# 2018 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　010020

參展科別　數學

作品名稱　郵不得你不撕

得獎獎項　大會獎：四等獎

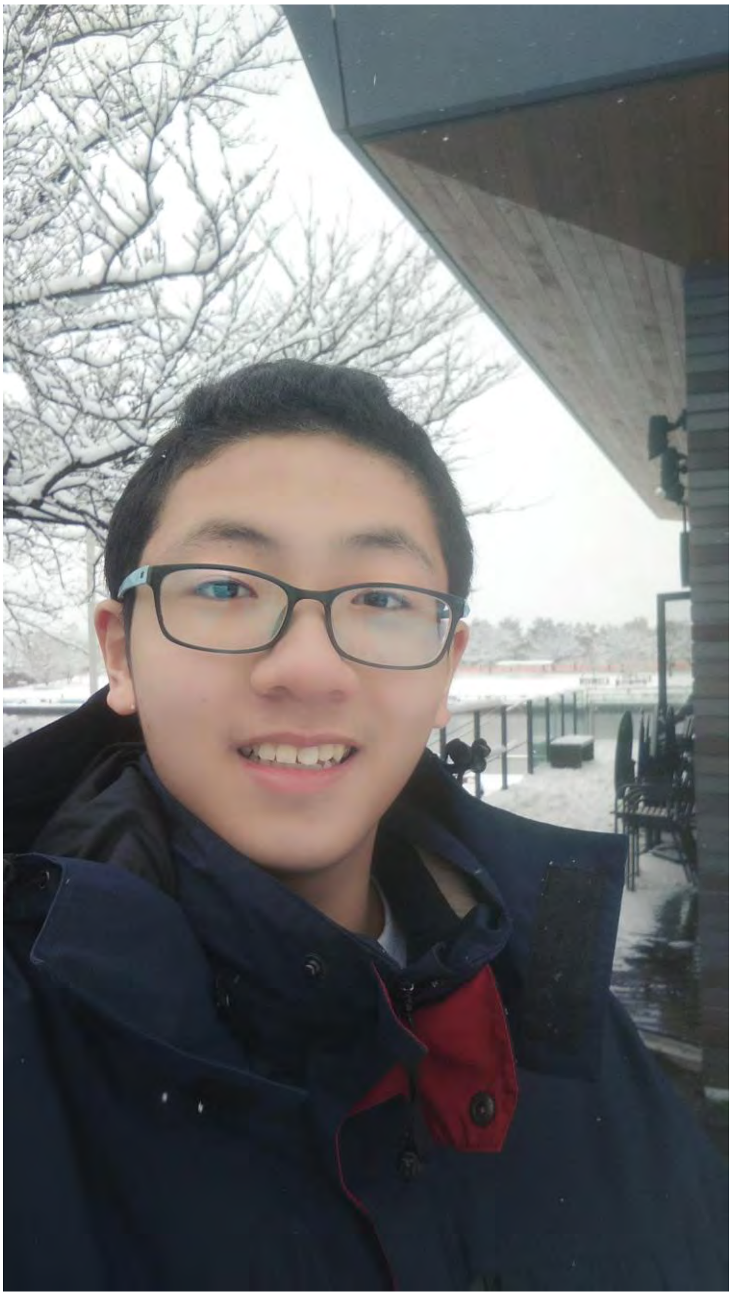
就讀學校　新北市私立竹林高級中學

指導教師　許自騰

作者姓名　陳鵬尹、丁思齊

關鍵詞　IC－coloring、連通子圖

# 作者簡介



我是陳鵬尹，十五歲，目前就讀竹林中學。以前的我並不喜歡數學，直到國中第一次接觸代數學才開始改觀，而後又遇到了現今的指導老師，帶我一舉踏入了數學科展的世界。目前參加過兩次比賽，成績雖是差強人意，但我卻從中汲取了不少的收穫。雖然先前的作品都以圖論為主題，但實際在學習的範圍並不侷限於此，而是希望能在無遠弗屆的數學中無止盡地學習下去。

我是丁思齊，就讀竹林高中一年級。在上了國中導師的增廣課程之後，逐漸找到了數學的有趣，也在指導老師的帶領下發現了數學的奧妙，踏上了做科展的漫漫長路。

在先前幾次的比賽中結果雖然並非預期中好，但在過程中也學到了很多課內很難接觸到的數學，希望在這次的比賽中能有難忘的回憶～

# 摘要

本作品主要在探討圖的 $IC-coloring$ ，一個由郵票問題變化出來的圖著色問題。給定一個連通圖 $G$ ，想要在所有的頂點上標一個自然數，使其所有頂點所標的和為 $K$ ，而且對於所有介於 $1$ 和 $K$ 之間的自然數 $k$ ，恆存在一個 $G$ 的連通子圖，其連通子圖上所有點的標號總和為 $k$ 。能達到這種性質的標號，稱為圖 $G$ 的一個 $IC-coloring$ ，以 $M(G)$ 表示所有 $IC-coloring$ 中 $K$ 的最大值。

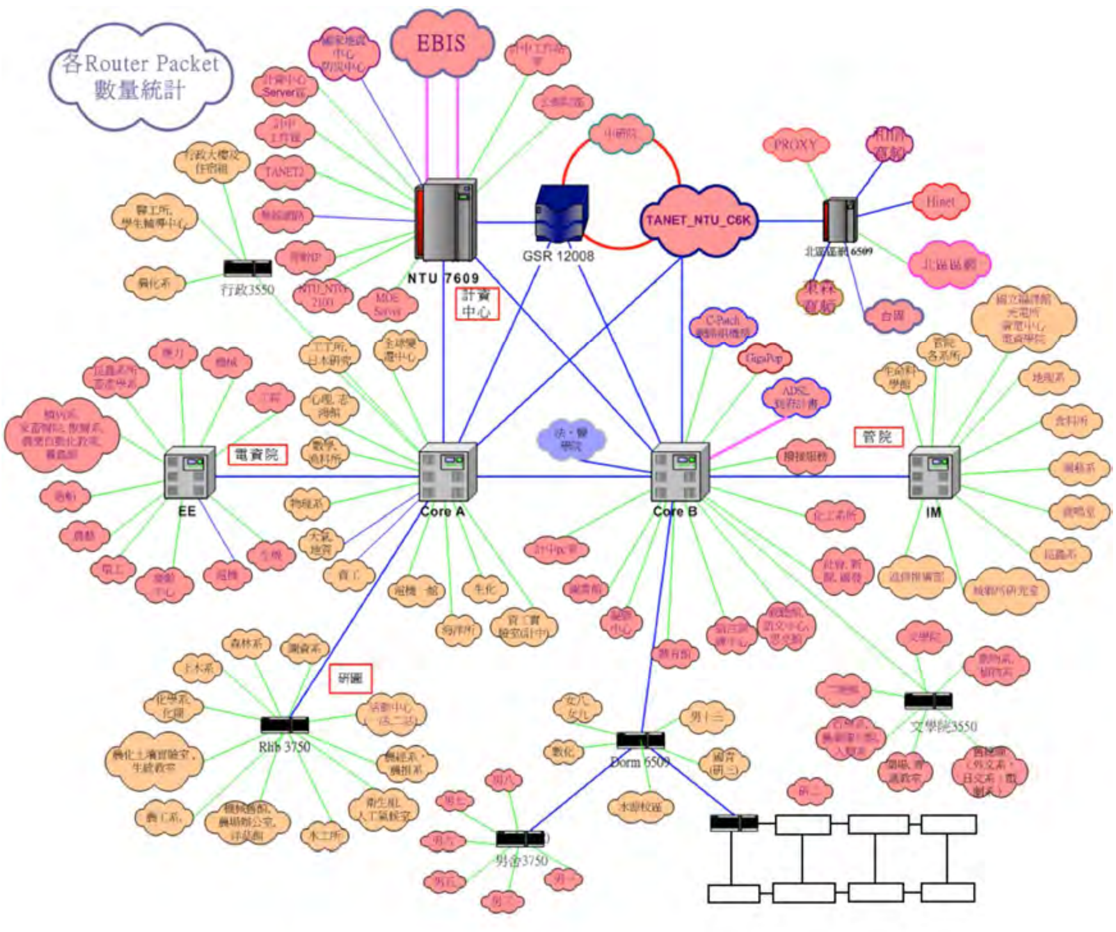
有關於圖的 $IC-coloring$ 過去已經有不少研究，大部分的研究是找尋 $M(G)$ 值的下界。在本次研究中，我們以改進圖 $G$ 為四連方陣圖（ $P_2 \times P_n$ ）對於一般的自然數 $n$ 的 $M(G)$ 下界值。

