2018 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010009

參展科別　數學

作品名稱　道同互相為「蒙」—蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣

得獎獎項　大會獎：四等獎

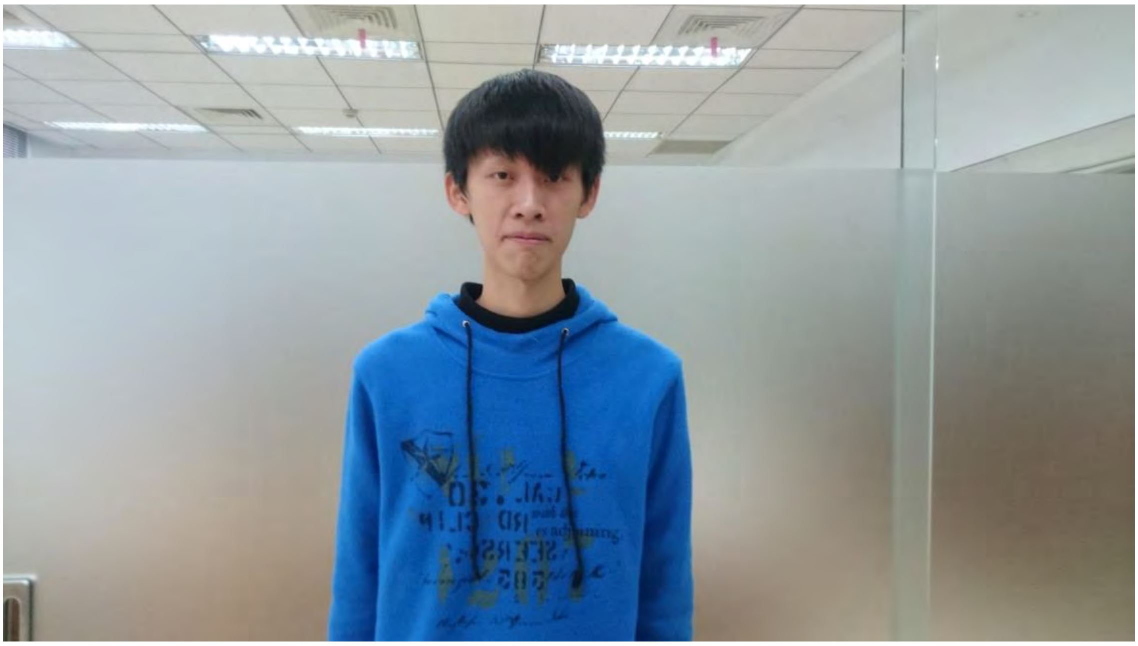
就讀學校　臺北市立麗山高級中學

指導教師　林永發

作者姓名　郭品辰、盧冠綸

關鍵詞　蒙日定理、共點共線、射影幾何

作者簡介



我是郭品辰，目前就讀臺北市立麗山高級中學三年級。自幼就對數學懷有熱忱的我，平時便常找尋有趣的數學知識，或是翻閱數學的相關書籍，也理所當然地在學校的專題研究課程中，選擇了數學專題，就此展開研究之路。

很榮幸能再次參與這場盛會，期許在一年的洗禮後，我們能有更傑出的表現，同時也希望能與來自四面八方的「科展人」，一同分享彼此研究過程中的驚奇與辛苦，學習新知，並滿載而歸。

我是盧冠綸，目前就讀於台北市立麗山高中三年級。自幼我即對生活周遭的各種有趣的自然現象感到好奇。升上高中後，接觸到了學校的專題研究課程，我開始一心一意的投入研究，學習各種研究方法，發掘了我對數學研究的熱忱。希望在這次的盛會之中，經過這一年來的努力，能夠有更好的表現，並看到更多的研究作品，增廣見聞，結交更多投身於科學研究的同儕。

