2018 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010035

參展科別　數學

作品名稱　乾坤大挪移

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　殷　灝

作者姓名　温顥然、張志傑

關鍵詞　圓桌問題、坐法、次序數

作者簡介

作者合照（左起：張志傑、温顥然）

我是温顥然，我小時候就對與數學有關的益智遊戲和書籍有興趣，在國中曾與同學報名過校內科展，可惜因經驗不足而失利。高中進了數理班後，我又再次嘗試做科展，希望在有較充足的數學知識與經驗下，能有好的表現。

我是張志傑，從小對數學展露極高的興趣，經常抱著數學相關的書埋頭研究。國小及國中時以研究幾何學為主，上高中後開始嘗試組合方面的研究主題。今天很榮幸將拙作分享予諸位，希望各位能多予指教。

摘要

會議室圓桌上有 n 個座位，順時針依序放有編號①、②、③、…、ⓝ，共 n 張名牌。將參與這場會議的人也編碼，依序為 1、2、3、…、n，假設編號 1 的人一定會先抵達並坐到了名牌②的位置，剩下的人則依亂序到來，先找到自己名牌的座位，如果位置是空的就坐下，如果位置被佔了就往順時針方向找到下一個空位坐下（例如 3 到達時，若③、④均被坐了，而⑤位置是空的，則 3 就坐到名牌⑤的位置)。等到一個人坐定後，另一個人再進入會議室，依此規則，最後此 n 人到底會有幾種不同的坐法？

我們以遞迴手法以外的方法解決了這個的問題，並深入探討：

1. 能否從入座的順序立刻得知最後坐定的位置？
2. 能否從最後坐定的位置，找出進入會議室的順序？同時得知有幾種不同進入會議室的順序會符合同一種坐法？
3. 每個人坐錯位置的機率為何？恰 k 人坐錯位置的機率為何？坐錯位置人數的期望值為何？

Abstract

In the conference room, there is a round table and n seats. It was clockwise orderly put totally n cards that signed number 1, 2, 3, to n. We also give all the people that attend the meeting a card, which were orderly signed 1, 2, 3, to n. In the beginning, the person who took card number 1 will get into the conference room first, and he must sit on the seat which was signed number 2. All the other people will arrive in randomly. They will find their own seat first. If the seat is empty, he will sit down, or he will find the nearest empty seat clockwise (For example, if the person who took card number 3 noticed his seat were occupied by other people, he will find other seats clockwise. If the nearest seat was signed number 5, he will sit it.) Anyone can't enter in the conference room until the pervious one sit down.

We solve the problem through another way that is different from Recursion relation method. We also do in-depth discussion below:

1. Whether we can know the final position of sitting through the enter order?
2. Whether we can find out the order into the conference room from the final pattern, and find out how many different enter order will in keeping with the final pattern?
3. What is the Probability of everyone siting on the wrong seat? What is the Probability that k person(s) sit(s) the wrong seat? What is the Expectation that the number of the people that sit on the wrong seat?

壹、前言

一、研究動機

在 2003 年的 YLL 討論網（參考資料一），有一個圓桌的問題如下：有 12 位教授要在一個圓桌上舉行會議，其中每位教授都有自己的編號（1～12 號），同時圓桌上的 12 個位子也有各自的編號（1～12 號）與教授們的編號對應。其中第一個進來的 1 號教授因精神不濟，坐到了圓桌上 2 號教授的位子，此後的教授們亂序一個一個進入，若發現自己的位子是空的，就直接坐下；若自己的位子被占了，就順時針尋找空位，直到有空位才坐下。這剩下的十一位教授進來的次序數量很多，但最後能有多少種不同的坐法？版主在提出這個問題的 20 分鐘後，就有人利用遞迴關係解出來答案為 1024，其做法如下：

令 n 個人時，最後會有 a_n 種不同的坐法，則本題的所求為 a_{12}

以下考慮兩種情況：

（一）1 號進來後，2 號接著進來，因為 2 號位子被占了，因此坐在 3 號位子，此時剩下的 $3\sim n$ 號坐剩下的 $4\sim n$ 號及 1 號位置，這最後會有 a_{n-1} 種不同坐法

（二）1 號進來後，k 號接著進來（$3\le k\le n$），因為自己的位子空著，所以坐在 k 號位子，此時可將 k 號去除，變成 $n-1$ 位坐圓桌，最後也會有 a_{n-1} 種不同坐法

由以上，得 $a_n=a_{n-1}+a_{n-1}=2a_{n-1}$，又顯然 $a_2=1$，因此 $a_{12}=2^{10}=1024$。

隨著答案的揭曉，對於這個問題的討論也到此為止，但這個問題似乎並沒有這麼單純，應該還有很多可以深入探討的內容，只是單純尋找坐法數的解答，無法滿足我們打破砂鍋問到底的研究精神，於是在自信驅使下，我們開始針對問題的各個面向繼續延伸，期望能發現更多有趣的現象。

二、研究目的

（一）教授們最後的坐法，是否存在某種規律？是不是隨便寫出一種坐法，就會存在一組入坐的次序與之對應？

（二）能否給定一組教授進入的次序，立刻找出其對應的坐法？

（三）到底有幾種進入的次序，都會變成同樣一種坐法？

（四）找出每位教授坐錯位置的機率、恰有 k 人坐錯位置的機率，以及計算出坐錯位置人數的期望值。

貳、研究過程與方法

一、符號定義

首先我們先舉一個例子，來說明我們的符號規定：

假設僅有 5 人，其入座次序為 1、3、5、2、4，首先起始設定為 1 號坐到了 2 號，3 號進入時因自己的坐位是空的，所以會坐在 3 號的位置，接著 5 號進入，也會坐到自己 5 號的位置，而 2 號進入時，因為其位置上已有人，因此順時針找到最進的 4 號空位坐下，而最後一位 4 號因 4 號的坐位已被 2 號坐走，因此順時針找到 1 號的空位坐下，如下圖所示。

