

2018 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010030

參展科別 數學

作品名稱 永恆的旋轉木馬

得獎獎項 大會獎：一等獎
美國 ISEF 正選代表
青少年科學獎

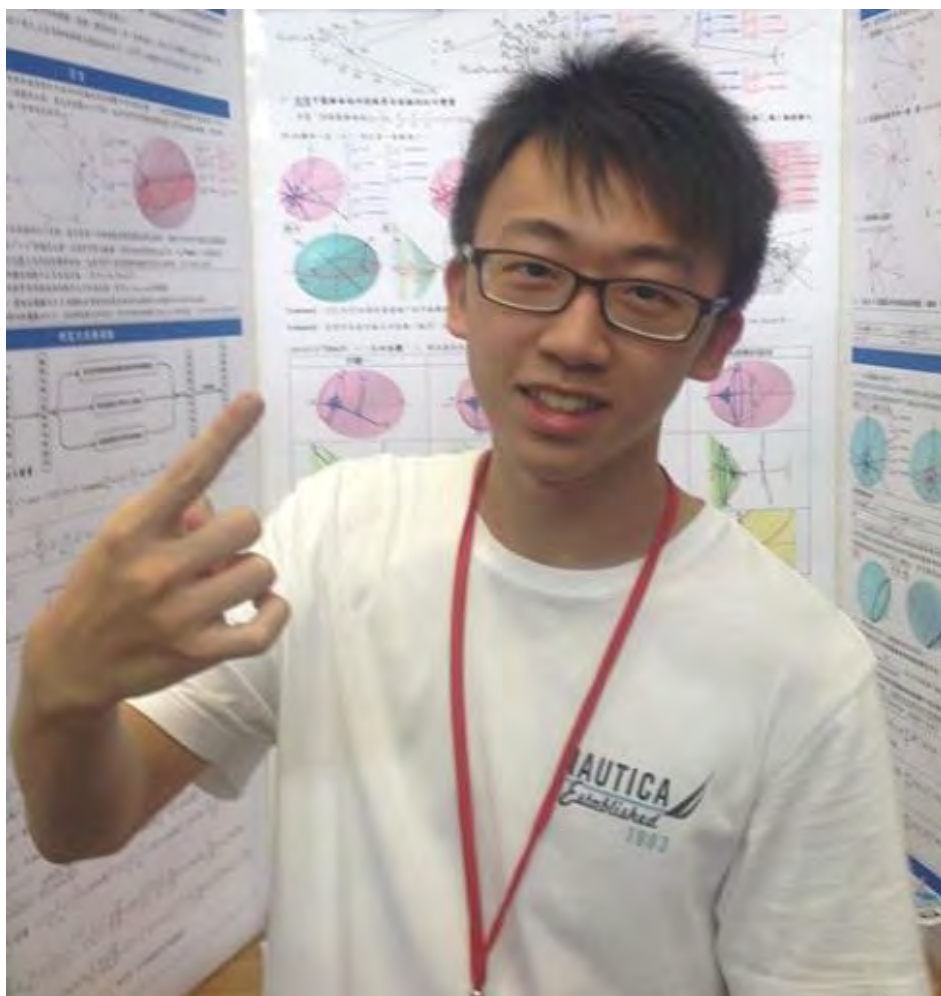
就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 周洺朱

作者姓名 王 凱、江佶龍

關鍵詞 不變量(Invariants)、圓錐曲線(Conic Sections)、
空間焦半徑(3rd Dimensional Focal Radiuses)

作者簡介



我是王凱，就讀於國立師大附中三年級。平常的興趣有打羽毛球、看電影、聽音樂、學習外語等等，尤其我特別喜歡用外語跟外國人聊天。之所以開始做數學研究，要感謝我們的班級導師(數學老師)，在一開始給了我很大的啟發與鼓勵，透過他的督促，我們也才有機會把研究擴展到今天這一步。



我是江侑龍，目前就讀師大附中 1403 班

小時候我對於任何事物皆擁有著一股好奇心，但數學更為熱衷。國小時候就已經在研讀國中數學的範圍，讓自己能更深入接觸這門學科。國中則嘗試去研究較刁鑽的題目，並且從中得到樂趣。

因此在高中的兩年生活當中，我選擇走向了科展這條路，繼續鑽研在數學領域中。希望藉由這次機會能在數學領域上獲一佳績。

摘要

本研究作品主要在探討「平面上各種曲線內關於相鄰等角割線段的新的不變量」與「空間中特殊圓錐曲面的特殊等角割線段的新的不變量」。

若圓錐曲線、蚘線等曲線中有相鄰等角的 n 條割線段，則這 n 條割線段之 m 次方和為定值。在圓錐曲線中這些割線段的交點可以是焦點、曲線內任意點，在蚘線中則為基點。甚至經由反演，還能將此性質推廣至直線上。

研究最後擴及至空間，先考慮特殊橢圓、拋物、雙曲球面，其一焦點為 F ，將正 N 面體 V_N 之重心 G 與 F 重合，使得 V_N 以 F 為旋轉中心任意旋轉，此時由 F 對 V_N 之各頂點做射線交圓錐曲面於 P_u ，則 $\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和為定值，其中 $u=1, \dots, n$ ， $N=4, 6, 8, 12, 20$ 。

Abstract

The main focuses of this research are “the new invariants of the line segments of curves” and “the new invariants of the line segments of special quadric surfaces” when the segments satisfy the following statement: let M , the intersection of them, be any point not on the curve or surface while the angles between them are the same.

If there are a number of those segments in a conic section or limaçon, the sum of the reciprocal of the m^{th} power of them is fixed. In the case of a conic section, M can be the focal point or any point in it. As for a limaçon, M is the pole. We can even apply this theorem to a line by inversion.

Finally, we generalized this theorem to the 3-dimension. We considered specifically the special quadric surfaces whose intersection with the xy -plane are conic sections that share the same focal point(s) with them. Let F be one of the focal points. Move the gravity G of a platonic solid V_N to F . When V_N spins with F being the center of rotation, draw rays starting from F and passing the vertexes of V_N which intersect Ω at P_u , then the sum of reciprocal of the m^{th} power of $\overline{FP_u}$ is fixed.

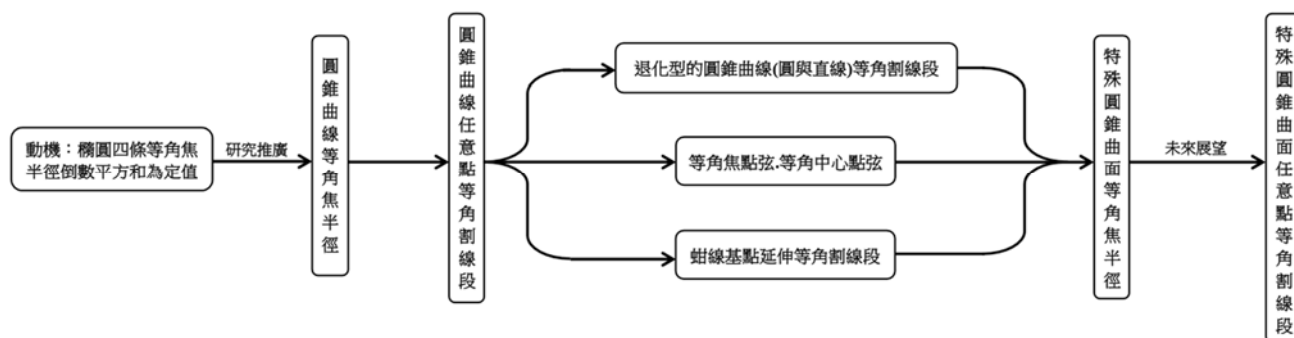
壹、研究動機

起初在練習競賽題：「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」我們在解題過程中感受到了很大的興趣，便開始思考這題目的各種變化，從四條線到 n 條，甚至到倒數 m 次方和。此外我們利用極座標認識了更多有趣的曲線，更利用 *GeoGebra* 畫出令人驚豔的 3D 模擬圖，激發進一步研究的好奇心。

貳、研究目的

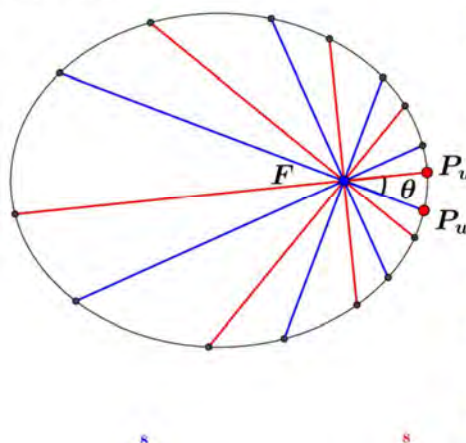
- 一、固定圓錐曲線方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。
- 二、固定圓錐曲線方程式的情況下，以其內任意一點為旋轉中心，則過此點的 n 條相鄰等角割線段經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, n, m$ 為偶數。
- 三、在空間中，固定特殊橢圓、拋物、雙曲曲面方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則此焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數 m 次方和為定值。
- 四、在空間中，任意正多面體之頂點到任意點、線、面之距離 m 次方和為定值。

參、研究方法與過程



- 一、固定橢圓方程式，以焦點為旋轉中心，任意旋轉 n 條相鄰等角焦半徑，其 m 次方和為定值

圖一



$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u} = 2.5$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'_u} = 2.5$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^2} = 0.921875$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^2_u} = 0.921875$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^3} = 0.3759765625$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^3_u} = 0.3759765625$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^4} = 0.162399292$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^4_u} = 0.162399292$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^5} = 0.0725507736$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^5_u} = 0.0725507736$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^6} = 0.0331072509$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^6_u} = 0.0331072509$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^7} = 0.015327381$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP'^7_u} = 0.015327381$

一開始我們利用 *GeoGebra* 測試在橢圓中的相鄰等角八條焦半徑的情況，發現當其以焦點為中心任意旋轉(即 $\theta \in \mathbb{R}$) 時， $\overline{FP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值(如圖一所示)，其中 $u=1,2,\dots,8$ 且 $m < 8, \forall m \in \mathbb{N}$ ，而當割線段的次方數大於或等於等分數時，則割線段的倒數 m 次方和為一變數，其中 $m \geq 8, \forall m \in \mathbb{N}$ 。等分數為奇數時，也符合上述性質。

於是透過這個觀察，我們猜測：在橢圓方程式固定的前提下，以焦點作為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑任意旋轉時的倒數 m 次方和會是一個定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。以下為方便討論，令 l 為圓錐曲線之半正焦弦長， e 為離心率，且 $\overline{FP_u}$ 為相鄰等角、依逆時針排列的焦半徑，其中 $u=1,2,\dots,n$ 。讓我們先來看定理證明中會使用到的預備定理，

Lemma1: 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦半徑 $\overline{FP_u} = \frac{l}{e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1}$ ， $a > b > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

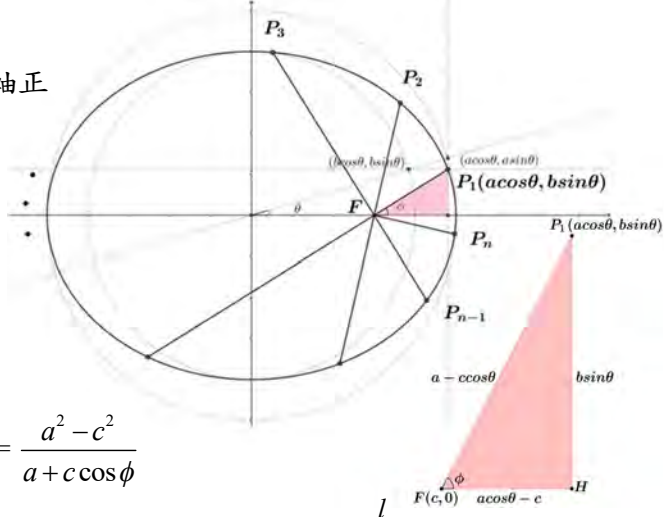
< proof >

令 $P_1(a \cos \theta, b \sin \theta) \in \Gamma$ ，第一象限中 $\overline{FP_1}$ 與 x 軸正向夾角 ϕ 為最小，其中 θ 為 $\overline{OP_1}$ 與 x 軸正向夾角
如右圖，過 P_1 做垂直於 x 軸的鉛直線，可得一直角三角形 ΔP_1HF 。(如右下圖所示)
利用畢氏定理可得：

$$\overline{FP_1} = \sqrt{(a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2} = a - c \cos \theta$$

$$\therefore \cos \phi = \frac{a \cos \theta - c}{a - c \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{a \cos \phi + c}{a + c \cos \phi} \quad \therefore \overline{FP_1} = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \phi}$$

再用 e 及 l 簡化得 $\overline{FP_1} = \frac{l}{1 + e \cos \phi}$ 。同理， n 條焦半徑時， $\overline{FP_u} = \frac{l}{e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1}$ #



Lemma2: $\sum_{u=1}^n \cos\left[k\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right)\right] = 0, n > |k|, \forall n \geq 3, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

< proof >

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \cos\left[k\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right)\right] &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos\left(k\phi + \frac{2k\pi}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n} + 2 \cos\left(k\phi + \frac{4k\pi}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n} + \dots + 2 \cos\left(k\phi + \frac{2nk\pi}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left\{ \left[\sin\left(k\phi + \frac{3k\pi}{n}\right) - \sin\left(k\phi + \frac{5k\pi}{n}\right) \right] + \left[\sin\left(k\phi + \frac{5k\pi}{n}\right) - \sin\left(k\phi + \frac{3k\pi}{n}\right) \right] + \dots + \left[\sin\left(k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n}\right) - \sin\left(k\phi + \frac{(2n-1)k\pi}{n}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[\sin\left(k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n}\right) - \sin\left(k\phi + \frac{k\pi}{n}\right) \right] = \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos\left(k\phi + \frac{(n+1)k\pi}{n}\right) \cdot \sin k\pi \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[2 \cos\left(k\phi + \frac{(n+1)k\pi}{n}\right) \cdot 0 \right] = 0 \quad \# \end{aligned}$$

$$\text{Lemma3: } \cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

< proof >

$$1. \text{ 當 } n=1, \text{ RHS} = \frac{1}{2^0} \left[C_0^1 \cdot \frac{-1+1}{4} + \sum_{j=0}^0 C_j^1 \cdot \cos(1-2j)\theta \right] = \cos \theta = \text{LHS} \quad \therefore \text{成立}$$

$$2. \text{ 設 } n=k \text{ 成立, 即 } \cos^k \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_j^k \cdot \cos(k-2j)\theta \right]$$

$$3. \text{ 當 } n=k+1, \cos^{k+1} \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \cdot \cos \theta \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_j^k \cdot \cos(k-2j)\theta \cdot \cos \theta \right] \cdots (*)$$

$$\text{Case1}^\circ k \text{ 為偶數: } (*) = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ C_{\frac{k}{2}}^k \cdot \cos \theta \cdot \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} C_j^k \cdot \frac{1}{2} [\cos(k-2j+1)\theta + \cos(k-2j-1)\theta] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_{\frac{k}{2}}^k \cdot \cos \theta + \left\{ C_0^k \cdot [\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta] + \cdots + C_{\frac{k}{2}-1}^k \cdot [\cos 3\theta + \cos \theta] \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^k \cdot \cos(k+1)\theta + (C_0^k + C_1^k) \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + \left(C_{\frac{k}{2}-2}^k + C_{\frac{k}{2}-1}^k \right) \cdot \cos 3\theta + \left(C_{\frac{k}{2}-1}^k + C_{\frac{k}{2}}^k \right) \cdot \cos \theta \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + C_{\frac{k}{2}-1}^{k+1} \cdot \cos 3\theta + C_{\frac{k}{2}}^{k+1} \cdot \cos \theta \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[\sum_{j=0}^{\frac{k}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] \quad \therefore \text{成立}$$

$$\text{Case2}^\circ k \text{ 為奇數: } (*) = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^k \cdot [\cos(k-2j+1)\theta + \cos(k-2j-1)\theta] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^k \cdot \cos(k+1)\theta + (C_0^k + C_1^k) \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + \left(C_{\frac{k-3}{2}}^k + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right) \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot \cos(0 \cdot \theta) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left[C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + C_{\frac{k-1}{2}}^{k+1} \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ \left[\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right\} = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{k+1} + \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cdot \cos(k+1-2j)\theta \right] \right\} \quad \therefore \text{成立}$$

$$\text{由數學歸納法, } \cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N} \quad \#$$

Theorem1: 以 F 為其一焦點的圓錐曲線，其任意 n 條相鄰等角的焦半徑的倒數 m 次方

和為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$

< proof > 1. 以橢圓為例

由 Lemma1 可得 $\overline{FP_u} = \frac{l}{e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1}$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[e \cos\left(\phi + \frac{2(u-1)\pi}{n}\right) + 1 \right]^m$$

$$= \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[e \cos\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) + 1 \right]^m = \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{u=1}^n \left[\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot e^j \cos^j\left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right]$$

$$= \sum_{u=1}^n \left[\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot \frac{e^j}{l^m \cdot 2^{j-1}} \cdot \left(C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_h^j \cdot \cos(j-2h) \left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right) \right] \quad (\text{由 Lemma3})$$

$$= \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \left[\frac{C_j^m \cdot C_h^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \sum_{u=1}^n \cos(j-2h) \left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right] \dots (*)$$

$$\because h \leq \left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor, 2h \leq j-1 \text{ 且 } (j-2h) \in \mathbb{N} \text{ 且 } j-2h \leq j \leq m < n \therefore \sum_{u=1}^n \cos(j-2h) \left(\phi + \frac{2u\pi}{n}\right) = 0 \quad (\text{由 Lemma2})$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \frac{1}{l^m} \cdot \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \left[\frac{C_j^m \cdot C_h^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot 0 \right] \right]$$

$$= \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^m \left[\frac{C_j^m \cdot C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot e^j}{2^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} \right] = \frac{n}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \#$$

2. 推廣至所有圓錐曲線

後來發現圓錐曲線的極座標表示法既簡潔又適用所有圓錐曲線，焦半徑長 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ ，