摘　要

本研究以蒙日定理「平面上三圓彼此外公切線交點共線，以及彼此內公切線交點與另一圓的圓心的連線共點」出發，在數量、形狀及維度上進行一系列問題的推廣。正如本研究作品名稱**「道同」互相為「蒙」**，發現對於任意*N*維空間中的*n*個圖形，只要圖形互相「**位似**」，均有蒙日點、蒙日圓或蒙日形等蒙日定理性質。同時，透過蒙日點與各圖形位置及大小的關係，可發現更多共點共線及共圓的有趣性質，其中最令人驚豔的是「分堆的（廣義）蒙日點共線」性質：「k圓蒙日點、n-k圓蒙日點及n圓蒙日點共線」。此外，本研究提出的工具方法及觀點，可應用至許多方面，如「蒙日圓」與Desargues、Pascal和Brianchon等定理的關聯，亦可解釋光學中的薄透鏡成像公式，更將蒙日定理連結Menelaus、Ceva定理，進而能重新詮釋共點共線的幾何定理。

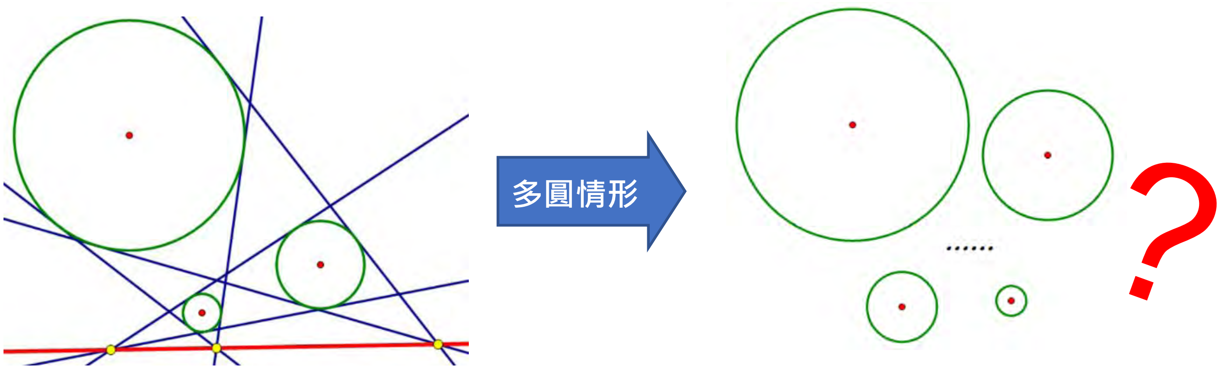
Abstract

This research is based on Monge's theorem: “for three circles in a plane, the intersections of each pair of common external tangents are collinear” and its dual theorem: “for three circles in the plane, the intersections of each pair of common internal tangents are connected to the other circle’s center respectively, these three lines are concurrent.” We propose some extensions on several aspects, such as the quantity, shape, and dimension and find a wonderful result: “given n figures in N-dimensional space, if those figures are homothetic, Monge’s theorem holds true.” Also, through the relationship among the position, coordinate and radius of each circle, we can infer more properties of concurrent and collinear by applying the coordinate formula of Monge point. The most special property is the “division property of Monge Point”, which states that the Monge point of k circles, n-k circles and n circles are collinear. Furthermore, the new constructions and fresh perspectives we proposed in the process of our research can apply to combining other Geometry theorem such as Desargues theorem, Pascal theorem and so on, and can explaining thin lens equations in Optics. They can even reinterpret Menelaus and Ceva theorem and most of collinear and concurrent theorem.