在這個例子裡，我們將 5 人進入的次序記為「1-3-5-2-4」，而最後坐法中，注意到 3、5 號坐對了位置，而 1、2、4 號的位置均坐錯，並有 1 號坐到 2 號，2 號坐到 4 號，4 號坐到 1 號位置的循環產生，我們將這個坐法記為循環「${}_5(1,2,4)$」，左下標的 5 表示總共有 5 人入座，而沒有出現在此循環中的 3 號、5 號表示他們均坐在自己號碼的位置。最後，到底有幾種不同的入座次序，其對應的坐法都是${}_5(1,2,4)$？答案是 3 種（後面說明這件事），我們將此記為「$\#_5(1,2,4)=3$」。

現在我們可以正式定義我們的符號了：

【符號定義 1】$1\text{-}a_2\text{-}a_3\text{-}\cdots\text{-}a_n$ ：表示 n 人時，入座順序為 1、a_2、a_3、⋯、a_n，

以下稱為$\boxed{\text{次序}}$

【符號定義 2】${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$：表示 n 人時，最後坐法為 1 號坐到 2 號，2 號坐到a_1號，

a_1號坐到a_2號，⋯，a_k號坐到 1 號的循環，

以下稱為$\boxed{\text{坐法}}$

【符號定義 3】$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$：表示 n 人時，有多少種入座的次序，其最後對應的坐法

均為${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$，以下稱為該坐法的$\boxed{\text{次序數}}$

二、窮舉暴力法

在我們沒有任何頭緒時，決定先將人數較少的情形全部列舉出來。以下為$n=2$，3，4，5，6 時，入座的所有次序與其對應的坐法，還有每種坐法的次序數：

（一）兩個人

入座次序	1-2
對應的坐法	${}_2(1,2)$
坐法的次序數	$\#_2(1,2)=1$

（二）三個人

1-2-3	1-3-2
$_3(1,2,3)$	$_3(1,2)$
$\#_3(1,2,3) = 1$	$\#_3(1,2) = 1$

（三）四個人

1-2-3-4	1-2-4-3、1-4-2-3	1-3-2-4	1-3-4-2、1-4-3-2
$_4(1,2,3,4,5)$	$_4(1,2,3,5)$	$_4(1,2,4,5)$	$_4(1,2,5)$
$\#_4(1,2,3,4,) = 1$	$\#_4(1,2,3,) = 2$	$\#_4(1,2,4,) = 1$	$\#_4(1,2,) = 2$

（四）五個人

<table>
<tr><td>1-2-3-4-5</td><td>1-2-4-3-5、1-4-2-3-5</td><td colspan="2">1-3-2-5-4、1-3-5-2-4、1-5-3-2-4</td></tr>
<tr><td>$_5(1,2,3,4,5)$</td><td>$_5(1,2,3,5)$</td><td colspan="2">$_5(1,2,4)$</td></tr>
<tr><td>$\#_5(1,2,3,4,5) = 1$</td><td>$\#_5(1,2,3,5) = 2$</td><td colspan="2">$\#_5(1,2,4) = 3$</td></tr>
<tr><td>1-3-2-4-5</td><td>1-3-4-2-5、1-4-3-2-5</td><td colspan="2">1-2-3-5-4、1-2-5-3-4、1-5-2-3-4</td></tr>
<tr><td>$_5(1,2,4,5)$</td><td>$_5(1,2,5)$</td><td colspan="2">$_5(1,2,3.4)$</td></tr>
<tr><td>$\#_5(1,2,4,5) = 1$</td><td>$\#_5(1,2,5) = 2$</td><td colspan="2">$\#_5((1,2,3,4) = 3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1-2-4-5-3、1-2-5-4-3、1-4-2-5-3、
1-4-5-2-3、1-5-2-4-3、1-5-4-2-3</td><td colspan="2">1-3-4-5-2、1-3-5-4-2、1-4-3-5-2、
1-4-5-3-2、1-5-3-4-2、1-5-4-3-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$_5(1,2,3)$</td><td colspan="2">$_5(1,2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\#_5(1,2,3) = 6$</td><td colspan="2">$\#_5(1,2) = 6$</td></tr>
</table>

（五）六個人

1-2-3-4-5-6	1-2-4-3-5-6、1-4-2-3-5-6	1-3-2-5-4-6、1-3-5-2-4-6、1-5-3-2-4-6
$_6(1,2,3,4,5,6)$	$_6(1,2,3,5,6)$	$_6(1,2,4,6)$
$\#_6(1,2,3,4,5,6) = 1$	$\#_6(1,2,3,5,6) = 2$	$\#_6(1,2,4,6) = 3$
1-3-2-4-5-6	1-3-4-2-5-6、1-5-2-3-4-6	1-2-3-5-4-6、1-2-5-3-4-6、1-5-2-3-4-6
$_6(1,2,4,5,6)$	$_6(1,2,5,6)$	$_6(1,2,3,4,6)$
$\#_6(1,2,4,5,6) = 1$	$\#_6(1,2,5,6) = 2$	$\#_6(1,2,3,4,6) = 3$

1-2-3-4-6-5、1-2-3-6-4-5、 1-2-6-3-4-5、1-6-2-3-4-5	1-2-4-5-3-6、1-2-5-4-3-6、1-4-2-5-3-6、 1-4-5-2-3-6、1-5-2-4-3-6、1-5-4-2-3-6
$_6(1,2,3,4,5)$	$_6(1,2,3,6)$
$\#_6(1,2,3,4,5) = 4$	$\#_6(1,2,3,6) = 6$
1-3-2-4-6-5、1-3-2-6-4-5、 1-3-6-2-4-5、1-6-3-2-4-5	1-3-4-5-2-6、1-3-5-4-2-6、1-4-3-5-2-6、 1-4-5-3-2-6、1-5-3-4-2-6、1-5-4-3-2-6
$_6(1,2,4,5)$	$_6(1,2,6)$
$\#_6(1,2,4,5) = 4$	$\#_6(1,2,6) = 6$