其中 e 為圓錐曲線之離心率， p 為極點到準線的距離， θ_u 為 r_u 與 x 軸正向的夾角，以此精簡

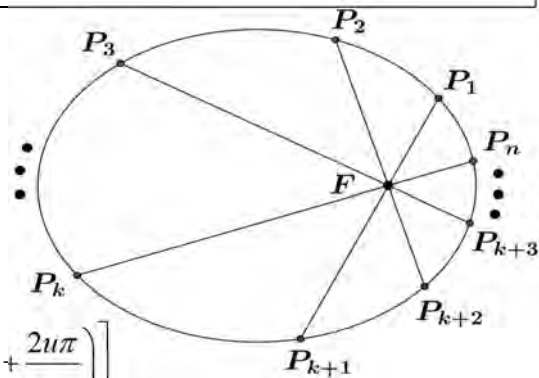
證明： $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 - e \cos \theta_u}{ep} \right)^m = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{-e}{2}\right)^{2j}$ ，與 Theorem1 的計算過程同

理，即可得「在圓錐曲線固定的情況下，任意 n 條焦半徑的倒數 m 次方和經任意旋轉時是一個定值」。

3. 特例情況的設定

(1) 當拋物線焦半徑 $\overline{FP_u}$ 平行拋物線的對稱軸，即 $\overline{FP_u}$ 與拋物線無交點時，我們定義 $\frac{1}{FP_u}$ 為

零 (2) 當雙曲線焦半徑 $\overline{FP_u}$ 無法與較近一支雙曲線有交點時，則定義 $\overline{FP_u}'$ 為此時的焦半徑， P_u' 為 $\overline{P_u'F}$ 與較遠一支雙曲線的交點，如圖二。

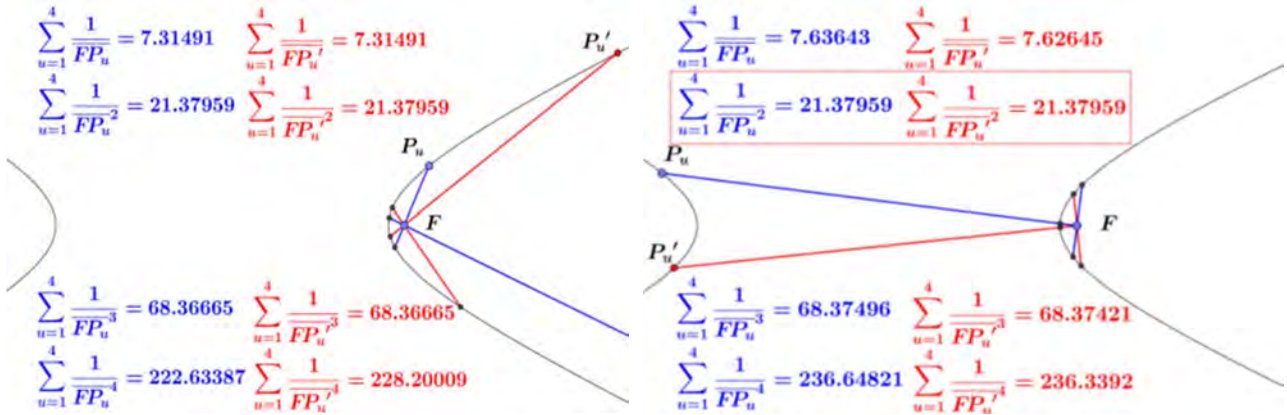


* 雙曲線之特例

由於雙曲線之離心率 $e > 1$ ，以極座標 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ 來表示可能遇到 $r < 0$ 的情況，取其長度

值得 $|r| = \frac{ep}{e \cos \theta - 1}$ 。

圖二



Corollary1: 若存在 k 條焦半徑與其餘 $n - k$ 條不在同側，其倒數 m 次方和仍為定值，其中

$$1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數。}$$

< proof > 先討論 $k = 1$ 的情況，令 $\cos \theta_\eta > \frac{1}{e}$ ，其中 $1 \leq \eta \leq n, \eta \in \mathbb{N}$ ，則

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] - \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} + \frac{(e \cos \theta_\eta - 1)^m}{(ep)^m} \dots (*)$$

Case 1° m is even $(*) = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] - \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} + \frac{(1 - e \cos \theta_\eta)^m}{(ep)^m} = \sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m}$

Case 2° m is odd 為定值 (與上述證法相同)

$$(*) = \left[\sum_{u=1}^n \frac{(1 - e \cos \theta_u)^m}{(ep)^m} \right] + \frac{2(e \cos \theta_\eta - 1)^m}{(ep)^m} = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j} - \frac{2}{n} \cdot \sum_{h=0}^m C_h^m \cdot (-1)^h e^{m-h} \cos^{m-h} \theta_\eta \right]$$

無法將 $\cos \theta_\eta$ 消去，即異側焦半徑的角度影響 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 的值。同理可推得 k 條異側的情況，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。

綜合 (i), (ii)， $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。 #

由定理一的證明可以再推論出以下引理，

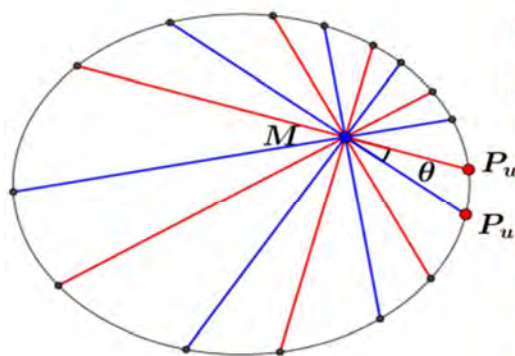
Lemma4: $\sum_{u=1}^n \left[w \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + 1 \right]^m = n \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{R}$

二、固定圓錐曲線方程式，以曲線內「任意點 M 」為旋轉中心，任意旋轉 n 條相鄰等角割線段，其 m 次方和為定值

以上的討論，是在固定圓錐曲線的前提下，以焦點為中心任意旋轉相鄰等角 n 條焦半徑。而我們不禁思考，若將其旋轉中心從焦點移到圓錐曲線內的任意一點，這些等角割線段在任意旋轉的情況下是否也有不變量的性質。同樣地，以下我們先利用 *GeoGeBra* 做觀察，再進行嚴謹證明。

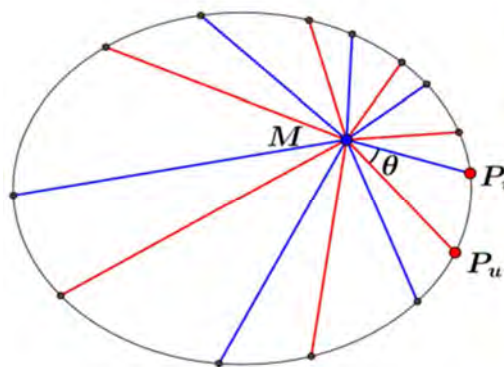
由圖三可見橢圓內有八條等角割線段時，其倒數的偶數次方和經任意旋轉仍為定值，其中倒數次方數皆小於割線段條數(紅框所示)。而由圖四可以見當條數為奇數時，其倒數任意次方和皆為變量。

圖三 橢圓偶數條割線段 (以八條為例)



$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u} = 2.3220542475$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'} = 2.3220383982$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^2} = 0.7811653904$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^2} = 0.7811653904$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^3} = 0.2913184887$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^3} = 0.2913109893$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^4} = 0.1159904783$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^4} = 0.1159904783$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^5} = 0.0481097151$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^5} = 0.0481140654$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^6} = 0.0204891052$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^6} = 0.0204891052$
$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^7} = 0.008885416$	$\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^7} = 0.0088790341$

圖四 橢圓奇數條割線段 (以七條為例)



$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u} = 2.0317946793$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'} = 2.0317946696$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^2} = 0.68347483$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^2} = 0.6835486467$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^3} = 0.2548993044$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^3} = 0.2548993069$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^4} = 0.1015053015$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^4} = 0.1014765277$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^5} = 0.04209812$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^5} = 0.0420981199$
$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u^6} = 0.0179156879$	$\sum_{u=1}^7 \frac{1}{FP_u'^6} = 0.0179461387$

於是我們猜測：在圓錐曲線方程式固定的情況下，以任意一點 M 為中心任意旋轉 n 條相鄰等角割線段，其倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m$ 且 n, m 皆為偶數。而這正是在參考文獻(曾靖國[3][4]，未來展望)中所留下未證出來的問題，在參考資料(曾靖國[4]，Theorem)中，

原作者認為利用牛頓恆等式與橢圓相交弦定理即可證出此猜測中的一個特例，但經過非常多的嘗試，發現這個方向只會讓讓求證過程更加複雜，而後來經我們又不斷的努力，終於發現將割線段用兩兩 m 次方的配對相加後，再利用 **Lemma 5** 對稱式的表示才能證得結論，而且，唯有透過此方法才得以寫出具體、簡潔的嚴格證明。

Lemma5 (A. Waterson [1], Theorem):

$$x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j, \forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$$

< proof >

1. 當 $m = 1$, $x + y = \sum_{j=0}^0 (-1)^j \cdot \frac{1}{1-j} \cdot C_j^{1-j} (x+y)^{1-2j} (xy)^j = x + y \quad \therefore$ 成立

當 $m = 2$, $x^2 + y^2 = \sum_{j=0}^1 (-1)^j \cdot \frac{2}{2-j} \cdot C_j^{2-j} (x+y)^{2-2j} (xy)^j = (x+y)^2 - 2(xy)^2 \quad \therefore$ 成立

2. 設此定理對於任意兩連續的 m 都成立，令其為 $k-1$ 與 k

$$x^k + y^k = (x+y)^k - \frac{k}{k-1} \cdot C_1^{k-1} (x+y)^{k-2} (xy) + \dots + (-1)^j \cdot \frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j} (x+y)^{k-2j} (xy)^j + \dots$$

$$x^{k-1} + y^{k-1} = (x+y)^{k-1} - \frac{k-1}{k-2} \cdot C_1^{k-2} (x+y)^{k-3} (xy) + \dots + (-1)^{j-1} \cdot \frac{k-1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} (x+y)^{k-2j+1} (xy)^{j-1} \dots$$

3. 當 $m = k+1$,

$$x^{k+1} + y^{k+1} = (x^k + y^k)(x+y) - (x^{k-1} + y^{k-1})xy$$

$$= \left[(x+y)^k - \frac{k}{k-1} \cdot C_1^{k-1} (x+y)^{k-2} (xy) + \dots \right] (x+y) - \left[(x+y)^{k-1} - \frac{k-1}{k-2} \cdot C_1^{k-2} (x+y)^{k-3} (xy) + \dots \right] xy$$

其中 $(x+y)^{k-2j+1} (xy)^j$ 之係數為，

$$(-1)^j \cdot \frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j} - (-1)^{j-1} \cdot \frac{k-1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} = (-1)^j \left[\frac{k}{k-j} \cdot C_j^{k-j+1} - \frac{1}{k-j} \cdot C_{j-1}^{k-j} \right]$$

$$= (-1)^j \left[\frac{k}{k-j} - \frac{j}{(k-j)(k-j+1)} \right] \cdot C_j^{k-j+1} = (-1)^j \cdot \frac{k+1}{k-j+1} \cdot C_j^{k-j+1} \quad \text{符合定理中之係數} \quad \therefore$$

立

由雙基數學歸納法， $x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j$, $\forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$ #

$$\begin{aligned} x^1 + y^1 &= (x+y) \\ x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2(xy) \\ x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3(x+y)(xy) \\ x^4 + y^4 &= (x+y)^4 - 4(x+y)^2(xy) + 2(xy)^2 \\ x^5 + y^5 &= (x+y)^5 - 5(x+y)^3(xy) + 5(x+y)(xy)^2 \\ x^6 + y^6 &= (x+y)^6 - 6(x+y)^4(xy) + 9(x+y)^2(xy)^2 - 2(xy)^3 \\ x^7 + y^7 &= (x+y)^7 - 7(x+y)^5(xy) + 14(x+y)^3(xy)^2 - 7(x+y)(xy)^3 \\ x^8 + y^8 &= (x+y)^8 - 8(x+y)^6(xy) + 20(x+y)^4(xy)^2 - 16(x+y)^2(xy)^3 + 2(xy)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &1 - 2 \\ &1 - 3 \\ &1 - 4 + 2 \\ &1 - 5 + 5 \\ &1 - 6 + 9 - 2 \\ &1 - 7 + 14 - 7 \\ &1 - 8 + 20 - 16 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Lemma6: } \sum_{u=1}^k \cos^i 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^j 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, n > i+j, n=2k, \forall k \in \mathbb{N} \\ k \cdot \frac{\binom{i}{\frac{i}{2}} \binom{j}{\frac{j}{2}}}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$$

< proof >

$$\cos^i 2\theta \cos^j 2\theta' = \frac{1}{2^{i+j-2}} \cdot \left[C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta \right] \cdot \left[C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right]$$

$$\text{(由 Lemma3, 且令 } A = C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4}, B = C_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^j \cdot \frac{(-1)^j + 1}{4} \text{)}$$

$$= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left[AB + B \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta + A \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right]$$

$$= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left\{ AB + B \cdot \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\theta + A \cdot \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\theta' \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \left[\cos 2((i-2\alpha)\theta + (j-2\beta)\theta') + \cos 2((i-2\alpha)\theta - (j-2\beta)\theta') \right] \right\}$$

$$\text{將 } \cos^i 2\theta \cdot \cos^j 2\theta' \text{ 等角累加半個周角} \Rightarrow \sum_{u=1}^k \cos^i 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^j 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{i+j-2}} \left\{ k \cdot AB + B \cdot \sum_{u=1}^k \left[\sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i \cdot \cos 2(i-2\alpha)\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] + A \cdot \sum_{u=1}^k \left[\sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\beta}^j \cdot \cos 2(j-2\beta)\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_{\alpha}^i C_{\beta}^j \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos 2\left((i-2\alpha)\theta + (j-2\beta)\theta' + (i-2\alpha + j-2\beta)\frac{2u\pi}{n}\right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{u=1}^k \cos 2\left((i-2\alpha)\theta - (j-2\beta)\theta' + (i-2\alpha - j + 2\beta)\frac{2u\pi}{n}\right) \right\}$$

由 Lemma2 可知道當 $n > i+j, n=2k, k \in \mathbb{N}$ 時，後四項的 cosine 一次方等角連加 2π 後皆為零

$$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^i 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{n}\right) \cos^j 2\left(\theta' + \frac{2u\pi}{n}\right) = \frac{k \cdot AB}{2^{i+j-2}} = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, \# \\ k \cdot \frac{\binom{i}{\frac{i}{2}} \binom{j}{\frac{j}{2}}}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$$

Theorem2: 在圓錐曲線方程式固定的情況下， M 為曲線內任意一點，若 $\overline{MP_u}$ 為任意 n 條相

鄰等角割線段，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m}$ 為定值，其中 $n > m$ ， n, m 為偶數。

< proof of **Thm2** >

令過圓錐曲線內任意一點 M 之相鄰等角的線段依逆時針

排列，分別為 $\overline{MP_u}$ ，其中 $\overline{MP_1}$ 與 x 軸正向夾角為 ϕ 。

1. 橢圓

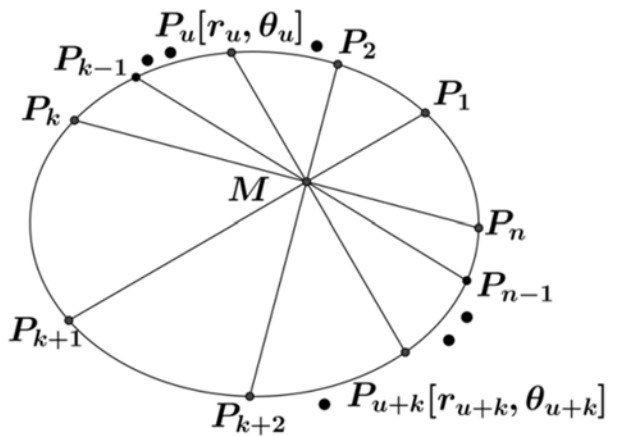
(1) 令一橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ ，

設以 $M(h, g)$ 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ，

且 P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$

$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u + h)^2}{a^2} + \frac{(r_u \sin \theta_u + g)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow r_u^2 + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \cdot r_u + \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} = 0$$



$$(\because p < 1 \therefore p \cos 2\theta_u < 1 \Rightarrow 1 - p \cos 2\theta_u \neq 0)$$

$$\therefore r_u = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)}} - \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)}$$

(其中 $\sin \phi = \frac{b^2 h}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}$, $\cos \phi = \frac{a^2 g}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}$, $t = \frac{a^2 + b^2}{2}$, $p = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$, $q = 2\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}$, $s = a^2 g^2 + b^2 h^2 - a^2 b^2$)

將 $\theta_u + \pi$ 代回原式的 θ_u

$$\therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)}} + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - p \cos 2\theta_u)}$$

(2) 欲求 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 的值 (證明(3)欲求的值)

$$(i) \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \frac{t^2}{s^2} (1 - p \cos 2\theta_u)^2$$

$$(ii) \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{2s}{t(1 - p \cos 2\theta_u)} \right\} \cdot \frac{t^2 (1 - p \cos 2\theta_u)^2}{s^2}$$

$$= \frac{q^2}{2s^2} \cdot (1 - \cos(2\theta_u + 2\phi)) - \frac{2t}{s} (1 - p \cos 2\theta_u) \quad (\text{其中 } R, w \text{ 為常數})$$

$$= \left(\frac{q^2}{2s^2} - \frac{2t}{s} \right) + \left(\frac{2tp}{s} - \frac{q^2}{2s^2} \cdot \cos 2\phi \right) \cdot \cos 2\theta_u + \left(\frac{q^2}{2s^2} \cdot \sin 2\phi \right) \cdot \sin 2\theta_u = R(1 + w \cos 2\theta_u')$$