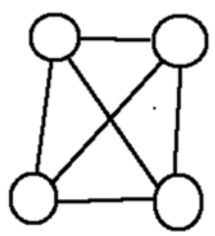
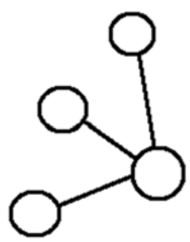
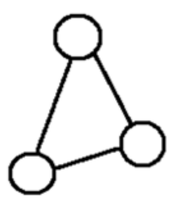
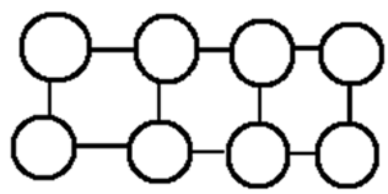
## Abstract

Let $G=(V,E)$ be an undirected graph and let $f$ be a function from $V$ to **N**. For each subgraph $H$ of $G$, we define $f_s(H)=\sum_{v\in V(H)} f(v)$.Then $f$ is said to be an IC-coloring of $G$ if given any $k$（$1\le k\le f_s(G)$） there exists a connected subgraph $H$ of $G$ such that $f_s(H)=k$. The IC-index of $G$ is defined to be $M(G)=\max\{f_s(G) | f$ is an IC-coloring of $G\}$.This study give a lower bounded of $M(P_2\times P_n)$，for all n.

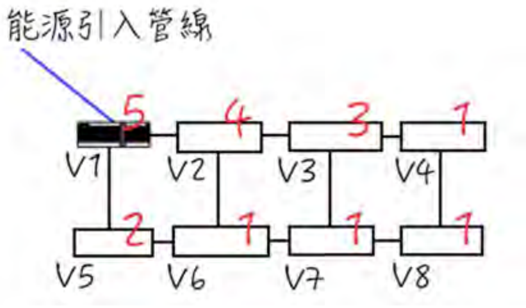
# 壹、 研究動機

本研究是利用圖論領域解決能源管線配置效率問題，而圖論在應用方面相當廣泛，包括實質物理空間，以及非實質的觀念世界。例如：交通路網、自來水、電力、電信...等管網管理、計畫管理評估、新鎮開發、都市系統結構、建物動線分析、建物結構。我們的問題情境如下圖，台大電信機房的配線圖，此圖可轉換成點與線的圖論問題。這張電信配線圖存在著 *path*、*tree*、*cycle*、$P_2 \times P_4$的子圖。以下我們用“能量”一詞來取代電信、瓦斯、未來新興能源等等。

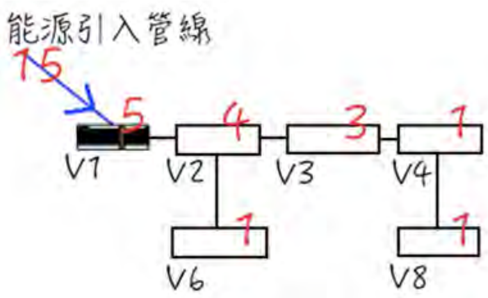



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| *path* | *complete graph* | *tree* | *cycle* | $P_2 \times P_4$ |

在上頁右下角的$P_2 \times P_4$的子圖中，我們將每一個機房看成點，有管線接通的兩個機房之間用線相連。並賦予每一個機房一個自然數當成的該機房能源使用上限，如下圖所示。




這區(圖)的八個機房(點)都可以在能源上限(自然數)之下獨立運作，當某些機房(點)同時運作時，可能會造成總能源不足，所以需要由某機房（點）引入能源進行超額配給。例如$v_1$和$v_2$同時運作，如果需要進行超額配給，則將能源引入管線供路線為$v_1 - v_2$，供給$5+4=9$單位能源。$v_1$和$v_8$要同時運作時，如果需要進行超額配給，在眾多路徑中，最有效率將能源引入管線供路線為$v_1 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$，超額配給$5+2+1+1+1=10$單位能源。但若使用配給路徑為$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_8$亦可達成$v_1$和$v_8$需要同時運作，但本區就需要用$5+4+3+1+1=14$的總單位能量來引入超額配給。我們發現這個供給路徑是一筆畫的問題，這方面的問題前人已討論過。為了達成“任意超額配給的能量引入”，多餘供給的超額能量要能讓一些機房有效率地使用到全部的超額能量來販賣能量，這個問題就變成了連通的子圖問題。例如當$v_2$、$v_3$、$v_8$需要進行超額配給，我們可以引入能量 14，但希望也能引入總能量 15，15 能量配給路徑的子圖為下圖所示。



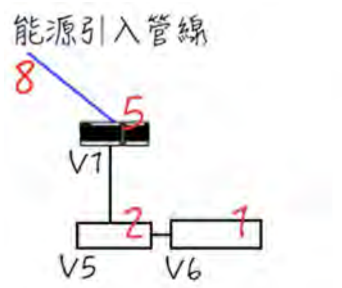
綜合以上情境，我們想要解決的能源配給問題條件是如下：

（一）每個獨立機房配與的能量內，都可以獨立運作，不需進行超額配給。

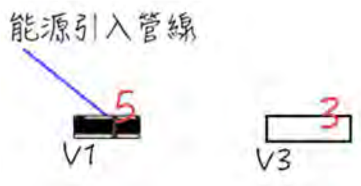
（二）盡可能讓每個獨立機房的能源使用單位上限愈大。

（三）若總能量過大，則需要由 $v_1$ 引入超額配給。

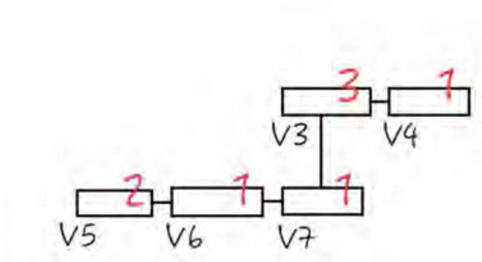
（四）能源的傳遞路徑必須是連續的，路徑不可中斷。下圖例：若 $v_6$ 需要額外配給，則引入總能量 8 單位即可解決問題。我們不會引入超額配給能量 10 來透過路徑 $v_1 - v_2 - v_6$ 達成。




