距離，則會有  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$  種類型，將每一類計算出不同構的三角剖分數之後，進而形成一個類似 Pascal's triangle 概念的結構。我們將  $n = 4, 5, \sim 14$  的數據以下表格呈現，並將其總和  $D_n(2A)$  記錄於表格右方：

$n$ 邊形	恰包含 $2A$ 的不同構三角剖分數	總和 $D_n(2A)$
4	1	1
5	1	1
6	1+1	2
7	1+2	3
8	1+2+3	6
9	1+3+6	10
10	1+3+9+7	20
11	1+4+12+19	36
12	1+4+16+28+23	72
13	1+5+20+44+66	136
14	1+5+25+60+110+71	272

（以兩個外圍三角形的距離作分類計算）

令我們感到極大好奇的是，在文獻探討的過程中，我們發現在化學的領域中具有相同形式的數列。其中文獻中顯示名為『**Losanitsch's triangle**』的數字陣列（如下圖所示），我們發覺該陣

列中第  $n$  列的各項總和與正  $(n+5)$  邊形恰包含  $2A$  的不同構三角剖分數  $D_{n+5}(2A)$  相等。

Losanitsch's triangle 的各項數字具有遞迴關係，以下我們將介紹 Losanitsch's triangle 的結構以及與三角剖分之間的關聯性。

Losanitsch's triangle										總和						
第0列	1									→ 1						
第1列	1		1							→ 2						
第2列	1			1			1				→ 3					
第3列	1		2		2		1				→ 6					
第4列	1	2		4		2		1			→ 10					
第5列	1	3		6		6		3		1	→ 20					
	1	3		9		10		9		3	1	→ 36				
	1	4		12		19		19		12		4	1	→ 72		
	1	4		16		28		38		28		16		4	1	→ 136
1	5	20		44		66		66		44		20		5	1	→ 272

對於 Losanitsch's triangle 跟 Pascal's triangle 的結構，從上而下的橫列依序編號為第  $n$  列，其中  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ；在第  $n$  列中，從左至右的各項數字依序編號為第  $k$  項，其中  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ 。為了方便溝通，給定  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  且  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ，我們定義 Losanitsch's triangle 中第  $n$  列中第  $k$  項數字為 『  $L_{n,k}$  』；定義 Pascal's triangle 中第  $n$  列中第  $k$  項數字為 『  $P_{n,k}$  』。在高中課程中，我們知道 Pascal's triangle 的各項係數具有上下兩列特定關係，意即當  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  時，則  $P_{n,0} = P_{n,n} = 1$ ，此外當  $n \in \mathbb{N}$  且  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  時，則  $P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + P_{n-1,k}$ 。

Losanitsch's triangle 的結構跟 Pascal's triangle 相當類似，一樣最外面都是 1，意即對任意非負整數  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $L_{n,0} = L_{n,n} = 1$ 。此外，對於偶數列  $n$  中的第  $k$  項，若  $k$  為奇數時，在求出它左上與右上方兩個數字的總和後，還要再減掉 Pascal's triangle 中第  $\frac{n-2}{2}$  列中的第  $\frac{k-1}{2}$  項的數值。其餘位置的數字都僅是左上與右上方兩個數字的總和（與 Pascal's triangle 相仿）。

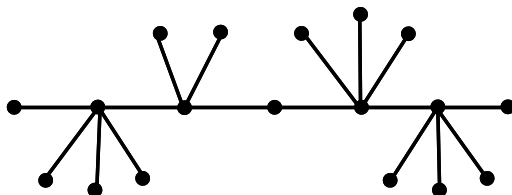
$$\text{意即 } L_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{當 } k \in \{0, n\} \\ L_{n-1,k-1} + L_{n-1,k} & \text{當 } n \text{ 為奇數, } k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ L_{n-1,k-1} + L_{n-1,k} & \text{當 } n \text{ 為偶數, } k \text{ 為偶數} \\ (L_{n-1,k-1} + L_{n-1,k}) - P_{\frac{n-2}{2}, \frac{k-1}{2}} & \text{當 } n \text{ 為偶數, } k \text{ 為奇數} \end{cases} .$$

此外，我們將 Losanitsch's triangle 第  $n$  列的各項總和記為『 $L_n$ 』，意即  $L_n = \sum_{k=0}^n L_{n,k}$ 。

經過研究後，我們發現『正  $n$  邊形 ( $n \geq 5$ ) 恰含  $2A$  的不同構三角剖分數』、『 $(n-2)$  個點不同構的毛毛蟲圖 (caterpillar) 數量』以及『Losanitsch's triangle 第  $(n-5)$  列的總和』皆相同。當我們進一步考慮正  $n$  邊形 ( $n \geq 5$ ) 恰含  $2A$  的不同構三角剖分圖  $G$ ，若  $G$  的相鄰三角形數序列中，以 2 的個數進行分類，則會與 Losanitsch's triangle 中第  $(n-5)$  列的各項數值完全吻合。以下我們將持續說明這些不同層面上的特殊對應關係。

### 毛毛蟲圖 Caterpillar

一個連通且沒有迴圈的圖，我們稱為『樹狀圖 (tree)』。樹狀圖中度數為 1 的頂點，稱為該樹狀圖的『葉子 (leaf)』。給定  $n$  ( $n \geq 3$ ) 個點的連通樹狀圖，若存在一個路徑做為『主幹』，使得每個點皆位於主幹上或與主幹有邊相連，則稱此樹狀圖為『毛毛蟲圖 (caterpillar)』。對於  $n$  個點的 caterpillar，若考慮不同構的 caterpillar，則我們將其數量記為『 $C_n$ 』。1973 年 F. Harary 與 A.J. Schwenk 已在文獻中指出，具有  $n$  個點的 caterpillar 共有  $C_n = 2^{n-4} + 2^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$  種不同構的情形。



### 不同構的 Caterpillar


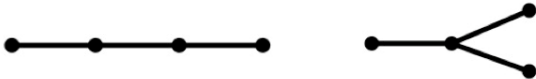
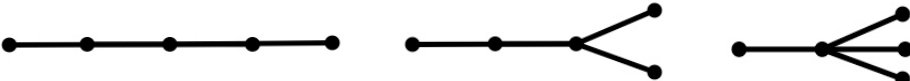
$n$  個點的 caterpillar 共可形成  $C_n = 2^{n-4} + 2^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$  種不同構的情形。

例如：根據 caterpillar 不同構數量的一般通式，分別計算頂點數  $n = 3, 4, 5$  的不同構數量。

(1) 考慮  $n = 3$ ，則有  $C_3 = 2^{-1} + 2^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  種由 3 個點所組成不同構的 caterpillar 圖形。

(2) 考慮  $n = 4$ ，則有  $C_4 = 2^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$  種由 4 個點所組成不同構的 caterpillar 圖形。

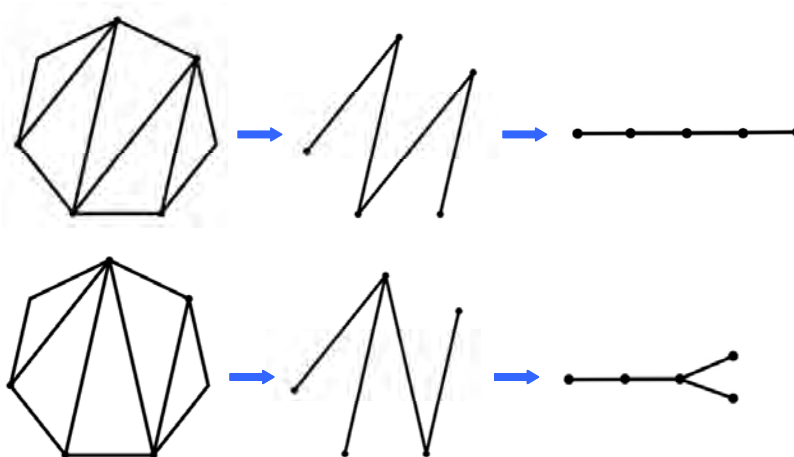
(3) 考慮  $n = 5$ ，則有  $C_5 = 2^1 + 2^0 = 2 + 1 = 3$  種由 5 個點所組成不同構的 caterpillar 圖形。

