2018 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010012

參展科別　數學

作品名稱　表格塗色遊戲之分析

得獎獎項　大會獎：四等獎

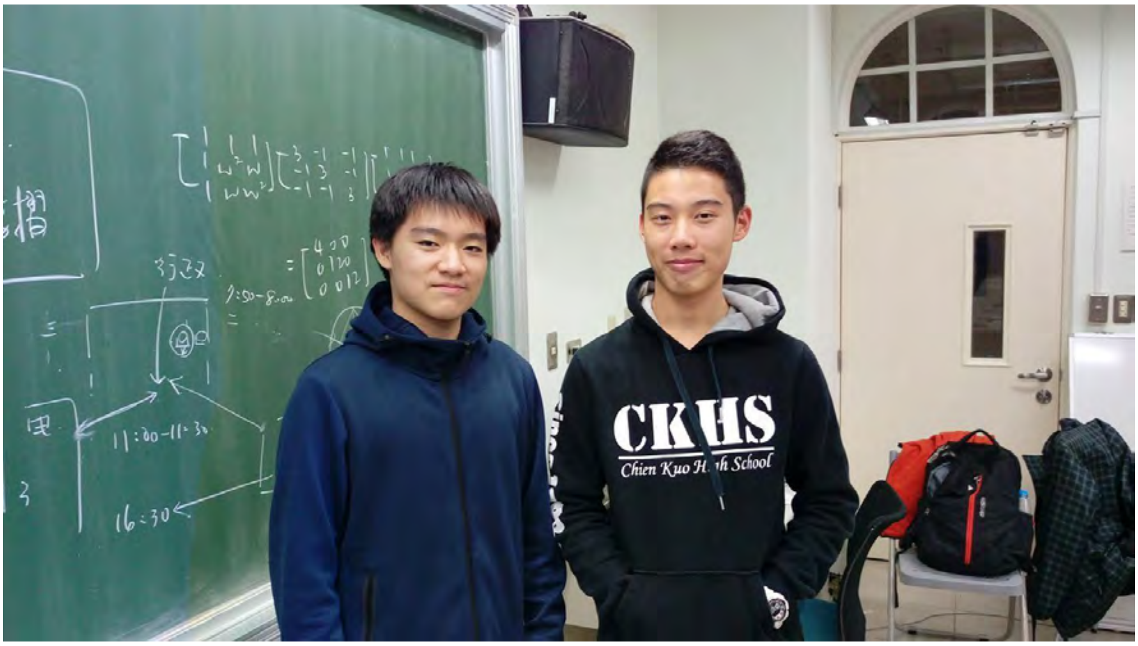
就讀學校　臺北市立建國高級中學

指導教師　蔡韋弘

作者姓名　謝明圜、曾冠儒

關鍵詞　格子對、鴿籠原理、柯西不等式

作者簡介



我是謝明圜(圖右)，一個快樂的高三學生。雖然興趣不是純數學，但從小就很喜歡從遊戲當中體驗尋找規律的樂趣，因此在高中的專題研究選擇了塗色遊戲而不是一些純數學的內容。在研究的路上，我們常偶然被某一個事物意外地點通而讓研究有所進展，這就是我最喜歡這份研究的理由：在何時何地，我都有可能感受到研究帶給我的樂趣。希望呈現這份研究也能帶給各位這些歡樂！

我是曾冠儒(圖左)，一個喜歡思考的高三生。從國中開始我就很喜歡數學遊戲，雖然研究數學遊戲不像幾何代數如此專業精深，但研究中往往突然靈光乍現，用一個簡單的策略便可以精妙解決問題。正如這份塗色遊戲，看似規則簡單，卻能連結到各種數學巧思，令人驚豔。無論何時何地，都能鍛鍊自己的思考能力和創意，我想，這是數學遊戲最有魅力的地方，也是讓我如此樂於研究的原因吧!

摘要

這份研究所探討的主題源自於 1976 年 USAMO 第一大題：將一 4×7 矩形方格表的每格塗色黑色或白色，欲使所有能構成矩形頂點的四個方格皆不全為同色。試證明其塗色必定失敗、或給出滿足的塗色方式。此研究從上述題目延伸，增加可填入的顏色數量、改變方格表的長寬，甚至將方格表改為三角格子表。研究過程主要運用鴿籠原理、組合數量之計算及柯西不等式來分析。我們已幾乎完整討論完矩形方格表中填入 2 色、3 色，及三角格子表中填入 2 色的所有情況；並且對於矩形方格表，我們找到了一條判別式，可以判斷一般化的某情況下塗色是否必定失敗，但有部分必定塗色失敗的情況無法由此判別式判斷，需藉由其他方式討論。此外，我們也嘗試從滿足的塗色方式中找尋規律並建立構造的規則。

Abstract

The main topic of this project is based on the Problem 1 of 1976 USAMO: Suppose that each square of a 4*7 chessboard is colored either black or white. (a)Prove that with any such coloring, the chessboard must contain a rectangle (formed by the horizontal and vertical lines of the board) whose four distinct unit corner squares are all of the same color. (b) Exhibit a black-white coloring of a 4*6 board in which the four corner squares of every rectangle, as described above, are not all of the same color.

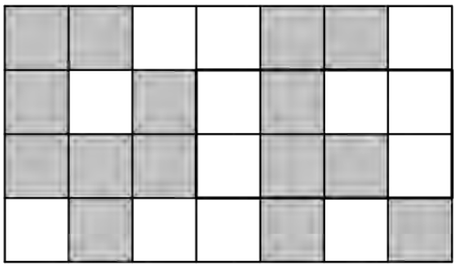
In this project, we let **k** be the number of different colors which are allowed to fill in the chessboard, and **n×m**, which **n ≤ m**, be the size of the chessboard. These variables would be noted as **[k,n×m]**. If such situation mentioned in question (a) happens, we define **[k,n×m]** as an ‘’FAIL’’ game setting. If there exists such coloring that fulfills the situation mentioned in question (b), we define **[k,n×m]** as a “PERFECT” game setting.

We extend this question by adding more colors (changing the variable **k**), changing the size of the chessboard (changing the variables **n, m**) and even turning rectangle chessboard into triangle chessboard. We have successfully analyzed almost every setting when **k**=**2** or **3**. We also found a discriminant which **only** consists of **k, n, m**. When the discriminant is fulfilled, we can ensure that this **[k,n×m]** is definitely a ‘’FAIL’’ game setting; On the contrary, if the **[k,n×m]** doesn’t meet the discriminant, there might exist “PERFECT” coloring. In this project, we have also put a lot effort on finding out coloring strategies about some particular **[k,n×m]**.

壹、前言

一、研究動機

在翻閱數奧書籍的時候，發現兩道題目值得推廣：



（1976USAMO）

（a）有一 4×7 的方格表如圖，每格被塗上黑或白色。試證明：無論如何塗色，必存在一組「可以形成矩形的 4 個頂點」的 4 個方格是同色的。

（b）將方格表改成 4×6 大小，試找出一種塗色方式，使方格表中任意大小矩形的 4 個頂點之方格不為同一顏色。

（1982 瑞典數奧）

有一 12×12 的方格表，每一格被塗上 abc 三色之一，試證明：無論如何塗色，必存在一組「可以形成矩形的 4 個頂點」的 4 個方格是同色的。。

我們發現兩種類似的題型雖然都可以使用鴿籠原理來解釋，但所用的方法不盡然相同。如果將這兩道題目延伸，增加可填入的顏色數量、改變方格表的長寬，甚至將方格表改為三角格子表，又要以什麼觀點來討論這些情況？於是我們著手進行研究。