1-2-4-3-6-5、1-2-4-6-3-5、1-2-6-4-3-5、1-4-2-3-6-5 1-4-2-6-3-5、1-4-6-2-3-5、1-6-2-4-3-5、1-6-4-2-3-5
$_6(1,2,3,5)$
$\#_6(1,2,3,5) = 8$
1-3-4-2-6-5、1-3-4-6-2-5、1-3-6-4-2-5、1-4-3-2-6-5 1-4-3-2-6-5、1-4-6-3-2-5、1-6-3-4-2-5、1-6-4-3-2-5
$_6(1,2,5)$
$\#_6(1,2,5) = 8$

(續下頁)

1-2-3-5-6-4、1-2-3-6-5-4、1-2-5-3-6-4、1-2-5-6-3-4、 1-2-6-3-5-4、1-2-6-5-3-4、1-5-2-3-6-4、1-5-2-6-3-4、 1-5-6-2-3-4、1-6-2-3-5-4、1-6-2-5-3-4、1-6-5-2-3-4
${}_6(1,2,3,4)$
${}_6(1,2,3,4) = 12$
1-3-2-5-6-4、1-3-2-6-5-4、1-3-5-2-6-4、1-3-5-6-2-4、 1-3-6-2-5-4、1-3-6-5-2-4、1-5-3-2-6-4、1-5-3-6-2-4、 1-5-6-3-2-4、1-6-3-2-5-4、1-6-3-5-2-4、1-6-5-3-2-4
${}_6(1,2,4)$
${}_6(1,2,4) = 12$
1-2-4-5-6-3、1-2-4-6-5-3、1-2-5-4-6-3、1-2-5-6-4-3、 1-2-6-4-5-3、1-2-6-5-4-3、1-4-2-5-6-3、1-4-2-6-5-3、 1-4-5-2-6-3、1-4-5-6-2-3、1-4-6-2-5-3、1-4-6-5-2-3、 1-5-2-4-6-3、1-5-2-6-4-3、1-5-4-2-6-3、1-5-4-6-2-3、 1-5-6-2-4-3、1-5-6-4-2-3、1-6-2-4-5-3、1-6-2-5-4-3、 1-6-4-2-5-3、1-6-4-5-2-3、1-6-5-2-4-3、1-6-5-4-2-3
${}_6(1,2,3)$
$\#_6(1,2,3) = 24$
1-3-4-5-6-2、1-3-4-6-5-2、1-3-5-4-6-2、1-3-5-6-4-2、 1-3-6-4-5-2、1-3-6-5-4-2、1-4-3-5-6-2、1-4-3-6-5-2、 1-4-5-3-6-2、1-4-5-6-3-2、1-4-6-3-5-2、1-4-6-5-3-2、 1-5-3-4-6-2、1-5-3-6-4-2、1-5-4-3-6-2、1-5-4-6-3-2、 1-5-6-3-4-2、1-5-6-4-3-2、1-6-3-4-5-2、1-6-3-5-4-2、 1-6-4-3-5-2、1-6-4-5-3-2、1-6-5-3-4-2、1-6-5-4-3-2
${}_6(1,2)$
$\#_6(1,2) = 24$

三、列舉後的啟示與發現

列舉的過程與結果中，我們體會與觀察到了一些現象，以下一一提出並證明之。

（一）關於次序與坐法部分

【定理 1】 坐法僅會產生一個循環。

【註】 換言之，不可能有坐法為 $(1,2,4)(3,5)$。

（即不會有 1 坐到 2、2 坐到 4、4 坐到 1，而 3、5 位置互換，出現兩個循環的坐法）

【證明】 我們以反證法證明之，設某個次序 P 對應的坐法有兩個循環，令為

$(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)(b_1,b_2,\cdots,b_m)$（一開始，1 號會坐到 2 號的位子，所以必定會有一個以 1, 2 開頭的循環），其中 a_i，b_j 均大於或等於 3。

由於 b_1 坐到了 b_2 的位置，這表示 b_1 比 b_2 先入坐，否則若 b_2 比 b_1 先入坐，b_2 會先尋找自己的位置（注意到只有 1 入坐時不會先找自己的位置，而 $b_1 \neq 1$），若被坐了，才會順時針尋找最近的空位坐下，這將導致在 b_1 進來前 b_2 的位置早被自己或其他人坐了，後來進來的 b_1 就不可能坐到 b_2 的位置。同理，由於 b_2 坐到了 b_3 的位置，所以 b_2 比 b_3 先入坐，依此類推，b_{m-1} 會比 b_m 先入坐，但最後因為 b_m 坐到了 b_1 的位置，因此 b_m 又比 b_1 先入坐，矛盾。

【定理 2】 坐法 ${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 必須滿足 $1<2<a_1<a_2<\cdots<a_k$。

在證明定理 2 之前，我們先證明以下兩個引理。

【引理 1】 若編號 p 為最後一位入座的人（$2 \leq p \leq n$），則他必定坐在 1 號的位置。

反之，若 p 號坐到 1 號位置，則他一定是入座次序的最後 1 位。

【證明】 **$(\Rightarrow)$**

利用反證法，假設 p 最後入座且坐到了 q 號位置（$q \neq 1,2$），

若 $p \neq q$，則因為 p 入座前，q 一直是空位，但 q 比 p 先入座，所以 q 會坐到自己的位子，矛盾。

若 $p = q$，則由於 $2 \sim p-1$ 共 $p-2$ 個人在 p 之前入座，所以他們必定會坐在 $3 \sim p-1$ 號共 $p-3$ 個位置（這是因為若他們入座時，自己的位置被佔了，就會順時