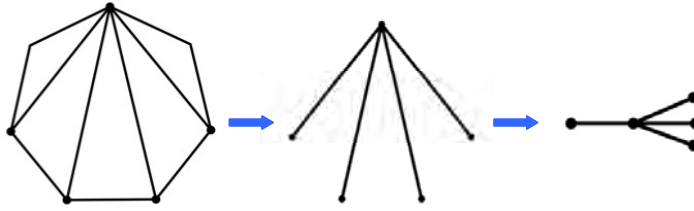
頂點數 $n$	不同構 caterpillar
$n = 3$	
$n = 4$	
$n = 5$	

給定一個恰包含  $2A$  的正  $n$  邊形三角剖分圖，因為外圍三角形的數量僅有兩個，故內部對角線的分布將有一定的限制，將使得內部圖形為一個特殊的樹狀圖，也就是我們這裡介紹的 caterpillar。

例如：考慮  $n = 7$ ，可以得到三個恰包含  $2A$  的正 7 邊形三角剖分圖，三個 5 頂點的 caterpillar 圖形。

將恰包含  $2A$  三角剖分圖的外圍的邊刪除，即可獲得 caterpillar 圖形。可以發現三角剖分圖的內部對角線便是一個 caterpillar 圖形，且不同構的三角剖分圖其內部為不同構的 caterpillar，以下為對應關係：





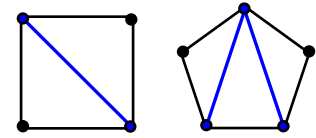
以下我們將說明恰包含  $2A$  的正  $n$  邊形三角剖分圖與 caterpillar 之間的對應關係。

**Lemma 2**：若  $G$  為正  $n$  邊形恰包含  $2A$  的三角剖分圖，則

- (1)  $G$  的內部圖形為  $(n-2)$  個點的 caterpillar。
- (2) 當  $n=4$  時，外圍三角形中連結對角線的兩頂點，皆為 caterpillar 的 leaf。
- (3) 當  $n \geq 5$  時，外圍三角形中連結對角線的兩頂點，恰有一點為 caterpillar 的 leaf。

**【證明】**：

當  $n=4,5$  時，因為正 4 邊形與正 5 邊形皆具有唯一的三角剖分，且該三角剖分皆恰包含  $2A$ ，所以不難得知其三角剖分的內部圖形分別為 2 個點與 3 個點的路徑圖 (path)，同時亦為 caterpillar。此外，外圍三角形中連結對角線的兩頂點，當  $n=4$  時，兩頂點皆為 caterpillar 的 leaf；當  $n=5$  時，恰有一點為 caterpillar 的 leaf。



假設頂點數小於  $n$  時，命題皆成立。

考慮頂點數為  $n$  且恰包含  $2A$  的三角剖分圖  $G$ 。

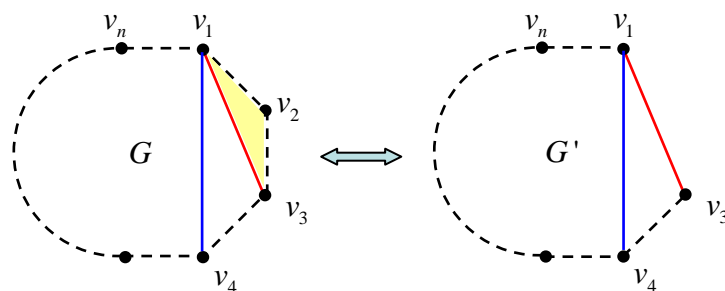
令三角剖分圖  $G$  的頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $v_0 = v_n$  與  $v_{n+1} = v_1$ 。

令  $S_G = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  為  $G$  的相鄰三角形數序列，不失一般性，令  $a_2 = 1$ 。

根據 Theorem 2 (5)，不失一般性可假設  $a_3 = 2$  且  $a_1 \neq 2$ 。

令  $G'$  為  $G$  刪除  $v_2$  後的三角剖分圖，可知  $G'$  恰包含  $2A$  且  $v_1 v_4$  為  $G'$  的對角線。

因為  $G'$  為頂點數為  $n-1$ ，根據數學歸納法假設可知， $G'$  的內部為  $(n-3)$  個點的 caterpillar，記為  $H'$ ，且  $\{v_1, v_4\}$  必有一頂點為  $H'$  的 leaf。令  $G$  的內部圖形為  $H$ ，可知  $H = H' \cup \{v_1 v_3\}$ ，則  $H$  必為  $(n-2)$  個點的 caterpillar 且  $v_3$  為  $H$  的 leaf，此時  $v_1$  不為  $H$  的 leaf。故三角剖分圖  $G$  亦符合命題。



根據數學歸納法得證，恰包含  $2A$  的三角剖分圖的內部圖形，必為 caterpillar 且當  $n \geq 5$  時，外圍三角形中連結對角線的兩頂點，恰有一點為 caterpillar 的 leaf。 ■

**Lemma 3 :** 若  $G_1$  與  $G_2$  為正  $n$  邊形恰包含  $2A$  的不同構三角剖分圖，則  $G_1$  與  $G_2$  的內部為不同構 caterpillar。

**【證明】：**

給定兩個正  $n$  邊形恰包含  $2A$  的不同構三角剖分圖  $G_1$  與  $G_2$ ，令  $G_1$  與  $G_2$  的內部圖形分別為  $H_1$  與  $H_2$ 。根據 Lemma 2 可知， $H_1$  與  $H_2$  皆為  $(n-2)$  個點的 caterpillar。我們欲說明  $H_1$  與  $H_2$  為不同構的 caterpillar。

假設此引理的原命題錯誤，則存在頂點數最少的兩個不同構三角剖分圖  $G_1$  與  $G_2$ ，其中  $G_1$  與  $G_2$  皆恰包含  $2A$ ，但兩者的內部圖形  $H_1$  與  $H_2$  為同構的 caterpillar。我們稱  $\{G_1, G_2\}$  為最小反例。

當  $n = 4, 5$  時，恰包含  $2A$  的三角剖分圖皆唯一，故命題成立。因此最小反例的頂點數  $n \geq 6$ 。

令  $\{G_1, G_2\}$  為最小反例，則內部圖形為同構的 caterpillar，將此 caterpillar 記為  $H$ 。令三角剖分圖  $G_1$  與  $G_2$  的頂點依順時針分別為  $u_1, u_2, \dots, u_n$  與  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $u_0 = u_n$ 、 $u_{n+1} = u_1$ 、 $v_0 = v_n$  與  $v_{n+1} = v_1$ 。令  $\{u_1, u_{n-1}, u_n\}$  與  $\{v_1, v_{n-1}, v_n\}$  分別為  $G_1$  與  $G_2$  外圍三角形的三頂點。不失一般性，可假設邊  $u_1 u_{n-1}$  與邊  $v_1 v_{n-1}$  對應到  $H$  的同一個邊  $e \in E(H)$ ，此外  $u_{n-1}$  與  $v_{n-1}$  皆對應到  $H$  的同一個 leaf。考慮  $G_1' = G_1 \setminus \{u_n\}$ 、 $G_2' = G_2 \setminus \{v_n\}$  與  $H' = H \setminus \{e\}$ ，可知  $G_1'$  與  $G_2'$  亦為恰包含  $2A$  的三角剖分圖，且  $G_1'$  與  $G_2'$  內部圖形的 caterpillar 皆為  $H'$ 。因為  $G_1'$  與  $G_2'$  的頂點數皆為  $n-1$ ，所以  $\{G_1', G_2'\}$  不為反例。由於  $G_1'$  與  $G_2'$  的內部圖形皆為  $H'$ ，故  $G_1'$  與  $G_2'$  必為同構的三角剖分圖。因為邊  $u_1 u_{n-1}$  與邊  $v_1 v_{n-1}$  對

應到  $H$  的同一個邊，不難得知  $G_1$  與  $G_2$  必為同構的三角剖分圖。此與  $\{G_1, G_2\}$  為最小反例矛盾。意即最小反例並不存在，由此可知，兩個包含  $2A$  的不同構三角剖分圖，其內部圖形必為不同構的 caterpillar。 ■

我們已經知道恰包含  $2A$  的三角剖分圖其內部圖形必為 caterpillar，以下我們將進一步說明任意一個 caterpillar，都存在唯一的恰包含  $2A$  三角剖分圖，使其內部圖形為此 caterpillar。