二、研究目的

（一） 探討顏色數量 k 為 2 或 3 時，哪些 n、m 值會使得[k,n×m]完美。

（二）找出一條足以判別[k,n×m]是否完美的判別式。

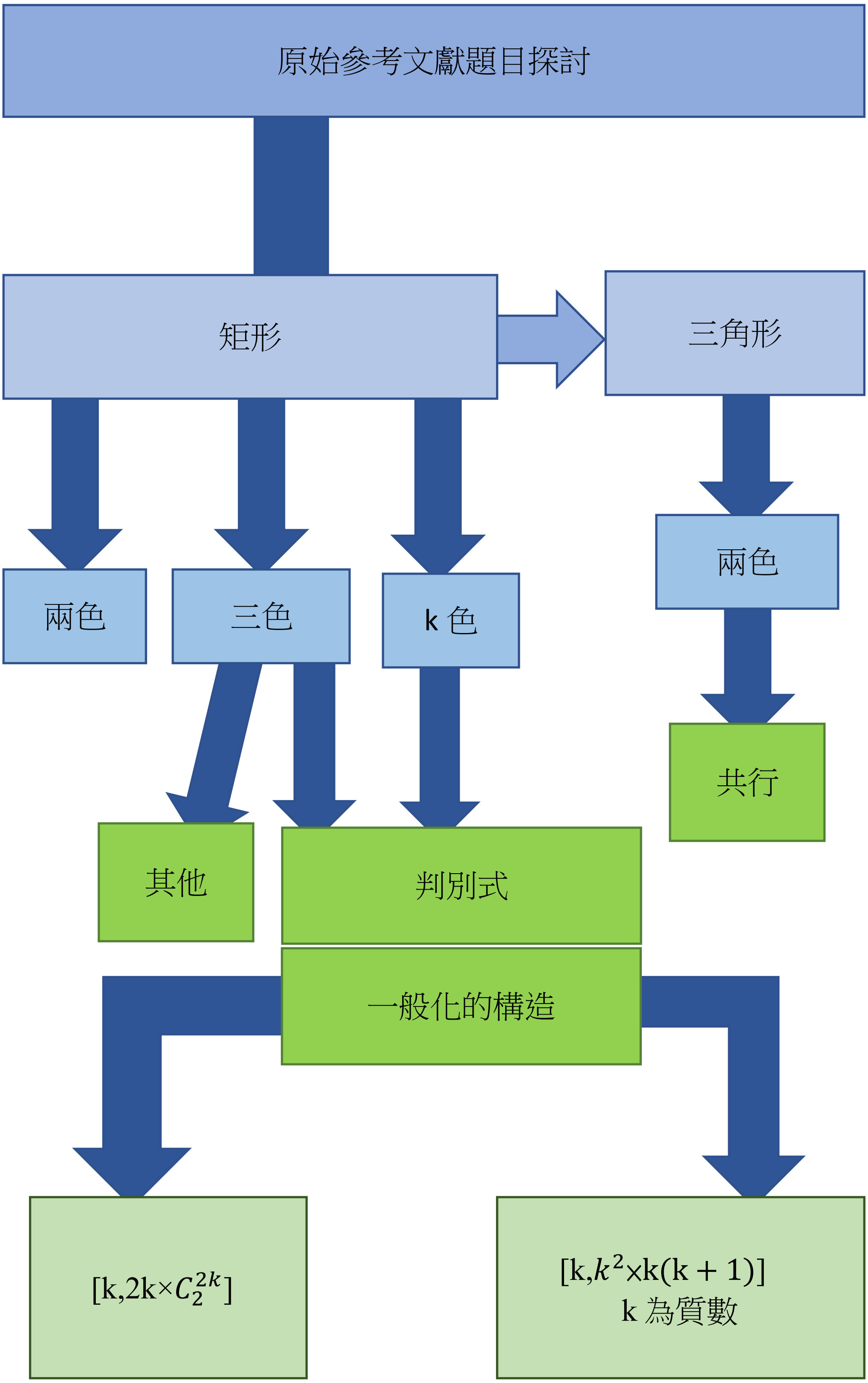
（三）對於完美的[k,n×m]，找出其塗色方法的規律，並嘗試找出構造的通則或條件。

（四） 將圖形推廣至三角格子表：探討在不同顏色數量 k 時，哪些 t 值會使得{k,t}完美。

三、研究設備及器材

紙、筆、電腦、C++程式語言。

貳、研究過程



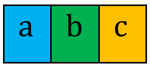
原始參考文獻題目探討
矩形
三角形
兩色
三色
k 色
兩色
共行
其他
判別式
一般化的構造
$[k, 2k \times C_2^{2k}]$
$[k, k^2 \times k(k+1)]$
k 為質數

一、符號定義與遊戲進行方法規則

（一）矩形系統符號定義

1.矩形方格表之大小為 n（橫）列 × m（直）行，其中n ≤ m。

2.k 為顏色個數，其中 a,b,c......為顏色。



（說明書中 a 為藍色，b 為綠色，c 為橘黃色）

3.以[k,n×m]表示將 n×m 矩形方格表以 k 種顏色填色的遊戲設定。

4.第 1、2、3、...、m 行填入 a 色的格子依序有$a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_m$個，其他色以此類推， 其中$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$。

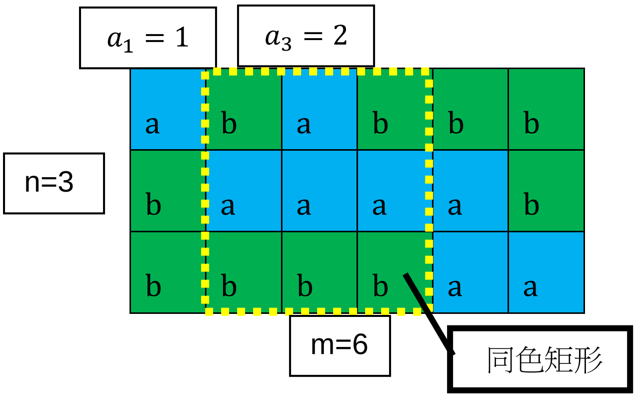
5.集合S_a=$\{a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_m\}$，其他色以此類推。

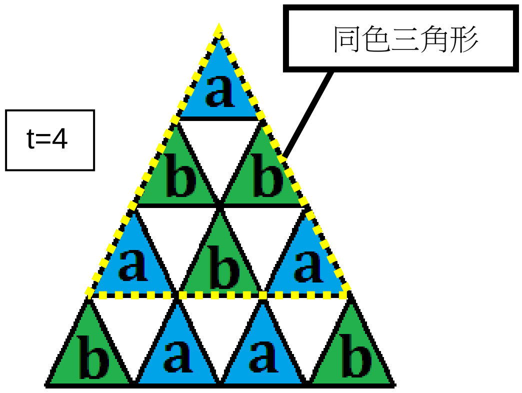
（二）三角形系統符號定義

1.三角形格子表之邊長為 t（格）。

2.k 為顏色個數，其中 a,b,c...為顏色。

3. 以{k,t}表示將邊長為 t 之三角形格子表以 k 種顏色填色的遊戲設定。





（三）遊戲規則

若一矩形方格表中，某四格可構成任意大小矩形頂點的四個方格被填入同色，我們定義該矩形為一「同色矩形」。將 k 種顏色填入一 n×m 的矩形方格表中，若存在一種塗色方法使得在該矩形中「任意大小的矩形皆不為同色矩形」，則稱[k,n×m]為「完美」，而該塗色方法為「完美塗色情況」；若所有塗色方法皆會產生同色矩形，則稱[k,n×m]為「不完美」。無論 k、m、n 值為何，[k,n×m]必屬於完美或不完美其中之一。

在三角形系統中，對於一個三角形格子表，我們只考慮尖端朝上的三角形格子。若某三格可構成任意大小正三角形頂點的三個三角形格子被填入同色，我們定

義該正三角形為一「同色三角形」。在邊長為 t 的正三角形表格中，若存在一種塗色方法使得在該三角形中「任意大小的三角形皆不為同色三角形」，則稱{k,t}為「完美」，而該塗色方法為「完美塗色情況」；若所有塗色方法皆會產生同色三角形，則稱{k,t}為「不完美」。

二、引理

<u>引理（一）：鴿籠原理（抽屜原理）</u>

將 k 個東西分成 n 類， 若 $k \geq nr - n - 1$ 則有一類東西之數目大於或等於 r。

<u>引理（二）：柯西不等式</u>

$(\sum_{i=1}^{m} a_i{}^2)(\sum_{i=1}^{m} b_i{}^2) \geq (\sum_{i=1}^{m} a_i b_i)^2$

特別地，當$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 1$，則可得 $(\sum_{i=1}^{m} a_i{}^2) \times m \geq (\sum_{i=1}^{m} a_i)^2$。