針找空位，但 p 號位置一直是空的，直到最後一位 p 進來時才被坐，所以他們坐到位置的號碼必定 $\le p-1$，而 2 號位置是一開始就被 1 號坐去了），此時發生有 $p-2$ 個人坐在 $p-3$ 個位置，亦矛盾。

$(\Leftarrow)$

再次利用反證法，假設坐到 1 號位置的 p 號不是最後一位進來，那麼一定有一位 t 號是最後進入者（$t \ne p$），由前段的證明，知 t 號會坐到 1 號的位置，矛盾。

【引理 2】 k 號不會坐到 3 到 $k-1$ 號的位置。（$k > 3$）

【證明】 反證法，假設表示 k 號坐到 3 到 $k-1$ 號的位置，這表示 k 自己的位置被坐了，因此他順時針尋找 $k+1$ 號之後的空位，而最後空位出現在 3 到 $k-1$ 號，因此 1 號的位置在他進來前已經被坐了，設坐在 1 號位置的人為 p 號，則由定理 2，知 p 號一定最後一位才入座，這表示 1 號坐位從頭到尾都是空的，當 k 號進來時應該要坐到 1 號才是，而不是坐到 3 到 $k-1$ 號，因此產生矛盾。

接著回到定理 2 的證明。

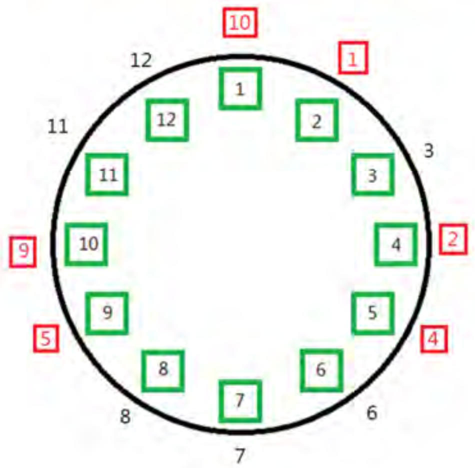
【定理 2 的證明】 首先由坐法的定義知 $a_{i-1} \ne a_i$（$2 \le i \le k$），假設 $a_{i-1} > a_i$，由定理 3，a_{i-1} 不會坐到 3 到 $a_{i-1}-1$，即 $a_i \ge a_{i-1}$，矛盾。

對於次序與坐法的關聯性有些了解之後，我們可從一種入坐次序立即得出其對應的坐法：

【如何由次序找到其對應的坐法？】

1 會坐到 2，在 1 與 2 之間入座的人皆會坐到自己的位子（不會出現在坐法的循環裡），而 2 入座時，此時的空位剩 2 以外未入座的人的位子（即次序中 2 右側的所有人）和 1 號位。依入座規則，2 會坐到次序中 2 的右側中最小數的座位，令其為 a_1（即 2 會坐到 a_1），在 2 與 a_1 之間入座的人皆會坐到自己的位子（不會出現在坐法的循環裡），而 a_1 入座時，此時的空位剩 a_1 以外未入座的人的位子（即次序中 a_1 右側的所有人）和 1 號位。依入座規則，a_1 會坐到次序中 a_1 右側中最小數的座位，令其為 a_2，重複這樣的步驟，直到 a_k 為次序中最後一位，由

於 a_k 是次序中最後一位，他一定會在坐法的循環裡且坐到 1 號，因此 ${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 即為坐法。以下舉一個例子，說明以上的步驟：



坐法為：${}_{12}(1,2,4,5,9,10)$

【結論】一組次序對應的坐法其實會是數列 $1,2,\cdots,n$ 中，以 1 , 2 開頭的$\boxed{\text{子數列}}$。

反過來說，給定一組以 1 , 2 開頭的遞增數列，我們也都能夠找到一組次序：

1-(所有坐對的人入座)-2-(所有坐錯的人從小到大依序入座)

與之對應。現在，我們可以回到研究動機裡提到的 YLL 討論網（參考資料一）的問題，n 人入座時，有 $(n-1)!$ 種入座次序，到底會產生幾種不同的坐法，這樣的問題就與數列 $1,2,3,\cdots,n$ 中到底有幾個不同的以 1 , 2 開頭的子數列是一樣的，因此我們有以下定理：

【定理 3】n 人入座的圓桌問題，最後會有 2^{n-2} 種不同的坐法。

【證明】因為坐法即 1,2 開頭的子序列，所以 3~n 共 $n-2$ 個數在子數列中可取或不取，有 2^{n-2} 種取法，因此共有 2^{n-2} 種不同坐法。

（二）關於次序數部分

在前面列舉的結果中，我們發現所有的入座次序會呈現對稱分布（意思是會有兩個不同的坐法其次序數相同），且次序數必定為$(n-2)!$的因數，下面兩個定理，說明了這兩個現象的理由：

【定理 4】對稱性

兩種不同坐法的循環中，若除了 3 以外的數字皆相同者，則其次序數會相等，即

$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_n(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$（其中$a_1\neq 3$）。

【證明】坐法為$(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$的一組次序$1-\cdots-3-\cdots-2-\cdots-a_1-\cdots-a_2-\cdots-a_k$將其 2 ,3 的對調後所得的次序$1-\cdots-2-\cdots-3-\cdots-a_1-\cdots-a_2-\cdots-a_k$就會對應到坐法$(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$，反之亦然。

【定理 5】互補性

n人時，若兩種坐法中除了 1,2 之外，無一數相同，且 3 到n皆恰出現一次，則其次序數相乘為$(n-2)!$。

意即：

設集合$S=\{3,4,\cdots,n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$為S的子集，則：

$\#_n(1,2,A)\cdot\#_n(1,2,S-A)=(n-2)!$。

（這裡的集合S、A的元素必須要從小排到大）

【註】定理 5 的證明，待定理 8 次序數的公式二出現後便不證自明。

接下來的研究，我們嘗試要去找出n人時所有坐法的次序數，藉由定理 3 可知：本應求2^{n-2}個坐法的次序數，但由定理 4 對稱性可將要求的數量減半，變為2^{n-3}，再由定理 5 相乘為定值的性質，可再將數量減半，所以在n人的情況中，我們只需計算出2^{n-4}個坐法的次序數，就會得到全貌！這樣的概念讓我們很興奮，並更積極地想要找出每種坐法次序數的計算