(3) 證其為定值

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} = \sum_{u=1}^k \left(\frac{1}{MP_u^m} + \frac{1}{MP_{u+k}^m} \right) = \sum_{u=1}^k \left(\frac{1}{r_u^{2d}} + \frac{1}{r_{u+k}^{2d}} \right) \quad (\text{其中 } n = 2k, m = 2d, \forall k, d \in \mathbb{N})$$

$$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1 + w \cos 2\theta_u')]^{d-2j} \left[\frac{t}{s} (1 - p \cos 2\theta_u) \right]^{-2j} \right\} \quad (\text{由 Lemma5 及(2)})$$

$$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_\alpha^{d-2j} \cdot w^\alpha \cos^\alpha 2\theta_u' \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_\beta^{2j} \cdot (-p)^\beta \cos^\beta 2\theta_u \right] \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} C_\beta^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-p)^\beta \left[\sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\}$$

$$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \text{ 為定值且 } \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} w^\alpha (-p)^\beta \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} \cdot C_\beta^{2j}}{d-j} \right]$$

為一常數 (由 Lemma6) $\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m}$ 為定值, 其中 $n > m$, n, m 為偶數 #

2. 拋物線

(1) 令拋物線 $y^2 = 4cx$ ，其中 $c \neq 0$ ，設以 $M(h, g)$ 為極點的 P_u 的

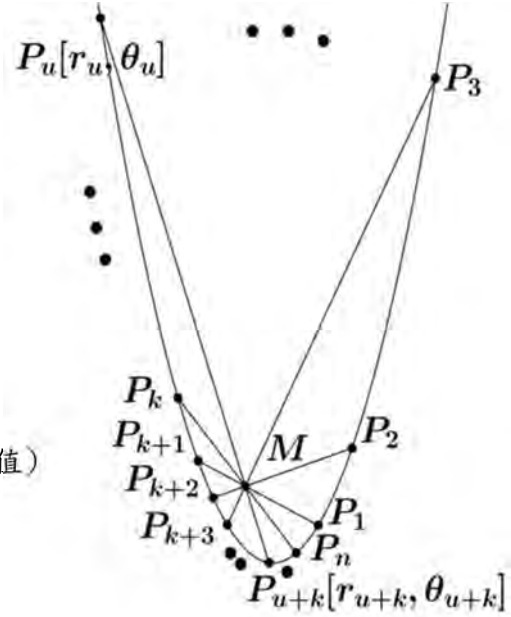
極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ，且 P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$

$$\therefore (r_u \sin \theta_u + g)^2 = 4c(r_u \cos \theta_u + h) \Rightarrow r_u^2 + \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{\sin^2 \theta_u} \cdot r_u + \frac{q}{\sin^2 \theta_u} = 0$$

(其中 $\sin \phi = \frac{-2c}{\sqrt{g^2 + 4c^2}}$, $\cos \phi = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4c^2}}$, $p = 2\sqrt{g^2 + 4c^2}$, $q = g^2 - 4ch$, $\sin^2 \theta_u \neq 0$)

$$\Rightarrow r_u = \sqrt{\left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{q}{\sin^2 \theta_u}} - \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u}$$

$$\therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{q}{\sin^2 \theta_u}} + \frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{2 \sin^2 \theta_u}$$



(2) 欲求 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 的值 (證明(3)欲求的值)

$$(i) \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left(\frac{-\sin^2 \theta_u}{q} \right)^2 = \frac{(\cos 2\theta_u - 1)^2}{4q^2}$$

$$(ii) \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{p \sin(\theta_u + \phi)}{\sin^2 \theta_u} \right]^2 - \frac{2q}{\sin^2 \theta_u} \right\} \cdot \left(\frac{-\sin^2 \theta_u}{q} \right)^2 = R(1 + w \cos 2\theta_u) \quad (\text{其中 } R, w \text{ 為常數})$$

(3) 證其為定值

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} &= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1 + w \cos 2\theta_u)]^{d-2j} \left[\frac{1}{2q} (\cos 2\theta_u - 1) \right]^{2j} \right\} \quad (\text{由(2)}) \\ &= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_\alpha^{d-2j} \cdot w^\alpha \cos^\alpha 2\theta_u \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_\beta^{2j} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cos^\beta 2\theta_u \right] \right\} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} C_\beta^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\} \\ \therefore \sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) &\text{ 為定值且 } \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{1}{2q} \right)^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} \cdot C_\beta^{2j}}{d-j} \right] \\ &\text{ 為一常數 (由 Lemma 6)} \quad \therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} \text{ 為定值, 其中 } n > m, n, m \text{ 為偶數 } \# \end{aligned}$$

3. 雙曲線

(1) 設以 $M(h, g)$ 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$,

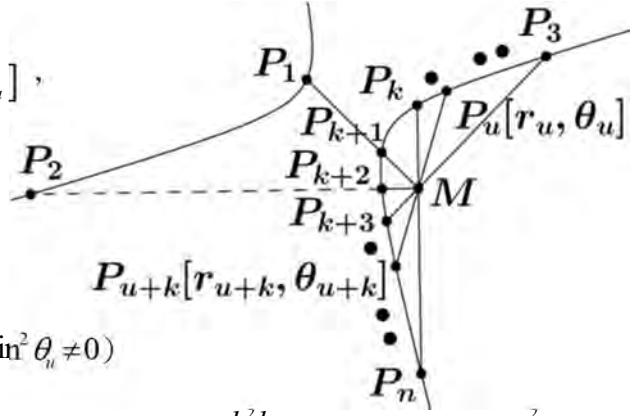
且 P_u 的直角座標為 $(r_u \cos \theta_u + h, r_u \sin \theta_u + g)$

$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u + h)^2}{a^2} - \frac{(r_u \sin \theta_u + g)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow t \sin^2 \theta_u \cdot r_u^2 + q \sin(\theta_u + \phi) r_u + s = 0 \quad (\text{其中 } t \sin^2 \theta_u \neq 0)$$

$$(\text{其中 } t = \frac{-c^2}{2}, q = 2\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}, s = b^2 h^2 - a^2 g^2 - a^2 b^2, \sin \phi = \frac{b^2 h}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}}, \cos \phi = \frac{-a^2 g}{\sqrt{a^4 g^2 + b^4 h^2}})$$

$$\Rightarrow r_u = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - \cos 2\theta_u)}} - \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \quad \therefore r_{u+k} = \sqrt{\left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{s}{t(1 - \cos 2\theta_u)}} + \frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{2t(1 - \cos 2\theta_u)}$$



(2) 欲求 $\frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2}$ 及 $\frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2}$ 的值 (證明(3)欲求的值)

$$(i) \frac{1}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \frac{t^2 \cdot (\cos 2\theta_u - 1)^2}{s^2}$$

$$(ii) \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{r_u^2 + r_{u+k}^2}{r_u^2 \cdot r_{u+k}^2} = \left\{ \left[\frac{q \sin(\theta_u + \phi)}{t(1 - \cos 2\theta_u)} \right]^2 - \frac{2s}{t(1 - \cos 2\theta_u)} \right\} \cdot \frac{t^2 \cdot (\cos 2\theta_u - 1)^2}{s^2} = R(1 + w \cos 2\theta_u')$$

3. 證其為定值

(其中 R, w 為常數)

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m} = \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} [R(1 + w \cos 2\theta_u')]^{d-2j} \left[\frac{t}{s} (\cos 2\theta_u - 1) \right]^{2j} \right\} \quad (\text{由(2)})$$

$$= \sum_{u=1}^k \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} C_\alpha^{d-2j} \cdot w^\alpha \cos^\alpha 2\theta_u' \right] \cdot \left[\sum_{\beta=0}^{2j} C_\beta^{2j} \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \cos^\beta 2\theta_u \right] \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j}}{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} C_\beta^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \left[\sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right\}$$

$$\therefore \sum_{u=1}^k \cos^\alpha 2 \left(\theta' + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^\beta 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \text{ 為定值且 } \sum_{j=0}^{\left[\frac{d}{2} \right]} \left[\sum_{\alpha=0}^{d-2j} \sum_{\beta=0}^{2j} (-1)^j R^{d-2j} \left(\frac{t}{s} \right)^{2j} \cdot w^\alpha \cdot (-1)^{2j-\beta} \cdot \frac{d \cdot C_j^{d-j} \cdot C_\alpha^{d-2j} \cdot C_\beta^{2j}}{d-j} \right]$$

為一常數 (由 Lemma6) $\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{MP_u^m}$ 為定值, 其中 $n > m$, n, m 為偶數 #

三、以定圓內任意點為中心任意旋轉的 n 條相鄰等角割線段之 m 次方和為定值

Theorem3: 設圓方程式 $C: x^2 + y^2 = R^2$ ， M 為圓內任意一點，若 $\overline{MP_u}$ 為 n 條相鄰等角的割

線段，則 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 為定值，其中 $n > |m|, \forall n, m$ 為偶數

< proof >

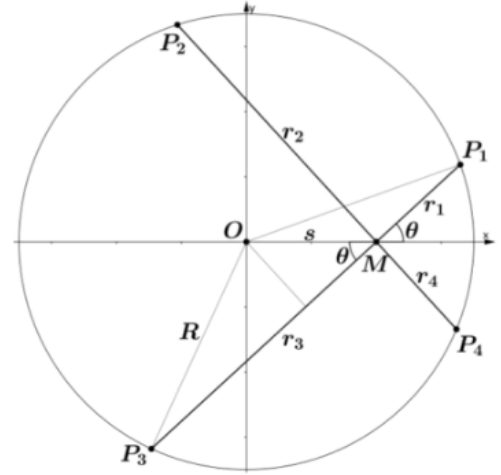
1. 不失一般性設 $O(0,0), M(s,0)$ ，令 r_1 與 x 軸正向夾角

為 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)，由內幕及畢氏定理，得下列三式：

$$(1) r_u \cdot r_{u+k} = R^2 - s^2$$

$$(2) \frac{r_u + r_{u+k}}{2} - r_u = s \cos \theta_u$$

$$(3) \frac{r_u + r_{u+k}}{2} = \sqrt{R^2 - (s \sin \theta_u)^2}$$



由 (2), (3) 得， $r_u = -s \cos \theta_u + \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2 \theta_u}$ ， $r_{u+k} = s \cos \theta_u + \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2 \theta_u}$ 則

$$r_u^2 + r_{u+k}^2 = 2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u \text{ 且 } r_u \cdot r_{u+k} = R^2 - s^2 \quad \therefore \frac{1}{r_u^2} + \frac{1}{r_{u+k}^2} = \frac{2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u}{(R^2 - s^2)^2}$$

2. 求其定值：

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m &= \sum_{u=1}^k \left(\overline{MP_u}^m + \overline{MP_{u+k}}^m \right) = \sum_{u=1}^k \left[\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} (-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} (2R^2 + 2s^2 \cos 2\theta_u)^{d-2j} (R^2 - s^2)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} \left[(-1)^j \cdot \frac{d}{d-j} \cdot C_j^{d-j} \cdot (2R^2)^{d-2j} \cdot (R^2 - s^2)^{2j} \cdot \sum_{u=1}^k \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \cos 2\theta_u \right)^{d-2j} \right] \text{ 為定值 (由 Lemma4)} \end{aligned}$$

且當 $m < 0$ 時 $\therefore (R-s)^m$ 為一常數

$$\therefore \sum_{u=1}^k (r_u^m + r_{u+k}^m) \cdot (R-s)^m = \sum_{u=1}^k (r_u^{-m} + r_{u+k}^{-m}) \text{ 亦為定值 } \#$$

四、以一固定蚘線的基點為中心任意旋轉的 n 條相鄰等角割線段，其 m 次方和為定值

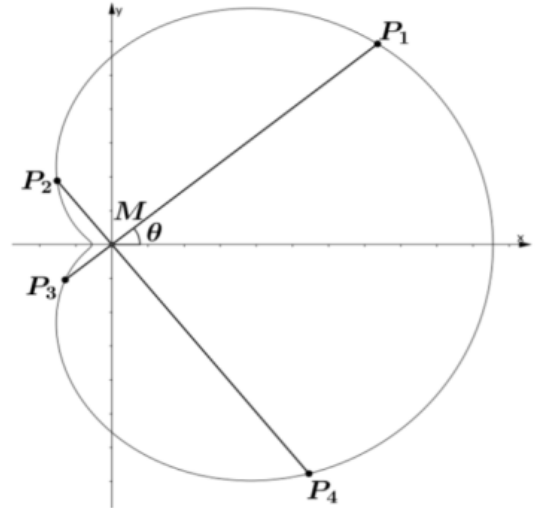
Theorem4: 設蚘線方程式 $r = a + b \cos \theta$ 的基點為 M ， $\overline{MP_u}$ 為 n 條相鄰等角的割線段，則

$$\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m \text{ 為定值，其中 } n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

< proof of Thm4 >

設以基點 M 作為極點的蚘線極座標方程式為 $r = a + b \cos \theta$ ，其中 $a, b \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m &= \sum_{u=1}^n (r_u)^m \\ &= a^m \cdot \sum_{u=1}^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right) \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right)^m \\ &= a^m \cdot n \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{b}{2a} \right)^{2j} \quad (\text{由 Lemma4}) \# \end{aligned}$$



五、空間中特殊圓錐曲面相鄰等角割線段不變量探討

首先，由平面的結論，我們很自然想接著探討空間中的圓錐曲面是否也會有類似不變

量的性質，一開始先從橢球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 著手，因其無確切焦點性質，所以改為考慮

「特殊圓錐曲面 $\Omega = \left\{ \Omega_E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 (a > b), \Omega_H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1, \Omega_P: 4cx - y^2 - z^2 = 0 \right\}$ 」，即

Ω 為 xy 平面上、且焦點在 x 軸上的圓錐曲線 Γ_0 繞 x 軸旋轉而得，令 Ω 其一焦點為 F 。為了製

造空間中相鄰等角的割線段，我們想到利用正多面體的重心到各頂點的射線皆相鄰等角的

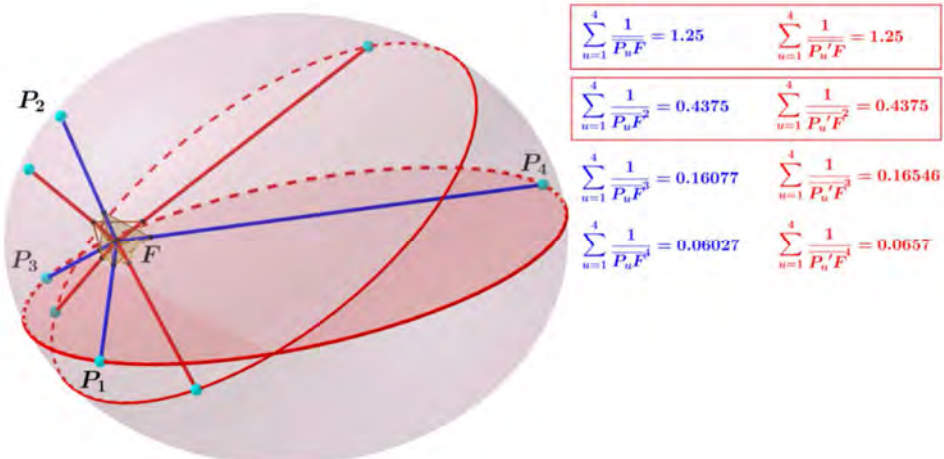
性質，將正 N 面體 V_N 之重心 G 與 F 重合，使得 V_N 以 F 旋轉中心任意旋轉，此時由 F 對 V_N

之各頂點做射線交圓錐曲面於 P_u ，我們要探討 $\overline{FP_u}$ 之倒數 m 次方和的不變量，其中

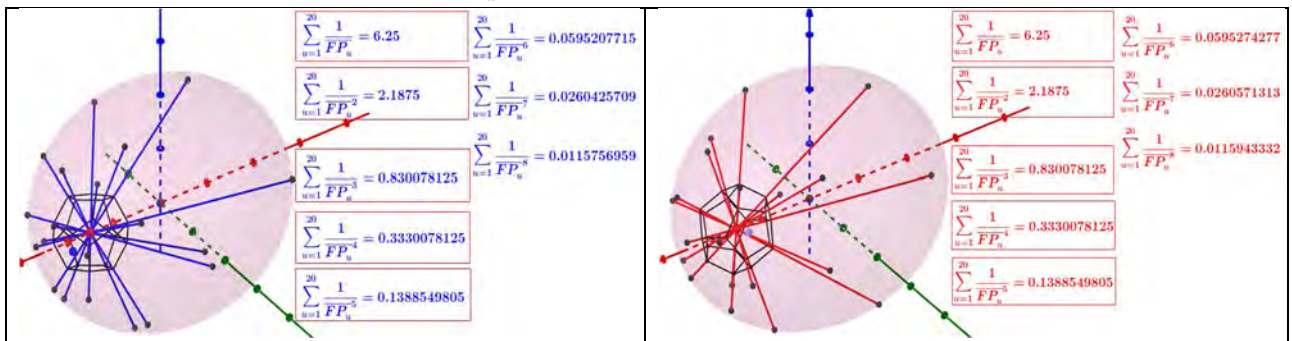
$$u=1, \dots, n, N=4, 6, 8, 12, 20$$

以下圖五~九是用 GeoGebra 測試的結果的一部分：

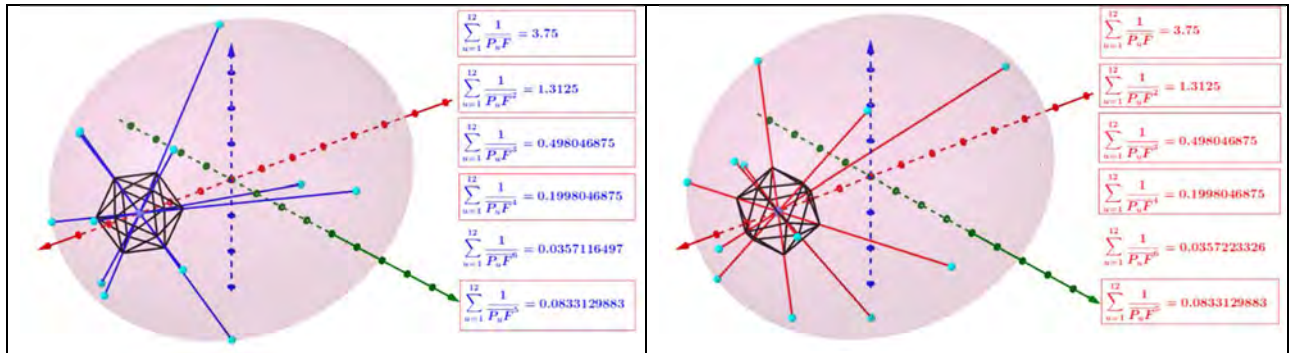
圖五 橢球面正四面體： $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2$ 。