三、推論

<u>推論（一）：</u>

假設$n_2 \geq n_1$且$m_2 \geq m_1$，

1.若$[k, n_2 \times m_2]$完美，則$[k, n_1 \times m_1]$完美。

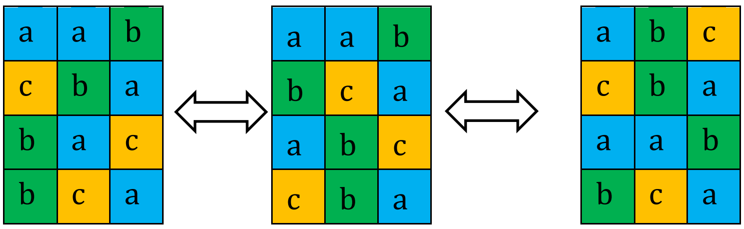
（若大矩形完美則小矩形完美）

2.若$[k, n_1 \times m_1]$不完美，則$[k, n_2 \times m_2]$不完美。

（若小矩形不完美則大矩形不完美）

<u>推論（二）：</u>

對於塗色之矩形方格表，將某兩行或兩列互換，不使原有的同色矩形消失或產生新同色矩形。



四、原題探討與分析

（一）1976USAMO

a	a	a	a			
b	b	b				
a	b					

圖一

考慮第一列，由鴿籠原理知 7 格中至少有 $[\frac{7}{2}]+1=4$ 格被填入 a 色。由推論（二），不妨令第一列的前四格被填入 a 色，如圖一。

考慮第二列的前四格，如果其中有任兩格被填入 a 色則形成同色矩形，故至多只有 1 格被填入 a 色，即至少 3 格被填入 b 色；不妨令第二列之前三格被填入 b 色。

再考慮第三列的前三格，由鴿籠原理知 3 格中必有 2 格同色，其必與前兩列之一形成同色矩形。故[2,4×7]不完美。

（二）1976USAMO

a	a	a	b	b	b
a	b	b	a	a	b
b	a	b	a	b	a
b	b	a	b	a	a

圖二

從第（1）題的證明，可知當列數為 3 列以上，則一列中某色至多填入 3 格。利用此技巧能輕易得出解，一個例子如圖二。

（三）1982 瑞典數學奧林匹亞

$n=m=12$。將鴿籠原理套用至整張表格，可知表格中至少有 $\frac{12\times12}{3}=48$ 格被填入 a 色。以下證明此 48 格必存在 4 格可形成矩形。

將每一行中填入 a 色的格子兩兩組合形成格子對（如圖三說明），可知所有直行中的格子對數量總合為$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$（其中$C_2^0=C_2^1=0$），

將上式整理可得 $\sum_{i=1}^{12} C_2^{a_i}=\sum_{i=1}^{12}\frac{a_i(a_i-1)}{2}=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{12} {a_i}^2-\sum_{i=1}^{12} a_i)$

已知 $\sum_{i=1}^{12} a_i=48$，

由柯西不等式知$(\sum_{i=1}^{12} {a_i}^2)(\sum_{i=1}^{12} 1^2)\geq(\sum_{i=1}^{12} a_i)^2=48^2$，

即$(\sum_{i=1}^{12} {a_i}^2)\geq 48^2\div 12=192$，

故$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$之值存在下界：

$\sum_{i=1}^{12} C_2^{a_i}=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{12} {a_i}^2-\sum_{i=1}^{12} a_i)$

$\geq\frac{1}{2}(192-48)=72$。

a	
	a
a	
a	
	a

圖三

第一行中 a 色格子對有
(2,7)(2,10)(7,10)
第二行中則有(3,12)

因為格子對僅有$C_2^n=C_2^{12}=66$（種）<72，由鴿籠原理可知某 2 行必存在同一種格子對，即必形成同色矩形。故[3,12×12]不完美。

根據上述資訊，我們可以得到：

推論（三）：

若 $\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$ ，則[k,n×m]必定不完美。

五、研究內容與推廣

（一）矩形系統

1. k = 2（兩色矩形系統）

由原題我們能得知[2,4×7]不完美，但[2,4×6]則完美。以下我們討論 k=2 時使[k,n×m]完美的所有 n、m 值。

（1）當$n \leq 2$時，將同一列填入同一種顏色，則任意 m 值的情況皆存在完美塗色。

（2）當$n = 3$時，從<四、原題探討與分析>的過程，可知[2,3×7]不完美，並且[2,4×6]完美，由推論一知[2,3×6]完美（如圖四）。

圖四

a	a	a	b	b	b
a	b	b	a	a	b
b	a	b	a	b	a

（3）當$n = 4$時，由 <四、原題探討與分析> 可得知，m=6 為最大值。

（4）當$n = 5$時，在[2,5×5]的情況中，藉由鴿籠原理得出第一列必定有三格以上同色。我們討論如圖五所示的情況，問號標示的四格中，無論將任一格填 a 色，或四格皆填 b 色，都會構成同色矩形。而實際上，無論如何填色，圖五所示的圖形是必定出現的：

圖五

a	a	a		
a	?	?		
a	?	?		

圖六

a				
b	a			
b	b			
b	a			

在第一列下方之 4×5 的矩形中，其第一行

①若將三格以上填入 b 色（如圖六），則在第二行中必填入至少兩 a 格；

②若僅兩格以下被填入 b 色，則其餘（至少兩格）為 a 色。

無論如何填色，經過行列互換皆能得到如圖五所示的圖形，故[2,5×5]不完美。

藉由推論（一）可得知，當 n≥5 且 m≥5，[2,n×m]皆不完美。

k=2 情形至此討論完畢，滿足[2,n×m]完美之 n、m 值，歸納如下：

$n \leq 2$	m 無上限
$n = 3$ 或 $n = 4$	$m \leq 6$
$n \geq 5$	m 無解

2.k=3（三色矩形系統）

（1）$n \leq 3$

當$n \leq 3$時，將同一列填入同一種顏色，則無論 m 值為何皆為完美塗色情況（如圖七）。

圖七

a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c

圖八

a	a	a	b	b	b	b	b	b	a	a	a	c	c	c	a	a	a
a	b	b	a	a	c	b	a	a	b	b	c	c	a	a	c	c	b
b	a	c	a	c	a	a	b	c	b	c	b	a	c	b	c	b	c
c	c	a	c	a	a	c	c	b	c	b	b	b	b	c	b	c	c

（2）$n = 4$

由鴿籠原理可知每行至少有兩格同色（先令為 a 色）；若某兩行的兩 a 色格位於同相對位置，則形成同色矩形，所以有兩個 a 色格的直行至多有 $C_2^4 = 6$ 行。b、c 色同理，故 m≤6×3=18。（如圖八）

（3）$n > 4$

①將原題使用之方法推廣

在一個 m×n 的矩形方格表中，藉由鴿籠原理可知 a 色格至少有$[\frac{mn+2}{3}]$個。

運用推論（三）：

$$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n \leftrightarrow [\mathrm{k}, \mathrm{n} \times \mathrm{m}]\text{不完美}$$

將上式化簡得：

$$\sum_{i=1}^{m} a_i{}^2 - \sum_{i=1}^{m} a_i > \mathrm{n}(n-1)$$

同前面的做法，由柯西不等式得出：

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i{}^2)(\sum_{i=1}^{m} 1^2) \geq (\sum_{i=1}^{m} a_i)^2 \geq \left([\frac{mn+2}{3}]\right)^2$$

$$\text{故}\sum_{i=1}^{m} a_i{}^2 - \sum_{i=1}^{m} a_i \geq \frac{\left([\frac{mn+2}{3}]\right)^2}{m} - [\frac{mn+2}{3}]$$

將不同 mn 值代入，檢驗$\frac{\left(\left[\frac{mn+2}{3}\right]\right)^2}{m} - \left[\frac{mn+2}{3}\right] > n(n-1)$是否成立，程式計算的結果如下表：

n \m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4																
5	-													X		X
6	-	-											X	X	X	X
7	-	-	-							X	X	X	X	X	X	X
8	-	-	-	-						X	X	X	X	X	X	X
9	-	-	-	-	-					X	X	X	X	X	X	X
10	-	-	-	-	-	-			X	X	X	X	X	X	X	X
11	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X