壹、前言

一、研究動機

我們在 The Schiller Institute 網站[8]上看到蒙日線定理「平面上外離的三圓，任兩圓的外公切線交點共線」，並在文獻中發現還有蒙日點定理「平面上外離的三圓，任兩圓的內公切線交點與第三圓圓心的連線共點」以及此兩定理較廣義的推廣。我們非常好奇這些三圓的蒙日定理在四圓、五圓甚至是在 n 圓上的情形，即使經過大量文獻閱讀後，發現前人所作大多停留在三個圓或三個球體的研究，未見四圓以上的推廣，其中很可能是因為原定理敘述的兩圓外公切線交點不知如何類比至三圓、四圓以至 n 圓的作圖，因而不知此情形下的蒙日定理如何描述。於是在好奇心的驅使之下，我們展開一系列的相關問題研究，期待能找到更好的作法，試圖將這個有關射影幾何的著名定理推廣至平面上的 n 圓，甚至是在 N 維空間的情形。



二、研究目的與問題

本研究試圖將平面上三圓中的蒙日定理推廣至n個圓、球、多邊形以至N維空間的任意圖形，並探討其中的相關性質，問題如下：

（一）探討平面上外離的四圓、五圓以至n個圓中蒙日點的相關性質及其推廣。

（二）探討平面上代表n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。

（三）試圖探討平面上非外離圓的蒙日定理，並重新探討其性質之間的關係。

（四）試圖將上述性質推廣至空間中的球體，進而探討蒙日定理在N維空間中的存在性。

（五）試圖在不同條件變換觀點下，探討蒙日定理的存在性。

貳、研究工具與研究方法

一、研究工具

本研究利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行幾何問題的實驗，並透過觀察、猜測、驗證等，發掘研究結果並加以證明。

為了讓符號能充分表達其所代表的幾何意義，做了以下符號命名：

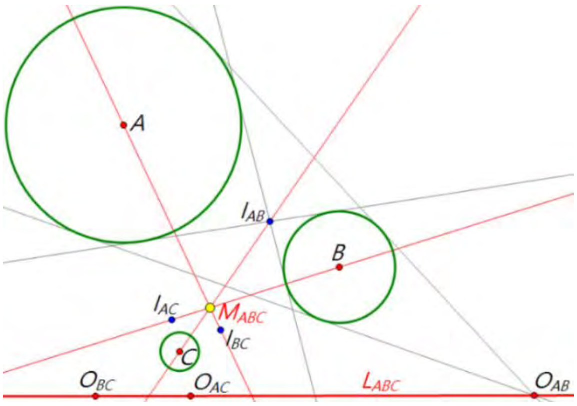
I_{AB} ：圓 A 與圓 B 的內公切線交點

O_{AB} ：圓 A 與圓 B 的外公切線交點

M_{ABC}：圓 A、B、C 的蒙日點

L_{ABC} ：圓 A、B、C 的蒙日線

r_A ：圓 A 的半徑長

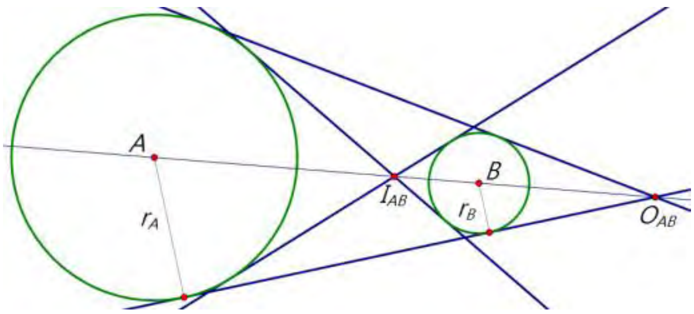


二、文獻探討與前置研究

本研究範圍涉及平面上及空間中圖形間的共點共線性質，將引用位似比概念及有關共點共線的定理，以簡化證明過程，如下：

（一）位似圖形、Menelaus、Ceva 及 Desargues 定理（參見文獻**[3]**、**[4]**）

若兩相似多邊形對應頂點連線共點，則稱其互為**位似圖形**，交點稱為**位似中心**，相似比又稱為**位似比**，可透過相似性質得知。若將圓視為無限多邊形，則兩圓必互為位似圖形，其內、外公切線交點分別稱為**位似內心**與**位似外心**，如圖 1。