若 $v_3$ 需要超額配給能量，配給路徑不可為非連通，下圖方式引入總能量 8，但非連通的子圖故不可。




那麼第五個問題來了，下面的子圖也是使用 8 單位的總能源，但無法點 $v_1$ 來額外供給。那麼我們就必須設計出配個給圖上每個點一個自然數後，而子圖點上的所有自然數的總和是多少以上才需要進行超額配給？如下點敘述（五）。




（五）需設計出本區所有機房總能源消耗在多少以上才需要進行超額配給？我們先暫定這個值為$x$（而超額配給上限明顯為 8 個點的自然數總和）

（六）而在未滿$x$的所有自然數$k$，都存在著連通的子圖，能使得子圖中所有點的標號總和為$k$綜合以上所述 6 點。

我們研究問題的情境轉換成圖論的問題是，在任意$P_2 \times P_n$的圖上所有的頂點上標一個自然數，使其所有頂點所標的和為$K$，而且對於所有介於$1$和$K$之間的自然數$k$，恆存在$P_2 \times P_n$的連通子圖$H$，$H$上所有點標號總和為$k$。能達到這種性質的標號，稱為圖$P_2 \times P_n$的一個$IC-coloring$，以$M(G)$表示所有$IC-coloring$中$K$的最大值。

# 貳、 研究目的與問題

## 一、名詞定義

(一) 對於給定一個圖$G$，圖上的著色（coloring）就相當於分配正整數至任意圖上之頂點。也就是說，圖$G$的一個著色可以視為一個由頂點$V(G)$到正整數的函數$f$。

(二) 對於$G$的一個子圖$H$及$G$的著色$f$，定義$f_s(H)=\sum_{v\in V(H)} f(v)$。

(三) 給定一個圖$G$及著色$f$，如果對於所有小於或等於$f_s(G)$的正整數$k$，都可以找到一個$G$的連通子圖$H$使得$f_s(H)=k$，則稱為$f$為$G$的$IC-$著色。

$$\text{定義} IC-\text{數} M(G)=\max\{f_s(H) \mid f \text{是} IC-\text{著色}\}\text{。}$$

(四) $f:V(G)\to N$，$V(G)=\{v_{i,j} \mid 1\le i\le 2, 1\le j\le n\}$ 定義符號$u_j$為上排標號數字，$l_j$ 為下排標號數字。即$f(v_{1,j})=l_j$，$f(v_{2,j})=u_j$，$1\le j\le n$因為本篇科展僅討論$P_2\times P_n$的圖形，為編輯方便所以我們省略點與邊的畫法如下圖相對位置所示。

$$\begin{matrix} f(v_{2,n}) & f(v_{2,n-1}) & \cdots & f(v_{2,2}) & f(v_{2,1}) \\ f(v_{1,n}) & f(v_{1,n-1}) & & f(v_{1,2}) & f(v_{1,1}) \end{matrix} = \begin{matrix} u_n & u_{n-1} & \cdots & u_2 & u_1 \\ l_n & l_{n-1} & & l_2 & l_1 \end{matrix}$$

(五) 對於任意圖$P_2\times P_n$，$n\ge 4$，以下全部 25 種連通的子圖皆稱為 Micro Set，簡記為$M_r$，$0\le r\le 24$。

$M_0=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_1=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_2=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、

$M_3=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_4=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & & & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_5=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、

$M_6=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & \\ v_{1,4} & & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_7=\begin{matrix} v_{2,4} & v_{2,3} & & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、$M_8=\begin{matrix} v_{2,4} & & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1} \end{matrix}$、

$M_9=\begin{array}{cccc} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{10}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & & & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{11}=\begin{array}{cccc} & v_{2,3} & & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、

$M_{12}=\begin{array}{cccc} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{13}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & & v_{2,2} & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{14}=\begin{array}{cccc} & v_{2,3} & v_{2,2} & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、

$M_{15}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & & & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{16}=\begin{array}{cccc} & v_{2,3} & & \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{17}=\begin{array}{cccc} & & v_{2,2} & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、

$M_{18}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & & v_{2,1} \\ & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{19}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ & v_{1,3} & & v_{1,1}\end{array}$ $or$ $\begin{array}{cccc} & & & v_{2,1} \\ v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、

$M_{20}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & v_{2,1} \\ & & & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{21}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & \\ & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{22}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & v_{2,2} & \\ & & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、

$M_{23}=\begin{array}{cccc} v_{2,4} & v_{2,3} & & \\ & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$ 、 $M_{24}=\begin{array}{cccc} v_{1,4} & v_{1,3} & v_{1,2} & v_{1,1}\end{array}$

(六) 圖$H$為$P_2\times P_n$的連通子圖，點集合$A$和圖$H$作$P_2\times P_n$圖形的聯集簡記為$A\cup H$。

舉例來說若$A=\{v_{4,2},v_{4,1}\}$，$H=\begin{array}{ccc} v_{3,2} & v_{2,2} & v_{1,2} \\ & & v_{1,1}\end{array}$，則$A\cup H=\begin{array}{cccc} v_{4,2} & v_{3,2} & v_{2,2} & v_{1,2} \\ v_{4,1} & & & v_{1,1}\end{array}$

但若$A=\{v_{4,1}\}$，則$A$和$H$無法作$P_2\times P_n$圖形的聯集，除非$A$增加了$v_{4,2}$或是$v_{3,1}$這兩個點方可與$H$成為一個連通的新圖。

## 二、問題

(一) 對於$P_2\times P_n$，是否存在一種規律的標號方式，在一般性的長度$n$之下皆為 IC－coloring？

(二) 如果存在那麼$M(P_2\times P_n)$的值是多少？（為了解決此問題，我們必須找出上、下界的值，而盡量提升下界，降低上界的手法來找出最佳的標號方式，而本作品以找出下界為主）。

# 參、 研究設備與器材

紙、筆、電腦

# 肆、 研究過程與方法

## 一、研究方法

我們先以人工的方式找出在長度$n=3,4,5$下的最佳標號方式（即能達到$M(G)$的標號方式，而我們是利用老師提供的演算法驗證），並在當中找出規律，藉以推測在長度 5 以上的標號方式，而我們根據這個方法，找出較高下界標號方式為下述定理。除了數學方面的證明之外，我們也利用老師提供的演算法為定理一作佐證，經過程式跑的結果皆滿足 IC-coloring。而我們分成三個部分來證明：

第（一）部分：以數學歸納法證明$K-\left(u_n+l_n\right)\le f_s\left(H\right)\le K$ 的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n\ge 5$