（X 表示 n、m 值滿足$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$，即[3,n×m]不完美）（ - 表示 n>m，不討論）

計算結果並未發現[3,4×19]不完美，與已知的結果牴觸，因此我們試圖分析這個方法存在的缺失。

②以柯西不等式計算$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$的缺失與修正：

柯西不等式的等號成立時，式中$a_1, a_2 \dots\dots a_m$不一定是整數。我們發現在 4×19 的案例當中若將 $a_1, a_2 \dots\dots a_m$ 整數的條件也納入考量，$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$之最小值有機會變得更大，並可由推論（三）證明[3,4×19]不完美。考慮$S_a \subset \mathbb{Z}$似乎能幫助我們辨識更多不完美的情況。我們找到考慮整數之限制後計算$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$最小值的方法，並設計程式由電腦協助計算及呈現結果。

<u>引理（三）</u>：當$k_1 - k_2 > 1$，$C_2^{k_1} + C_2^{k_2} > C_2^{k_1-1} + C_2^{k_2+1}$

證明：

$$(C_2^{k_1} + C_2^{k_2}) - (C_2^{k_1-1} + C_2^{k_2+1})$$

$$= \left(\frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2}\right) - \left(\frac{(k_1-1)(k_1-2)}{2} + \frac{(k_2+1)k_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}[(k_1^2 + k_2^2 - k_1 - k_2) - (k_1^2 + k_2^2 - 3k_1 + k_2 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}(2k_1 - 2k_2 - 2) = k_1 - k_2 - 1$$

當$k_1 - k_2 > 1 \leftrightarrow (C_2^{k_1} + C_2^{k_2}) - (C_2^{k_1-1} + C_2^{k_2+1}) > 0$

$\leftrightarrow C_2^{k_1} + C_2^{k_2} > C_2^{k_1-1} + C_2^{k_2+1}$

若S_a中存在 2 元素之值相差>1，由引理（三）可知，將此 2 元素之值修正至

趨向其平均值，會得到較小的$\sum_{a_i \in S_a} C_2^{a_i}$值。

故$\sum_{a_i \in S_a} C_2^{a_i}$有最小值$\leftrightarrow \forall a_x, a_y \in S_a (x \neq y)$，$|a_x - a_y| = 1 \vee 0$。

（$\sum_{a_i \in S_a} C_2^{a_i}$的最小值發生時，a 格以近乎平均的方式分布在各行中）

釐清考慮$S_a \subset \mathbb{Z}$時$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$之最小值的發生條件後，我們找到快速計算此時S_a各項之值（各行中各有幾格 a 色格）方法，以[3,10×11]為例：

首先以鴿籠原理計算 a 格數量：$\left\lfloor \frac{10\times 11+2}{3} \right\rfloor = 37$。

接著在 11 行中填入同樣多的 a 色格，直到剩餘 a 格不足 11。此時各行 a 格數量為$\left\lfloor \frac{37}{11} \right\rfloor = 3$。

剩下$37 - 3 \times 11 = 4$個 a 格則分別填入相異 4 行中，於是此 4 行填入了 4a。

最後得到$S_a = \{4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,3\}$。

將長寬以 m、n 表示，結果如下：

全部 a 色格數量	分布的情形
$\left\lfloor \frac{nm+2}{3} \right\rfloor$（令此值為 s）	$(s - m\left\lfloor \frac{s}{m} \right\rfloor)$行有$(\left\lfloor \frac{s}{m} \right\rfloor + 1)$個 a，其餘行有$\left\lfloor \frac{s}{m} \right\rfloor$個 a

③將$S_a \subset \mathbb{Z}$納入考量的結果

將不同 m、n 值代入②之結論，檢驗$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^{n}$是否成立，程式計算結果如下表：

n \m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4																X
5	-												X	X	X	X
6	-	-											X	X	X	X
7	-	-	-							X	X	X	X	X	X	X
8	-	-	-	-						X	X	X	X	X	X	X
9	-	-	-	-	-					X	X	X	X	X	X	X
10	-	-	-	-	-	-			X	X	X	X	X	X	X	X
11	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X

（X 表示$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^{n}$成立，[3,n×m]不完美，紅底為與①之結果不同處）

接下來，我們要從不同於「格子對數量」的角度，分析上表中，尚未證明其完美與否的其他[3,n×m]情況。

④[3,10×11] 的討論

雖然透過①、②之方法無法證明[3,10×11]不完美，但我們由②激發了一個想法：**[3,10×11]完美，若且唯若 a 色格子以特定的方式分布在 11 行中**。接著我們探討**此特定的分布方式下，是否可能出現完美塗色情況**：

•由鴿籠原理可知至少有 $\left[\frac{10\times11+2}{3}\right]$=37 格被填入 a 色，

因為$S_a \subset \mathbb{Z}$，又由②可得$\sum_{i=1}^{n} C_2^{a_i} \geq 4\times C_2^4 + 7\times C_2^3 = 45 = C_2^{10}$

上式顯示完美塗色情況存在，若且唯若等號成立。其讓我們確認 37 個 a 格必<u>以其中 4 行各有 4 格、另 7 行各有 3 格的方式分布在 11 行中</u>；且 11 行當中的 37 個 a 格應構成所有 45 種格子對（(1,2)(1,3)…(9,10)），每種格子對恰被構成一次，否則必有某種格子對同時在某兩行中出現。

•討論擁有 4 個 a 色格的四行其 a 色格排列情形：

假設：此 4 行中的 a 色格皆錯開（如圖九）

由推論（二），不妨令$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4$，且第一行中第 1~4 格被填為 a 色。若第二行中的 a 色格不在 1~4 格（不妨令其在 5~8 格）。考慮第三行，為了不與前 2 行構成同色矩形，其第 9、10 格必為 a 色格。接著考慮第四行，現無論將哪一格填入 a 色皆必與前三行的某行產生重疊，並由鴿籠原理知 4 個 a 色格之中必有某 2 格同時重疊於某一行而產生同色矩形。故假設錯誤：<u>第二行中的 a 色格不應與第一行完全錯開。</u>

圖九

a			
a			
a			
a			
	a		
	a		
	a		
	a		
		a	
		a	

•因為一、二、三、四行間彼此互相獨立，可由上一點推論<u>此四行兩兩之間皆有一格重疊</u>。

•假設第一、二、三行重疊於同一列（不妨令其為第一列）（如圖十）

因為除了第一列外，其餘 a 色格皆不能互相重疊，故前三行必定將第 2~10 列各填過一次，於是又會造成第四行無論選擇哪 4 格填入 a 色，都將與前三行的某行產生同色矩形。於是假設錯誤：第一二三行不可重疊於同一列。

•因為一、二、三、四行間彼此互相獨立，可由上一點推論四行間兩兩互相重疊處皆為不同列。

•綜合以上分析，其中 4 格填入 a 色的四行，兩兩之間皆會重疊一格且任三行不可重疊於同一列。一種可行的填色方式如圖十一所示。

圖十

a	a	a	
a			
a			
a			
	a		
	a		
	a		
		a	
		a	
		a	

圖十一

a	a		
a		a	
a			a
a			
	a	a	
	a		a
	a		
		a	a
		a	
			a

整理：$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} \geq 4 \times C_2^4 + 7 \times C_2^3 = 45 = C_2^{10}$此式代表的意義為：

⊙構成所有 45 種格子對（(1,2)(1,3)...(9,10)），每種恰被構造一次。

⊙a 色格以其中 4 行各有 4 格、另 7 行各有 3 格的方式分布在 11 個行中。

藉由以上討論得到前四行的填入情形應符合：

⊙此四行兩兩之間皆有一格重疊。

⊙四行間兩兩互相重疊處皆在不同列。

以下繼續討論後 7 行可能情形：

•考慮前四行中某兩行之重疊處（以圖十二中第 1、2 行為例，其重疊處為第 1 列）：

在 45 種格子對中，有 9 種與第 1 列相關，按圖十二之方式填完前 4 行後剩下 3 種（(1,8)(1,9)(1,10)）尚未被構造出，而此 3 種格子對只可能在後 7 行中出現。然而在接下來的行裡，每一行中皆填入 3a，每當有一個 a 填入第一列，則該行恰可以構造出兩個與第一列相關的格子對。2 不整除 3，代表無論