▲圖 1：兩圓 A、B的位似內心I_{AB}與位似外心O_{AB}

【位似定理】

設兩圓 A、B 的內公切線交點（位似內心）為I_{AB}，外公切線交點（位似外心）為O_{AB}，

則兩圓的位似比為 $\frac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{BI_{AB}}}=\frac{r_A}{r_B}=\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}$，如圖 1。

【Menelaus 定理】

設 D、E、F 分別在 $\triangle ABC$ 的 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 邊上，若 D、E、F 三點共線，

則 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$，反之亦然，如圖 2。

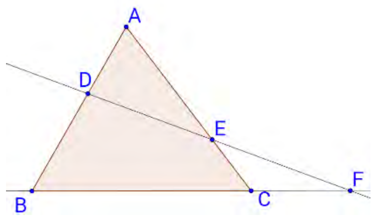
【Ceva 定理】

設 D、E、F 分別在 $\triangle ABC$ 的 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 邊上，若 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 三線共點，

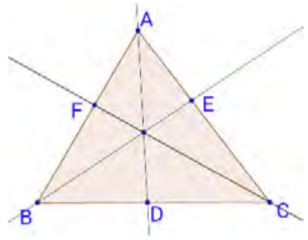
則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$，反之亦然，如圖 3。

【Desargues 定理】

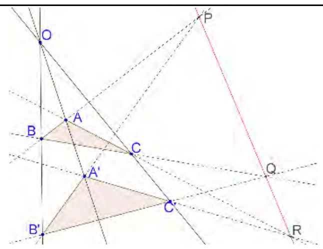
在射影空間中的兩三角形$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$，若兩三角形對應點連線共點於O，則兩三角形對應邊連線交點P、Q、R共線，反之亦然，如圖 4。



▲圖 2：Menelaus 定理



▲圖 3：Ceva 定理



▲圖 4：Desargues 定理

（二）蒙日定理及其相關定理（參見文獻[5]、[8]）

【蒙日線定理】

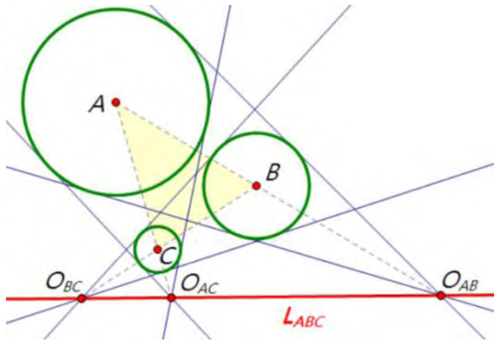
設平面上三個外離圓A、B、C，作任兩圓的外公切線交點（位似外心）O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}，則此三點共線，此線稱為**三圓蒙日線**，並以L_{ABC}表示，如圖5。

＜證明＞

1° 如右圖 5，$\triangle ABC$中，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}分別在三邊延長線上，根據位似定理知

$$\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{O_{AB}B}} \times \frac{\overline{BO_{BC}}}{\overline{O_{BC}C}} \times \frac{\overline{CO_{AC}}}{\overline{O_{AC}A}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1，$$

2° 根據 Menelaus 逆定理知 O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。 ■

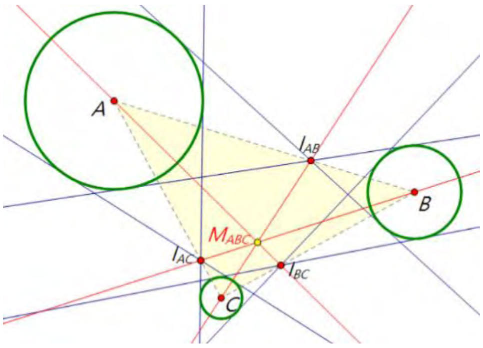


▲圖 5：蒙日線定理

當圓大小相同時，可視兩條平行的外公切線在無窮遠處相交一點，並可視其結果滿足定理敘述。因此在圓的大小相同時，本研究的所有性質仍能成立，而為方便後續討論，以下研究主要以相異大小的圓來進行研究探討。