第（二）部分：以數學歸納法證明$l_1^n\le f_s\left(H\right)\le K-\left(u_n+l_n\right)-1$的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n\ge 5$

第（三）部分：以數學歸納法證明$1\le f_s\left(H\right)\le l_1^n-1$的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n\ge 5$

## 二、研究過程

定理一：

$K\le M\left(P_2\times P_n\right)$，$\forall n\in\mathbb{N}$，$K$ 定義為下圖所有標號總和

$$\begin{array}{ccccc} u_n & u_{n-1} & \cdots & u_2 & u_1 \\ l_n & l_{n-1} & & l_2 & l_1^n \end{array} = \begin{array}{ccccccccccccc} u_n & u_{n-1} & \cdots & 1123 & 400 & 241 & 159 & 53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ l_n & l_{n-1} & & 1123 & 723 & 241 & 82 & 53 & 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$$

$\forall p\ge 6,k\in\mathbb{N}$的標號遞迴式：

$u_p=l_p=u_{p-1}+l_{p-1}$，當 $p$ 為偶數

$u_p=u_{p-1}+u_{p-2}$，當 $p=4k+5$

$u_p=3u_{p-1}$，當 $p=4k+3$

$l_p=3u_{p-1}$，當 $p=4k+5$

$l_p=l_{p-1}+l_{p-2}$，當 $p=4k+3$

其中最大標號：$f\left(v_{1,1}\right)=l_1^n=95+\sum_{p=6}^{n}\left(u_p+l_p\right)$，對於所有$n\ge 6$的圖形$P_2\times P_n$

我們先更新舊有 *Micro Set* 長度由 $n=4$ 拉長為 $n=5$ 並命名為 *new Micro Set*。與去年 $n=4$ 不同之處依序更新連通子圖 $M_0$ 到 $M_{52}$ 。

$$\begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

當 $n=5$ 時，根據定理一中的遞迴式有 $l_1^n = 24+29+9+16+8+1+2+3+5-2=95$ 。即 $n=5$ 時 $K=192$ 。

$$M_0 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_1 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_2 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_3 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & & l_1^n \end{matrix} \quad M_4 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & & & l_1^n \end{matrix} \quad M_5 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_6 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_7 = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_8 = \begin{matrix} 24 & 9 & & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_9 = \begin{matrix} 24 & & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{10} = \begin{matrix} 24 & 9 & & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{11} = \begin{matrix} 24 & & 8 & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{12} = \begin{matrix} 24 & & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & & l_1^n \end{matrix} \quad M_{13} = \begin{matrix} 24 & 9 & & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{14} = \begin{matrix} 24 & & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{15} = \begin{matrix} 24 & 9 & & & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{16} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{17} = \begin{matrix} 24 & & & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{18} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & & 5 \\ 29 & & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{19} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & & 1 & & l_1^n \end{matrix} \quad M_{20} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & & & & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{21} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{22} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & & & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{23} = \begin{matrix} 24 & 9 & 8 & & \\ 29 & & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{24} = \begin{matrix} & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{25} = \begin{matrix} & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & & 3 & l_1^n \end{matrix} \quad M_{26} = \begin{matrix} & 9 & 8 & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$$M_{27} = \begin{matrix} & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & & l_1^n \end{matrix} \quad M_{28} = \begin{matrix} & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & & & l_1^n \end{matrix} \quad M_{29} = \begin{matrix} & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{matrix}$$

$M_{30} = \begin{array}{ccccc} & 9 & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{31} = \begin{array}{ccccc} & 9 & 8 & & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{32} = \begin{array}{ccccc} & 9 & & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{33} = \begin{array}{ccccc} & & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{34} = \begin{array}{ccccc} & 9 & & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{35} = \begin{array}{ccccc} & & 8 & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{36} = \begin{array}{ccccc} & & 8 & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & & l_1^n \end{array}$ $M_{37} = \begin{array}{ccccc} & 9 & & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{38} = \begin{array}{ccccc} & & 8 & 2 & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{39} = \begin{array}{ccccc} & 9 & & & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{40} = \begin{array}{ccccc} & & 8 & & \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{41} = \begin{array}{ccccc} & & & 2 & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{42} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & & 2 & \\ & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{43} = \begin{array}{ccccc} & & & & 5 \\ 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{44} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & & & \\ & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{45} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ & & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{46} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ & & & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{47} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & & 5 \\ & & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{48} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ & & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{49} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ & & & & l_1^n \end{array}$ $M_{50} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ & & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

$M_{51} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & 2 & \\ & & & 3 & l_1^n \end{array}$ $M_{52} = \begin{array}{ccccc} 24 & 9 & 8 & & \\ & & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$

第（一）部分：以數學歸納法證明$K-(u_n+l_n)\le f_s(H)\le K$的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n\ge 5$

首先說明當$n=k=4t+1$成立時，可推導$n=k+2=4t+3$時亦成立（$\forall t\in \frown, n\ge 5$）。

當$n=5$時，$K-(u_5+l_5)\le f_s(H)\le K$的所有連通子圖$H$皆存在（已於*new Micro Set*中$M_0$到$M_{52}$說明）。設$n=k=4t+1$時，$K-(u_k+l_k)\le f_s(H)\le K$的所有連通子圖$H$皆存在。則$n=k+2=4t+3$時，分為以下6點說明。

1. $K-u_{k+1}\le f_s(H)\le K$：根據遞迴式$u_{k+1}=u_k+l_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-(u_k+l_k-1)\le f_s(H^{'})\le K$與$B_1=\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-u_{k+1}$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-u_{k+1}\le f_s(H)\le K$的所有連

通子圖$H$皆存在。

2. $K-l_{k+2}\le f_s\left(H\right)\le K-u_{k+1}-1$：根據遞迴式$l_{k+2}=l_{k+1}+l_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-\left(l_k-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_2=\left\{v_{1,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-u_{k+1}$之連通子圖$H$明顯存在，$K-l_{k+2}\le f_s\left(H\right)\le K-u_{k+1}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

3. $K-\left(l_{k+2}+l_{k+1}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-l_{k+2}-1$：根據遞迴式$l_{k+1}=u_k+l_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-\left(u_k+l_k-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_3=\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{2,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-\left(l_{k+2}+l_{k+1}\right)$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-\left(l_{k+2}+l_{k+1}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-l_{k+2}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

4. $K-u_{k+2}\le f_s\left(H\right)\le K-\left(l_{k+2}+l_{k+1}\right)-1$：根據遞迴式可推得$u_{k+2}=l_{k+2}+l_{k+1}+u_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-\left(u_k-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_4=\left\{v_{2,k+1},v_{2,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-u_{k+2}$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-u_{k+2}\le f_s\left(H\right)\le K-\left(l_{k+2}+l_{k+1}\right)-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

5. $K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-u_{k+2}-1$：根據遞迴式$u_{k+1}=u_k+l_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-\left(u_k+l_k-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_5=\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-u_{k+2}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