後 7 行如何填色，<u>對於與第一列有關的格子對，以下之一必成立：有一種格子對尚未被構造，或某格子對在某兩行裡同時出現（形成矩形）。</u>

<u>得證：[3,10×11]不完美。</u>

⑤[3,10×10]的討論

以鴿籠原理計算至少有$[\frac{10\times10}{3}]+1=34$ 格被填為 a 色。

34a 格在 10 行中可能的分布狀況分析如下：

$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$最小值為 42，此時 10 行中之 4 行有 4 格 a 色格、其餘 6 行有 3 格 a 色格。前 4 行填入 4a 的方法參照做 10×11 時的情況，為求美觀與方便討論，在這裡特別將重疊處設計在 1~6 列，填色結果如圖十二。

圖十二

a	a		
a		a	
a			a
	a	a	
	a		a
		a	a
			a
		a	
	a		
a			

圖十三

a	a			a					
a		a			a				
a			a			a			
	a	a					a		
	a		a					a	
		a	a						a
			a	a	a		a		
		a		a		a		a	
	a				a	a			a
a							a	a	a

考慮前 4 行中兩兩重疊處的第 1~6 列。因為後 6 行皆填入 3a，由④的最後一點可知，此 6 列中每列所牽涉的格子對都必有一種不會出現。但所有不會出現的格子對數量只能有$C_2^{10}-(C_2^4\times4+C_2^3\times6)=3$種，可推得這 3 種格子對是由此 6 列兩兩組合而成。扣除掉已出現在前 4 行的格子對，可以知道是（1,6）（2,5）（3,4）三種格子對必不出現。因為 45 種格子對中其餘 42 種皆要被構造出來，不妨直接嘗試構造出與此 6 列有關連的其他格子對，於是在剩餘 6 行之 3a 填入方式為（1,7,8）（2,7,9）（3,8,9）（4,7,10）（5,8,10）（6,9,10）。34 個 a 格順利填入 10×10 矩形中（如圖十三），且呈現以左下-右上為對稱軸之對稱圖案。

事實上，在[3,10×10]的情況下，符合$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^{n}$的 a 色格分布方式有很多種，但是都能經由類似的討論，證明其不可能出現完美塗色情況，故上述的填色方式是唯一的（過程過於瑣碎故不詳述）。

⑥**其餘大小的矩形：**

在討論完[3,10×10]的情況後，我們嘗試構造 [3,6×15]、 [3,9×12]的完美塗色情形，因為若[3,6×15]、 [3,9×12]完美，則比它們小的矩形也都為完美。

•討論[3,6×15]

[3,6×15]是一種相當特殊的情況。經鴿籠原理計算後可知有 30 個 a 格，其 $\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$ 的最小值為 15（恰$=C_2^6$），且發生在每一行中皆有 2a 的時候。也就是說，在每一行中 a 格必恰呈現 15 種格子對之一。因為其他顏色所填格數不大於 a 格，a 格數量也必不>30（否則$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$之值>15），故 bc 二色勢必各填 30 格，分布的方式也與 a 格雷同。總而言之，**每行中皆需填入 2a2b2c，且在 15 行中將看到 abc 三色皆構造出所有 15 種格子對。**

我們因此想到一種填色的技巧：將 15 種格子對分組，每 3 種一組（其分組須滿足組中包含數字 1~6）。將每一組的格子對，搭配三色 abc 及其變換順序 bca、cab，分別對應到 3 直行，如圖十四所示。

五組分別為：

（(1,2)(3,4)(5,6)）

（(1,3)(2,5)(4,6)）

（(1,4)(2,6)(3,5)）

（(1,5)(2,4)(3,6)）

（(1,6)(2,3)(4,5)）

1	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
2	a	b	c	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a
3	b	c	a	a	b	c	c	a	b	c	a	b	b	c	a
4	b	c	a	c	a	b	a	b	c	b	c	a	c	a	b
5	c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c	c	a	b
6	c	a	b	c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c

圖十四

藉由這個策略，我們得以將一個三色的塗色問題簡化為一個更易簡單討論的單色問題。假設我們藉由上述的分堆方法將 30 個 a 色依照每三行一大組，a 色右邊填入 b 色，b 色右邊填入 c 色，碰到大組的邊界則回填，例如上圖的(3,3)填入 a，由於(4,3)與(3,3)不是同一大組，所以 b 不填在(4,3)而回填到(1,3)。運用此規則加上每直行填入 2 個 a 色的規則塗色而不產生同色矩形，那麼其他顏色便能依序填入最終形成完美，**我們稱這種圖色策略為「輪轉」**。

•[3,9×12]：

填色策略與處理[3,6×15]時相似：因為[3,9×12]的 a、b、c 色格數量及在 12 行中之分布也呈完全平均(每行 3a3b3c)，故可同樣使用分組及三色輪替的想法。

每一組經過顏色輪替可以對應三行，所以應分成$\frac{12}{3}$=4 組；每一組內有 1~9 之數字，9 數字 3 個一堆，分堆方式須滿足在所有組之中，任 2 堆不同時重複 2 數字。

這裡構造出一種分組方式：

（123 456 789）

（147 258 369）

（159 267 348）

（168 249 357）

1	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
2	a	b	c	b	c	a	b	c	a	b	c	a
3	a	b	c	c	a	b	c	a	b	c	a	b
4	b	c	a	a	b	c	c	a	b	b	c	a
5	b	c	a	b	c	a	a	b	c	c	a	b
6	b	c	a	c	a	b	b	c	a	a	b	c
7	c	a	b	a	b	c	b	c	a	c	a	b
8	c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c
9	c	a	b	c	a	b	a	b	c	b	c	a

圖十五

對應到的塗色方式如圖十五。

三色（k=3）矩形系統結論：

（X表由柯西不等式計算使$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$成立，X表考慮整數條件、修正計算方法後發現$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$成立，X表分析其實際塗色情況發現其不完美，?表尚未確認其完美與否，O表已構造出完美塗色情況，空白表其可由推論（一）推論為完美，-表 n>m 不討論）

n \m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4															O	X
5	-												X	X	X	X
6	-	-										O	X	X	X	X
7	-	-	-							X	X	X	X	X	X	X
8	-	-	-	-						X	X	X	X	X	X	X
9	-	-	-	-	-				O	X	X	X	X	X	X	X
10	-	-	-	-	-	-	?	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X

3.k>3(多色矩形系統)

(1) [k,n×m]判別式

在矩形系統中，無論 k,n,m 之值為何，皆**適用與討論 k=3 時同樣的方法**討論[k,n×m]是否必不完美：**以鴿籠原理討論 a 格數量，再藉由分析格子對數量$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$的最小值，證明無論 a 格如何填入都將構成同色矩形**。以下將此方法推廣至其他 k 值（k>3）。

①a 格數量≥ $\left[\frac{nm+(k-1)}{k}\right]$ （令此值為 s）

②當$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$有最小值時，a 格應在 m 行中分布如下：

其中$(s-m\left[\frac{s}{m}\right])$行填入$(\left[\frac{s}{m}\right]+1)$個 a，其餘$[m-\left(s-m\left[\frac{s}{m}\right]\right)]$行填入$\left[\frac{s}{m}\right]$個 a

③若以下不等式成立，則[k,n×m]必不完美：

$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i}$的最小值$> C_2^n$，即$\left(s-m\left[\frac{s}{m}\right]\right) C_2^{\left[\frac{s}{m}\right]+1} + [m-\left(s-m\left[\frac{s}{m}\right]\right)] C_2^{\left[\frac{s}{m}\right]} > C_2^n$

但是，判別式只能確定成立(大於)時必定不完美，無法找出所有不完美的情形。例如在[3,10×11]的情況中，判別式不成立(小於或等於)，但實際上此情況不完美。我們尚未能修正判別式，以致能篩選出諸如[3,10×11]這類不完美的情況。

(2)利用輪轉進行 k>3 的完美塗色之構造

輪轉的塗色技巧能將一個 k 色問題簡化為一個有條件的單色問題。在討論完[3,6×15]、[3,9×12]的塗色情形後，我們嘗試將這種塗色方法應用至 k>3 的情形中。以下是我們目前已討論的兩個有趣特例。