【蒙日點定理】

設平面上三個外離圓 A、B、C，任 1 圓的圓心與另 2 圓的內公切線交點（位似內心）連線，即$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$，則此三線共點，此點稱為**三圓蒙日點**，並以$M_{ABC}$表示，如圖 6。



▲圖 6：蒙日點定理

＜證明＞

1° 如右圖 6，作△ ABC，I_{AB}、I_{AC}、I_{BC}分別在三邊延長線上，根據位似定理知

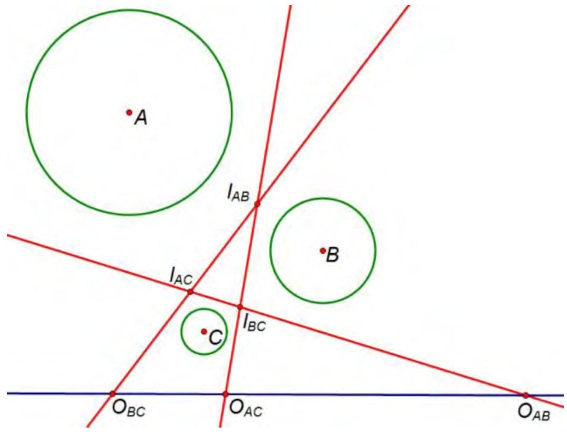
$$\frac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{I_{AB}B}} \times \frac{\overline{BI_{BC}}}{\overline{I_{BC}C}} \times \frac{\overline{CI_{AC}}}{\overline{I_{AC}A}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1，$$

2° 根據 Ceva 逆定理知 $\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。 ■

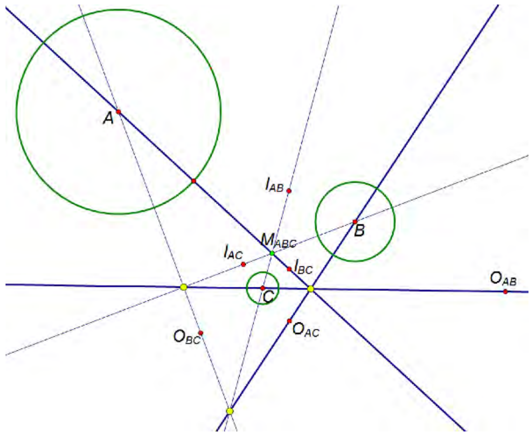
除三圓蒙日點外，為方便後續討論，不妨定義兩圓的位似內心I_{AB}為「**二圓蒙日點**」，亦即$M_{AB} = I_{AB}$；而一個圓 A 時「**一圓蒙日點**」即為該圓圓心 A，亦即$M_A = A$。若上述兩定理經由條件變換後，可得到另外兩個定理：

【廣義蒙日線】

平面上三個外離圓 A、B、C，任 2 圓的位似外心（如O_{AB}），與此 2 圓分別與第三圓的位似內心（如I_{AC}、I_{BC}）三點共線，如圖 7。同理，$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$均分別三點共線，稱其為「**廣義蒙日線**」。