6. $K-\left(u_{k+2}+l_{k+2}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)-1$：根據遞迴式可推得$l_{k+2}=u_{k+1}+l_k$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq P_2\times P_k$使得$K-\left(l_k-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_6=\left\{v_{1,k+1},v_{1,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-u_{k+1}$之連通子圖$H$明顯存在，

$K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K-(u_{k+2}+u_{k+1})-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

綜合以上1~6點，可得$K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K$的所有連通子圖$H$皆存在。根據數學歸納法得證當$n=k=4t+1$成立時，則$n=k+2=4t+3$時亦成立。

接著說明當$n=k=4t+3$成立時，可推導$n=k+2=4t+5$時亦成立（$\forall t \in \frown, n \ge 7$）。

設$n=k=4t+3$時，$K-(u_k+l_k) \le f_s(H) \le K$的所有連通子圖$H$皆存在。

則$n=k+2=4t+5$時，分為以下6點說明。

1. $K-l_{k+1} \le f_s(H) \le K$：根據遞迴式$l_{k+1}=u_k+l_k$，可視為連通子圖$H' \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(u_k+l_k-1) \le f_s(H') \le K$與$B_7=\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H'$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-l_{k+1}$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-l_{k+1} \le f_s(H) \le K$的所有連通子圖$H$皆存在。

2. $K-u_{k+2} \le f_s(H) \le K-l_{k+1}-1$：根據遞迴式可推得$u_{k+2}=l_{k+1}+u_k$，可視為連通子圖$H' \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(u_k-1) \le f_s(H') \le K$與$B_8=\{v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H'$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-u_{k+2}$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-u_{k+2} \le f_s(H) \le K-l_{k+1}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

3. $K-(u_{k+2}+u_{k+1}) \le f_s(H) \le K-u_{k+2}-1$：根據遞迴式$u_{k+1}=u_k+l_k$，可視為連通子圖$H' \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(u_k+l_k-1) \le f_s(H') \le K$與$B_9=\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2}\}$做圖形的聯集（$H'$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-(u_{k+2}+u_{k+1})$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-(u_{k+2}+u_{k+1}) \le f_s(H) \le K-u_{k+2}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

4. $K-l_{k+2} \le f_s(H) \le K-(u_{k+2}+u_{k+1})-1$：根據遞迴式可推得$l_{k+2}=u_{k+2}+u_{k+1}+l_k$，可視為連通子圖$H' \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(l_k-1) \le f_s(H') \le K$與$B_{10}=\{v_{1,k+1},v_{1,k+2}\}$做圖形的聯集（$H'$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-l_{k+2}$之連通子圖$H$明顯存在，故

$K-l_{k+2} \leq f_s(H) \leq K-(u_{k+2}+u_{k+1})-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

5. $K-(l_{k+1}+l_{k+2}) \leq f_s(H) \leq K-l_{k+2}-1$：根據遞迴式可推得$u_{k+2}=l_{k+1}+u_k$，可視為連通子圖$H^{'} \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(u_k-1) \leq f_s(H^{'}) \leq K$與$B_{11}=\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-(l_{k+1}+l_{k+2})$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-(l_{k+1}+l_{k+2}) \leq f_s(H) \leq K-l_{k+2}-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

6. $K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \leq f_s(H) \leq K-(l_{k+2}+l_{k+1})-1$：根據遞迴式可推得$u_{k+2}=l_{k+1}+u_k$，可視為連通子圖$H^{'} \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(u_k-1) \leq f_s(H^{'}) \leq K$與$B_{12}=\{v_{2,k+1},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-(u_{k+2}+l_{k+2})$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \leq f_s(H) \leq K-(l_{k+2}+l_{k+1})-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

綜合以上1~6點，可得$K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \leq f_s(H) \leq K$的所有連通子圖$H$皆存在。

根據數學歸納法得證當$n=k=4t+3$成立時，則$n=k+2=4t+5$時亦成立。

然後說明當$n=k=4t+2$成立時，可推導$n=k+2=4t+4$時亦成立（$\forall t \in \frown, n \geq 5$）。

當$n=6$時，$K-(u_5+l_5) \leq f_s(H) \leq K$的所有連通子圖$H$皆存在（已於*Micro Set*說明）。

設$n=k=4t+2$時，$K-(u_k+l_k) \leq f_s(H) \leq K$的所有連通子圖$H$皆存在。

則$n=k+2=4t+4$時，分為以下6點說明。

1. $K-l_{k+1} \leq f_s(H) \leq K$：根據遞迴式$l_{k+1}=l_k+l_{k-1}$，可視為連通子圖$H^{'} \subseteq P_2 \times P_k$使得$K-(l_k+l_{k-1}-1) \leq f_s(H^{'}) \leq K$與$B_{13}=\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s(H)=K-l_{k+1}$之連通子圖$H$明顯存在，故$K-l_{k+1} \leq f_s(H) \leq K$的所有連通子圖$H$皆存在。

2. $K-u_{k+1} \leq f_s(H) \leq K-l_{k+1}-1$：根據遞迴式可推得$u_{k+1}=l_{k+1}+l_k+u_{k-1}$，可視為連通子圖

$H^{'} \subseteq \mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_k$ 使得 $K-(u_{k-1}-1) \le f_s(H^{'}) \le K$ 與 $B_{14}=\{v_{2,k+1}, v_{1,k+2}, v_{2,k+2}\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s(H)=K-u_{k+1}$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-u_{k+1} \le f_s(H) \le K-l_{k+1}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

3. $K-l_{k+2} \le f_s(H) \le K-u_{k+1}-1$：根據遞迴式可推得 $l_{k+2}=u_{k+1}+l_k+l_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'} \subseteq P_2 \times P_k$ 使得 $K-(l_k+l_{k-1}-1) \le f_s(H^{'}) \le K$ 與 $B_{15}=\{v_{1,k+1}, v_{1,k+2}, v_{2,k+2}\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s(H)=K-l_{k+2}$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-l_{k+2} \le f_s(H) \le K-u_{k+1}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

4. $K-(l_{k+1}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K-l_{k+2}-1$：根據遞迴式 $l_{k+1}=l_k+l_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'} \subseteq P_2 \times P_k$ 使得 $K-(l_k+l_{k-1}-1) \le f_s(H^{'}) \le K$ 與 $B_{16}=\{v_{1,k+1}, v_{2,k+1}, v_{2,k+2}\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s(H)=K-(l_{k+1}+l_{k+2})$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-(l_{k+1}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K-l_{k+2}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

5. $K-(u_{k+1}+u_{k+2}) \le f_s(H) \le K-(l_{k+1}+l_{k+2})-1$：根據遞迴式可推得 $u_{k+1}=l_{k+1}+l_k+u_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'} \subseteq \mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_k$ 使得 $K-(u_{k-1}-1) \le f_s(H^{'}) \le K$ 與 $B_{17}=\{v_{2,k+1}, v_{2,k+2}\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s(H)=K-(u_{k+1}+u_{k+2})$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-(u_{k+1}+u_{k+2}) \le f_s(H) \le K-(l_{k+1}+l_{k+2})-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