方式，皇天不負苦心人，我們辦到了，而且還沒有利用減半再減半的效果，是直接給出所有坐法的次序數公式，我們將在下一段的討論中揭曉！

本段的最後，我們提出幾個有關次序數的問題：

【提問 1】 由定理 5 知次序數會是 $(n-2)!$ 的因數，那麼是否 $(n-2)!$ 所有的因數都會是某一個坐法的次序數呢？

這個問題的答案是否定的，雖然 6 人時的狀況，的確如此，且 7 人時，我們也曾列舉法發現有同樣的性質，但後來我們發現 8 人時，就會有因數並不是某個坐法的次序數，其原因在次序數的公式揭曉後就會明顯看出個所以然。

既然 $(n-2)!$ 有些因數為某個坐法的次序數，有些不是，所以我們做了以下的定義：

【定義 4】 考慮 n 人的圓桌問題，若正整數 p 為 $(n-2)!$ 的因數，且 p 為某個坐法的次序數，則我們稱 p 為「<u>可嵌入的</u>」；反之，稱為「<u>不可嵌入的</u>」。

【提問 2】 $(n-2)!$ 的哪些因數是可嵌入的？哪些是不可嵌入的？

【提問 3】 如果 p 是可嵌入的，有幾種坐法其次序數均為 p ？

以上兩個問題的答案，在次序數公式發現後便得到解決。

四、次序數公式的發現

關於次序數的算法，我們先以排列組合的計算方式，得到了第一個較複雜的公式；後來，我們發現了次序數的遞迴關係，給出第二個次序數更為簡潔且優美的公式。

【定理 6】次序數的第一公式

考慮 n 人的圓桌問題，設

$$(1,2,a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1,a_2-m_2,a_2-m_2+1,\cdots,a_2,\cdots\cdots,a_k-m_k,a_k-m_k+1,\cdots,a_k)$$

為一種坐法，其中 a_1-m_1 到 a_1，a_2-m_2 到 a_2，……，a_k-m_k 到 a_k 各表示一組連續的整數且 a_k 是第 k 組連續整數的最大數，而 m_k 是第 k 組連續整數中，最大數與最小數之差。

令 $c_1=a_1-m_1-3$（即 c_1 為 2 到 a_1-m_1 之間的整數個數），

$c_i=a_i-m_i-a_{i-1}-1$（$2\le i\le k$）（即 c_i 為 a_i 到 a_i-m_i 之間的整數個數），

$c_{k+1}=n-a_k$（即 c_{k+1} 為 a_k 之後一直到 n 的整數個數），

則此坐法的次序數為 $\boxed{c_1!\times c_2!\times H^{c_2+1}_{a_1-2}\times c_3!\times H^{c_3+1}_{a_2-2}\times\cdots\times c_{k+1}!\times H^{c_{k+1}+1}_{a_k-2}}$。

【註】 公式中的 $H^n_m=C^{n+m-1}_m=\binom{n+m-1}{m}$。

【圖示說明】

第 1 組連續整數　　第 2 組連續整數　　第 k 組連續整數

$$(1,2,\boxed{a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1},\boxed{a_2-m_2,a_2-m_2+1,\cdots,a_2},\cdots\cdots,\boxed{a_k-m_k,a_k-m_k+1,\cdots,a_k}\ )$$

2 與 a_1-m_1 之間的整數有 $c_1=a_1-m_1-3$ 個

a_1 與 a_2-m_1 之間的整數有 $c_2=a_2-m_2-a_1-1$ 個

a_k 之後到 n 的整數有 $c_{k+1}=n-a_k$ 個

【例】 在進入證明之前，我們先舉個例子利用公式計算次序數：

考慮 14 人的圓桌問題，坐法為 ${}_{14}(1,2,5,6,10,11,12)$。

$a_1=6$　　$a_2=12$

第 1 組　　第 2 組

$${}_{14}(\underbrace{1\ ,\ 2}_{c_1=2}\ ,\ \boxed{5\ ,\ 6}\ ,\ \boxed{10\ ,\ 11\ ,\ 12}\ \underbrace{\qquad}_{c_3=2})$$

$c_2=3$

$$
\begin{aligned}
\#_{14}(1,2,5,6,10,11,12) &= 2!\ \times\ 3!\ \times\ H^{3+1}_{6-2}\ \times\ 2!\ \times\ H^{2+1}_{12-2} \\
&= 2\cdot 6\cdot H^{4}_{4}\cdot 2\cdot H^{3}_{10} = 2\cdot 6\cdot C^{7}_{4}\cdot 2\cdot C^{12}_{10} \\
&= 2\cdot 6\cdot 35\cdot 2\cdot 66 = 55440
\end{aligned}
$$

【證明】首先，因為 2 要坐到 a_1-m_1，這表示 2 進來時，2 , 3 , $\cdots, a_1-m_1-1$號的位置均已被坐，也就是說編號 $3,4,\cdots,a_1-m_1-1$的人（共有c_1個），必須比 2 號之前進來，但次序可以任意，意即c_1個數在 1 和 2 之間任意排列，有$c_1!$ 種排法。

$$1\,,\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3,4,\cdots,a_1-m_1-1},\,2$$

以上的數，任意排入 1,2 之間，共有 $c_1!$種排法

同樣地，因為a_1要坐到a_2-m_2的位置，所以$a_1+1\,,\,a_1+2\,,\cdots,a_2-m_2-1$（共有$c_2$個）必須在$a_1$之前進來，意即$c_2$個數在 1 和$a_1$之間任意排列，有$c_2!$種排法。

$$1\,,\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a_1+1,\,a_1+2\,,\cdots,\,a_2-m_2-1},\,a_1$$