▲圖 7：廣義蒙日線定理



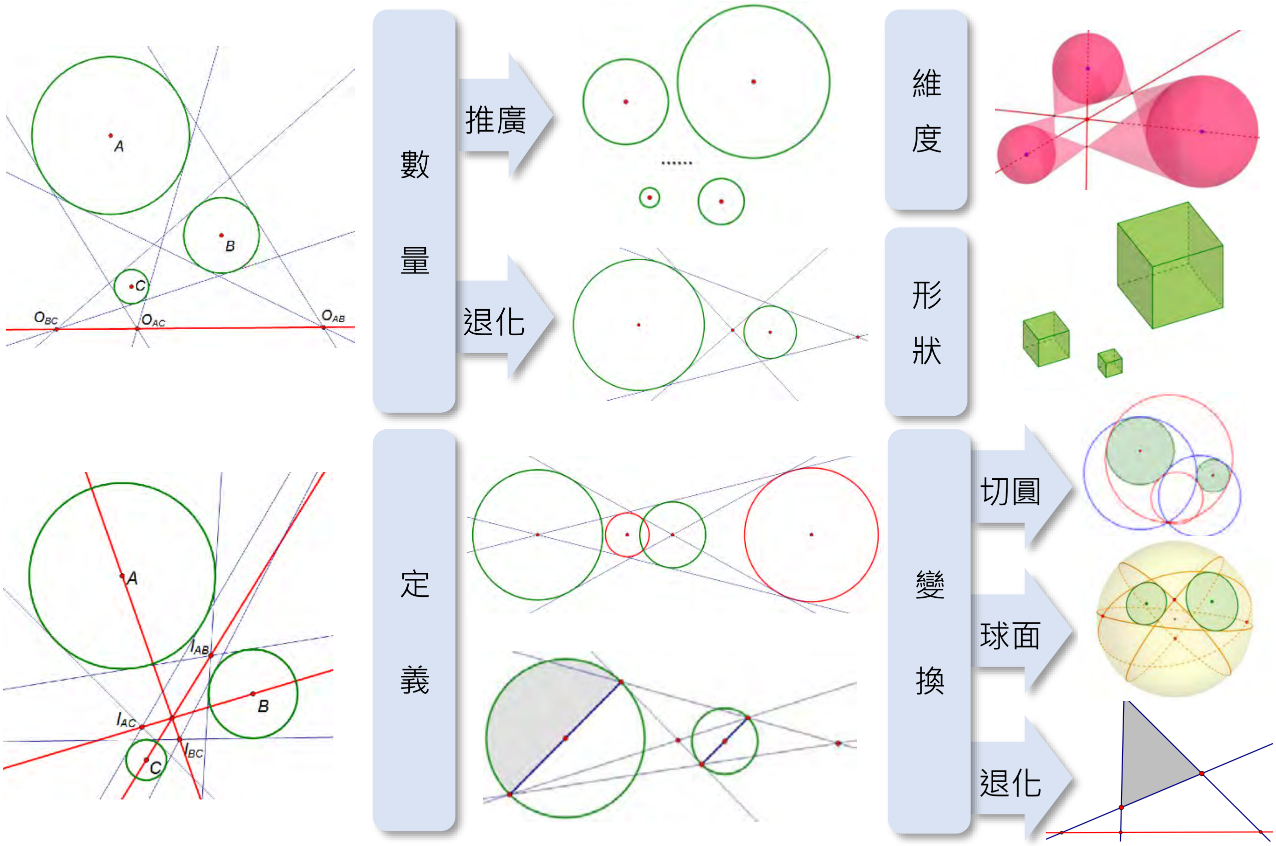
▲圖 8：廣義蒙日點定理

【廣義蒙日點】

平面上三個外離圓 A、B、C，任 1 圓圓心與另 2 圓的位似內心連線（如$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$），及另 2 圓圓心分別與另 2 圓位似外心連線（如$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$），則此三線共點。如上頁圖 8，同理 $(\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}})$、$(\overleftrightarrow{CI_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}})$均三線共點，稱其為「**廣義蒙日點**」

上述兩性質皆可以**蒙日線定理**及**蒙日點定理**的證明方式，透過作△ ABC 並以 Menelaus **定理**或 Ceva **定理**證得，故不再贅述。