**Lemma 4 :** 給定  $H$  為  $n$  個點的 caterpillar，則存在恰包含  $2A$  的正  $(n+2)$  邊形三角剖分圖，使其內部圖形即為  $H$ 。

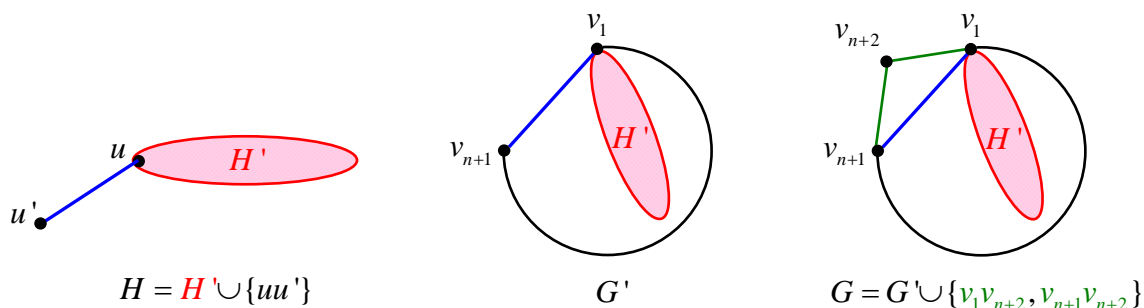
**【證明】：**

當  $n = 2, 3$  時，可知正 4 邊形與正 5 邊形的三角剖分圖即為所求。

假設對於頂點小於  $n$  的 caterpillar，命題皆成立。

令  $H$  為  $n$  個點的 caterpillar，其中  $uu' \in E(H)$  且  $u'$  為  $H$  的 leaf。

考慮  $H' = H \setminus \{u\}$ ，因為  $H'$  為  $(n-1)$  個點的 caterpillar，根據歸納法假設，可知存在恰包含  $2A$  的正  $(n+1)$  邊形三角剖分圖  $G'$ ，使得  $G'$  的內部圖形為  $H'$ 。



令  $G'$  的頂點依順時針分別為  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ 。因為  $u \in V(H')$ ，不失一般性，可令  $u$  對應到  $G'$  中的點  $v_1$ 。考慮  $G = G' \cup \{v_1v_{n+2}, v_{n+1}v_{n+2}\}$ ，則  $G$  為恰包含  $2A$  的正  $(n+2)$  邊形三角剖分圖，其中  $G$  的內部圖形即為  $H$ 。根據數學歸納法，可知命題成立。 ■

以下我們用實際例子說明一個  $n$  個點的 caterpillar 如何決定一個正  $(n+2)$  邊形三角剖分圖。

例如：令  $H$  為 15 個點的 caterpillar (如下圖所示)，令其主幹(綠邊)的頂點分別為  $\{v_i : i = 1, 2, \dots, 7\}$  (黃點)。欲建構一個恰包含  $2A$  的正 17 邊形三角剖分圖  $G$ ，使  $G$  的內部圖形為  $H$ 。以下我們將依照固定步驟建構出三角剖分圖  $G$ 。

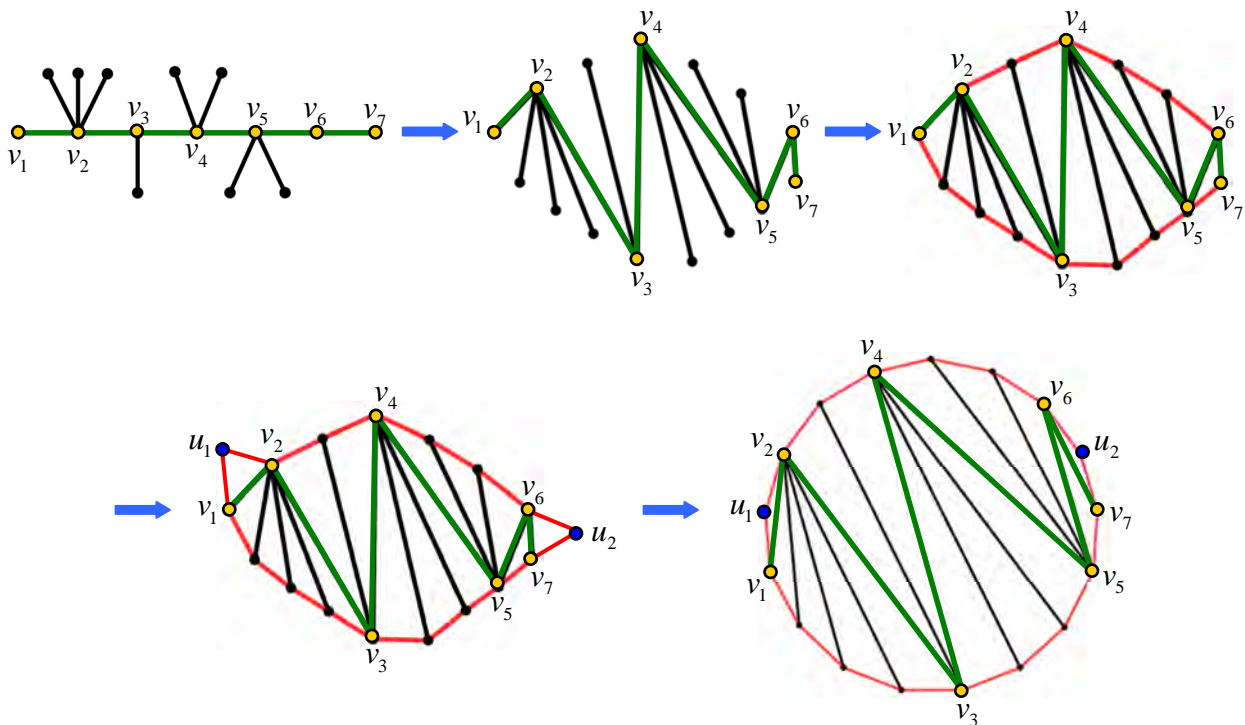
(Step-1)：將主幹上的點以上下交替的方式分布，若  $i$  為奇數，則  $v_i$  分佈在下方；若  $i$  為偶數，則  $v_i$  分佈在上方。

(Step-2)：若  $v_i$  分佈在上方，則將  $v_i$  相鄰的 leaf 分佈在下方；若  $v_i$  分佈在下方，則將  $v_i$  相鄰的 leaf 分佈在上方。

(Step-3)：將外圍所有的點連成一個圈 (新增紅色的邊)。

(Step-4)：新增 2 頂點  $u_1, u_2$ ，新增 4 條邊  $\{u_1v_1, u_1v_2, u_2v_6, u_2v_7\}$  (新增紅色邊)，則可得 17 個點的外平面圖。

(Step-5)：將外圍紅色的邊拓展成一個外圍的正 17 邊形，所得圖形  $G$  即為恰包含  $2A$  的三角剖分圖，其中外圍三角形的頂點分別為  $\{u_1, v_1, v_2\}$  與  $\{u_2, v_6, v_7\}$ 。可知  $G$  的內部圖形即為  $H$ 。



(Caterpillar 對應恰包含  $2A$  三角剖分)


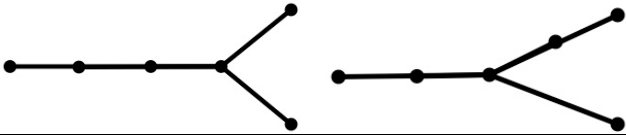
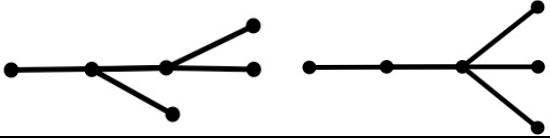
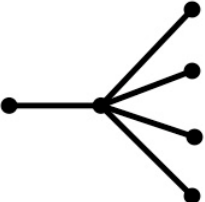


由於正多邊形恰包含  $2A$  的三角剖分圖內部對角線即為 caterpillar 圖形，而 caterpillar 圖形依照一定的規律也可以畫出唯一對應的恰包含  $2A$  的三角剖分圖，因此我們可以得到正多邊形恰包含  $2A$  的三角剖分圖和 caterpillar 圖形具有一一對應，因此有以下定理：

**Theorem 4：**『正  $n$  邊形恰包含  $2A$  的不同構三角剖分圖』與『 $n-2$  個點不同構的 caterpillar』兩者之間皆具有一一對應關係。因此可得  $D_n(2A) = C_{n-2} = 2^{n-6} + 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor}$ 。