以上的數，任意排入 $1,a_1$之間，共有 $c_2!$種排法

但 1 與a_1之間還有$2,a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1-1$以及上述的 $3,4,\cdots,a_1-m_1-1$共c_1個數（總共有$1+(a_1-1)-(a_1-m_1)+1+c_1=m_1+1+c_1=m_1+1+a_1-m_1-3=a_2-2$個）必須按照定好的次序排入 1 與$a_1$之間，意即要在 1 與$c_2$個數與$a_1$已排好的$c_2+1$間隔中，插入$a_2-2$個已經定好次序的數，這會有$H^{c_2+1}_{a_1-2}$種插入法。

於上個步驟中已經排好的 c_2 個數，產生 c_2+1 個間隔「^」

$$1\,\overbrace{\underset{\wedge}{,}\,a_1+1\,\underset{\wedge}{,}\,a_1+2\,\underset{\wedge}{,}\ \cdots\ \underset{\wedge}{,}\,a_2-m_2-1\underset{\wedge}{,}}\,a_1$$

將 $2,a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1-1$（次序不可對調）與

$3,4,\cdots,a_1-m_1-1$（次序已在前述過程中定下）任意插

入 c_2+1 個間隔，不需考慮次序，共有 $H^{c_2+1}_{a_1-2}$ 種插入法

到目前為止，已經有$c_1! \times c_2! \times H_{a_1-2}^{c_2+1}$種排法。

以此類推，每考慮一次a_i與c_{i+1}，就會產生$c_{i+1}! \times H_{c_{i+1}+1}^{a_i-2}$種排法，

於是最後的次序數就會是$c_1! \times c_2! \times H_{a_1-2}^{c_2+1} \times c_3! \times H_{a_2-2}^{c_3+1} \times \cdots \times c_{k+1}! \times H_{a_k-2}^{c_{k+1}+1}$。

接著，下面這個定理，給出了次序數的遞迴關係式，並且利用這個定理，可以導出次序數的第二個公式，結果之漂亮令人驚艷！

【定理 7】次序數的遞迴關係式

設n為正整數且$n \ge 3$，$a_k \le n-1$，則：

(1) $\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

(2) $\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n) = \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

【證明】設$n-1$人時，次序 $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ 對應的坐法為$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

當人數增為n人時，新加入的編號n，在次序 $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ 中，共有$n-1$個空隙可以插入，而其中只有 1 個空隙會讓他進入到坐法的循環中，其它的$n-2$個空隙皆會使編號n的人坐到編號n的位置，不會改變坐法，如下表所示：

n 人時的次序	n 人時對應的坐法
$1\text{-}n\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ $1\text{-}b_2\text{-}n\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}n\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ $\vdots$ $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}n\text{-}a_k$ （以上共$n-2$個）	$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
$1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k\text{-}n$ （以上共 1 個）	$(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)$

所以$n-1$人時，對應坐法$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$的 1 種次序，當考慮n人時，其次序會變為$(n-2)$種，故$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

類似地，$n-1$人時，對應坐法$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$的 1 種次序最後加上n，就會變成n人時坐法$(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)$的 1 種次序，意即有$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

為了能更清楚地利用遞迴關係的方式降階計算次序數，我們將定理 9 小小修改成：

(1)當$a_k\neq n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

(2)當$a_k=n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1})$。

接著可以回到之前利用第一公式計算次序數的例子：

$$\begin{aligned}
\#_{14}(1,2,5,6,10,11,12) &= (14-2)\cdot\#_{13}(1,2,5,6,10,11,12)\\
&=(14-2)(13-2)\cdot\#_{12}(1,2,5,6,10,11,12)\\
&=(14-2)(13-2)\cdot\#_{11}(1,2,5,6,10,11)\\
&=(14-2)(13-2)\cdot\#_{10}(1,2,5,6,10)\\
&=(14-2)(13-2)\cdot\#_{9}(1,2,5,6)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)\cdot\#_{8}(1,2,5,6)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)\cdot\#_{7}(1,2,5,6)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{6}(1,2,5,6)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{5}(1,2,5)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{4}(1,2)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)(4-2)\cdot\#_{3}(1,2)\\
&=(14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)(4-2)(3-2)\cdot\#_{2}(1,2)
\end{aligned}$$

此時的$\#_2(1,2)$顯然為 1，於是

$$\begin{aligned}
\#_{14}(1,2,5,6,10,11,12) &= (14-2)(13-2)(9-2)(8-2)(7-2)(4-2)(3-2)\\
&=12\cdot 11\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2\cdot 1=55440
\end{aligned}$$
。

注意到最後次序數的計算，其實就是不在此坐法循環中的數減 2 相乘，以下我們將這個結果整理得更簡潔。

【定理 8】 次序數的第二公式

$$\boxed{\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}}\text{。}$$

【證明】 設 $S=\{3,\cdots n\}$ ， $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ ，

則 $\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\prod_{i\in S-A}(i-2)$

$$=\frac{\prod_{i\in S-A}(i-2)\times\prod_{i\in A}(i-2)}{\prod_{i\in A}(i-2)}$$

$$=\frac{\prod_{i\in S}(i-2)}{\prod_{i\in A}(i-2)}$$

$$=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}\text{。}$$

到這裡，對於次序數我們給出了較簡潔的公式，這也讓我們解開了之前的問題。

首先，定理 5 次序數相乘為定值 $\#_n(1,2,A)\cdot\#_n(1,2,S-A)=(n-2)!$ 的性質，在第二公式的出來後，便顯然成立。接著還有兩個提問：