三、研究方法與架構



參、研究結果與討論

一、外離 n 圓中蒙日點的性質與推廣

首先由四個外離圓開始討論，運用類比的手法，若將定理中的「兩圓內公切線交點」改為「三圓蒙日點」，並作些微調整，可發現四圓時的蒙日點與廣義蒙日線定理，如下：

【定理 1-1】四圓蒙日點

設A、B、C、D為平面上的四個外離圓，則有下列三個結果：

(1) 任2圓作位似外心（如選A、B作出O_{AB}），此2圓再分別與其餘2圓作蒙日點（如A與C、D作蒙日點$\mathrm{M_{ACD}}$，B與C、D亦作M_{BCD}），則此三點共線，稱為**四圓廣義蒙日線**，如圖1-1。

(2) 任1圓的圓心與另3圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$，則此四線共點，稱其為**四圓蒙日點**，並以符號M_{ABCD}表示，如下頁圖1-2。

(3) 任2圓的位似內心與另2圓的位似內心連線（如$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$），則此三線必皆通過四圓蒙日點，如下頁圖1-3。

＜(1)證明＞如右圖1-1

1° 在△ACI_{CD}中，以I_{AC}、D、M_{ACD}為截線，

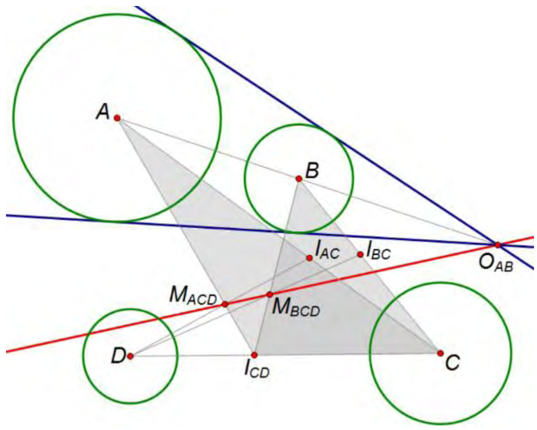
由 Menelaus 定理知 $\dfrac{\overline{AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}C}}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}\times\dfrac{\overline{I_{CD}M_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}A}}=1$，

並由位似定理知 $\dfrac{\overline{AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}C}}=\dfrac{r_A}{r_C}$，

則上式可改寫為 $\dfrac{\overline{AM_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}I_{CD}}}=\dfrac{r_A}{r_C}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}$；

同理，在△BCI_{CD}中，以I_{BC}、D、M_{BCD}為截線

可得 $\dfrac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}B}}=\dfrac{r_C}{r_B}\times\dfrac{\overline{DI_{CD}}}{\overline{CD}}$。



▲圖 1-1：四圓廣義蒙日線
（圖中僅顯示其中一條）

2° 在△ABI_{CD}中，O_{AB}、M_{ACD}、M_{BCD}分別在三邊延長線上，由上述1°及位似定理

可得 $\dfrac{\overline{BO_{AB}}}{\overline{O_{AB}A}}\times\dfrac{\overline{AM_{ACD}}}{\overline{M_{ACD}I_{CD}}}\times\dfrac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}B}}=\dfrac{r_B}{r_A}\times\left(\dfrac{r_A}{r_C}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DI_{CD}}}\right)\times\left(\dfrac{r_C}{r_B}\times\dfrac{\overline{DI_{CD}}}{\overline{CD}}\right)=1$，

由 Menelaus 逆定理可證得 O_{AB}、M_{ACD}、M_{BCD}三點共線。

同理，$(O_{AC}$、M_{ABD}、$M_{BCD})$、$(O_{AD}$、M_{ABC}、$M_{BCD})$、$(O_{BC}$、M_{ABD}、$M_{ACD})$、$(O_{BD}$、M_{ABC}、$M_{ACD})$、$(O_{CD}$、M_{ABC}、$M_{ABD})$亦分別三點共線。