根據本文所提供的 Losanitsch's triangle 陣列，觀察前 10 列，考慮每一列的數字總和，可知當  $n=0,1,2,\dots,9$  時， $C_{n+3} = 2^{n-1} + 2^{\lfloor \frac{n+3}{2} - 2 \rfloor} = L_n$  皆成立。進一步若將 caterpillar 圖形依 leaf 的數量進行分類，則可以和 Losanitsch's triangle 每一列的各項數字對應。

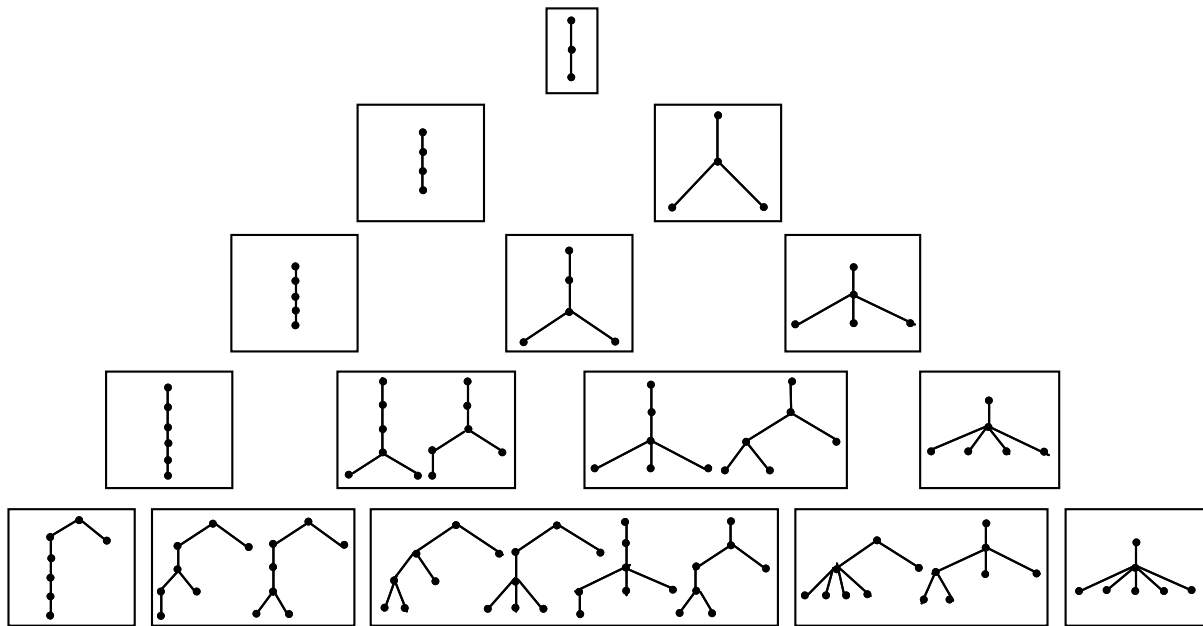
例如：考慮  $n=6$ ，由 6 個點形成的 caterpillar 圖形共有 6 種不同構的情形，若依照 leaf 的數量分類，則有 2 個 leaf 的有 1 個；3 個 leaf 的有 2 個；4 個 leaf 的有 2 個；5 個 leaf 的有 1 個，其數量與 Losanitsch's triangle 第 3 列各項數字  $(L_{3,0}, L_{3,1}, L_{3,2}, L_{3,3}) = (1, 2, 2, 1)$  有一致性。

6 個點，2 個 leaf：共 1 個	
6 個點，3 個 leaf：共 2 個	
6 個點，4 個 leaf：共 2 個	
6 個點，5 個 leaf：共 1 個	

透過觀察，我們發現在 Losanitsch's triangle 中，每一個數字皆與 caterpillar 有著特殊的對應關係。其中第  $n$  列第  $k$  項的數值  $L_{n,k}$ ，等於  $(n+3)$  個點且具有  $(k+2)$  個 leaf 的 caterpillar 所有不同構的情形。因此我們提出以下猜想：

**Conjecture 2**：給定  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $0 \leq k \leq n$ 。

$(n+3)$  個頂點且具有  $(k+2)$  個 leaf 的不同構 caterpillar 共有  $L_{n,k}$  種情形。



(不同構 caterpillar 以 leaf 數量作分類)

Losanitsch's triangle					總和	
		1			→ 1	
	1	1			→ 2	
	1	1	1		→ 3	
	1	2	2	1	→ 6	
	1	2	4	2	1	→ 10

(Losanitsch's triangle 前五列各項數值)

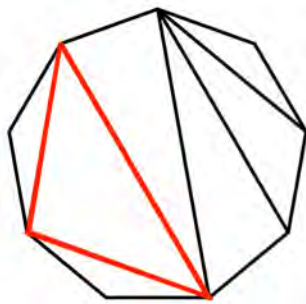
上述 Conjecture 2 提出  $(n-2)$  個頂點且具有  $(k+2)$  個 leaf 的不同構 caterpillar 恰有  $L_{n-5,k}$  種情形，考慮所有的 leaf 可能值，將其加總應可得  $\sum_{k=0}^{n-5} L_{n-5,k} = L_{n-5}$ ，這表示  $(n-2)$  個頂點的 caterpillar

不同構數量應為  $L_{n-5}$ 。根據 Lemma 2 與 Lemma 3 則可知恰包含  $2A$  的正  $n$  邊形 ( $n \geq 5$ ) 的三角剖分圖數量與  $(n-2)$  個點的不同構 caterpillar 有對應關係。然而我們猜想  $(n-2)$  個點的不同構 caterpillar 依照 leaf 的分類即可與 Losanitsch's triangle 的第  $(n-5)$  列的各項數字有一對一對應關係，若猜想是正確的，則  $(n-2)$  個點的不同構 caterpillar 總數即與 Losanitsch's triangle 的第  $(n-5)$  列的各項總和  $L_{n-5}$  相同。倘若能夠證明 Conjecture 2，則我們能夠將『恰包含  $2A$  的正  $n$  邊形三角剖分圖』、『不同構的 caterpillar 圖形』以及『Losanitsch's triangle』建立完美的對應關係。因此就數量上，我們亦提出下列猜想：

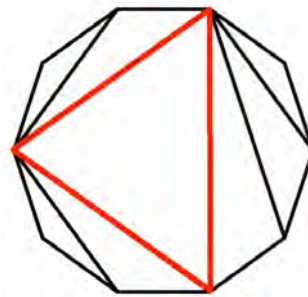
**Conjecture 3**：對任意自然數  $n \geq 5$ ， $D_n(2A) = C_{n-2} = 2^{n-6} + 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} = L_{n-5}$  恆成立。

### 恰包含 $3A$

對於三角剖分圖，上述已說明『恰包含  $2A$ 』和『caterpillar 圖形』具有一對一對應關係。我們對恰包含  $3A$  的三角剖分圖的內部結構感到好奇，經研究後我們發現，恰包含  $3A$  的三角剖分圖必會在內部產生一個由對角線構成的內圍三角形（如下圖的 9 邊形和 10 邊形中紅色三角形）。



( 9 邊形恰包含  $3A$  )



( 10 邊形恰包含  $3A$  )

我們將上述的觀察進行論證，因而有了以下引理：

**Lemma 5**：令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，則有以下結論：

- (1) 若  $G$  恰包含  $0B$ ，則  $G$  恰包含  $2A$ ；
- (2) 若  $G$  恰包含  $1B$ ，則  $G$  恰包含  $3A$ 。

**【證明】：**

令三角剖分圖  $G$  的頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $v_0 = v_n$  與  $v_{n+1} = v_1$ 。

(1) 若  $G$  恰包含  $0B$ ，則  $G$  的內部不包含內圍三角形。可知  $G$  的內部圖形即為 **caterpillar**，故  $G$  恰包含兩個外圍三角形，意即  $G$  恰包含  $2A$ 。

(2) 若  $G$  恰包含  $1B$ ，不失一般性，令唯一內圍三角形的頂點為  $v_1, v_p, v_q$ ，其中  $2 < p < q < n$ 。

令  $G_1$  為由頂點  $\{v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p, v_q\}$  決定的三角剖分圖，可知  $G_1$  為  $G$  的子圖且  $G_1$  不包含內圍三角形（否則  $G$  包含  $2B$ ），所以  $G_1$  內部的對角線即為 **caterpillar**，由此可知  $G_1$  恰包含  $2A$ 。因為  $\{v_1, v_p, v_q\}$  所決定的三角形為  $G_1$  的外圍三角形，所以  $G_1 \setminus \{v_q\}$  恰包含一個  $G_1$  的外圍三角形。意即唯一存在  $i \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ ，使得三頂點  $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}$