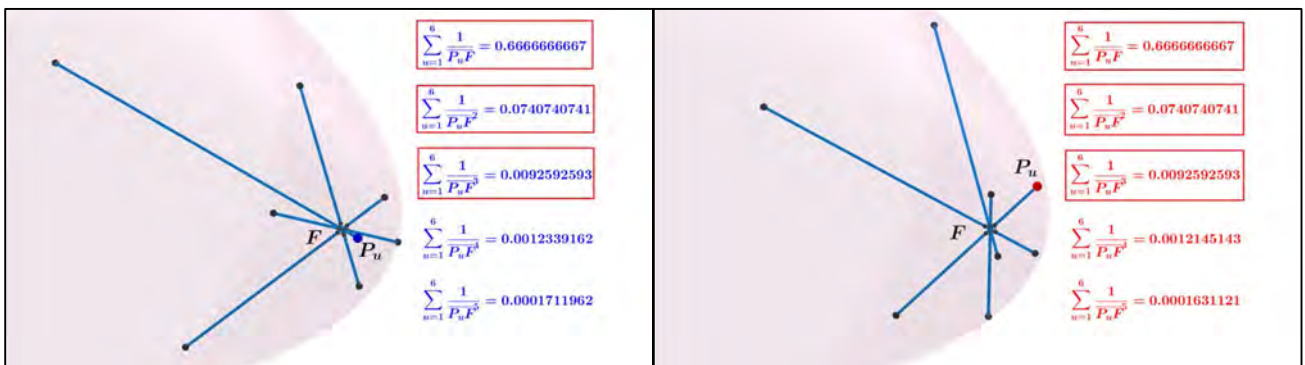
圖六 橢球面正十二面體： $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。



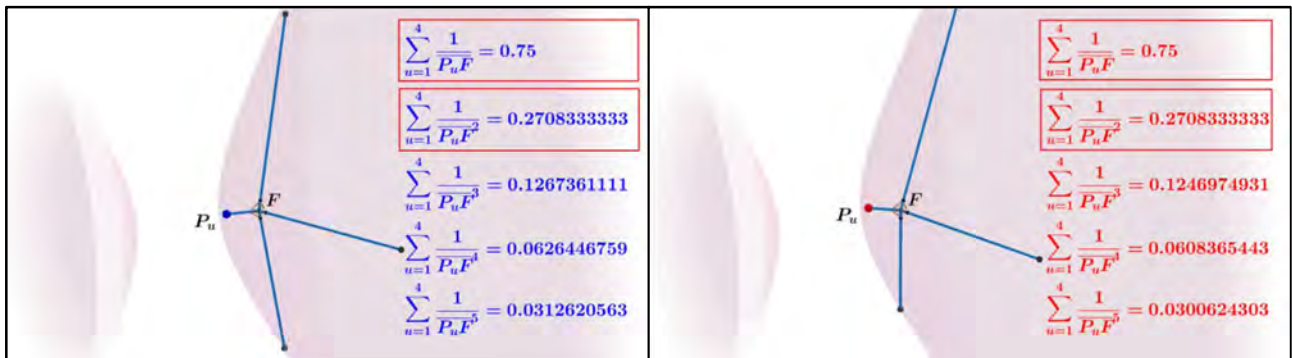
圖七 橢球面正二十面體： $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。



圖八 拋物球面正六面體： $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1,2,3$ 。



圖九 雙曲球面正四面體： $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $m=1, 2$ 。



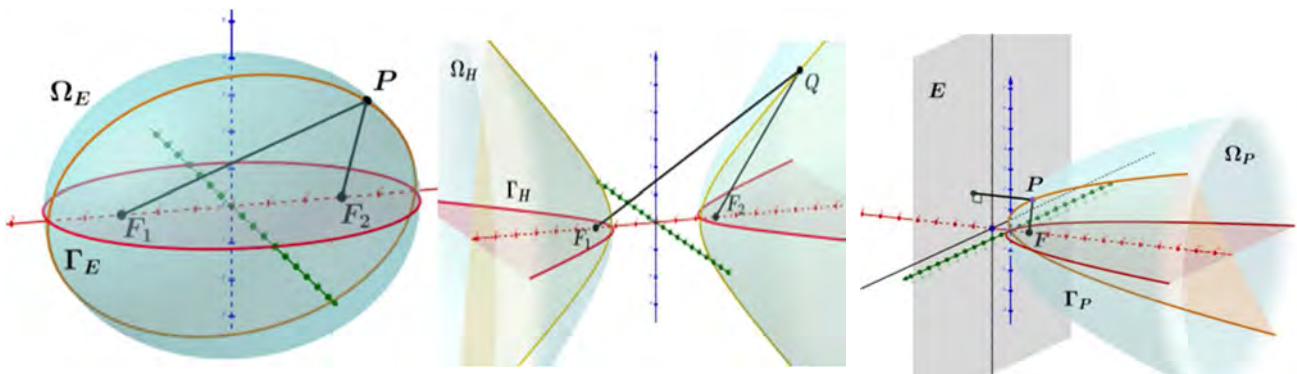
再來，經過諸多測試，我們發現 $\Omega_E, \Omega_H, \Omega_P$ 竟會有相同的結果，並將它整理在下表：

	$\overline{FP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值				
	正四面體 ($n=4$)	正六面體 ($n=8$)	正八面體 ($n=6$)	正十二面體 ($n=20$)	正二十面體 ($n=12$)
Ω	$m=1, 2$	$m=1, 2, 3$	$m=1, 2, 3$	$m=1, 2, 3, 4, 5$	$m=1, 2, 3, 4, 5$

最後，觀察表中結果，可見隨著正多面體頂點數增加，定值成立的最大倒數次方數也上升。一番思考後，我們看出頂點數與次方數的關係，以圖五為例，正四面體最多 3 點共面，我們以「最大共面點數」代稱，在正六、八面體中為 4，正十二、二十面體中則為 6，最大倒數次方皆小於最大共面點數。此外，正六、八面體，正十二、二十面體分別具有相同的結果，我們猜測其與對偶多面體有關聯。接著來進行嚴謹證明，

Lemma7: Ω 與 Γ_0 共焦點。

任取曲面任意點 P ， P 必落在與 Γ_0 全等且共焦點的曲線上，所以顯然成立。



Lemma8: 任意平面 $E: Ax+By+z+k=0$ 與 Ω 之截痕 Γ 為圓形、圓錐曲線、點或 \emptyset 。

- (1) $\Omega = \Omega_E$ ， Γ 為圓、橢圓、點或 \emptyset
- (2) $\Omega = \Omega_H$ ， Γ 為任意圓錐曲線、點或 \emptyset
- (3) $\Omega = \Omega_P$ ， Γ 為橢圓、圓、拋物線、點或 \emptyset

(一) 正八面體：

由於正八面體有四條射線共平面，即會有四條割線段共平面，我們猜測其能利用平面部分的定理輔助證明，先對正八面體作討論：

Lemma9: $F(c,0,0)$ 必為任意通過 F 的平面與特殊圓錐曲面 Ω 之截痕 Γ 的其中一焦點或圓心

< proof > 1. 先考慮橢圓球面 Ω_E :

(1) 因為旋轉保長，且 Ω_E 以 x 軸為對稱軸，為方便討論，以 x 軸為軸旋轉 Γ 直到 Γ 長軸在 xz 平面上(如圖十一)。

(2) (i) 當截面垂直 xy 平面時，顯然 F 為圓心 #

(ii) 當截面不垂直 xy 平面，證明 $F(c,0,0)$ 為 Γ 焦點

設 M 為 Γ 的中心點， P_1, P_2 為 Γ 的長軸兩端點，且令 $\angle MFO = \theta$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{FP_1} + \overline{FP_2} = \frac{ep}{1-e\cos\theta} + \frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)} = \frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{MF} = \overline{FP_1} - \overline{MP_1} = \frac{ep}{1-e\cos\theta} - \frac{ep}{1-e^2\cos^2\theta} = \frac{e^2 p \cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$$

過 M 做平行 y 軸之直線 L ，由圖十二可得知 $M(c - \overline{MF} \cos\theta, 0, \overline{MF} \sin\theta)$

$$\therefore L: \begin{cases} x = c - \overline{MF} \cdot \cos\theta \\ y = t \\ z = \overline{MF} \cdot \sin\theta \end{cases}, t \in \mathbb{R}, L \text{ 與 } \Omega_E \text{ 交點的 } y \text{ 座標為 } y_1, -y_1$$

將 Ω 與 L 取交集，解其聯立 $\Rightarrow \frac{(c - \overline{MF} \cdot \cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{(\overline{MF} \cdot \sin\theta)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{(c^2 + \overline{MF}^2 \cos^2\theta - 2c \cdot \overline{MF} \cos\theta) \cdot b^2 + a^2 \cdot \overline{MF}^2 \sin^2\theta}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

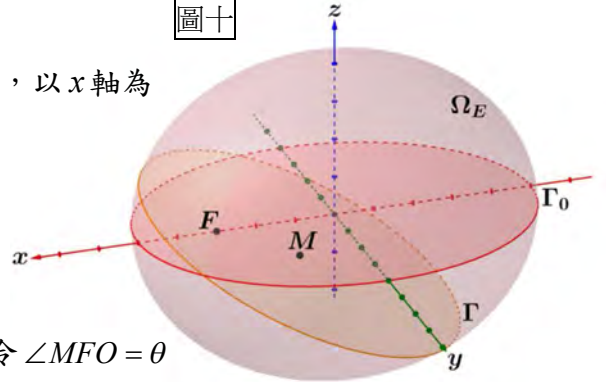
$$\Rightarrow y_1^2 = (-1) \cdot \left[\overline{FM}^2 (1 - e^2 \cos^2\theta) - 2e^2 p \cdot \overline{FM} \cos\theta - e^2 p^2 \right] = (-1) \cdot \left[\frac{(e^2 p \cos\theta)^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} - \frac{2(e^2 p \cos\theta)^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} - e^2 p^2 \right] = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2\theta}$$

將半長軸的平方減去半短軸的平方，

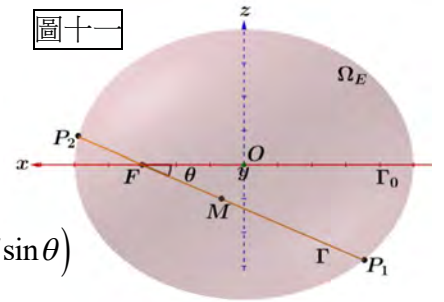
$$\text{即 } \overline{MP_1}^2 - y_1^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2 \cos^2\theta)^2} - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} \cdot \frac{e^2 \cos^2\theta}{1 - e^2 \cos^2\theta} = \frac{(e^2 p \cos\theta)^2}{(1 - e^2 \cos^2\theta)^2} = \overline{MF}^2$$

$\therefore F$ 為橢圓 Γ 的其中一個焦點，拋物球面、雙曲球面同理可證 #

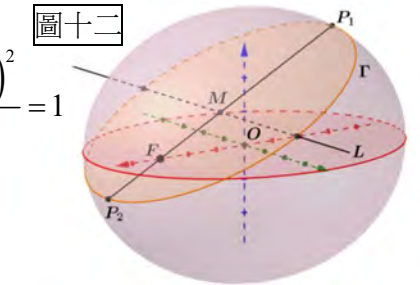
圖十



圖十一



圖十二



Theorem5: 以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正八面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

$$m \text{ 次方和為定值，即 } \sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m} \text{ 為定值，其中 } m=1,2,3$$

< proof of Thm5 >

1. 將任意的正八面體經適當旋轉，使得 $\overline{P_1P_3}, \overline{P_2P_4}, \overline{P_5P_6}$ 平行於三軸，我們經由下列四個步驟旋轉得到新的 $P'_1P'_2P'_3P'_4P'_5P'_6$ ：

步驟一	步驟二	步驟三	步驟四
<p>首先將正八面體的重心移至焦點F，並將其任意擺放</p>	<p>將左圖$\overline{P_5P_6}$ 作為旋轉軸將$\overline{P_2P_4}$ 旋轉至xz 平面上。</p>	<p>同理步驟二，以$\overline{P_2P_4}$ 為轉軸將$\overline{P_5P_6}$ 旋至xz 平面上。</p>	<p>接著以$\overline{P_1P_3}$ 為轉軸把$\overline{P_5P_6}$、$\overline{P_2P_4}$ 旋轉至平行於z 軸、x 軸。</p>

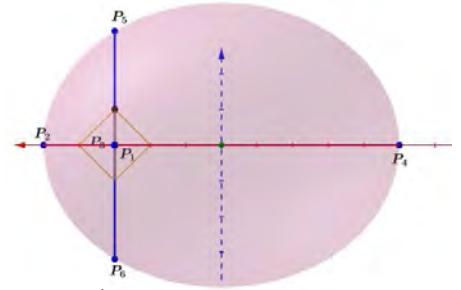
2. 說明「任意正八面體對應的 $\sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正八面體對應的 $\sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP'_u{}^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma9** 可以得知 Γ 的焦點就是 Ω 的焦點 F ，因為正八面體中必有四條射線為共平面(如步驟一的圖中 $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 共平面)，且這四條射線兩兩相鄰等角，再由 **Theorem1** 「圓錐曲線內 n 條焦半徑的倒數 m 次方和為定值」可推得在 Γ 固定的前提下，分別以 $\overline{P_5P_6}$ 或 $\overline{P_1P_3}$ 或 $\overline{P_2P_4}$ 做旋轉軸時，則其餘四條割線段經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值。因此正八面體對應的六條焦半徑的倒數 m 次方和為定值。

(2) 證其為定值：計算其上述步驟四的定值

橢圓球 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ，如圖十三

圖十三 (xz 平面視角)



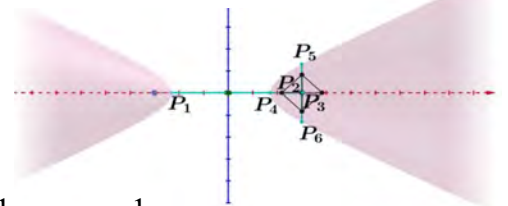
$$\therefore \frac{1}{FP_2^m} + \frac{1}{FP_4^m} + \frac{1}{FP_5^m} + \frac{1}{FP_6^m} = \frac{4}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$$

又 $\overline{FP_1}, \overline{FP_3}$ 為 Γ_{xy} 之半正焦弦長，即 $\overline{FP_1} = \overline{FP_3} = l$ ，

$$\therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m} = \frac{4}{l^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{2j} + \frac{2}{l^m}, m=1,2,3 \quad (\text{由 Theorem1})$$

雙曲面 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{b^4}{a^2} \\ x = c \end{cases}$ ，如圖十四

圖十四 (xz 平面視角)

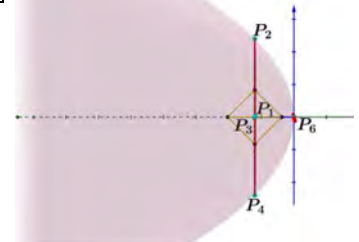


$$\therefore \frac{1}{FP_2^m} + \frac{1}{FP_4^m} + \frac{1}{FP_5^m} + \frac{1}{FP_6^m} = \frac{4b^{2m}}{a^m}$$

$$\text{又 } \overline{FP_1} = c - a, \overline{FP_3} = c + a \quad \therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m} = \frac{4b^{2m}}{a^m} + \frac{1}{(c-a)^m} + \frac{1}{(c+a)^m}, m=1,2,3$$

拋物面 $\because P_2, P_4, P_5, P_6 \in \Gamma': \begin{cases} y^2 + z^2 = 4c^2 \\ x = c \end{cases}$ ，如圖十五

圖十五 (xz 平面視角)



$$\therefore \frac{1}{FP_2^m} + \frac{1}{FP_4^m} + \frac{1}{FP_5^m} + \frac{1}{FP_6^m} = \frac{4}{2^m c^m} = \frac{1}{2^{m-2} c^m}$$

$$\text{又 } \overline{FP_1} = c, \frac{1}{FP_3} = 0 \quad \therefore \sum_{u=1}^6 \frac{1}{FP_u^m} = \frac{1}{2^{m-2} c^m} + \frac{1}{c^m}, m=1,2,3 \quad \#$$

(二) 正四面體

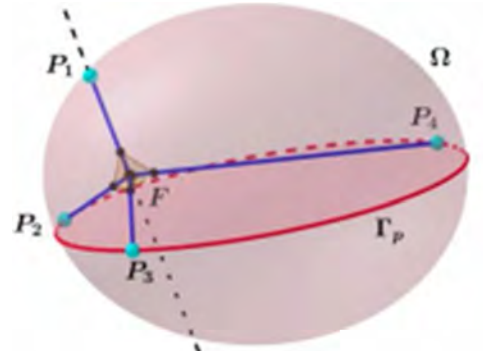
由於 $\overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 相鄰等角，便猜想能否利用平面的定理去證明。

一開始嘗試將 $\overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 三線段投影至紅色截橢圓上，然而

被投影線段並非相鄰等角，甚至利用空間直線方程式爆出

四交點，或以三維旋轉矩陣求直線參數式，卻都不能簡化證明

，最後我們想到利用 **Lemma10** 及特殊的旋轉法來證明其餘正多面體的定理。



Lemma10: 在空間中任意平面 E 取平面外任意一點 O ，向 E 做 n 條相鄰等角割線段，若其與平面的交點在相同橢圓上，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{OP_u^m}$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。