①仿照[3,6×15]構造[k,2k×C_2^{2k}]的塗色

由上述判別式，可知當短邊長為 2k 時，要將方格表完美塗色，長邊上限是C_2^{2k}。且此情況代入判別式使等號成立，也就是說：若存在完美塗色，則各顏色必定平均分布於每一直行，也就是每一直行中個顏色皆出現兩格。

由格子對的角度來看，對每個顏色而言，每一直行都將產生一格子對，而兩直行間格子對應不重複，才能完美塗色。我們做以下嘗試：取 2k-1 個直行，將每行中 2k 格各自分拆成 k 個格子對，綜合所有分拆方式不能有格子對重複出現。如果此分拆方法存在，由輪轉的想法，每一種分拆方式可以構造方格表中 k 個直行的塗色，因為 k*(2k-1)= C_2^{2k}，故 2k-1 個分拆方式，恰好能把所有C_2^{2k}直行填色完畢。

1	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
2	a	b	c	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a
3	b	c	a	a	b	c	c	a	b	c	a	b	b	c	a
4	b	c	a	c	a	b	a	b	c	b	c	a	c	a	b
5	c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c	c	a	b
6	c	a	b	c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c

在[3,6×15]中，對直行中的 6 格進行分拆，結果為(12 34 56)(13 25 46)(14 26 35)(15 24 36)(16 23 45)，每種分拆方法皆對應到 3 個直行，此塗色方法對各色而言，其產生的格子對完全不會重複。

而對所有 k 值，我們找到一個一般化流程，可以滿足上述的分拆條件：

(圖示以 k=5 為例)

{1 2 3 4 5 6 7 8 9 10}

・step1 將數字 1~2k 依序排成一數列。

・step2 從數列兩端出發，取第 1 項與第 2k 項為一對，接著取第 2 項與第 2k-1 項一對，以此類推，直到取第 k 項與第 k+1 項一對，至此便完成其中一種分拆方法。

・step3 將 step2 操作完畢之數列，改造成一新數列：第一項(數字 1)不變，原第 2k 項移為第 2 項，原第 2~2k-1 項往後移動一項為第 3~2k 項。重複 step2。

・step4 重複 step3 直到造出 2k-1 種分拆方法為止。

證明 ：此分拆方法，使所有格子對皆不重複地被造出一次：

・含數字 1 的格子對：第一個數列造出(1,2k)、第二個數列造出(1,2k-1)、...、第 2k-1 個數列造出(1,2)，恰好造完。

・不含數字 1 個格子對：流程中共出現 2k-1 個不同數列。從 2~2k 任選兩相異數字(a,b)(令 a<b)，檢視兩數在各數列中距離，只有兩種可能：b-a(當 b 在 a 後的時候)、(a-1)+(2k-b)(當 b 輪換到 a 前的時候)，兩值必呈一奇一偶。**而(a,b)在數列中會被取為一對，若且惟若此兩數距離為奇數，且在數列中的位子呈對稱**。顯而易見地，無論如何揀選 a、b，當數字 2~2k 在數列右側不斷輪換，其中將恰有一次輪換，使 a、b 出現在符合上述條件的位子。

②仿照[3,9×12]構造[k,$k^2\times k(k+1)$]的塗色

[3,9×12]的塗色中出現以 3*3 小方格為單元，有規律的塗色方式：

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	b	c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	c	a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	a	b	c	c	a	b	b	c	a
b	c	a	b	c	a	a	b	c	c	a	b
b	c	a	c	a	b	b	c	a	a	b	c
c	a	b	a	b	c	b	c	a	c	a	b
c	a	b	b	c	a	c	a	b	a	b	c
c	a	b	c	a	b	a	b	c	b	c	a

・整張表由 3*4 個單元組成，**定義垂直排列的三個單元形成一大行，水平排列的四個單元形成一大列**。

・第 1 大行的小單元呈簡單的單行塗色。

・後 3 大行中，九個單元塗色可簡化成如右圖所示。其中，各單元的顏色輪換方向都是往右上，而各單元羅馬數字代表該單元第一行中 a 格出現的位子。

I	I	I
I	II	III
I	III	II

將[3,9×12]代入判別式得到等號的結果，此即代表各色在各直行中呈平均分布，且各顏色所有格子對都要構造。我們將解釋此塗色方式如何滿足以上兩條件。

●條件一：各色在各直行中呈平均分布

平均分布即各直行中各色皆有 9/3=3 個。第一大行的簡單分析顯然滿足平均分布；而後三大行中，每單元皆滿足各行中各色出現 1 次；大行由 3 個單元堆疊而成，故各行中各色出現 3 次，滿足平均分布。

●條件二：各顏色所有格子對都要構造

以下討論**將格子對分成兩種：”同單元內格子對”(如 1,2)、”跨單元格子對”(如 3,4)**。

第一大行(即 1~3 行)，造出各色所有同單元內格子對。

後三大行(即 4~12 行)，造出各色所有跨單元格子對，解釋如下：

由於各單元輪換顏色的方向相同，若任選同大行的兩單元組合，可以造出距離固定(同餘)的跨單元格子對；其「距離除以 3 之餘數」可以直接由羅馬數字相減得到。(ex：位於第 2 大行上方的兩個單元 I，可造出 1~6 列中所有間隔為 3 的跨單元格子對，$3\equiv \mathrm{I}-\mathrm{I}\equiv 0 \pmod 3$)(使用同餘檢驗，避免受單元本身的高度影響。)

各單元呈如右方式排列時，對於任兩大列，在其中各大行的兩單元 之間距值(數字差)，完整包含 0,1,2 且不重複，故能證明：**此 3 大行(9 直行)可造出所有跨單元格子對，且完全沒有重複**。

將小單元塗色規律應用在[k,k^2×k(k + 1)]：

・step1 將表格以 k×k 大小的單位畫分為 k×(k+1)個單元，垂直排列的 k 個單元形成一大行，水平排列的(k+1)個單元形成一大列。

・step2 第一大行的各單元以單行塗色，僅需避免各單元間同行出現同顏色即可。

・step3 對於後 k 大行，先**定義以下 k 個塗色單元**(方便起見，單元代號以阿拉伯數字表示，**此數字代表 a 色格在第一行的位置**)：

a	X	...	...	b
b	a	X	...	...
...	...	a	...	...
...	...	...	...	X
X	...	...	...	a

單元 1

X	...	...	...	a
a	X	...	...	b
b	a	X	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	X

單元 2

...

b	a	X	...	...
...	b	a	...	...
...	...	...	...	X
X	...	...	...	a
a	X	...	...	b

單元 k

・step4 將第 2 大行與第 1 大列(除第 1 大行外)填入單元 1。(如左下圖所示，這裡舉[5,25×30]為例)

・step5 將剩餘的十六個單元填滿，使第 2~(k+1)大行滿足「對於任兩大列，在其中各大行的兩單元之數字差，完整包含 0,1,2,...,k-1 且不重複」。

大列

大行

step	1	1	1	1	1
2	1				
已	1				
完	1				
成	1				

大列

大行

step	1	1	1	1	1
2	1	2	4	3	5
已	1	3	2	5	4
完	1	4	5	2	3
成	1	5	3	4	2

現我們無法構造 step5 的一般方法，但**當 k=質數時，我們有以下構造**：

・step5-1

第三大行：從第一大列起，往下依序填入單元 1、單元 2、...、單元 k；

第四大行：從第一大列起，以間隔一個單元依序跳填單元 2、單元 3、...、單元 k。

操作其他大行時以此類推，並且逐次將跳填間隔增加 1 單元。過程中如超出表格邊界，將該單元填到第 r 大列並繼續操作，其中 r 為其原所跳到之大列除以 k 的餘數。(一個[5,25×30]塗色成功的例子如右上圖所示)

說明：step5-1 已將第 2~(k+1)大行塗色完畢。可以證明，**任取其中兩大行，並任意檢視兩數字差相同的單元，其必不可能出現在相同的兩大列。**以下簡單證明：

引理（四）同餘性質：若 $ta \equiv tb(\mathrm{mod}\ m)$且 t, m 互質，則 $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$。

(否逆敘述：若 $a \not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$且 t, m 互質，則 $ta \not\equiv tb(\mathrm{mod}\ m)$。