6. $K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K-(u_{k+1}+u_{k+2})-1$：根據遞迴式 $l_{k+2}=u_{k+1}+l_{k+1}$，可視為連通子圖 $H^{'} \subseteq \mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_k$ 使得 $K-(l_{k-1}-1) \le f_s(H^{'}) \le K$ 與 $B_{18}=\{v_{1,k+1}, v_{1,k+2}\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s(H)=K-(u_{k+2}+l_{k+2})$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K-(u_{k+1}+u_{k+2})-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

綜合以上1~6點，可得 $K-(u_{k+2}+l_{k+2}) \le f_s(H) \le K$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

根據數學歸納法得證當 $n=k=4t+2$ 成立時，則 $n=k+2=4t+4$ 時亦成立。

接著說明當 $n=k=4t+4$ 成立時，可推導 $n=k+2=4t+6$ 時亦成立（$\forall t\in ⁀,n\geq 7$）。

1. $K-u_{k+1}\leq f_s\left(H\right)\leq K$：根據遞迴式可推得 $u_{k+1}=u_k+u_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'}\subseteq P_2\times P_k$ 使得 $K-\left(u_k+u_{k-1}-1\right)\leq f_s\left(H^{'}\right)\leq K$ 與 $B_{19}=\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\right\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s\left(H\right)=K-u_{k+1}$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-u_{k+1}\leq f_s\left(H\right)\leq K$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

2. $K-l_{k+1}\leq f_s\left(H\right)\leq K-u_{k+1}-1$：根據遞迴式可推得 $l_{k+1}=u_{k+1}+u_k+l_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'}\subseteq \mathrm{P}_2\times \mathrm{P}_k$ 使得 $K-\left(l_{k-1}-1\right)\leq f_s\left(H^{'}\right)\leq K$ 與 $B_{20}=\left\{v_{1,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\right\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s\left(H\right)=K-l_{k+1}$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-l_{k+1}\leq f_s\left(H\right)\leq K-u_{k+1}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

3. $K-u_{k+2}\leq f_s\left(H\right)\leq K-l_{k+1}-1$：根據遞迴式可推得 $u_{k+2}=l_{k+1}+u_k+u_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'}\subseteq P_2\times P_k$ 使得 $K-\left(u_k+u_{k-1}-1\right)\leq f_s\left(H^{'}\right)\leq K$ 與 $B_{21}=\left\{v_{2,k+1},v_{1,k+2},v_{2,k+2}\right\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s\left(H\right)=K-u_{k+2}$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-u_{k+2}\leq f_s\left(H\right)\leq K-l_{k+1}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

4. $K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)\leq f_s\left(H\right)\leq K-u_{k+2}-1$：根據遞迴式 $u_{k+1}=u_k+u_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'}\subseteq P_2\times P_k$ 使得 $K-\left(u_k+u_{k-1}-1\right)\leq f_s\left(H^{'}\right)\leq K$ 與 $B_{22}=\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1},v_{1,k+2}\right\}$ 做圖形的聯集（$H^{'}$ 的存在根據假設成立），而 $f_s\left(H\right)=K-\left(u_{k+1}+u_{k+2}\right)$ 之連通子圖 $H$ 明顯存在，故 $K-\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)\leq f_s\left(H\right)\leq K-u_{k+2}-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在。

5. $K-\left(l_{k+1}+l_{k+2}\right)\leq f_s\left(H\right)\leq K-\left(u_{k+1}+u_{k+2}\right)-1$：根據遞迴式可推得 $l_{k+1}=u_{k+1}+u_k+l_{k-1}$，可視為連通子圖 $H^{'}\subseteq \mathrm{P}_2\times \mathrm{P}_k$ 使得 $K-\left(l_{k-1}-1\right)\leq f_s\left(H^{'}\right)\leq K$ 與 $B_{23}=\left\{v_{1,k+1},v_{1,k+2}\right\}$ 做圖形的聯集

（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-\left(l_{k+1}+l_{k+2}\right)$之連通子圖$H$明顯存在，故

$K-\left(l_{k+1}+l_{k+2}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-\left(u_{k+1}+u_{k+2}\right)-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

6. $K-\left(u_{k+2}+l_{k+2}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-\left(l_{k+1}+l_{k+2}\right)-1$：根據遞迴式$u_{k+2}=u_{k+1}+l_{k+1}$，可視為連通子圖$H^{'}\subseteq \mathrm{P}_2\times \mathrm{P}_k$使得$K-\left(u_{k-1}-1\right)\le f_s\left(H^{'}\right)\le K$與$B_{24}=\left\{v_{2,k+1},v_{2,k+2}\right\}$做圖形的聯集（$H^{'}$的存在根據假設成立），而$f_s\left(H\right)=K-\left(u_{k+2}+l_{k+2}\right)$之連通子圖$H$明顯存在，故

$K-\left(u_{k+2}+l_{k+2}\right)\le f_s\left(H\right)\le K-\left(l_{k+1}+l_{k+2}\right)-1$的所有連通子圖$H$皆存在。

綜合以上$1\sim6$點，可得$K-\left(u_{k+2}+l_{k+2}\right)\le f_s\left(H\right)\le K$的所有連通子圖$H$皆存在。

根據數學歸納法得證當$n=k=4t+4$成立時，則$n=k+2=4t+6$時亦成立。

第(二)部分：以數學歸納法證明$l_1^n\le f_s\left(H\right)\le K-\left(u_n+l_n\right)-1$的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n\ge 5$

因我們的數學歸納法需要，所以先利用$n=5$說明$n=6$起始點成立的原因，再假設若$n=k\ge 6$成立，則$n=k+1$成立的方式來證。

$n=5$成立則保證$n=6$成立：

$H$為$P_2\times P_6$的連通子圖，而使得$f_s\left(H\right)=f_s\left(P_2\times P_6\right)-\left(53+53\right)-c$，$1\le c\le 53$的$H$可視為新的$H'$為$P_2\times P_5$的連通子圖，使得$f_s\left(H\right)=f_s\left(H'\right)+\left(53+53\right)=f_s\left(P_2\times P_5\right)-c+\left(53+53\right)$，$1\le c\le 53$。

又因為可讓$f_s\left(H'\right)=f_s\left(P_2\times P_5\right)-c$，$1\le c\le 53$的任意連通子圖$H'$已於第一部分說明必存在。

所以 $l_1^6\le f_s\left(H\right)\le f_s\left(P_2\times P_6\right)-\left(53+53\right)-1$

只需說明 $H\subseteq P_2\times P_6$，$l_1^6\le f_s\left(H\right)\le f_s\left(P_2\times P_6\right)-\left(53+53\right)-54$即可。

因為第二部分$n=5$已證成立，存在$H'\subseteq P_2\times P_5$為連通，使得$l_1^5\le f_s(H')\le f_s(P_2\times P_5)-53$

$$\Rightarrow H'\subseteq P_2\times P_5\text{，}l_1^5+(53+53)\le f_s(H')+(53+53)\le f_s(P_2\times P_5)-53+(53+53)$$

$$\Rightarrow H\subseteq P_2\times P_6\text{，}l_1^6\le f_s(H)\le f_s(P_2\times P_6)-106-26$$