< proof >

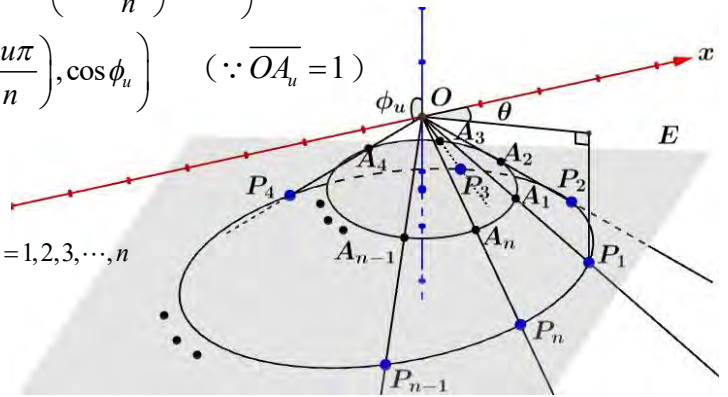
為了方便討論，設點 O 為 $(0,0,0)$ ，而作一圓平行於 xy 平面且圓心在 z 軸上，將此圓 n 等分，以點 A_u 表示，其中 $u=1,2,\dots,n$ ，且 $\overline{OA_u}=1$ 。設 $\overline{OA_u}$ 交平面 E 於點 P_u ，其中 $u=1,2,\dots,n$ 。

令 θ 為 $\overline{OP_u}$ 在 xy 面的投影線段與 x 軸正向夾角，且令 $\overline{OP_u}$ 與 z 軸正向夾角為 ϕ_u ，其中 $0 \leq \phi_u < \frac{\pi}{2}$ 。

$\therefore \overline{OA_u} = t_u \cdot \overline{OP_u} \therefore$ 設 $A_u \left(\sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \cos \phi_u \right)$ ， $E: ax + by + z = k$ ，其中 $k \neq 0$

則 $\overline{OA_u} = \left(\sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right), \cos \phi_u \right)$ ($\because \overline{OA_u} = 1$)

$$\therefore P_u : \begin{cases} \overline{OA_u} : \begin{cases} x = \sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cdot t_u \\ y = \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cdot t_u \\ z = \cos \phi_u \cdot t_u \end{cases} \\ E: ax + by + z = k \end{cases}, \forall t_u \in \mathbb{R}, u = 1, 2, 3, \dots, n$$



$$\Rightarrow t_u = k \cdot \frac{1}{a \sin \phi_u \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + b \sin \phi_u \sin \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + \cos \phi_u}$$

$$\text{則 } \frac{1}{OP_u^m} = \frac{1}{t_u \cdot \overline{OA_u}} = \frac{1}{k} \cdot \left[\sqrt{a^2 + b^2} \sin \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + \cos \phi_u \right] \left(\sin \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{OP_u^m} = \sum_{u=1}^n \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} \sin \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + \cos \phi_u \right) \right]^m = \frac{\cos^m \phi_u}{k^m} \sum_{u=1}^n \left[\sqrt{a^2 + b^2} \tan \phi_u \cdot \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} + \alpha \right) + 1 \right]^m$$

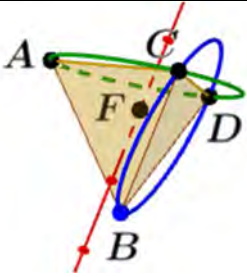
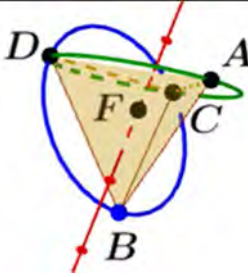
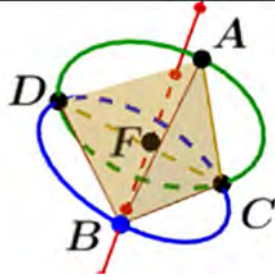
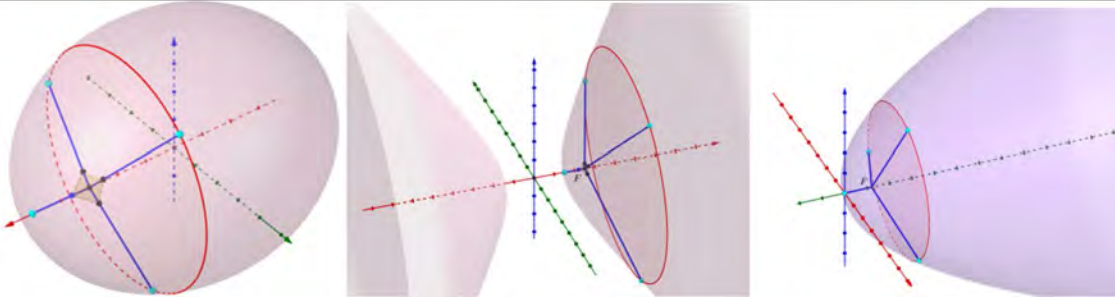
$$= n \cdot \frac{\cos^m \phi_u}{k^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \tan \phi_u}{2} \right)^{2j}, \text{ 其中 } n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ 且 } 0 \leq \phi_u < \frac{\pi}{2} \quad \# \text{ (由 Lemma4)}$$

Theorem6: 以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正四面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

$$m \text{ 次和為定值，即 } \sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m} \text{ 為定值，其中 } m=1,2。$$

< proof of Thm6 >

1. 將任意的正四面體經適當旋轉，使 $\overline{FP_1}$ 重合 x 軸，經下列四步驟得新的 P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 ：

步驟一	步驟二	步驟三
		
<p>過B, C, D以\overline{AF}為轉軸得藍圓軌跡且過A, C, D以\overline{BF}為轉軸得綠圓軌跡，x軸(紅直線)貫穿綠圓但沒貫穿藍圓。</p>	<p>而以\overline{BF}為轉軸做旋轉可將x軸穿過藍圓。</p>	<p>因此我們斷言x軸與藍圓有相交過，於是在以\overline{AF}為轉軸即可將點B移至x軸上。</p>
<p>步驟四</p>		
		
<p>正四面體之特例為截平面之截痕為圓形的情況。</p>		

2. 說明「任意正四面體對應的 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正四面體對應的 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP'_u{}^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以 $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \overline{FP_3}, \overline{FP_4}$ 為軸旋轉時，其餘三割線

段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m}$ 之值。

(2) 如步驟四圖，以橢圓為例，令截圓半徑長為 r ，焦半徑間夾角為 θ

$$\sum_{u=2}^4 \frac{1}{FP'_u{}^m} = \frac{3 \sin^m(\pi - \theta)}{r^m} \quad \text{又 } \overline{FP_1} = a - b \quad \therefore \sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP_u^m} = \sum_{u=1}^4 \frac{1}{FP'_u{}^m} = \frac{1}{(a-b)^m} + \frac{3 \sin^m \theta}{r^m}, m=1,2 \#$$

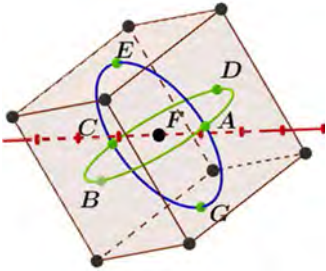
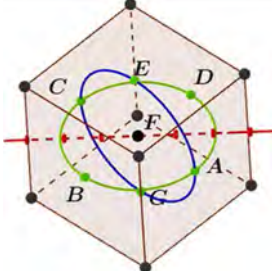
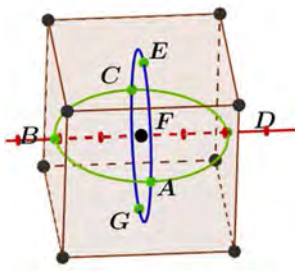
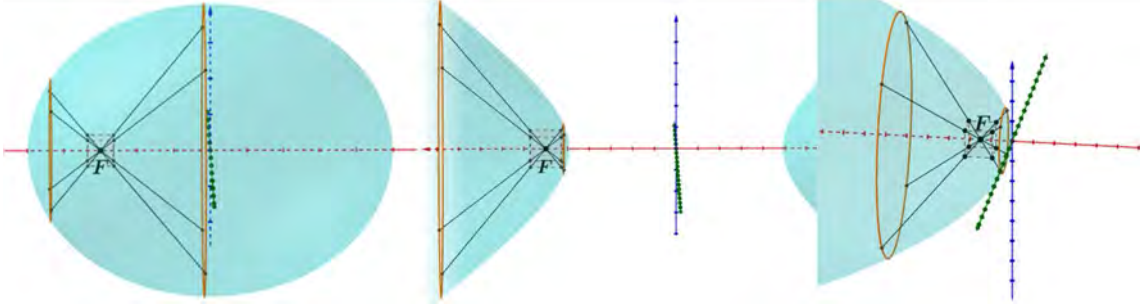
(三) 正六面體：

Theorem7: 以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正六面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數

$$m \text{ 次和為定值，即 } \sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m} \text{ 為定值，其中 } m=1,2,3 \text{。}$$

< proof of Thm7 >

1. 將任意的正六面體經適當旋轉，使一面中心在 x 軸上，經下列四步驟得新的 P_u' ：

步驟一	步驟二	步驟三
		
<p>\overline{BD} 作為轉軸時，面中心 A, E, C, G 軌跡為藍圓，而 \overline{EG} 為轉軸時，面中心 A, B, C, D 軌跡為綠圓，紅線為 x 軸。</p>	<p>將左圖 \overline{BD} 作為旋轉軸將綠圓與 x 軸交於兩點。</p>	<p>以 \overline{EG} 為轉軸，將 B, D 兩點旋至 x 軸上。</p>
<p>步驟四</p>		
		
<p>正六面體之特例為截平面之截痕為圓形的情況。</p>		

2. 說明「任意正六面體對應的 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正六面體對應的 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u'^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以任一面中心與 F 連線為軸旋轉時，其餘割

線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m}$ 之值。

(2) 步驟四圖中二截圓半徑皆為定值，令其為 r_1, r_2 ， x 軸與焦半徑 $\overline{FP_k}$ 夾角為 θ_1 ，與焦半

徑 $\overline{FP_j}$ 夾角為 θ_2 ，其中 $k=1\sim 4, j=5\sim 8$ ，則 $\sum_{u=1}^8 \frac{1}{FP_u^m} = \frac{5 \sin^m \theta_1}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m \theta_2}{r_2^m}$ 為定值， $m=1,2,3 \#$

(四) 正十二面體：

Theorem8: 以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正十二面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次和為定值，即為 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。

< proof of Thm8 >

1. 將任意的正十二面體經適當旋轉，使一面中心在 x 軸上，經下列四步驟得新的 P'_u ：

步驟一	步驟二	步驟三
過 A, B, C, D, E 以 \overline{FG} 為軸得藍圓軌跡且過 F, A, H, I, J 以 \overline{KL} 為軸得綠圓軌跡， x 軸(紅線)貫穿藍圓，綠圓則否	而以 \overline{FG} 為轉軸做旋轉可將 x 軸穿過綠圓。	因此我們斷言 x 軸與綠圓有相交過，於是在以 \overline{KL} 為轉軸即可將點 A 移至 x 軸上。
步驟四		
正十二面體之特例為截平面之截痕為四圓形的情況。		

2. 說明「任意正四面體對應的 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 與旋轉後的正四面體對應的 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP'_u{}^m}$ 相等」：

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以任一面中心與 F 連線為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m}$ 之值。

(2) 步驟四圖中四截圓半徑皆為定值，令其為 r_1, r_2, r_3, r_4 ， x 軸與焦半徑 $\overline{FP_k}$ 夾角為 θ_1 ，與焦半徑 $\overline{FP_j}$ 夾角為 θ_2 ，其中 $k=1\sim 5, 16\sim 20, j=6\sim 15$ ，則

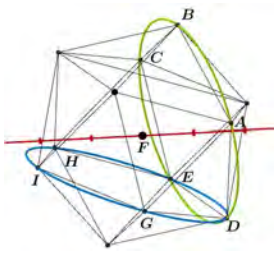
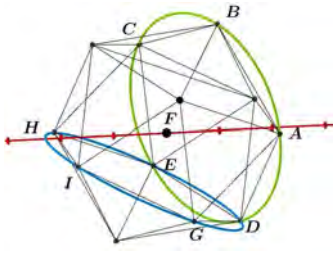
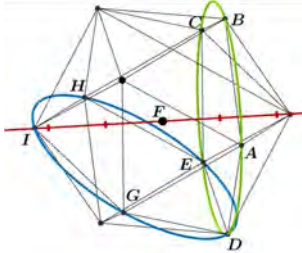
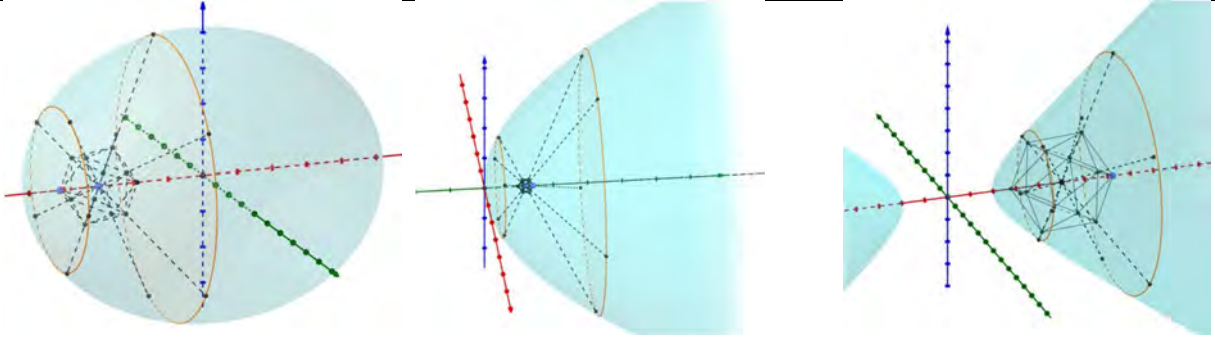
$$\sum_{u=1}^{20} \frac{1}{FP_u^m} = \frac{5 \sin^m \theta_1}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m \theta_2}{r_2^m} + \frac{5 \sin^m \theta_2}{r_3^m} + \frac{5 \sin^m \theta_1}{r_4^m} \text{ 為定值， } m=1,2,3,4,5 \quad \#$$

(五) 正二十面體：

Theorem9: 以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向正二十面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次和為定值，即為 $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u^m}$ 定值，其中 $m=1,2,3,4,5$ 。

< proof of Thm9 >

1. 將任意的正二十面體經適當旋轉，使 $\overline{FP_1}$ 重合 x 軸，經下列四步驟得新的 P_u' ：

步驟一	步驟二	步驟三
		
<p>過A, B, C, D, E做一圓得一綠圓軌跡且過D, E, G, H, I得藍圓軌跡，紅線為x軸</p>	<p>而以綠圓為軌跡旋轉可將x軸穿過藍圓。</p>	<p>因此我們斷言x軸與藍圓有相交過，於是在以藍圓為軌跡旋轉即可將點I移至x軸上。</p>
<p>步驟四</p>		
		
<p>正二十面體之特例為截平面之截痕為二圓形的情況。</p>		

(1) 由 **Lemma10**，在軌跡橢圓固定的前提下，以 $\overline{FP_u}$ 為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次

和為定值，因此皆不改變 $\sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u^m}$ 之值。

(2) 如步驟四圖，以橢圓為例，令二截圓半徑長分別為 r_1, r_2 ， x 軸與焦半徑 $\overline{P_k F}$ 夾角為 θ ，

其中 $k=2 \sim 6$ ，則 $\sum_{u=2}^{11} \frac{1}{FP_u'^m} = \frac{5 \sin^m \theta}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m (\pi - \theta)}{r_2^m}$ ，又 $\overline{P_1 F} = a - b$ ， $\overline{P_{12} F} = a + b$

$$\therefore \sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u^m} = \sum_{u=1}^{12} \frac{1}{FP_u'^m} = \frac{1}{(a-b)^m} + \frac{1}{(a+b)^m} + \frac{5 \sin^m \theta}{r_1^m} + \frac{5 \sin^m \theta}{r_2^m}, m=1,2,3,4,5 \quad \#$$

六、固定圓錐曲線方程式，以焦點/中心點為旋轉中心，其任意 n 條相鄰等角的焦弦 / 中心弦經任意旋轉時的 m 次方和為定值

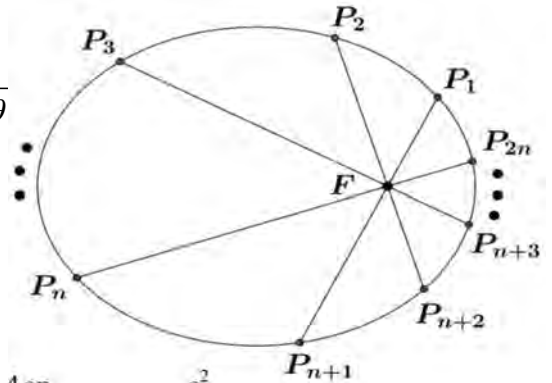
Theorem10: 在圓錐曲線方程式固定的情況下，以焦點 F 為旋轉中心，若 $\overline{P_u P_{u+n}}$ 為相鄰等角的焦弦，則 $\sum_{u=1}^n \left(\frac{1}{\overline{P_u P_{u+n}}} \right)^m$ 為定值，其中 $n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}$ 。

< proof of Thm10 > (圖示以橢圓為例)

1. 求其弦長的倒數值：已知圓錐曲線極座標 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$

$$\begin{aligned} \text{則 } \overline{P_u P_{u+n}} &= \frac{ep}{1 - e \cos(\theta_u + \pi)} + \frac{ep}{1 - e \cos \theta_u} \\ &= ep \left(\frac{2}{1 - e^2 \cos^2 \theta_u} \right) = \frac{4ep}{2 - e^2 - e^2 \cos 2\theta_u} \end{aligned}$$