【提問 2】 究竟 $(n-2)!$ 的哪些因數是可嵌入的？哪些是不可嵌入的？

【提問 3】 如果 p 是可嵌入的，那究竟有幾種坐法其次序數均為 p ？

【解答】 由上方遞迴關係可知，若 p 是可嵌入的，則必定可表示成若干個不大於 $n-2$ 的相異正整數相乘，因此若 p 無法表示成若干個不大於 $n-2$ 相異正整數相乘，則 p 必是不可嵌入的。反之，當 p 可表示成若干個不大於 $n-2$ 的相異正整數相乘，則一定可以造出一種坐法其次序數就是 p ，即 p 一定是可嵌入的。

而表示成若干個不大於 $n-2$ 的相異正整數相乘的方法若有 k 種，則 n 人時，就會有 k 種坐法的次序數為 p 。請見以下例子：

【例】

1. 考慮$n=10$人的圓桌問題，9 為$(10-2)!$的因數，但其分解為相異正整數相乘的方法僅有 $9=1\times 9$，但$9>10-2=8$，所以$n=10$時，9 是不可嵌入的。

2. 考慮$n=12$人的圓桌問題，48 為$(12-2)!$的因數，且將其分解為相異正整數相乘的方法有 6 種，且每種對應的坐法，如下表所示：

48 的分解方式	哪些坐法的次序數為 48？
$1\times 2\times 4\times 6=(3-2)\times(4-2)\times(6-2)\times(8-2)$	${}_{12}(1,2,5,7,9,10,11,12)$
$1\times 2\times 3\times 8=(3-2)\times(4-2)\times(5-2)\times(10-2)$	${}_{12}(1,2,6,7,8,9,11,12)$
$1\times 6\times 8=(3-2)\times(8-2)\times(10-2)$	${}_{12}(1,2,4,5,6,7,9,11,12)$
$2\times 4\times 6=(4-2)\times(6-2)\times(8-2)$	${}_{12}(1,2,3,5,7,9,10,11,12)$
$2\times 3\times 8=(4-2)\times(5-2)\times(10-2)$	${}_{12}(1,2,3,6,7,8,9,11,12)$
$6\times 8=(8-2)\times(10-2)$	${}_{12}(1,2,3,4,5,6,7,9,11,12)$

五、坐錯位置人數的期望值

本研究的最後，我們假設每種入座次序的機率均相等的狀況下，計算了坐錯位置人數的期望值，藉由兩種不同的算法，重新詮釋了一個調和級數首 n 項和的恆等式。

考慮 $\boxed{\boldsymbol{n+1}\text{ 人}}$的圓桌問題，設隨機變數$X$表示坐錯位置的人數，則：

【第一種期望值算法】

$$P(X=2)=\frac{\#_{n+1}(1,2)}{n!}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{\sigma_{n-1}}{n!}$$

$$P(X=k)=\frac{\displaystyle\sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n+1}\#_{n+1}(1,2,i_1,i_2,\cdots,i_{k-2})}{n!}$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n+1}\frac{(n-1)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)}}{n!}=\frac{\sigma_{n+1-k}}{(n-1)!}\quad(\ 3\le k\le n+1\ )$$

其中 $\sigma_0 = 1$

$\sigma_1 = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$

$\sigma_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + (n-2)(n-1)$（即 $1 \sim n-1$ 的兩兩乘積和）

$\sigma_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)$（即 $1 \sim n-1$ 的三三乘積和）

$\vdots$ （以此類推）

$\sigma_{n-1} = (n-1)!$

因此 $E(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot \frac{\sigma_{n+1-k}}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{n+1} k \cdot \sigma_{n+1-k}$ 。

【第二種期望值算法】

編號 1 的人坐錯位置的機率為 1，

編號 2 的人坐錯位置的機率也為 1，

編號 k 的人若要坐錯位置，只要他能比 $2 \sim k-1$ 號的人後進來就可以了，

所以機率是 $\frac{1}{k-1}$（ $3 \le k \le n+1$ ）。

因此 $E(X) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + H_n$ ，

其中 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 為調和級數的首 n 項和。

綜合以上討論：$\boxed{H_n = \frac{1}{n!}\left[2 \cdot \sigma_{n-1} + 3 \cdot \sigma_{n-2} + \cdots + n \cdot \sigma_1 + (n+1) \cdot \sigma_0\right] - 1}$。

我們賦予此調和級數恆等式一個新的詮釋。

參、研究結果與討論

n 人圓桌問題一開始的設定為編號 1 的人一定要第一個入座，並且坐到編號 2 的位置，在這個初始設定下，我們破解了次序、坐法與次序數的結構，以下將前段研究的結果簡單做個總整理：

坐法部分	每種坐法的循環恰為數列$1,2,3,\cdots,n$以$1,2$開頭的子數列。
	最後會有2^{n-2}種不同的坐法。
次序數部分	$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_n(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$（$a_1\neq 3$）
	$\#_n(1,2,A)\cdot\#_n(1,2,S-A)=(n-2)!$
	$(1,2,a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1,a_2-m_2,a_2-m_2+1,\cdots,a_2,\cdots\cdots,a_k-m_k,a_k-m_k+1,\cdots,a_k)$ $=c_1!\times c_2!\times H_{a_1-2}^{c_2+1}\times c_3!\times H_{a_2-2}^{c_3+1}\times\cdots\times c_{k+1}!\times H_{a_k-2}^{c_{k+1}+1}$
	當$a_k\neq n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
	當$a_k=n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1})$
	$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\dfrac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$
	設p為$(n-2)!$的因數，且可表示成不大於$n-2$的若干個相異正整數的乘積， 則p是可嵌入的。
	若p寫為若干個相異正整數乘積的表示法有m種，則有m種不同的坐法其次序數 都是p。
	$H_n=\dfrac{1}{n!}\left[2\cdot\sigma_{n-1}+3\cdot\sigma_{n-2}+\cdots+n\cdot\sigma_1+(n+1)\cdot\sigma_0\right]-1$