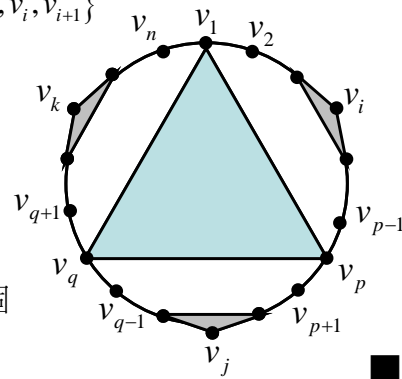
決定一個  $G_1$  的外圍三角形，而此外圍三角形亦為  $G$  的外圍

三角形。同理，唯一存在  $j \in \{p+1, p+2, \dots, q-2, q-1\}$ ，使

得三頂點  $\{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}\}$  決定一個  $G$  的外圍三角形；唯一存在

$k \in \{q+1, q+2, \dots, n-1, n\}$ ，使得三頂點  $\{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\}$  決定一個

$G$  的外圍三角形。故  $G$  恰包含三個外圍三角形。



在眾多三角剖分圖的例子中，透過觀察，我們發現三角剖分圖  $G$  的『內圍三角形的數量』與『外圍三角形的數量』有一定的必然關係，其中外圍三角形與內圍三角形的數量必相差 2。透過數學歸納法，我們可以將 Lemma 5 的結論推廣為下列定理：

**Theorem 5：**令  $G$  為正  $n$  邊形的三角剖分圖，其中  $n \geq 3$ 。

若  $G$  恰包含  $kA$ 、 $tB$ ，其中  $t, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，則  $k = t + 2$ 。

**【證明】：**

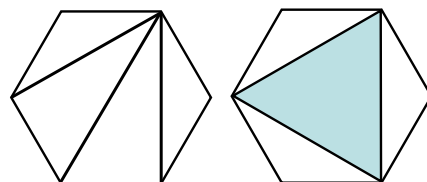
以下我們將對參數  $n$  進行數學歸納法來論證命題。

令  $G$  為恰包含  $kA$ 、 $tB$  的正  $n$  邊形三角剖分圖，其頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $v_0 = v_n$  與  $v_{n+1} = v_1$ 。

當  $n = 3, 4, 5$  時， $G$  必不包含內圍三角形，因此  $t = 0$ 。根據 Lemma 5 (1) 可知  $G$  恰包含  $2A$ ，所以  $k = 2$ 。故  $k = t + 2$  命題成立。

當  $n = 6$  時， $t$  的值可能為 0 或 1。

若  $t = 0$  ( $G$  不包含內圍三角形)，則  $G$  內部圖形為 caterpillar，因此  $G$  恰包含  $2A$ 。故  $k = t + 2$  命題成立。若  $t \neq 0$ ，則  $t = 1$ 。根據 Lemma 5 (2) 可知  $G$  恰包含  $3A$ 。故  $k = t + 2$  命題成立。



假設  $n \leq m$  時 ( $6 \leq m$ )，命題皆成立。

考慮  $n = m + 1$ 。

若  $t = 0$ ，根據 Lemma 5 (1) 可知  $G$  恰包含  $2A$ ，所以  $k = 2$ 。故  $k = t + 2$  命題成立。

若  $t \neq 0$  ( $G$  包含內圍三角形)，不失一般性，令  $\{v_1, v_p, v_q\}$  為內圍三角形的頂點，其中  $2 < p < q < n$ 。

令頂點集合  $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p, v_q\}$ 、 $S_2 = \{v_1, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{q-1}, v_q\}$  與  $S_3 = \{v_1, v_p, v_q, v_{q+1}, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ 。

令由  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  所決定的三角剖分圖分別為  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ ，其中  $G_i$  恰包含  $k_i A$  與  $t_i B$ ， $i = 1, 2, 3$ 。

根據數學歸納法假設，可知  $k_i = t_i + 2$ ， $i = 1, 2, 3$ 。因為  $G_i$  的內圍三角形必為  $G$  的內圍三角形，所以

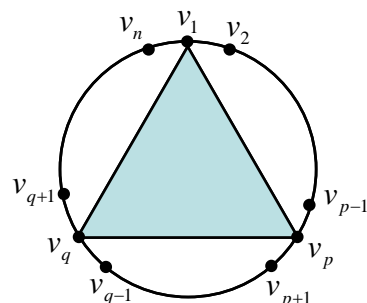
以  $t_1 + t_2 + t_3 + 1 = t$ 。因為  $\{v_1, v_p, v_q\}$  所決定的三角形為  $G_i$  的外圍

三角形，但卻不屬於  $G$  的外圍三角形，而  $G_i$  中非  $\{v_1, v_p, v_q\}$  決定

的外圍三角形必為  $G$  的外圍三角形，所以經過計算可知  $G$  恰包含

$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) = k_1 + k_2 + k_3 - 3 = t_1 + t_2 + t_3 + 3 = t + 2$  個

外圍三角形。故  $k = t + 2$  命題成立。



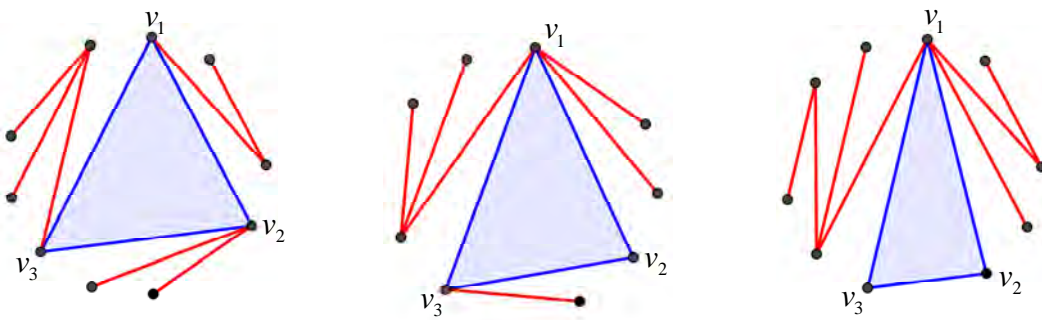
根據數學歸納法得證，若三角剖分圖  $G$  恰包含  $kA$ 、 $tB$ ，其中  $t, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，則  $k = t + 2$ 。 ■

對於正  $n$  邊形，已知『恰包含  $2A$  的不同構三角剖分圖』與『 $n - 2$  個點的不同構 caterpillar』具有一對一對應關係，因此兩者具有相同數量。根據 Theorem 5 可知，若  $G$  為恰包含  $3A$  的三角剖分圖，則  $G$  必恰包含  $1B$ 。因此我們試圖想要刻畫  $G$  的內部圖形有何結構特徵。以下我們先定義由 caterpillar 推廣的一類特殊圖形。