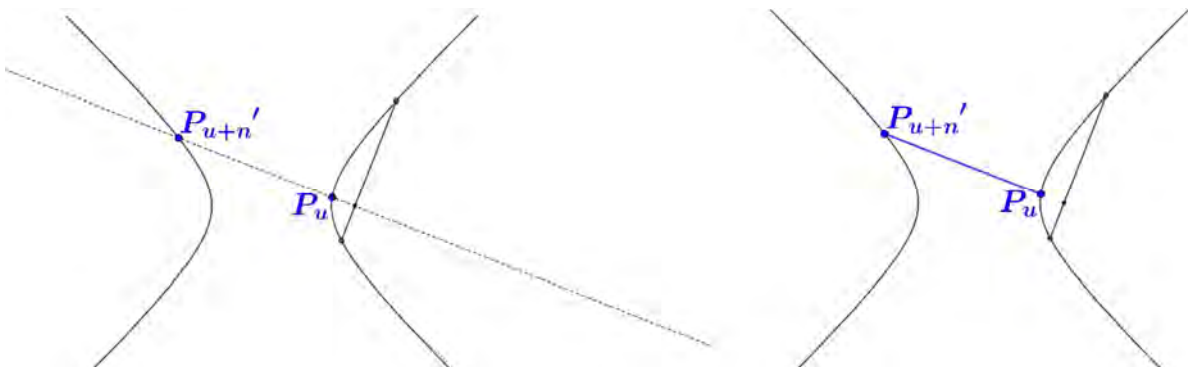
$$\text{令 } \frac{1}{\overline{P_u P_{u+n}}} = \frac{(2 - e^2)(1 + w \cos 2\theta_u)}{4ep} = \frac{1 + w \cos 2\theta_u}{K}, \text{ 其中 } K = \frac{4ep}{2 - e^2}, w = \frac{e^2}{e^2 - 2}$$



2. 證其為定值： $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{P_u P_{u+n}}^m} = \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 + w \cos 2(\theta + \frac{2u\pi}{2n})}{K} \right)^m$

$$= \sum_{u=1}^n \left(\frac{1 + w \cos(2\theta + \frac{2u\pi}{n})}{K} \right)^m = \frac{n}{K^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ (由 Lemma4) } \#$$

3. 雙曲線之特例：焦弦的兩端點需在雙曲線圖形的同一側，因若至少有一點在異側的話，則此線段不為過焦點的弦。以下二圖為例，當 P_{u+n}' 在雙曲線另一支，則取不過焦點的弦 $\overline{P_u P_{u+n}'}$ 。



Theorem11: 在圓錐曲線方程式固定的情況下，以中心點為旋轉中心， $\overline{P_u P_{u+n}}$ 為相鄰等角的

中心弦，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}^m}$ 為定值，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

< proof of Thm11 > (因拋物線無中心點，在此指的圓錐曲線不包含拋物線)

1. 橢圓：(1) 令橢圓方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ 。

設以中心點 $O(0,0)$ 為極點的 P_u 極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ， P_u 的直角坐標為 $(r_u \cos \theta_u, r_u \sin \theta_u)$

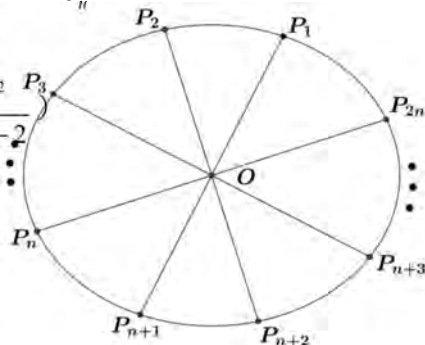
$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u)^2}{a^2} + \frac{(r_u \sin \theta_u)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r_u^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta_u}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta_u}{b^2}} = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta_u}$$

$$\therefore \frac{1}{r_u^2} = \frac{(2-e^2)(1+w \cos 2\theta_u)}{2b^2} = \frac{1+w \cos 2\theta_u}{K} \quad (K = \frac{2b^2}{2-e^2}, w = \frac{e^2}{e^2-2})$$

$$\therefore r_u = r_{u+n} \quad \therefore \left(\frac{1}{r_u + r_{u+n}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2r_u} \right)^2 = \frac{1+w \cos 2\theta_u}{4K}$$

(2) 證其為定值

$$\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}^m} = \sum_{u=1}^n \left(\frac{1+w \cos 2\left(\theta + \frac{2u\pi}{2n}\right)}{4K} \right)^{\frac{m}{2}} = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數}$$



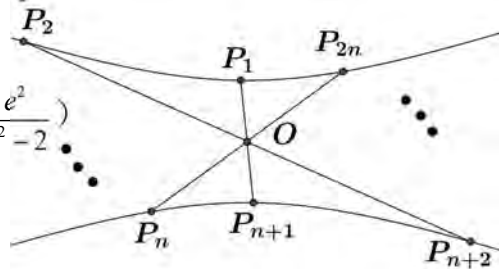
2. 雙曲線：(1) 令雙曲線方程式 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a, b \neq 0$ 。

設以中心點 $O(0,0)$ 為極點的 P_u 極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ， P_u 的直角坐標為 $(r_u \cos \theta_u, r_u \sin \theta_u)$

$$\therefore \frac{(r_u \cos \theta_u)^2}{a^2} - \frac{(r_u \sin \theta_u)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r_u^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta_u}{a^2} - \frac{\sin^2 \theta_u}{b^2}} = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \theta_u - 1}$$

$$\therefore \frac{1}{r_u^2} = \frac{(e^2-2)(1+w \cos 2\theta_u)}{2b^2} = \frac{1+w \cos 2\theta_u}{K} \quad (K = \frac{2b^2}{e^2-2}, w = \frac{e^2}{e^2-2})$$

$$\therefore r_u = r_{u+n} \quad \therefore \left(\frac{1}{r_u + r_{u+n}} \right)^2 = \frac{1+w \cos 2\theta_u}{4K}$$



由橢圓(2)的計算，同理得 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{P_u P_{u+n}^m} = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

由上述證明，可得在圓錐曲線的中心點 O 所延伸相鄰等角 n 條弦的倒數 m 次方和會是一

定值，即 $\sum_{u=1}^n \left(\frac{1}{P_u P_{u+n}} \right)^m = \frac{n}{(4K)^d} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{w}{2} \right)^{2j}, 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數 # (由 Lemma4)

其中當 $K = \frac{2b^2}{2-e^2}$ 時為橢圓； $K = \frac{2b^2}{e^2-2}$ 時為雙曲線。

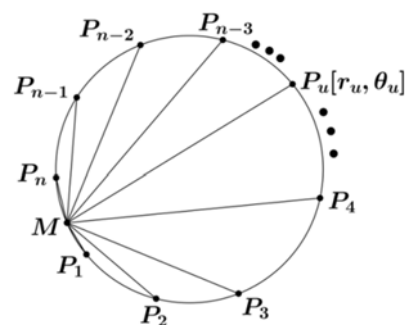
七、固定圓 / 直線 方程式，以 圓上/直線 外任意一點為旋轉中心，其 n 條相鄰等角的割線段經任意旋轉時的 m 次方和為定值

Theorem12: 在圓方程式固定的情況下，以圓上任意一點 M 為旋轉中心， $\overline{MP_u}$ 為相鄰等角

割線段，則 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

< proof of Thm12 >

設以點 M 為極點的 P_u 的極座標為 $[r_u, \theta_u]$ ，圓的極座標方程式為 $r = 2R \cos \theta$ ，其中 $\theta = \theta_1$ ， R 為半徑，



$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m &= \sum_{u=1}^n \left(2R \cos \left(\theta + \frac{u\pi}{n} \right) \right)^m \\ &= (2R)^m \cdot \sum_{u=1}^n \frac{C_{\frac{m}{2}}^m \cdot \frac{(-1)^m + 1}{4} + \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} C_v^n \cdot \cos(m-2v) \left(\theta + \frac{u\pi}{n} \right)}{2^{m-1}} \quad (\text{由 Lemma3}) \\ &= (2R)^m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left[n \cdot C_{\frac{m}{2}}^m \cdot \frac{1+1}{4} + \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \left[\sum_{u=1}^n C_v^n \cdot \cos(d-v) \left(2\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] \right] \quad (\text{其中 } m=2d) \\ &= 2R^m \cdot n \cdot C_{\frac{m}{2}}^m \cdot \frac{(-1)^m + 1}{4} = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m \quad , \text{其中 } 2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數 (由 Lemma2) } \# \end{aligned}$$

Theorem13: 在直線方程式固定的情況下，以直線外任意一點 M 為旋轉中心， $\overline{MP_u'}$ 為相鄰等

角割線段，則 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{MP_u'}^m} = R^{-m} \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

< proof of Thm13 >

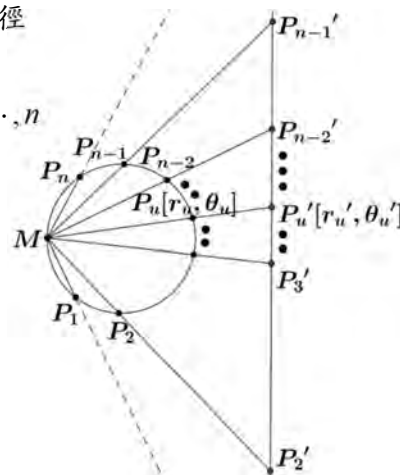
由 **Theorem12** 我們可以得知在圓上點 M 所延伸相鄰等角 n 條割線段偶次方和為定值

即 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ ，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數，且 R 為半徑

而以 M 為反演中心， R^2 為反演幂，即設 $P_u \mapsto P_u'$ ，其中 $u = 1, 2, \dots, n$

$$\text{且 } \overline{MP_u} \cdot \overline{MP_u'} = R^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m = n \cdot R^{2m} \cdot \sum_{u=1}^n \overline{MP_u'}^{-m} = n \cdot R^m \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$$

$\therefore \sum_{u=1}^n \frac{1}{\overline{MP_u'}^m} = R^{-m} \cdot C_{\frac{m}{2}}^m$ 為定值，其中 $2n > m, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數 #



肆、討論

在研究的過程中，不經意發現，我們的定理可以很快的論證「2015年臺灣國際科展——一刀兩斷」和「第十四屆旺宏科學獎——各類曲線等角分割下線段長定值之研究」中的結論，而且還得出不變量的表示法，反之「一刀兩斷」的結論，卻無法得出我們的定理(附錄三)，以下當作我們的系理：「一刀兩斷」中的切 n 刀，相當於我們定義的角度 $2n$ 等分；且前者的作品討論分組取的和的關係，而我們著重在不變量的探討。

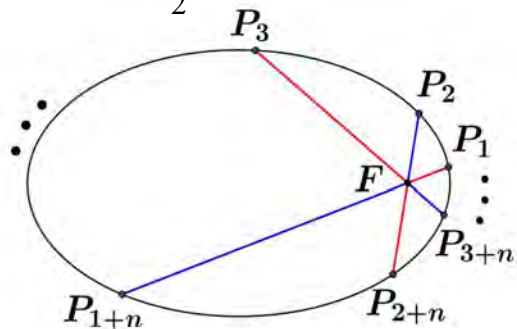
(*Corollary[3][4]和我們的Theorem兩者所敘述的 k 和 m 不同)

Corollary2 (曾靖國 [3] , Theorem6): 過圓錐曲線焦點切 n 刀，將焦點到圓錐曲線的所有線段以逆時針依序取一段，則兩人取到的相鄰等角線段長 k 次方和相同，其中 $1-n \leq 2k \leq 0$ 。

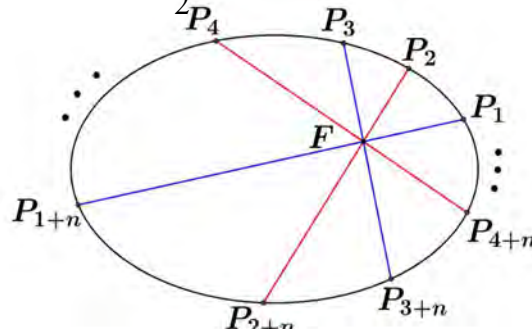
< proof >

原命題之“奇數刀各組取出的線段”等價於我們探討的“周角奇數等份時，任意旋轉”的其一特例，而偶數刀同理。則下圖以橢圓為例：

(1) 奇數刀 ($\frac{n}{2}$ 為奇數)



(2) 偶數刀 ($\frac{n}{2}$ 為偶數)



從圖(1)或(2)，顯而易見 $\overline{FP_1}, \overline{FP_3}, \dots, \overline{FP_{2n-1}}$ 中，相鄰的角度皆為 $\frac{2\pi}{n}$ ，且 $\overline{FP_2}, \overline{FP_4}, \dots, \overline{FP_{2n}}$ 相鄰的角度亦為 $\frac{2\pi}{n}$ ，由我們的Theorem1，圓錐曲線任意相鄰等角的 n 條焦半徑的倒數 m 次方和必為定值， $-n < m \leq 0, \forall m \in \mathbb{Z}$ ，故得證 #

Corollary3 (曾靖國 [3][4] , 未來展望): 過圓錐曲線(非退化)任一點 P 切 n ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)刀，使每一組相鄰割線夾角相同， P 點到圓錐曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則若 $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)時，則各組取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m \leq k \leq 0$ 。

< proof >

由Theorem2「在圓錐曲線內任一點延伸相鄰等角的 n 條線段倒數 m 次方和為定值，其中 $n > m, \forall n, m$ 為偶數」可知當其 n 等分線段經旋轉後仍為定值，且其[3][4][未來展望]中敘述為點 P 切 n 刀而依序取的線段長 $2k$ 次方和相等，等價於我們定理二中的其一特例，即 n 等分與其線段經 $\frac{\pi}{n}$ 旋轉後的 m 次方和相同，則由Theorem2可直接得到 $n = 2m$ 時，則各組取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m \leq k \leq 0$ 的結論。 #

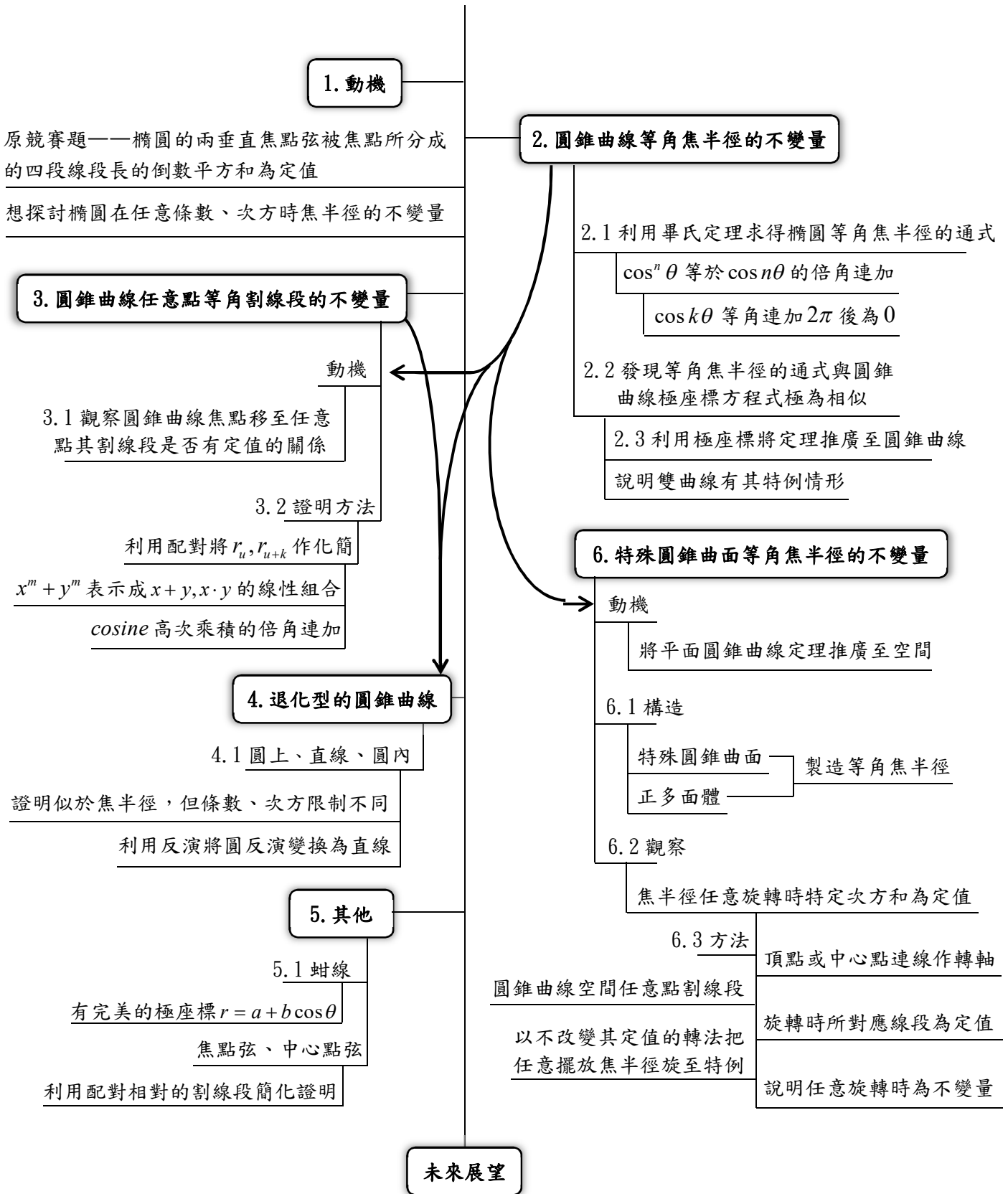
伍、研究結果

一、重點結論整理

重點結論	內容
Lemma3	$\cos^n \theta = \frac{C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cdot \cos(n-2j)\theta}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$
Lemma4	$\sum_{u=1}^n \left[w \cos \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) + 1 \right]^m = n \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot w^{2j}, n > m, \forall n, m \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{R}$
Lemma5[1]	$x^m + y^m = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \cdot \frac{m}{m-j} \cdot C_j^{m-j} (x+y)^{m-2j} (xy)^j, \forall m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$
Lemma6	$\sum_{u=1}^k \cos^i 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) \cos^j 2 \left(\theta + \frac{2u\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0, i, j \text{ is odd} \\ C_i^i C_j^j, n > i+j, n=2k, \forall k \in \mathbb{N} \\ k \cdot \frac{2}{2^{i+j}}, i, j \text{ is even} \end{cases}$
Theorem1	圓錐曲線相鄰等角的 n 條焦半徑的倒數 m 次和為定值， $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m} = \frac{n}{(ep)^m} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{e}{2} \right)^{2j}, \text{ 其中 } m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$
Theorem2	過圓錐曲線任意點延伸相鄰等角的 n 條割線段之倒數 m 次方和為定值，其中 $m < n, \forall n, m$ 為偶數。
Theorem3	圓內任意點延伸相鄰等角的 n 條割線段的 m 次方和為定值，其中 $ m < n, \forall n$ 為偶數， m 正負偶數。
Theorem4	蚶線基點所延伸相鄰等角的 n 條割線段之 m 次方和為定值， $m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ 。
Theorem 5~9	空間中，以特殊圓錐曲面 Ω 之焦點 F 向五個正多面體各頂點做射線交 Ω 於 P_u ，各線段之倒數 m 次方和為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值。
Theorem10	圓錐曲線中任意 n 條焦弦的倒數 m 方和是定值，其中 $m < n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ 。
Theorem11	圓錐曲線中任意 n 條中心弦的倒數 m 方和是定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Theorem12	過圓上一點相鄰等角 n 條割線段的 m 次方和為定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數
Theorem13	平面中一點所延伸相鄰等角的射線交任意直線的 n 條割線段倒數 m 次方和為定值，其中 $m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Corollary1	雙曲線中，若存在 k 條焦半徑與其餘 $n-k$ 條不在同側，其倒數 m 次方和仍為定值，即 $\sum_{u=1}^n \frac{1}{FP_u^m}$ 為定值，其中 $1 \leq k < n, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。
Corollary2	過圓錐曲線焦點切 n 刀，使相鄰割線角度均相同，以逆時針依序取一段割線，則兩人取到的線段長 k 次方和相同，其中 $1-n \leq 2k \leq 0$ 。
Corollary3	過圓錐曲線任意點 P 切 $n=2m (m \in \mathbb{N})$ 刀，每組相鄰割線夾角相同，則各組依序取一段，取出的線段長 $2k$ 次方和相等，其中 $1-m \leq k \leq 0$ 。