註：$H'$必能和$\{v_{1,6},v_{2,6}\}$連通，對於特別地$f_s(H')=l_1^5+1$和$f_s(H')=l_1^5+2$，如下兩圖所示

$$H'\cup\{v_{1,6},v_{2,6}\}=\begin{matrix}53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5\\ 53 & 29 & 16 & 1 & 3 & \end{matrix}\text{，}f_s(H')=l_1^5+2$$

$$H'\cup\{v_{1,6},v_{2,6}\}=\begin{matrix}53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5\\ 53 & 29 & 16 & & 3 & \end{matrix}\text{，}f_s(H')=l_1^5+1$$

綜合以上所述，使得$l_1^6\le f_s(H)\le f_s(P_2\times P_6)-(53+53)-1$的連通子圖$H$恆存在成立。

假設$n=k\ge 6$時恆有連通子圖$H'\subseteq P_2\times P_k$使得$l_1^k\le f_s(H')\le f_s(P_2\times P_k)-(u_k+l_k)-1$中任意$f_s(H')$皆存在，則$n=k+1$時，若$H$為$P_2\times P_{k+1}$的子圖，而使得$f_s(H)=f_s(P_2\times P_{k+1})-(u_{k+1}+l_{k+1})-c$，$1\le c\le u_k+l_k$的子圖$H$

可視為新的$H'$於$P_2\times P_k$中，使得$f_s(H)=f_s(H')+(u_{k+1}+l_{k+1})=f_s(P_2\times P_k)-c+(u_{k+1}+l_{k+1})$。

又因為可讓$f_s(H')=f_s(P_2\times P_k)-c$，$1\le c\le u_k+l_k$的子圖$H'$已於第一部分說明為連通。

所以$H\subseteq P_2\times P_{k+1}$，$l_1^{k+1}\le f_s(H)\le f_s(P_2\times P_{k+1})-(u_{k+1}+l_{k+1})-1$

只需說明$\Rightarrow H\subseteq P_2\times P_{k+1}$，$l_1^{k+1}\le f_s(H)\le f_s(P_2\times P_{k+1})-(u_{k+1}+l_{k+1})-(u_k+l_k+1)$中

任意$f_s(H)$的$H$存在著連通。而根據假設$n=k$時成立

$\Rightarrow H'\subseteq P_2\times P_k$，$l_1^k+(u_{k+1}+l_{k+1})\le f_s(H')+(u_{k+1}+l_{k+1})\le f_s(P_2\times P_k)+(u_{k+1}+l_{k+1})-(u_k+l_k+1)$的$H'$為連通。

註：$H'$必能和$\{v_{1,k+1},v_{2,k+1}\}$連通，對於特別地$f_s(H')=l_1^k+1$和$f_s(H')=l_1^k+2$，如下兩圖所示

$$H^{'} \cup \{v_{1,k+1}, v_{2,k+1}\} = \begin{matrix} u_{k+1} & u_k & \cdots\cdots & 53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ l_{k+1} & l_k & & 53 & 29 & 16 & 1 & 3 & \end{matrix} \text{，} f_s\left(H^{'}\right) = l_1^k + 2$$

$$H^{'} \cup \{v_{1,k+1}, v_{2,k+1}\} = \begin{matrix} u_{k+1} & u_k & \cdots\cdots & 53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ l_{k+1} & l_k & & 53 & 29 & 16 & & 3 & \end{matrix} \text{，} f_s\left(H^{'}\right) = l_1^k + 1$$

故綜合以上所述，利用數學歸納法第（二）部分得證。

第（三）部分：以數學歸納法證明$1 \le f_s\left(H\right) \le l_1^n - 1$的所有連通子圖$H$皆存在，$\forall n \ge 5$

我們的證明手法是先證明$n=5$時成立，再假設若$n=k\ge5$的奇數成立，則證明有$n=k+1$成立。另一方面假設若$n=k\ge6$的偶數成立，則證明有$n=k+1$成立。綜合以上所述，利用數學歸納法得證。

首先證明$n=5$時成立：於*new micro set*明顯可觀察。

接著說明若$n=k\ge5$的奇數成立則有$n=k+1$成立：

因為使得$l_1^{k+1} - \left(l_{k+1} - 3\right) \le f_s\left(H\right) \le l_1^{k+1} - 1$中任意$f_s\left(H\right)$的$H$可視為$H'$在$P_2 \times P_k$中和$\{v_{1,k+1}, v_{2,k+1}\}$作$P_2 \times P_n$圖形的聯集，有$f_s\left(H\right) = f_s\left(H' \cup \{v_{1,k+1}, v_{2,k+1}\}\right) = u_6 + l_6 + f_s\left(H'\right)$，其中$l_1^5 - \left(l_k + u_k - 3\right) \le f_s\left(H'\right) \le l_1^k - 1$，且$l_k + u_k = l_{k+1}$（根據假設$n=k\ge5$的奇數時的$H'$恆為連通成立）

接著更進一步討論$l_1^{k+1} - l_{k+1} - \left(u_{k+1} - 1\right) + 2 \le f_s\left(H\right) \le l_1^{k+1} - l_{k+1} + 2$中任意$f_s\left(H\right)$的$H$可視為$H'$在$P_2 \times P_k$中和$\{v_{1,k+1}\}$或$\{v_{2,k+1}\}$作$P_2 \times P_n$圖形的聯集（故$\{v_{1,k+1}\} \subseteq H$或$\{v_{2,k+1}\} \subseteq H$，對於$l_1^{k+1} - \left(u_{k+1} - 1\right) - l_{k+1} + 2 \le f_s\left(H\right) \le l_1^{k+1} - 1$）有$f_s\left(H\right) = f_s\left(\{v_{1,k+1}\} \cup H'\right)$或$f_s\left(H\right) = f_s\left(\{v_{2,k+1}\} \cup H'\right)$，$l_1^k - \left(u_k + l_k - 2\right) \le f_s\left(H'\right) \le l_1^k + 2$，$f_s\left(H'\right) \ne l_1^k$的$H'$恆為連通。

特別地使得 $f_s\left(H\right)=l_1^{k+1}-l_k$ 的連通子圖 $H$

當 $n=k=5,9,13,17,21,....$ 時，為 $H=\begin{array}{cccccccc} u_{k+1} & u_k & ...... & 53 & 24 & 9 & 8 \\ l_{k+1} & & & & & & 1 \end{array}$

當 $n=k=7,11,15,19,23....$ 時，為 $H=\begin{array}{cccccccc} u_{k+1} & & ...... & & & 9 & 8 \\ l_{k+1} & l_k & & 29 & 16 & 1 & 3 \end{array}$

所以最後只需說明 $1\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-\left(l_k-2\right)-u_k$ 中， $H\subseteq P_2\times P_{k+1}$ 的 $H$ 為連通。這同等於說明 $1\le f_s\left(H'\right)\le l_1^k+2$ ， $H'\subseteq P_2\times P_k$ 利用 $n=k\ge 5$ 的假設成立。

特別地，當 $n=k=5,9,13,17,21,....$ 時，為 $H=\begin{array}{cccccccc} u_{k+1} & u_k & ...... & 53 & 24 & 9 & 8 \\ & & & & & & 1 \end{array}$