因為各大行的各單元皆為依序填入，故兩單元之數字差，可代表其跳填次數。而「操作 step5-1 跳填時，不同兩大行對應的跳填間隔不同。歷經相同的跳填次數後，其總跳填間隔仍不同，故兩大行中數字差相同的兩單元必不再相同兩大列」符合上述引理(四)的否逆敘述，而 step5-1 僅適用 k=質數，故必滿足引理中的互質條件。

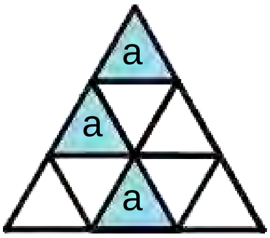
總結以上關於 k>3 的討論：

除了仿照 k=3 時套用判別式，可檢驗不完美之外，我們構造出任意 k 值時 [k,2k×C_2^{2k}]以及 k 為質數時[k,k^2×k(k + 1)]的完美塗色方式；此二皆為壓在判別式之等號界線上的特例，所以解開他們的同時，算是完成了對任意設定[k,n×m]的一大部份討論。

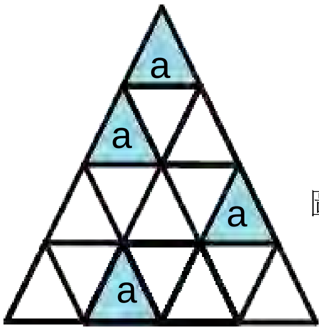
（二）三角形系統

1.k=2（兩色三角形系統）

（1）當 t≦3 時，由於圖形較小，可以直接找出完美正三角形的排法（如圖十六、圖十七）。



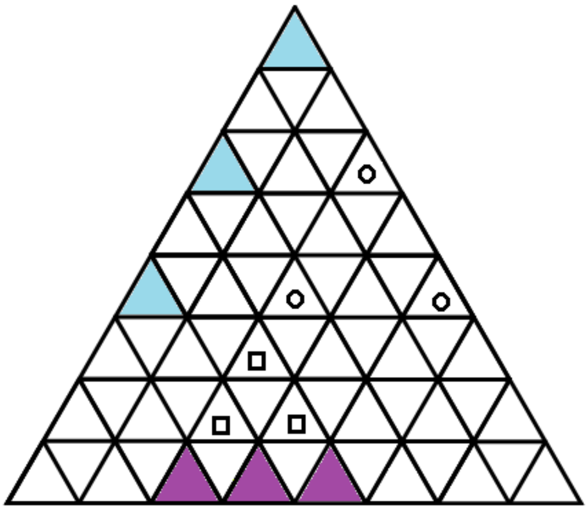
圖十六



圖十七

（2）當 t=4 時，發現到一個性質如下：

※等間隔性質：在 k=2 時，若在任意方向的某行中，有三個呈現等間隔的三角形格子被填入同色，則接下來無論如何塗色必定構成同色三角形。證明解釋如下：



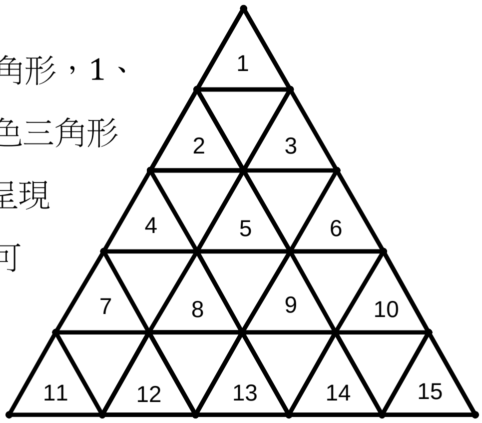
圖十八

在圖十八中，三個藍色出現的位置呈現等間隔（第一橫行、第三橫行、第五橫行）。觀察其右下方標有圓型記號的三格，可以發現當中若任一格填入藍色，則會與呈現等間隔的三格藍色格形成同色三角形；而若三個圓圈皆填入另一個顏色，則自己將構成同色三角形。同理，相連三格紫色格對應三個標有方型之格子也必將構成同色三角形。

（3）當 t=5 時，我們曾嘗試將{2,4}的所有完美塗色情況擴充一行，再運用上述的等

間隔性質，發現{2,5}無法構成完美塗色情況。然而這樣直接討論的過程過於繁雜，我們試圖利用計算或鴿籠原理的方式簡化討論。

※利用鴿籠原理：從分析 4、6、13 這三格出發



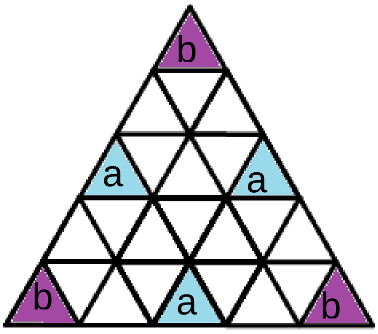
①若 4、6、13 同為顏色 a，為了不行成同色三角形，1、11、15 必須為顏色 b，導致 1、11、15 構成同色三角形（如圖十九）。因此，4、6、13 三格之填色必呈現 2a1b 或 2b1a。由於 4、6、13 互相對稱，我們可以任意設定其中兩個為顏色 a，一個為顏色 b。

②令 4、6 填入 a，13 填入 b，推知 1 必填入 b。而 11、15 為了不（與 13）違反等間隔性質會異色，由於對稱性，不妨假設 11 為 a，15 為 b。（如圖二十）

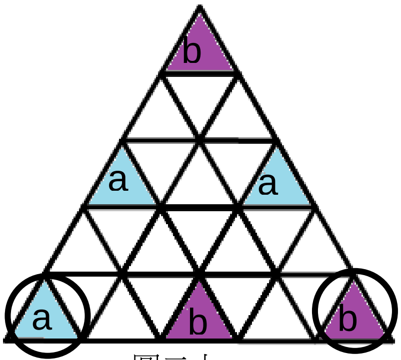
③再利用等間隔性質推得 14 填入 a、7 填入 b。

④由 1、7、10 不能構成同色三角形推知 10 填入 a，再利用等間隔性質推知 3 填入 b，又 1、2、3 不能構成同色三角形，故 2 為 a 色（如圖二十一）

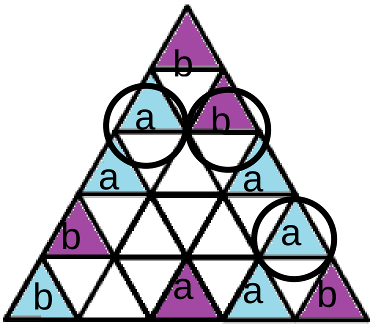
⑤在圖二十二中可以明顯發現，2、11、14 已經構成同色三角形，故**{2,5}**不完美。



圖十九



圖二十



圖二十一

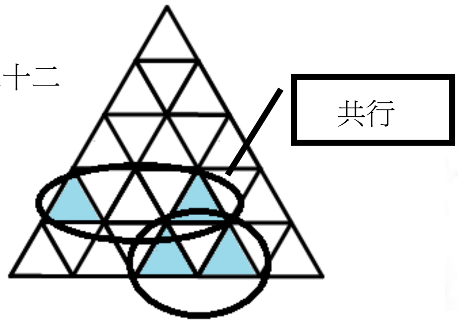
※利用共行組數討論:

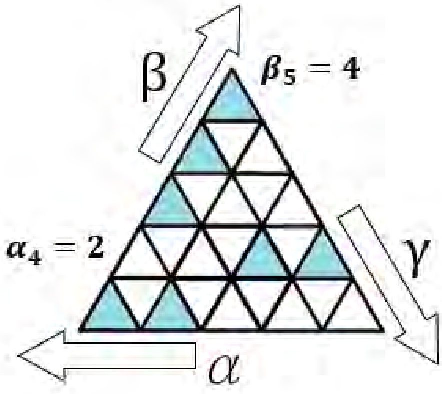
①若存在完美塗色情況，則在此情況下，任何大小的三角形之三頂點皆不同色，又 k=2，故所有三角形的三頂點格子中必有 a 色及 b 色。

②上述之大三角形總共有 10+6+3+1=20 種，先假設 15 個格子全為 b 色，之後每當將一小格改填入 a 色，會使此 20 種三角形中之 4 種的三頂點不全為 b 色。