二、研究流程圖：

—永恆的旋轉木馬—



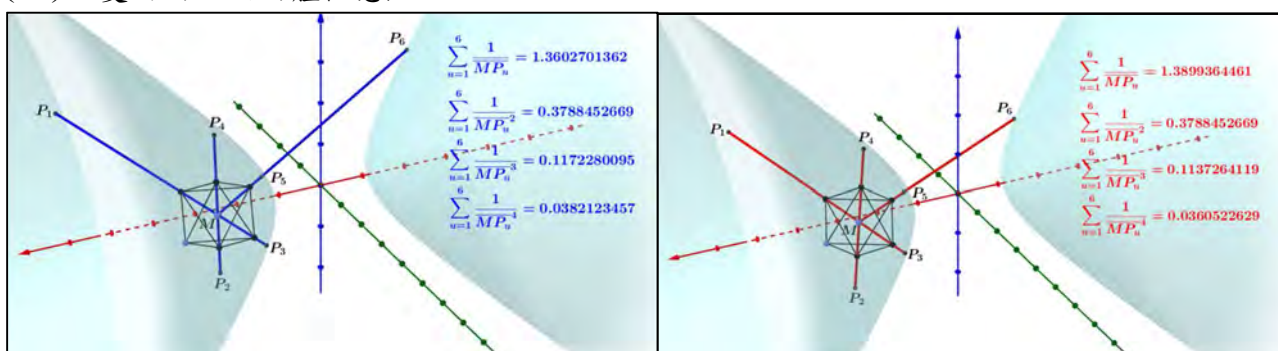
陸、延伸思考與推廣

一、空間任意點情況的不變量

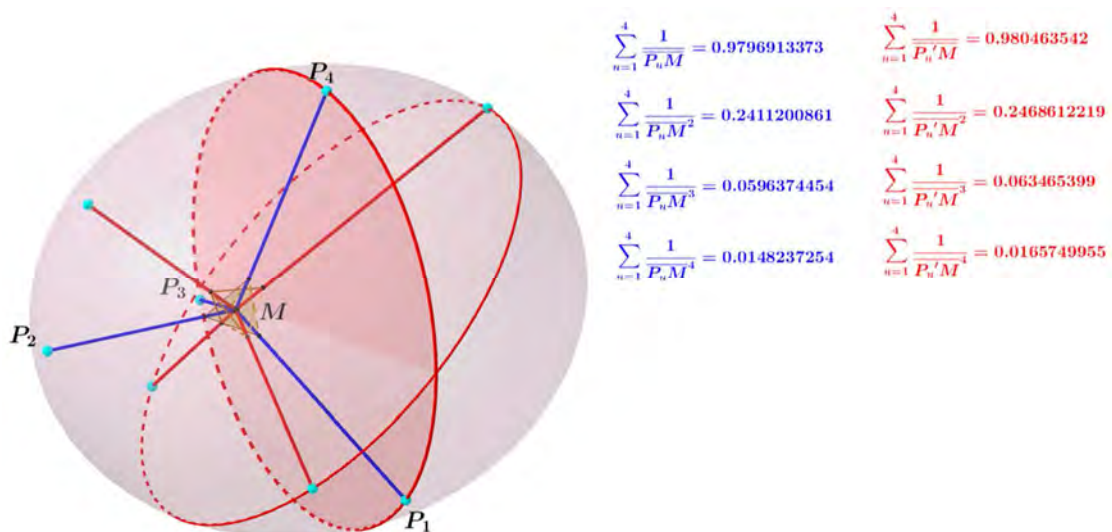
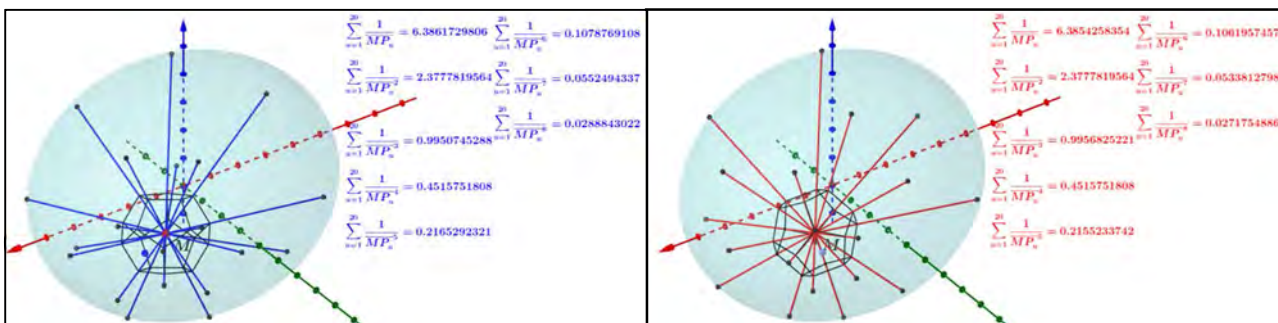
目前空間中的定理皆將正 N 面體的重心移至特殊圓錐曲面焦點旋轉，我們猜想是否以空間中任意一點做為旋轉中心時也有不變量的性質，我們想先從交點在圓錐曲面中心點的狀況開始做起，以下是透過 GGB 測試的結果：

特殊圓錐曲面					$\overline{MP_u}$ 的倒數 m 次方和為定值
正四面體 ($n=4$)	正六面體 ($n=8$)	正八面體($n=6$)	正十二面體($n=20$)	正二十面體($n=12$)	
無	$m=2$	$m=2$	$m=2,4$	$m=2,4$	

(一) 雙曲面正六面體任意點



(二) 橢球正十二面體任意點



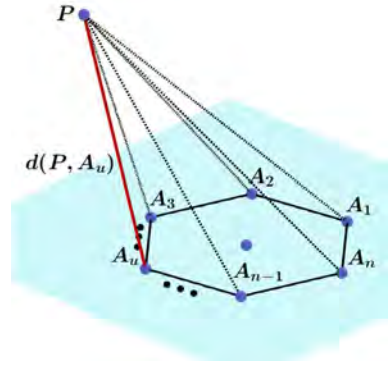
二、正多面體頂點至空間中任一點、線、面距離 m 次和之不變量

Property1: 正多面體有 n 個頂點，且最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意點 M 距離 m 次和為定值，即 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 為定值，其中 $m < 2k, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

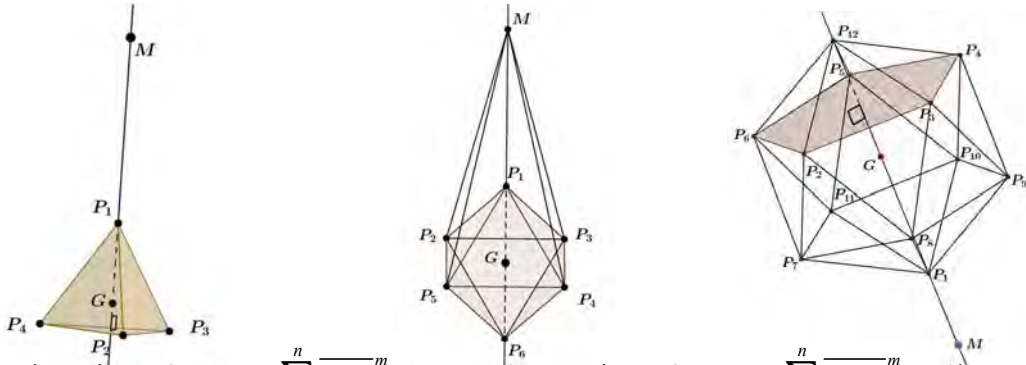
1. 欲證：空間中任意正多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 頂點及任意一點 P ，則 $\sum_{u=1}^n \overline{PA_u}^m$ 為定值。

設 $A_u(r \cos \theta_u, r \sin \theta_u, 0)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ ，其中 $\theta_u = \theta + \frac{2u\pi}{n}, 0 \leq \theta < 2\pi$

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n \overline{PA_u}^m &= \sum_{u=1}^n \left[(r \cos \theta_u - x_0)^2 + (r \sin \theta_u - y_0)^2 + (z_0)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= \sum_{u=1}^n \left[(r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - 2r(x_0 \cos \theta_u + y_0 \sin \theta_u) \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= (r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \sum_{u=1}^n \left[1 - \frac{2r\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \cos(\theta_u + \phi) \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= n \cdot (r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} C_j^{\frac{m}{2}} \cdot C_j^{2j} \cdot \left[\frac{r\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \right]^{2j} \text{ 為定值, } m < 2n, \forall n \in \mathbb{N}, m \text{ 為偶數。} \end{aligned}$$



2. 設正多面體重心為 G ，將任意的正多面體經任意的適當旋轉，使 G, M, P_1 共線：



3. 說明「任意正多面體對應的 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 與旋轉後的正多面體對應的 $\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m$ 相等」：

(1) 由 1.，以 $\overline{GP_u}$ 為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變

$$\sum_{u=1}^n \overline{MP_u}^m \text{ 之值, 其中 } m < 2k, m \text{ 為偶數。}$$

(2) 令重心 G 、 P_u 與 M 的距離分別為 d 、 h ，則

Case 1° 正四面體：
$$\sum_{u=1}^4 \overline{MP_u}^m = [h-d]^m + 3 \left[\left[h + \frac{1}{3}d \right]^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}d \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} = [h-d]^m + 3 \left[h^2 + d^2 + \frac{2}{3}d \right]^{\frac{m}{2}}$$

Case 2° 正八面體：
$$\sum_{u=1}^6 \overline{MP_u}^m = [h-d]^m + [h+d]^m + 4(h^2 + d^2)^{\frac{m}{2}}$$

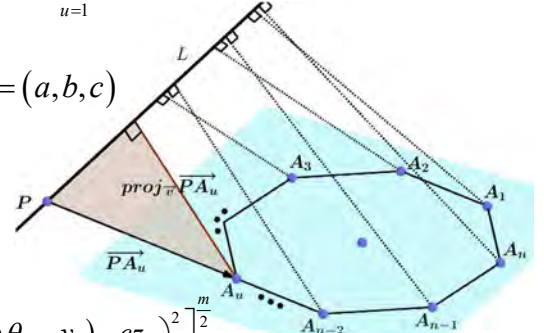
Case 3° 正二十面體：顯然，同理可推其亦為定值

Case 4° 正六、十二面體：由於正六、十二面體與正八、二十面體互為對偶多面體，因此將正八、二十面體任意旋轉，同時也正在任意旋轉正六、十二面體，即可以說明正六、十二面體的情況亦為定值。 #

Property2: 正多面體有 n 個頂點，且最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意直線 L 距離 m 次和為定值，即 $\sum_{u=1}^n [d(P_u, L)]^m$ 為定值，其中 $m < k, \forall n, k \in \mathbb{N}, m$ 為偶數。

1. 欲證：空間中任意正多邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 頂點及任一直線 L ，則 $\sum_{u=1}^n [d(A_u, L)]^m$ 為定值。

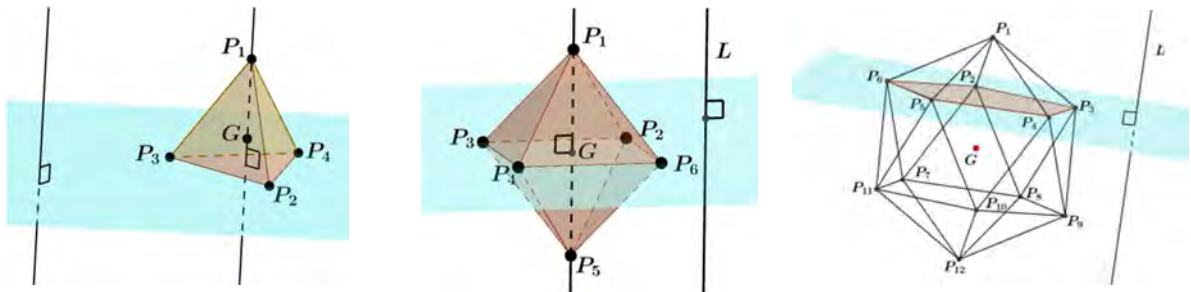
設 $A_u(r \cos \theta_u, r \sin \theta_u, 0)$, $L: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (a, b, c)$



$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n [d(A_u, L)]^m &= \sum_{u=1}^n \left(\left| \vec{PA}_u \right|^2 - \left| \text{proj}_{\vec{v}} \vec{PA}_u \right|^2 \right)^{\frac{m}{2}} \\ &= \sum_{u=1}^n \left[(r \cos \theta_u - x_0)^2 + (r \sin \theta_u - y_0)^2 + z_0^2 - \left(\frac{a(r \cos \theta_u - x_0) + b(r \sin \theta_u - y_0) - cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sum_{u=1}^n \left[\frac{1}{2} r^2 (a^2 + b^2) \cos(2\theta_u + \phi) - 2r \sqrt{(x_0 b^2 + x_0 c^2 - aby_0 - acz_0)^2 + (y_0 a^2 + y_0 c^2 - abx_0 - bcz_0)^2} \cos(\theta_u + \omega) + s \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= \sum_{u=1}^n \left[p \cos(2\theta_u + \phi) - q \cos(\theta_u + \omega) + s \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= \sum_{u=1}^n \sum_{m_1, m_2, m_3}^m \frac{\left(\frac{m}{2}\right)! p^{m_1} (-q)^{m_2} s^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} \cdot \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} C_{j_1}^{m_1} (\cos 2\theta_u \cos \phi)^{j_1} (\sin 2\theta_u \sin \phi)^{m_1 - j_1} \right) \cdot \left(\sum_{j_2=1}^{m_2} C_{j_2}^{m_2} (\cos \theta_u \cos \omega)^{j_2} (\sin \theta_u \sin \omega)^{m_2 - j_2} \right) \\ &= \sum_{u=1}^n \sum_{m_1, m_2, m_3}^m \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} C_{j_1}^{m_1} C_{j_2}^{m_2} \cos^{j_1} \phi \sin^{m_1 - j_1} \phi \cos^{j_2} \omega \sin^{m_2 - j_2} \omega \cdot \frac{\left(\frac{m}{2}\right)! p^{m_1} (-q)^{m_2} s^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} \cdot \left((1 + 2\cos^2 \theta_u)^{j_1} (2\sin \theta_u \cos \theta_u)^{m_1 - j_1} \cos^{j_2} \theta_u \sin^{m_2 - j_2} \theta_u \right) \\ &= \sum_{u=1}^n \sum_{m_1, m_2, m_3}^m \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} C_{j_1}^{m_1} C_{j_2}^{m_2} \cos^{j_1} \phi \sin^{m_1 - j_1} \phi \cos^{j_2} \omega \sin^{m_2 - j_2} \omega \cdot \frac{\left(\frac{m}{2}\right)! p^{m_1} (-q)^{m_2} s^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} \cdot \left(\sum_{h=1}^{j_1} C_h^{j_1} 2^h \cdot \cos^{2h} \theta_u \cdot 2^{m_1 - h} \cos^{m_1 - h + j_2} \theta_u \sin^{m_1 + m_2 - h - j_2} \theta_u \right) \\ &= \sum_{m_1, m_2, m_3}^m \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \sum_{h=1}^{j_1} 2^{m_1 + h - j_1} \cdot C_h^{j_1} C_{j_1}^{m_1} C_{j_2}^{m_2} \cos^{j_1} \phi \sin^{m_1 - h} \phi \cos^{j_2} \omega \sin^{m_2 - j_2} \omega \cdot \frac{\left(\frac{m}{2}\right)! p^{m_1} (-q)^{m_2} s^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} \cdot \left(\sum_{u=1}^n \cos^{2h + m_1 - h + j_2} \theta_u \cos^{m_1 + m_2 - h - j_2} \left(\theta_u - \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

為定值，其中 $2(m_1 + m_2 + m_3) = m, \forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ，其中 $m < n, \forall n \in \mathbb{N}, m$ 為偶數

2. 設正多面體重心為 G ，將任意的正多面體經任意的適當旋轉，使 $\overline{GP_u} \parallel L$ ：



3. 說明「任意正多面體對應的 $\sum_{u=1}^n [d(P_u, L)]^m$ 與旋轉後對應的 $\sum_{u=1}^n [d(P'_u, L)]^m$ 相等」：

(1) 由 1.，以 $\overline{GP_u}$ 為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變