當 $n=k=7,11,15,19,23....$ 時，為 $H=\begin{array}{cccccccc} & & ...... & & 9 & 8 \\ l_{k+1} & l_k & & 29 & 16 & 1 & 3 \end{array}$

能使得 $f_s\left(H\right)=l_1^k$ （ $l_1^k=l_1^{k+1}-u_k-l_k$ ）。

接著說明若 $n=k\ge 6$ 的偶數成立則有 $n=k+1$ 成立：

因為使得 $l_1^{k+1}-\left(l_k+u_k-3\right)\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-1$ 中任意 $f_s\left(H\right)$ 的 $H$ 可視為 $H'$ 在 $P_2\times P_k$ 中和 $\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1}\right\}$ 作圖形 $P_2\times P_n$ 的聯集，故有 $f_s\left(H\right)=f_s\left(H'\cup\left\{v_{1,k+1},v_{2,k+1}\right\}\right)=u_{k+1}+l_{k+1}+f_s\left(H'\right)$ ，而由假設若 $n=k\ge 6$ 的偶數成立，可保證 $l_1^k-\left(l_k+l_{k-1}-3\right)\le f_s\left(H'\right)\le l_1^k-1$ 中任意 $f_s\left(H'\right)$ 的 $H'$ 和 $\left\{v_{1,7},v_{2,7}\right\}$ 恆連通，所以有 $l_1^k-\left(u_k+u_{k-1}-3\right)+\left(u_{k+1}+l_{k+1}\right)\le f_s\left(H'\cup\left\{v_{1,7},v_{2,7}\right\}\right)\le l_1^k-1+\left(l_{k+1}+u_{k+1}\right)$ ，故可推得 $l_1^{k+1}-\left(u_k+l_k-3\right)\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-1$ 中的 $H$ 恆為連通。

而進一步再證 $l_1^{k+1}-\left(l_{k+1}+u_{k+1}\right)+1\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-\left(u_k+l_k-3\right)-1$ 中任意 $f_s\left(H\right)$ 的 $H$ 可視為 $H'$ 在 $P_2\times P_k$ 中和 $\left\{v_{1,k+1}\right\}$ 或 $\left\{v_{2,k+1}\right\}$ 作 $P_2\times P_n$ 圖形的聯集（故 $\left\{v_{1,k+1}\right\}\subseteq H$ 或 $\left\{v_{2,k+1}\right\}\subseteq H$ ，對於

$l_1^{k+1}-\left(l_{k+1}+u_{k+1}\right)+1\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-\left(u_k+l_k-3\right)-1$ ）

而有 $f_s\left(H\right)=f_s\left(\left\{v_{1,k+1}\right\}\cup H'\right)$ 或 $f_s\left(H\right)=f_s\left(\left\{v_{2,k+1}\right\}\cup H'\right)$，其中 $f_s\left(H\right)\ne l_1^{k+1}-l_{k+1}$ 的子圖為連通。

特別的情況當 時：

若 $n=k=6,10,14,18,......$ 時，有 $H=\begin{array}{cccccccc} u_{k+1} & & & & & 9 & 8 & \\ l_{k+1} & l_k & ...... & 53 & 29 & 16 & 1 & 3 \end{array}$

若 $n=k=8,12,16,20,......$ 時，有 $H=\begin{array}{ccccccccc} u_{k+1} & u_k & ...... & 159 & 53 & 24 & 9 & 8 & 2 \\ l_{k+1} & & & & & 29 & & 1 & \end{array}$

最後我們說明 $1\le f_s\left(H\right)\le l_1^{k+1}-\left(l_{k+1}+u_{k+1}\right)$ 中任意 $f_s\left(H\right)$ 中的 $H$ 為連通，而明顯利用假設 $n=k\ge 6$ 的偶數成立運用相同手法可證明。特別地在 $f_s\left(H\right)=l_1^{k+1}-\left(l_{k+1}+u_{k+1}\right)$ 時

當 $n=k=6,10,14,...$ 時，有 $H=\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 9 & 8 & \\ l_{k+1} & l_k & ...... & 82 & 53 & 29 & 16 & 1 & 3 \end{array}$

當 $n=k=6,10,14,...$ 時，有 $H=\begin{array}{ccccccc} u_{k+1} & u_k & ...... & 53 & 24 & 9 & 8 \\ & & & & 29 & & 1 \end{array}$

綜合以上所述第（三）部分 $1\le f_s\left(H\right)\le l_1^n-1$ 的所有連通子圖 $H$ 皆存在，$\forall n\ge 5$ 證畢。

而綜合第（一）（二）（三）部分，

$$\begin{array}{ccccc} u_n & u_{n-1} & \cdots & u_2 & u_1 \\ l_n & l_{n-1} & & l_2 & l_1^n \end{array} = \begin{array}{ccccccccccccc} u_n & u_{n-1} & \cdots & 1123 & 400 & 241 & 159 & 53 & 24 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ l_n & l_{n-1} & & 1123 & 723 & 241 & 82 & 53 & 29 & 16 & 1 & 3 & l_1^n \end{array}$$

對於任意的自然數 $n$ 為 $P_2\times P_n$ 的一個 IC－coloring 標號方式得證。

# 伍、 研究結果

(一) 對於任意的$n \in$⌒，已找出$M\left(P_2 \times P_n\right)$新的下界，且證明。

# 陸、 討論

(二) 對於任意的$n \in$⌒，已完成定理一的完整證明。較去年作品提升下界（因為 Micro set 的長度提升了）

(三) 上界下降較不易，教授建議我們停止往這個方向去做研究。

(四) 我們相信$n=5$時的標號是最佳，但無證明。

# 柒、 結論

對於任意的$n \in$⌒，已找出$M\left(P_2 \times P_n\right)$新的下界，且證明。

# 捌、 參考文獻


(一) 鄭宴奇、楊翔雲、黃紹宸、李育霖，圈圈相連到天邊，中華民國第 50 屆中小學科學展覽會，2013。 $http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/040413.pdf$

(二) 林士軒，$The\ stamp\ covering\ problem\ of\ path$ ，第六屆丘成桐數學獎，2014。 $http://www.math.ntu.edu.tw/\sim shing\_tung/PDF/6th/6-1.pdf$

## 【評語】010020

IC-coloring 的問題。作者們針對 $P_2 \times P_n$ 的 IC-index 做了討論，給出了一個更好的下界。決定 $P_2 \times P_n$ 的 IC-index 是一個困難的問題，作者聰明的們給出了一個新的構造 IC-coloring 的方式，由此得出了一個好的結果，構造的方式十分的巧妙，感覺上應該是投注了許多的心力，值得嘉許。稍嫌美中不足的是，說明的過程過於繁複了些。使用數學歸納法論證主要定理的這個步驟其實可以說的更為簡潔清楚，如果能在這部分稍做修正，看起來會更好。最後所得出的更好的下界值是多少？沒有把這部分補上，感覺似乎缺了些什麼，有點可惜。（作品中提及了當 n=3, 4, 5 時，找出了最佳標法，標法是什麼？好像並未給出。）