③但是，若將位在同一行的兩格填入 a，它們會構成某三角形的其中 2 頂點。因此，每出現一組位於同行的 a 格，他們所牽涉到的三角形就會有一個為重複的，所以被變為三頂點不全為 b 的三角形只有 4+4-1=7 個。我們稱位於同行（任意方向皆考慮）的兩 a 格為一組「共行」（如圖二十二）。

圖二十二





圖二十三

綜合上述想法，一旦確認 a 格的總數量，便可得出若存在完美塗色情況，所有 a 格應有幾組共行：a 格總數×4-共行組數=所有大三角形數量。

由鴿籠原理可以得知，a 色格數將≧8 個，設 a 有 8 格，代入可知：

8×4-共行組數=20，共行組數=12

假設$\alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{i}}, \gamma_{\mathrm{i}}$為三個方向上 a 在第 i 排（定義第 i 排表示該排有 i 個小正三角形）的個數（如圖二十三），可以得到形成完美三角形的條件：

$$\sum_{i=1}^{5} C_2^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{5} C_2^{\beta_i} + \sum_{i=1}^{5} C_2^{\gamma_i} = 12$$

對上式的三項套用鴿籠原理，分析討論後，可以發現{2,5}在 a 格有 8 格時不完美。

此共行策略與將{2,4}擴充一行為{2,5}的方法比較，需要討論跟窮舉的情形較不複雜，但仍然沒有辦法快速判定{2,5}不完美。

參、研究結果與討論

一、研究結果

（一）探討矩形方格表填入 2 或 3 色時使[k,n×m]完美的 n、m 值

1.k=2

$n \leq 2$	m 無上限
$n = 3$ 或 $n = 4$	$m \leq 6$
$n \geq 5$	m 無解

2.k=3

n \m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4															O	X
5	-												X	X	X	X
6	-	-										O	X	X	X	X
7	-	-	-							X	X	X	X	X	X	X
8	-	-	-	-						X	X	X	X	X	X	X
9	-	-	-	-	-				O	X	X	X	X	X	X	X
10	-	-	-	-	-	-	?	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	X	X

n<4 時，m 無上限。$n \geq 4$時結果如下表：

（X表由柯西不等式計算使$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$成立，X表考慮整數條件、修正計算方法後發現$\sum_{i=1}^{m} C_2^{a_i} > C_2^n$成立，X表分析其實際塗色情況發現其不完美，?表尚未確認其完美與否，O表已構造出完美塗色情況，空白表其可由推論（一）推論為完美，-表 n>m 不討論）

（二）找出判別[k,n×m]是否完美的判別式

若以下不等式成立，則矩形必不完美：

$\sum_{a_i \in S_a} C_2^{a_i}$的最小值$> C_2^n$，即$\left(s - m\left[\frac{s}{m}\right]\right) C_2^{\left[\frac{s}{m}\right]+1} + [m - \left(s - m\left[\frac{s}{m}\right]\right)] C_2^{\left[\frac{s}{m}\right]} > C_2^n$

（三）構造完美塗色　已找到(任意 k 值)[k,2k×C_2^{2k}]以及(k 為質數)[k,k^2×k(k + 1)]這兩種特例的完美塗色之構造方法，詳見研究過程(報告書 p.15~19)。

（四）三角形系統　探討使{k,t}完美的 k、t 值，目前僅確認 k=2 時結果如下。

t<5	{2,t}完美
t≥5	{2,t}不完美

二、討論

（一）以[3,9×12]討論[3,10×10]的可能塗色情況

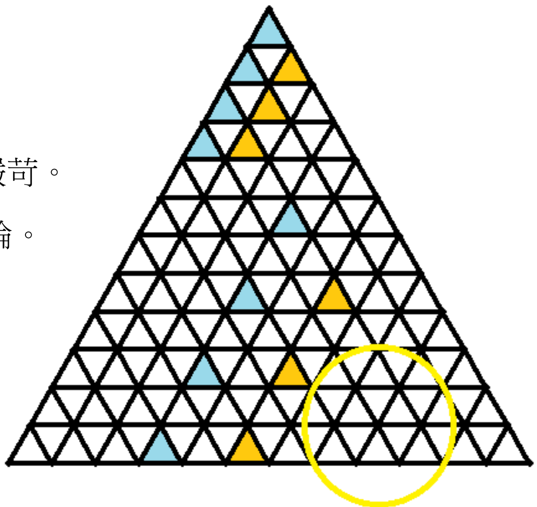
我們嘗試將[3,9×12]的完美塗色情況減少兩行、增加一列，來構造[3,10×10]的塗色方法，結果完美塗色情況無法構成。這是由於[3,9×12]若不以每行 3a3b3c 的方式分布，便必無法完美塗色；但是已確認[3,10×10]的 34 個 a 格有唯一畫法，刪去任何一列之後形成之 9×10 矩形，其中某一行必定填有 4a，故[3,10×10]的完美塗色情況不可能由[3,9×12]的塗色情況延伸。

（二）以程式解決塗色問題

我們也曾嘗試利用寫程式的方式來討論[3,10×10]的問題，但由於程式跑的時間過長，仍然需要以數學方式(例如代入判別式以及已知的 a 色 34 格唯一解)減少電腦不必要的計算，但我們仍在思考如何將這些條件加到程式中，所以尚無法利用程式解決此問題。

（三）三角形系統，$k \geq 3$

我們嘗試推廣討論 k=2 時使用的策略：



1.等間隔性質

$k \geq 3$時，等間隔性質仍然存在，但出現的條件更為嚴苛。

$k = 3$ 時需發生如圖的情形才能適用，因此不容易討論。

2.使用鴿籠原理

因為顏色有三個，但尚未能找到四個以上的等價格子能利用鴿籠原理，故目前無法推廣。

3.利用共行組數討論：

若要利用共行組數討論 k=3，目前遇到的困境如下：

三角形之三頂點格子，在 k=2 時只有兩種可能（2a1b、1a2b），但在 k=3 時爆增為 7 種可能（2a1b、2a1c、2b1a、2b1c、2c1a、2c1b、1a1b1c），且討論 1a1b1c 這種三頂點皆不同色的三角形時，無法利用共行組數表達其個數、分布或關係，故需要進行修正才容易使用。

肆、結論與應用

一、結語

在矩形系統中，我們幾乎完整的討論了填入兩色與三色時[k,n×m]是否完美。而當推廣至超過三色時，我們找到一條不等式，若不等式成立，則[k,n×m]不完美，但此不等式無法檢驗出所有不完美的情況；我們也找到(對所有 k)[k,2k×C_2^{2k}]以及(當 k 為質數時)[k,k^2×k(k + 1)]之完美塗色的一般性構造方法。

在三角形系統中，我們確定填入兩色時以 t=5 為界，若 t<5，則{2,t}完美；若 t≥5，則{2,t}不完美。而填入三色乃至 k 色的情形仍待未來繼續討論。

二、未來展望

（一）、將判別式作修正，使不必透過討論，便可確定[k,n×m]必完美或必不完美。

（二）、探討$k \geq 3$時{k,t}是否完美。

（三）、推廣更多圖形並討論其性質：

將矩形方格表延伸至長方體、將三角格子表延伸至三角錐等等。

伍、參考文獻

1. 謝聰智 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_4_07/index.html
2. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1976_USAMO_Problems
3. 葉中豪（？），奧林匹克數學方法選講，上海教育出版社

【評語】010012

這篇論文的研究主題源自於 1976 年 USAMO 第一大題「將一 4×7 矩形方格表的每格塗色黑色或白色，欲使所有能構成矩形頂點的四個方格皆不全為同色。試證明其塗色必定失敗、或給出滿足的塗色方式。」作者們運用鴿籠原理、組合數量之計算及柯西不等式這些簡單的計數技巧，對於兩色及三色的一般化問題給出了完整的說明。對於多種顏色的情況也作了一些討論。說理清楚，使用的分析手法也十分巧妙，值得嘉許。對於更一般化的 k 色問題的討論稍嫌少了些。除了針對特定形式的格點圖構造完美塗色，應該還是可以給出不可能存在完美塗色的格點圖所需滿足的條件。如果能在這個部分稍做著墨會更好。