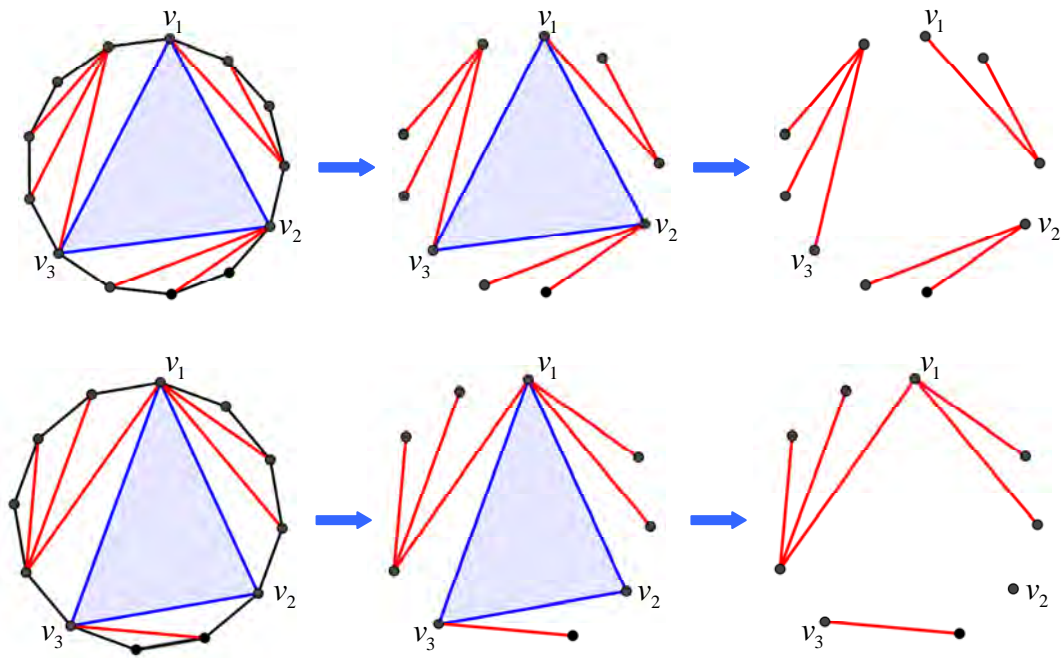
**Triangle-Caterpillar :**

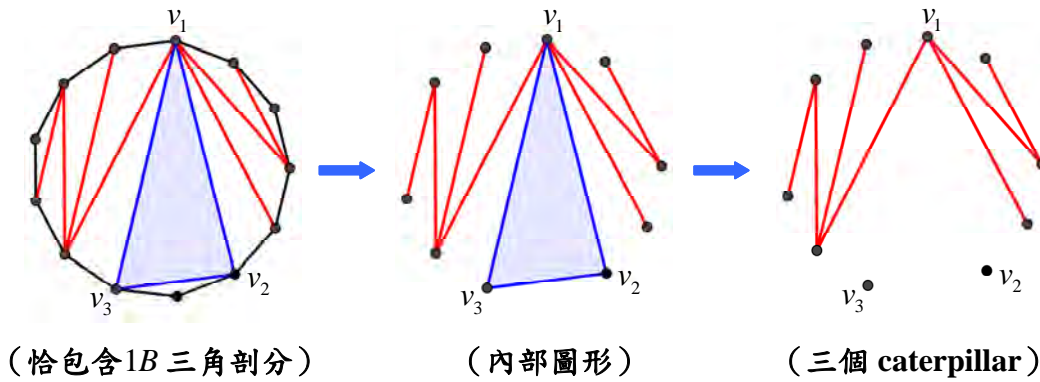
令  $H$  是一個平面圖，其中  $v_1, v_2, v_3 \in V(H)$  且  $\{v_1, v_2, v_3\}$  為  $H$  唯一三角形的三頂點，若  $H$  刪除  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$  三條邊後所得的三個連通子圖皆為 caterpillar，則稱  $H$  為『triangle-caterpillar』。  
 意即，triangle-caterpillar 的圖形結構必為一個三角形且三角形頂點各別連結一個 caterpillar。

例如：下列三個圖皆為 triangle-caterpillar。



若三角剖分圖  $G$  恰包含  $3A$ ，則  $G$  的內部必包含唯一的內圍三角形（如下圖所示），以下我們將證明  $G$  的內部圖形必為 triangle-caterpillar。



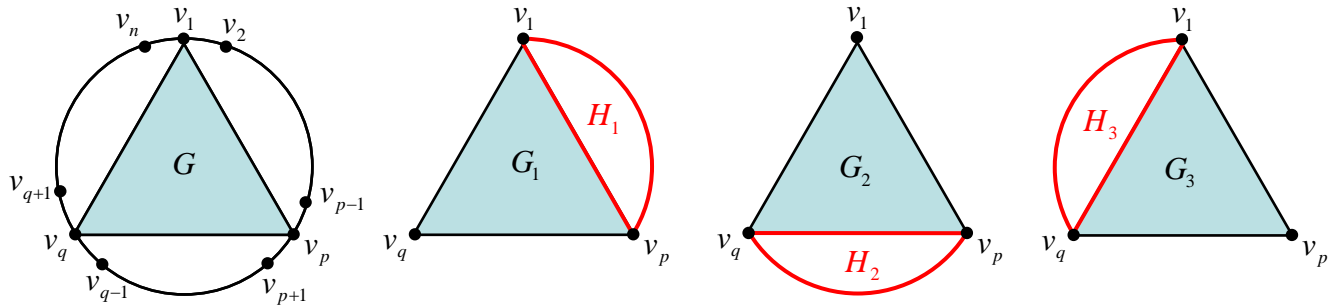


**Theorem 6:** 令  $G$  為恰包含  $3A$  的三角剖分圖，則  $G$  的內部圖形必為 triangle-caterpillar。

**【證明】:**

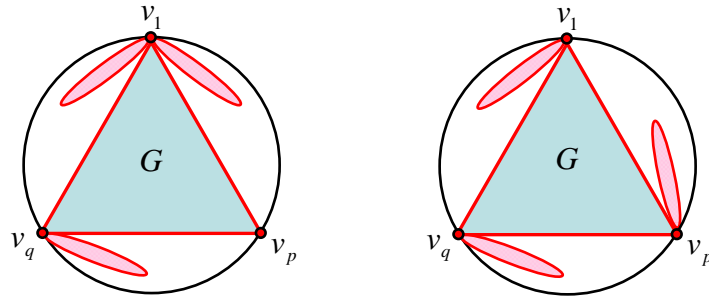
令  $G$  為恰包含  $3A$  的正  $n$  邊形三角剖分圖 ( $n \geq 6$ )，其頂點依順時針為  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，其中規定  $v_0 = v_n$  與  $v_{n+1} = v_1$ 。根據 Theorem 5 可知  $G$  為恰包含  $1B$ ，不失一般性，假設  $G$  唯一的內圍三角形頂點為  $\{v_1, v_p, v_q\}$ ，其中  $2 < p < q < n$ 。令頂點集合  $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p, v_q\}$ 、 $S_2 = \{v_1, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{q-1}, v_q\}$  與  $S_3 = \{v_1, v_p, v_q, v_{q+1}, \dots, v_{n-1}, v_n\}$  所決定的三角剖分圖分別為  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ 。

因為  $G$  為恰包含  $1B$ ，所以  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  皆不包含內圍三角形，故  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  皆為恰包含  $2A$  的三角剖分圖，其中  $\{v_1, v_p, v_q\}$  所決定的三角形  $T$  皆為  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  的外圍三角形。根據 Lemma 2 (1) 可知  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  的內部皆為 caterpillar，分別記為  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 。

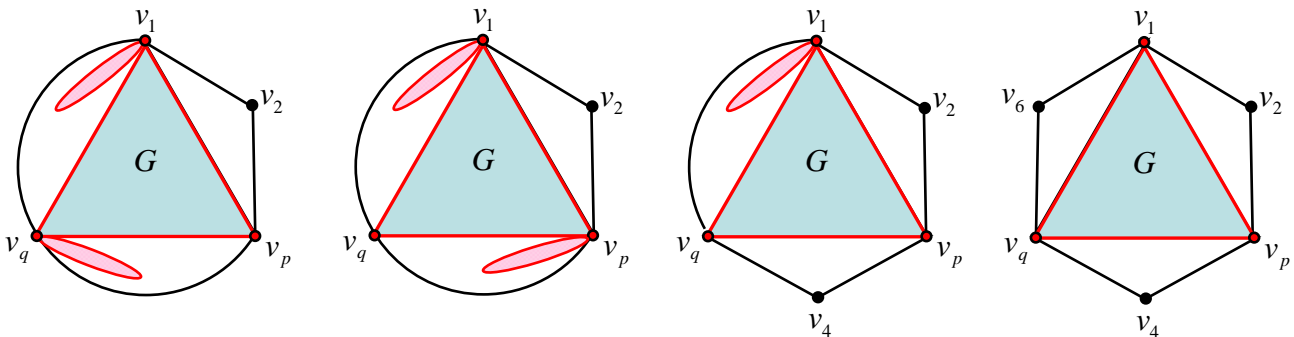


假設  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  的頂點數皆大於 4。根據 Lemma 2 (3) 可知  $\{v_1, v_p\}$ 、 $\{v_p, v_q\}$ 、 $\{v_q, v_1\}$  分別恰有一個點為  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$  的 leaf。考慮  $G_1$ ，不失一般性假設  $v_p$  為  $H_1$  的 leaf，則  $v_1$  必為  $H_1$  主幹上