$\sum_{u=1}^n [d(P_u, L)]^m$ 之值，其中 $m < k$, m 為偶數。

(2) 令重心 G 、 P_u 、 L 的距離分別為 d 、 h ，則

$$\text{Case 1}^\circ \text{正四面體: } \sum_{u=1}^4 [d(P_u, L)]^m = h^m + 3 \cdot \left(\frac{8}{9}d^2 + h^2 \right)^{\frac{m}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} C_j^{\frac{m}{2}} \cdot C_j^{2j} \cdot \left[\frac{6\sqrt{2}dh}{8d^2 + 9h^2} \right]^{2j}$$

$$\text{Case 2}^\circ \text{正八面體: } \sum_{u=1}^6 [d(P_u, L)]^m = 2h^m + 4 \cdot (d^2 + h^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} C_j^{\frac{m}{2}} \cdot C_j^{2j} \cdot \left[\frac{dh}{d^2 + h^2} \right]^{2j}$$

Case 3^o 正二十面體：顯然，同理可推其亦為定值

Case 4^o 正六、十二面體：由於正六、十二面體與正八、二十面體互為對偶多面體，因此將正八、二十面體任意旋轉，同時也正在任意旋轉正六、十二面體，即可以說明正六、十二面體的情況亦為定值。 #

Property3: 正多面體有 n 個頂點，且最多 k 點共平面，其頂點 P_u 至其外任意平面 E 距離 m 次和為定值，即 $\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m$ 為定值，其中 $m < k, \forall n, m, k \in \mathbb{N}$ 。

1. 欲證：空間中一定圓取 n 等分點 A_u ，若有任意平面 E ，則 $\sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m$ 為定值，

若平面不截定圓則 $m \in \mathbb{N}$ ，若截定圓則 m 為偶數，其中 $m < n, n \in \mathbb{N}$ 。

設 $A_u(r \cos \theta_u, r \sin \theta_u, 0)$ ， $E: ax + by + cz = k$ ，其中 $a, b, c, k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m = \sum_{u=1}^n \left[\frac{ar \cos \theta_u + br \sin \theta_u - k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right]^m = k^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{u=1}^n \left| \frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{k} \cos(\theta_u + \phi) - 1 \right|^m$$

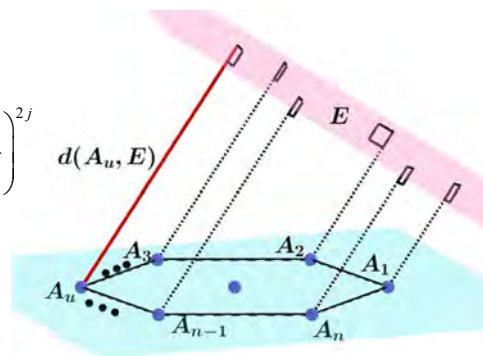
(1) n 等分點 A_u 皆在任意平面 E 的同一側，即 E 不截此定圓

(i) $\frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{k} \cos(\theta_u + \phi) > 1$:

$$\sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m = n \cdot (-k)^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{2k} \right)^{2j}$$

(ii) $\frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{k} \cos(\theta_u + \phi) < 1$:

$$\sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m = n \cdot k^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2j}^m \cdot C_j^{2j} \cdot \left(\frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{-2k} \right)^{2j}$$

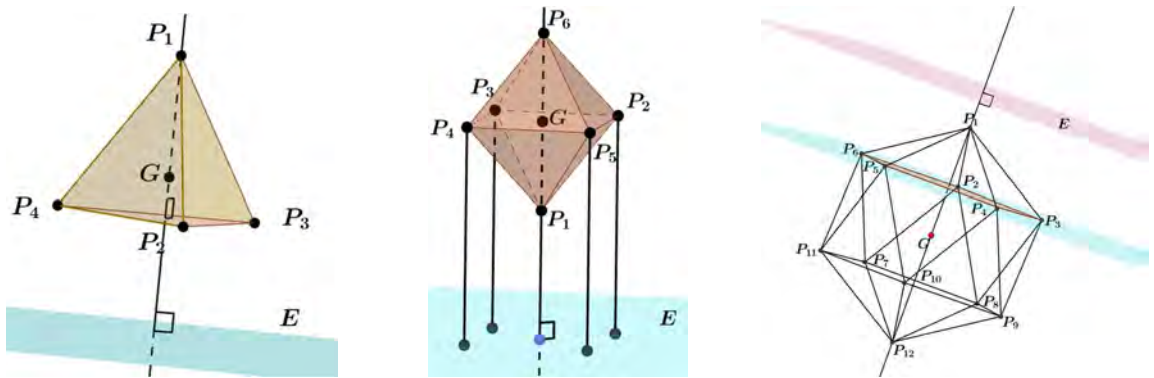


(2) n 等分點 A_u 至少有一點在任意平面 E 的異側，即 E 截此定圓

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m &= k^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{u=1}^n \left| \frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{k} \cos(\theta_u + \phi) - 1 \right|^m \\ &= k^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{u=1}^n \left[\left(\frac{r\sqrt{a^2 + b^2}}{k} \cos(\theta_u + \phi) - 1 \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= k^m (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{u=1}^n [p \cos(2\theta_u + \phi) - q \cos(\theta_u + \omega) + s]^{\frac{m}{2}} \text{ 為定值} \end{aligned}$$

由(1), (2), $\sum_{u=1}^n [d(A_u, E)]^m$ 為定值。

2. 設正多面體重心為 G ，將任意的正多面體經任意的適當旋轉，使 $\overline{GP_1} \perp E$ ：



3. 說明「任意正多面體對應的 $\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m$ 與旋轉後對應的 $\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m$ 相等」：

(1) 由 1.，以 $\overline{GP_u}$ 為軸旋轉時，其餘割線段之倒數 m 次和為定值，因此皆不改變

$\sum_{u=1}^n [d(P_u, E)]^m$ 之值，其中 $m < k$ ，且若平面不截過正多面體則 $m \in \mathbb{N}$ ，截過則 m 為偶數

(2) 令重心 G 、 P_u 、 E 的距離分別為 d 、 h ，則

Case 1° 正四面體：
$$\sum_{u=1}^4 [d(P_u, E)]^m = [h-d]^m + \left[h + \frac{1}{3}d \right]^m$$

Case 2° 正八面體：
$$\sum_{u=1}^6 [d(P_u, E)]^m = 4 \cdot h^m + [h-d]^m + [h+d]^m$$

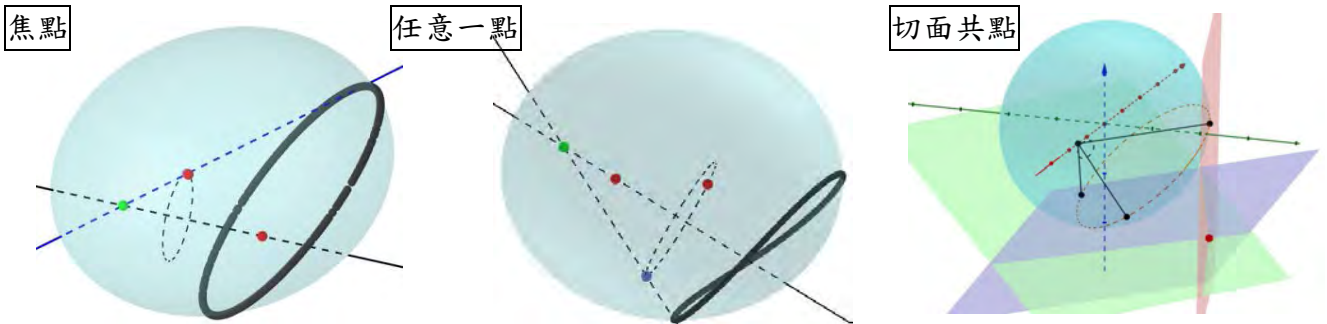
Case 3° 正二十面體：顯然，同理可推其亦為定值

Case 4° 正六、十二面體：由於正六、十二面體與正八、二十面體互為對偶多面體，因

此將正八、二十面體任意旋轉，同時也正在任意旋轉正六、十二面體，即可以說明正六、十二面體的情況亦為定值。 #

三、以焦點延伸出相鄰等角 n 條射線與圓錐曲面的交點為共平面性質

我們發現當以焦點為頂點所延伸的圓錐與圓錐曲面的交點會是共平面；若圓錐頂點不在圓錐曲面的焦點，即在圓錐曲面內任意一點時，則其與圓錐曲面的交點會落在一曲線上。若交點落在相同橢圓上，過焦點對圓錐曲面做切平面，則切平面必交於一點。



四、特殊圓錐曲面 Ω 以焦點為極點的極座標表示法

在二維的部份我們曾用圓錐曲線的極座標統一簡化證明，我們希望推導出對於特殊圓錐曲面的極座標表示法，我們想嘗試看看能否有一樣的解析證明，目前我們到以下結果：

特殊圓錐曲面 Ω 的極座標表示法 $r = \frac{ep}{1 - e \cos \phi \cos \theta}$ ，其中 θ 為其與 x 軸正向於 xy 平面上的夾角， ϕ 則為其與 x 軸正向於 xz 平面上的夾角。

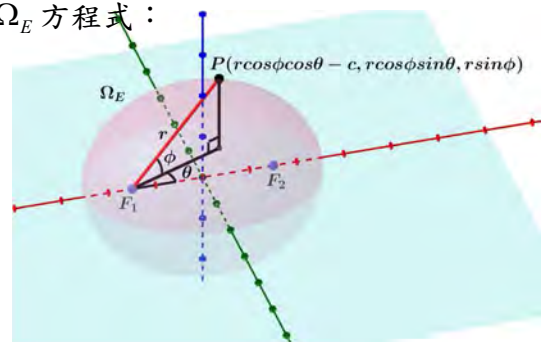
< proof > 以橢球 $\Omega_E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ 為例，以其左焦點 $F'(-c, 0, 0)$ 為極點，可得 Ω_E 上任

意點 $P(r \cos \phi \cos \theta - c, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi)$ 。將 P 帶回原 Ω_E 方程式：

$$\Rightarrow \frac{(r \cos \phi \cos \theta - c)^2}{a^2} + \frac{(r \cos \phi \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(r \sin \phi)^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{e^2 p \cos \phi \cos \theta \pm \sqrt{e^4 p^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + e^2 p^2 - e^4 p^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta}}{2(1 - e \cos^2 \phi \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{e^2 p \cos \phi \cos \theta \pm ep}{2(1 - e \cos^2 \phi \cos^2 \theta)} = \frac{ep}{1 - e \cos \phi \cos \theta} \quad (\because r > 0) \quad \text{同理，} \Omega_H、\Omega_P \text{ 符合此表示法。} \quad \#$$



柒、參考資料

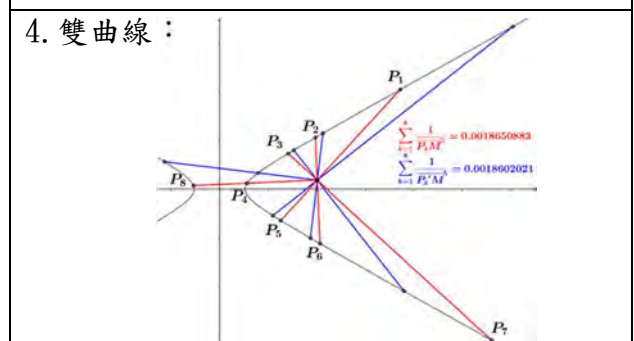
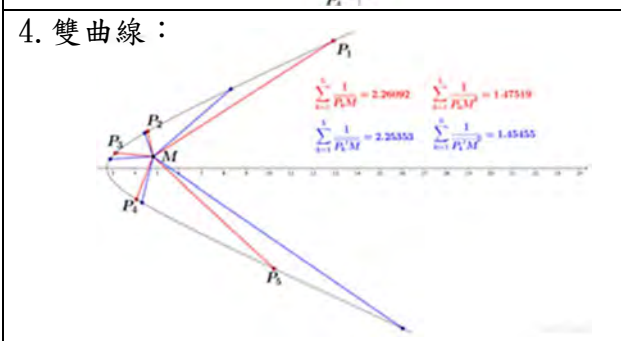
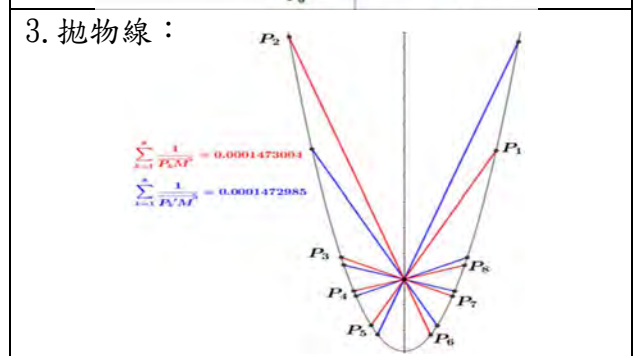
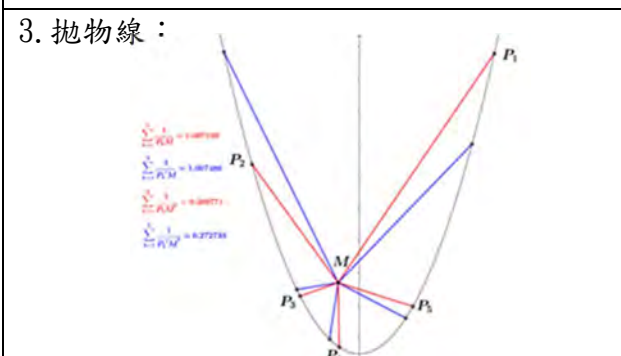
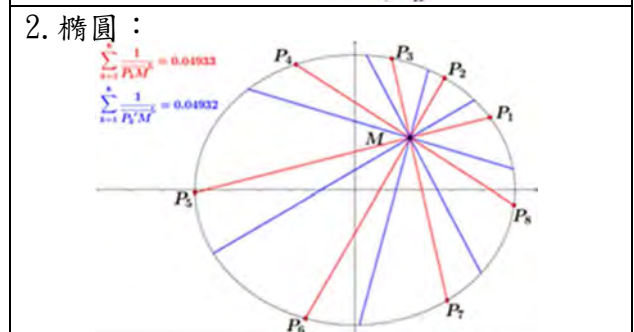
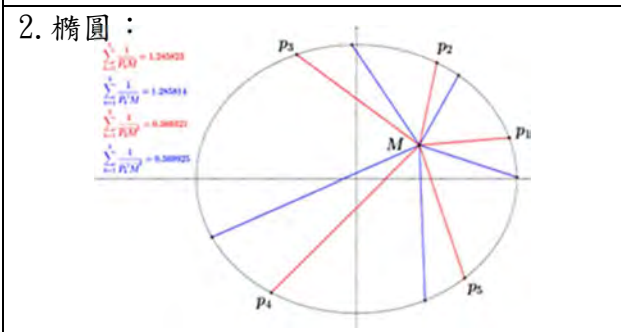
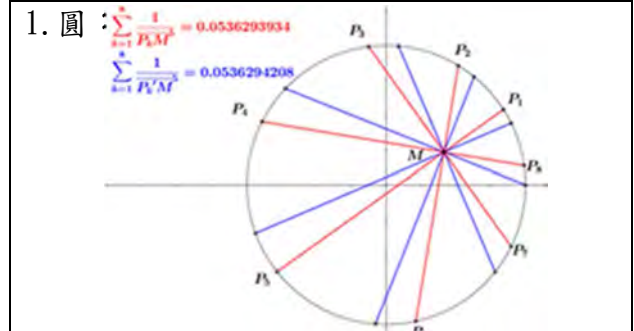
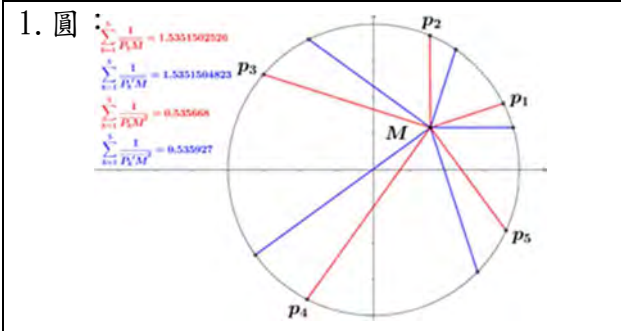
- [1] A. Waterson, An expansion for $x^n + y^n$. Edinburgh Math. Notes 1944,(1944). no.34,14-15
- [2] 許志農。高中數學課本第三、四冊，99 課綱。出版社：龍騰文化
- [3] 曾靖國、吳泓寬、黃唯洋，2015 年，臺灣國際科學展覽會說明書——一刀兩斷
- [4] 曾靖國，2016 第 14 屆旺宏科學獎說明書——各類曲線等角分割下線段長定值之研究

捌、附錄

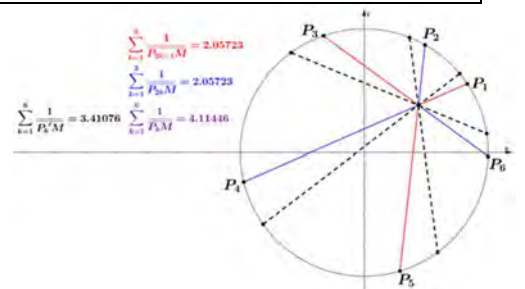
以下我們整理利用 GGB 得到的一些非不變量的幾種情況：

一、過圓錐曲線內任意一點延伸出的奇數條相鄰等角線段，其長度倒數的偶數、奇數次方和皆不為定值。

二、過圓錐曲線內任意一點延伸出的偶數條相鄰等角線段，其倒數奇次和不為定值，但偶次和為定值。



三、過圓內任意一點切 $2n+1$ 刀，使每組相鄰割線夾角相同， P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針（或順時針）依序取一段，則兩人輪流取的線段長的倒數 $2k+1$ 次方和相等，然而，其總和不為定值， $1-n \leq k \leq n-1, \forall k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 。



【評語】 010030

這件作品探討某些平面曲線內相鄰等角割線段的不變量。透過一些三角恆等式的證明，作者證明這些不變量可以來自割線段在曲線內交的任意點，而不必然來自焦點。本件作品亮點在於空間中特殊圓錐曲面亦有不變量，透過投影與幾何性質觀察而得。事實上，由於這些不變量性質極為相似，作者反而應該仔細思考其背後成因，以及不變量在何種情形下不存在的反向問題。