如果我們改變初始設定，變為編號1的人坐到i號的位置（$3\le i\le n$），此時2到$i-1$號（共$i-2$個人）都會坐得到自己的位子，於是我們可將n人（初始設定為1號的人坐到i號位置）的圓桌問題，換成$n-(i-2)=n-i+2$人的圓桌問題（初始設定為1號的人坐到2號位置），最後會有$2^{(n-i+2)-2}=2^{n-i}$種不同的坐法，且每種坐法的循環只是從$1,2$開頭的子數列變為$1,i$開頭的子數列。

至於次序部分則必須多考慮$2,3,\cdots,i-1$（共有$i-2$人）任意插入$1,i,i+1,\cdots,n$已排好的次序中（不可插入在 1 之前，所以共有$n-i+2$個空隙可以插入），這會有$(i-2)!\ \times\ H_{i-2}^{n-i+2}=P_{i-2}^{n-1}$種方法，於是

$$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)\cdot P_{i-2}^{n-1}=\#_{n+i-2}(1,i,a_1+i-2,a_2+i-2,\cdots,a_k+i-2)\text{ 。}$$

或者反過來寫就是：

$$\#_n(1,i,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_{n-i+2}(1,2,a_1-i+2,a_2-i+2,\cdots,a_k-i+2)\cdot P_{i-2}^{n-1}\text{ 。}$$

因此初始設定為1坐i的次序數公式如下：

$$\#_n(1,i,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\frac{(n-i)!}{(a_1-i)(a_2-i)\cdots(a_k-i)}\cdot P_{i-2}^{n-1}\text{ 。}$$

簡單來說，初始設定為1坐i的問題可以化為初始設定為1坐 2 的狀況來處理，因此這裡我們不再詳細敘述這樣的過程，僅呈現初始設定改為1坐到i時，上表對應的結果：

<table>
<tr><td rowspan="2">坐法部分</td><td>每種坐法的循環恰為數列$1,2,3,\cdots,n$以$1,i$開頭的子數列。</td></tr>
<tr><td>最後會有2^{n-i}種不同的坐法。</td></tr>
<tr><td rowspan="5">次序數部分</td><td>$\#_n(1,i,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_n(1,i,i+1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$（$a_1\neq i+1$）</td></tr>
<tr><td>$\#_n(1,i,A)\cdot\#_n(1,i,S-A)=(n-i)!\ \cdot\ \left(P_{i-2}^{n-1}\right)^2$，
其中$S=\{i+1,i+2,\cdots,n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$為S的子集合。</td></tr>
<tr><td>$(1,i,a_1-m_1,a_1-m_1+1,\cdots,a_1,a_2-m_2,a_2-m_2+1,\cdots,a_2,\cdots\cdots,a_k-m_k,a_k-m_k+1,\cdots,a_k)$
$=c_1!\ \times\ c_2!\ \times\ H_{a_1-i}^{c_2+1}\ \times\ c_3!\ \times\ H_{a_2-i}^{c_3+1}\ \times\ \cdots\ \times\ c_{k+1}!\ \times\ H_{a_k-i}^{c_{k+1}+1}\cdot P_{i-2}^{n-1}$</td></tr>
<tr><td>$\#_n(1,i,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_{n-i+2}(1,2,a_1-i+2,a_2-i+2,\cdots,a_k-i+2)\times P_{i-2}^{n-1}$</td></tr>
<tr><td>$\#_n(1,i,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\dfrac{(n-i)!}{(a_1-i)(a_1-i)\cdots(a_k-i)}\cdot P_{i-2}^{n-1}$</td></tr>
</table>

	設 $\frac{p}{P_{i-2}^{n-1}}$ 為 $(n-2)!$ 的因數，且可表示成不大於 $n-2$ 的若干個相異正整數的乘積，則 p 是可嵌入的。
	若 $\frac{p}{P_{i-2}^{n-1}}$ 寫為若干個相異正整數乘積的表示法有 m 種，則有 m 種不同的坐法其次序數都是 p 。
	$H_n=\frac{1}{n!}\left[2\cdot\sigma_{n-1}+3\cdot\sigma_{n-2}+\cdots+n\cdot\sigma_1+(n+1)\cdot\sigma_0\right]-1$ （與原始設定 1 坐到 2 導出來的結果相同）

若再將條件改為 p 號先入座，並且坐到 q 號位置，則這與 1 號先入座，並且坐到 $q-p+1$ 號的位置其實是一樣的，我們也不再贅述其細節。

討論至此，圓桌問題畫下了句點。

肆、結論與應用

一、我們利用探究次序與坐法的關聯性，將原始圓桌問題轉化為求數列子數列個數的問題，給出另一種求坐法數的方法。

二、在研究過程裡，我們觀察到次序數的有趣現象，因此著手尋找原因，最後發現次序數的遞迴關係，給出了一個我們認為本研究最簡潔且優美的公式：

$$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}\text{ 。}$$

有了這個公式，許多次序數的性質，也跟著迎刃而解。

三、最後，我們用兩種方式計算坐錯位置人數的期望值，重新詮釋了一個調和級數首 n 項和的恆等式，這與許多組合恆等式都可用兩種不同的組合解釋來證明有異曲同工之妙。

四、改變入座的規則，例如：當自己的位置被坐時，則順時針或逆時針找最近的位置入坐，或者改變一開始桌上名片的擺放方式，例如：奇數、偶數依序相間擺放，諸如此類的更換遊戲規則，或許能得到更多有趣的性質或公式，這是本研究可以繼續延伸的方向，也

是我們下一步想要去探索的問題。

伍、參考文獻

一、[數學]圓桌會議...3000　2003.4.29　YLL 討論網
http://www.yll.url.tw/viewtopic.php?t=3221&start=0&postdays=0&postorder=asc&highlight=

二、圓桌武士（學長校內科展作品）

【評語】010035

本作品考慮一個座位入座問題，作者解決的原始的問題。並利用自行設計的一個轉化方式，求出的反問題的計數，是一個有意思的作品。未來可以朝入座結果的結構面分析(如本作品的錯位數)，會有更多新的數學結果。