的點；同理， $G_2$  中  $\{v_p, v_q\}$  恰有一點為  $H_2$  的 leaf 且為  $H_2$  主幹上的點； $G_3$  中  $\{v_q, v_1\}$  恰有一點為  $H_3$  的 leaf 且為  $H_3$  主幹上的點。令  $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ ，可知  $H$  為  $G$  的內部圖形且  $H$  包含三角形  $T$ 。此外，若將  $H$  刪除  $\{v_1 v_p, v_p v_q, v_q v_1\}$  三條邊後，則分別包含  $v_1, v_p, v_q$  的三個連通子圖皆為 caterpillar。故  $G$  的內部圖形  $H$  必為 triangle-caterpillar。



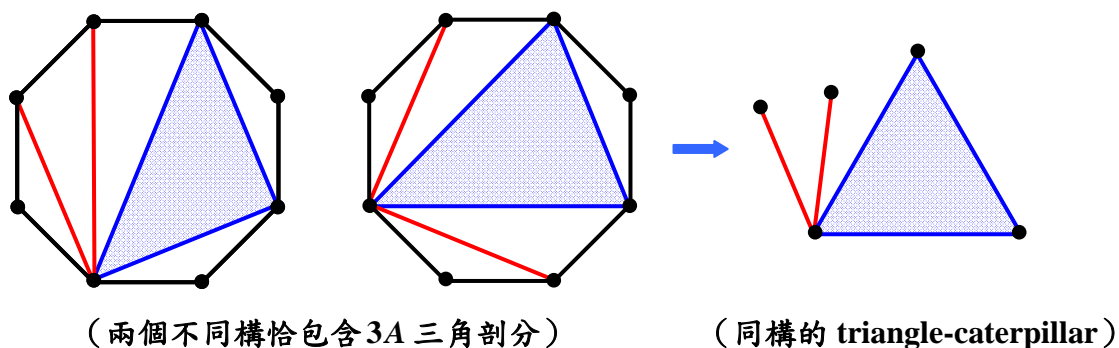
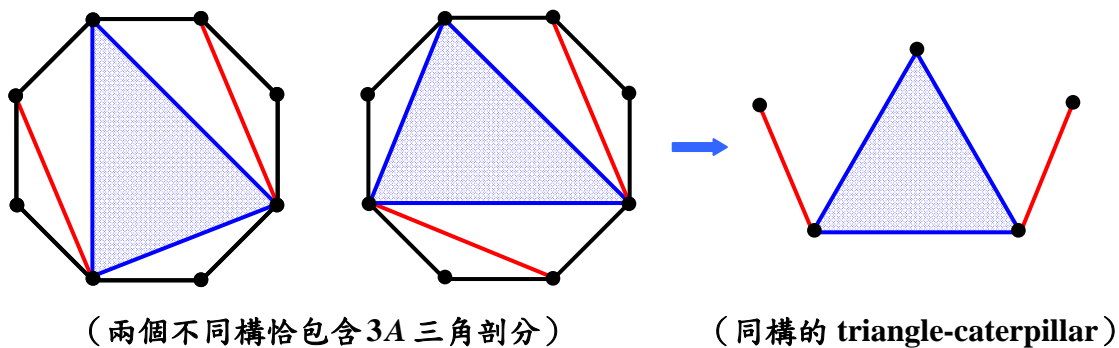
若  $G_1$  的頂點數等於 4，則  $H_1$  為兩個點的 caterpillar，其中  $\{v_1, v_p\}$  皆為  $H_1$  主幹上的點。上述推論亦成立。同理，當  $G_2$ 、 $G_3$  的頂點數等於 4 時，上述推論亦成立。



由此可知，恰包含  $3A$  的三角剖分圖  $G$ ，其內部圖形  $H$  必為 triangle-caterpillar。 ■

雖然 Theorem 6 指出恰包含  $3A$  的三角剖分圖會對應一個 triangle-caterpillar，但我們發現單靠 triangle-caterpillar 這類圖形尚不足以使恰包含  $3A$  的三角剖分圖產生一個相對應的關係，還必須再加以限制，才能使其產生單一的三角剖分圖。意即，存在兩個不同構恰包含  $3A$  的三角剖分圖，其內部圖形為同構的 triangle-caterpillar（如下圖所示）。目前我們的初步想法為，對於一個 triangle-caterpillar，在三頂點上所分屬的 caterpillar 進行條件限制，期望可以刻畫能夠與 triangle-caterpillar 進行一對一對應的三角剖分圖。此外，刻畫 triangle-caterpillar 對應的三角剖分圖數量，進一步以圖論的觀點來計算 triangle-caterpillar 不同構的情形，即可得知恰包含  $3A$  的不同構三角剖分圖總數。





如何刻畫正  $n$  邊形不同構三角剖分的總數  $D_n$ ，相信在數學上是一個重要且具有相當難度的問題，研究的過程，我們從沒想過三角剖分竟然會與化學的同分異構物有關聯性，如果能以數學的方法，跨領域解決化學的問題，實為數學語言強大的表現，礙於身為高中生所習得的數學知識有限，未能完全解決三角剖分，但將圖論的工具引進，讓三角剖分有了新的表現方式，同時我們也學習圖論的基礎論證方法，這對我們而言，不僅是研究的初體驗，更是一趟精彩的學習之旅。

## 參、研究結果與討論

### 一、研究結果

- 證明三角剖分的唯一性、提供相鄰三角形數序列的必要條件以及判別的演算法。
- 運用卡特蘭數求出不同構三角剖分以對稱性分類的算式：

完全對稱	若 $\frac{n}{4} \in \mathbb{N}$ ，則 $Q_n = catalan\left(\left(\frac{n+4}{4}\right) - 2\right)$ ； 若 $\frac{n}{4} \notin \mathbb{N}$ ，則 $Q_n = 0$ 。
星形對稱	若 $\frac{n}{6} \in \mathbb{N}$ ，則 $S_n = catalan\left(\left(\frac{n+6}{6}\right) - 2\right)$ ；若 $\frac{n}{6} \notin \mathbb{N}$ ，則 $S_n = 0$ 。
線對稱	$A_n = catalan\left(\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - 2\right) - Q_n - S_n$
旋轉對稱	若 $\frac{n}{3}$ 為偶數，則 $W_n = \frac{1}{2} \left( catalan\left(\left(\frac{n+3}{3}\right) - 2\right) - A_{\frac{n+3}{3}} \right)$ ； 若 $\frac{n}{3}$ 為奇數，則 $W_n = \frac{1}{2} catalan\left(\left(\frac{n+3}{3}\right) - 2\right)$ ； 若 $\frac{n}{3} \notin \mathbb{N}$ ，則 $W_n = 0$ 。
點對稱	若 $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ，則 $R_n = \frac{1}{2} \left( catalan\left(\left(\frac{n+2}{2}\right) - 2\right) - Q_n \right)$ ； 若 $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ ，則 $R_n = 0$ 。

- 建立化學式  $C_n H_{n+2}$  的同分異構物與不同構三角剖分數的對應關係。運用正  $(n+2)$  邊形的三角剖分來重建  $C_n H_{n+2}$  的分子結構。並由此說明  $C_n H_{n+2}$  的同分異構物的數量與正  $(n+2)$  邊形不同構三角剖分數  $D_{n+2}$  等價。

4. 求出正  $n$  邊形不同構三角剖分以最大相鄰三角形數分類的算式  $D_n(\Delta_{max})$  :

$\Delta_{max} = n - 2$	$D_n(\Delta_{max}) = 1, n \geq 3$ 。
$\Delta_{max} = n - 3$	$D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, n \geq 6$ 。
$\Delta_{max} = n - 4$	當 $n \geq 9$ 時, $D_n(\Delta_{max}) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n$ 。此外, $D_7(\Delta_{max}) = 1, D_8(\Delta_{max}) = 9$ 。
$\Delta_{max} = n - 5$	<p>當 <math>n \geq 11</math> 時, 則</p> $\begin{cases} \text{若 } n \text{ 為奇數, 則 } D_n(\Delta_{max}) = \frac{1}{12}(n^3 - 6n^2 + 5n) \\ \text{若 } n \text{ 為偶數, 則 } D_n(\Delta_{max}) = \frac{1}{12}(n^3 - 6n^2 + 8n) - 1 \end{cases}$ <p>此外, <math>D_8(\Delta_{max}) = 1, D_9(\Delta_{max}) = 11, D_{10}(\Delta_{max}) = 37</math>。</p>

5. 建立『正  $n$  邊形 ( $n \geq 5$ ) 恰含  $2A$  的不同構三角剖分數』與『 $(n-2)$  個點不同構的毛毛蟲圖 (caterpillar) 數量』之間的一對一對應關係。

6. 對於正  $n$  邊形不同構的三角剖分圖, 刻畫內圍三角形數量與外圍三角形數量必相差 2 的關係。

## 二、討論

我們一開始對原命題的『三角剖分』進行更明確的定義, 將旋轉和翻轉後視為相同的圖形, 試圖縮小『三角剖分數』的範圍, 進而更容易取得其通式, 但由於正  $n$  邊形的三角剖分是排列組合在圖形上的問題, 必須適當地將其分類, 並進行簡化, 因此, 我們將其以對稱性、最大相鄰三角形數和外圍三角形進行分類, 使其能顯現出規律, 並且能以排列組合的形式表達計算式。而在每一個項目中, 我們更劃分出細項, 進行更詳細的討論, 例如在對稱性上, 我們分出線對稱、點對稱、旋轉對稱、完全對稱、星形對稱和不對稱一一進行討論, 並得到其公式, 除此之外, 我們還將其連結上化學式  $C_n H_{n+2}$  和 caterpillar 圖形, 找出彼此的相關性。

## 肆、結論與應用

### 一、結論

對於不同構三角剖分數  $D_n$  截至目前為止仍沒有已知的通式，本研究嘗試使用不同分類方法切入，其中最完整的為對稱分類，在對稱分類中，我們將其細分為線對稱、點對稱、旋轉對稱、完全對稱、星形對稱和不對稱，並在討論時，參考卡特蘭數對三角剖分的定義，在卡特蘭數的基礎下，建立出線對稱、點對稱、旋轉對稱、完全對稱和星形對稱的方程式，但不對稱卻一直是我們難以突破的難關，而在這期間我們發現化學結構式  $C_nH_{n+2}$  的點群與各個對稱分類的數量相同，進而找出他們之間一一對應的關係，但因仍一直無法得到不同構三角剖分數，所以我們便換一個方向思考，從最大相鄰三角形數下手，我們找出最大相鄰三角形數為  $n-2$ 、 $n-3$ 、 $n-4$  和  $n-5$  時的通式，但也依舊卡在無法順利建立出遞迴關係，最後，我們試著以外圍三角形進行分類做計算，並將恰包含兩個外圍三角形的不同構三角剖分與 caterpillar 做連結，也找出了兩者之間一一對應的關係，而對於恰包含三個外圍三角形的三角剖分圖，我們也期望能藉由對它加以限制進而找出其與 caterpillar 圖形的連結，但是儘管都有一些結果，卻一直無法得到完整正確的結論，使我們無法找出不同構三角剖分數  $D_n$  的通式，實為遺憾，期望在未來可以學習其他高等數學知識，將此數學難題突破難關。

### 二、應用

我們的研究著重於外平面圖的近三角化探討，並將近三角化的外平面圖與化學結構式結合。研究過程得知二維的三角剖分圖與三維的化學結構式  $C_nH_{n+2}$ ，可以產生一一對應的關係，透過將三維立體結構與二維平面圖形的對應，將可以使原先在化學領域中，因立體結構過於複雜而難以判斷的立體問題，轉換到平面上的圖論問題來研究，將三維的問題簡化為二維的問題，有機會得以發現特殊的對應關係，且經由二維的三角剖分圖，我們亦可以輕易觀察到化學結構式  $C_nH_{n+2}$  的立體結構中，和 2 個氫相接的碳數及位置，以及雙鍵結與共振鍵的位置，方便其在化學領域中的計算。若進一步要計算  $C_nH_{n+2}$  各個分類的化學結構式的數量時，亦可使用上述我們已經解出的依對稱分類的不同構三角剖分數的算式進行計算。透過我們對三角剖分圖與化學結構式  $C_nH_{n+2}$  所找出的對應關係，若是能找出更多二維平面的特殊圖形與不同的立體化學結構式進行對應，則可以使更多化學中困難的立體結構問題簡單化，利用數學的技巧研究化學結構，解決跨領域的問題。

### 三、未來展望

對於正  $n$  邊形不同構的三角剖分，我們已由三個不同特性進行分類，雖有些分類仍無法完全刻畫清楚，但可以留做未來研究的方向，條列如下：

1. 對於不同構三角剖分的數量，能夠給定一個較佳的下界，或是精確的通式。
2. 探索  $C_n H_{n+2}$  在化學領域中是否仍有值得探討的部分能與不同構三角剖分做連結。
3. 給定最大相鄰三角形數  $\Delta_{max}$  是否能夠完整刻畫不同構三角剖分數。
4. 能否說明最大相鄰三角形數  $\Delta_{max} = n - k$  時，不同構三角剖分數的數量級別為  $(k - 2)$  次多項式。
5. 建立 Losanitsch's triangle 第  $n$  列各項數字所代表的化學意義與  $(n + 3)$  個點的 caterpillar 圖形之間的對應關係。說明若將  $(n + 3)$  個點不同構的毛毛蟲圖以度數為 1 的頂點數量來分類，恰與 Losanitsch's triangle 第  $n$  列的各項數值具有一致性。
6. 刻畫恰包含  $3A$  的三角剖分圖與 triangle-caterpillar 的對應關係，並精確計算出恰包含  $3A$  的不同構三角剖分圖數量。
7. 探討平面圖的多角剖分與化學同分異構物之間的關聯性。
8. 將所有三角剖分，依卡特蘭數區分為兩大類，在 *Type - A* 與 *Type - B* 的卡特蘭數限制之下，進行不同構三角剖分的探討，並研究其內部結構的特性。

## 伍、參考文獻

1. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。
2. 林福來，組合數學，中央圖書 (1983)。
3. 離散數學 (一)，數學傳播季刊選輯⑦，中央研究院數學研究所發行。
4. 鄭世雄，量子化學數學基礎，文京圖書 (2001)。
5. 『Lozanić's triangle』 From oeis. [http://oeis.org/wiki/Lozanić's\\_triangle](http://oeis.org/wiki/Lozanić's_triangle) .
6. A. Asinowski and A. Regev, *Triangulations with few ears: symmetry classes and disjointness*, *Integers*, 16, (2016).
7. D. Bowman and A. Regev, *Counting symmetry classes of dissections of a convex regular polygon*, preprint, (2012). <https://arxiv.org/abs/1209.6270>
8. J. N. Buloron, R. B. Corcino and J. M. Ontolan, *Number of dissections of the regular  $n$ -gon by diagonals*, *J. Integer Seq.* 20, (2017).
9. Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6<sup>th</sup>, CRC Press (2016).
10. S. J. Cyvin, J. Brunvoll, E. Brensdal, B. N. Cyvin and E. K. Lloyd, *Enumeration of polyene hydrocarbons: a complete mathematical solution*, *J. Chem. Inform. Comput. Sci.*, 35, (1995), 743-751.
11. S. Sen Gupta, K. Mukhopadhyaya, B. B. Bhattacharya and B. P. Sinha, *Geometric classification of triangulations and their enumeration in a convex polygon*, *Computers Math. Applic.* Vol. 27, No, 7, (1994), 99-115.
12. Ivan Gutman, *The chemical formula  $C_nH_{2n+2}$  and its mathematical background*, *The Teaching of Mathematics*, Vol. XI, 2, (2008), 53-61.
13. Ivan Gutman and Oskar E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer-Verlag New York, (1986).
14. R. K. Guy, *Dissecting a polygon into triangles*, *Bull. Malayan Math. Soc.* 5, (1958), 57-60.
15. F. Haray and A. J. Schwenk, *The number of caterpillars*, *Discrete Math.* 6, (1973), 359-365.
16. F. Hurtado and M. Noy, *Ears of triangulations and Catalan numbers*, *Discrete Math.* 149, (1996), 319-324.
17. J. W. Moon and L. Moser, *Triangular dissections of  $n$ -gons*, *Canad. Math. Bull.*, 6, (1963), 175-178.
18. A. Regev, *Enumerating triangulations by parallel diagonals*, *J. Integer Seq.* 15, (2012).
19. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2<sup>nd</sup>, Pearson Education Taiwan (2008).

## 【評語】 010036

該作品探討正  $n$  邊形上不同構的三角剖分數，內容解說詳細，並與其他數學中的圖形分類相連結，經由觀察提出好的假設。可惜所得結論稍嫌瑣碎，沒有主力結果。