＜(2)證明＞如右圖1-2

1° 作$\triangle ABC$與$\triangle M_{BCD}M_{ACD}M_{ABD}$，

根據(1)，可知

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{AB}$交於$O_{AB}$，

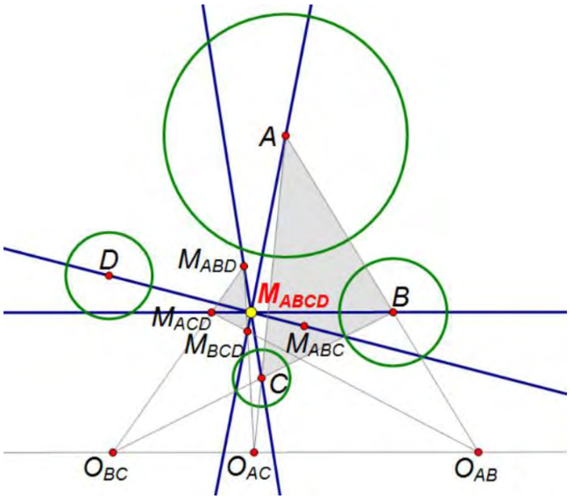
$\overleftrightarrow{M_{ACD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{AC}$交於$O_{AC}$。

2° 由蒙日線定理知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，並且由 Desargues 定理可得$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$ 三線共點，

同理，$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$三線共點，

故$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$四線交於一點。



▲圖 1-2：1 圓圓心與另 3 圓的蒙日點連線必通過四圓蒙日點

＜(3)證明＞如右圖1-3

1° 在$\triangle BDI_{AB}$中，以I_{BD}、M_{ABD}、A為截線，

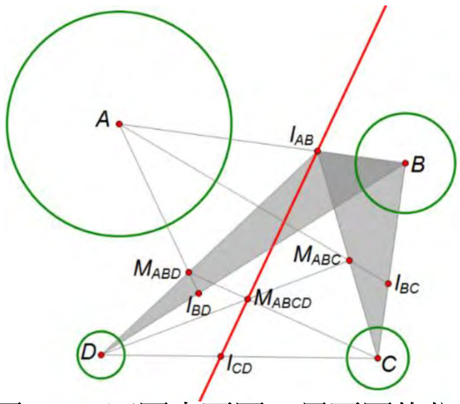
由 Menelaus 定理知$\frac{\overline{BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}D}}\times\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}=1$，

並由位似定理知$\frac{\overline{BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}D}}=\frac{r_B}{r_D}$

則上式可改寫為$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}=\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{AB}}}$。

同理，在$\triangle BCI_{AB}$中，以I_{BC}、M_{ABC}、A為截線

可得$\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}$。



▲圖 1-3：四圓中兩圓、另兩圓的位似內心與四圓蒙日點共線（圖中僅顯示其中一條）

2° 在$\triangle CDI_{AB}$中，I_{CD}、M_{ABD}、M_{ABC} 分別在三邊延長線上，由上述1°及位似定理可得

$$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}\times\frac{\overline{CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}D}}=\left(\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{AB}}}\right)\times\left(\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}\right)\times\frac{r_C}{r_D}=1，$$

由 Ceva 逆定理知$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點，

又根據(2) $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$交於$M_{ABCD}$，則可證得$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$通過點$M_{ABCD}$。

同理，$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$亦皆通過$M_{ABCD}$。

■

【定理 1-2】五圓蒙日點

設A、B、C、D、E為平面上的五個外離圓，則有下列三個結果：

(1) 任2圓作位似外心（如A、B作出O_{AB}），此2圓再分別與另3圓作蒙日點（如A與C、D、E作M_{ACDE}，B與C、D、E作M_{BCDE}），則此三點共線，稱其為**五圓廣義蒙日線**，如圖1-4。

(2) 任1圓的圓心與另4圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{AM_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABDE}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABCE}}$、$\overleftrightarrow{EM_{ABCD}}$，則此五線共點，稱其為**五圓蒙日點**，並以符號$\mathrm{M_{ABCDE}}$表示，如圖1-5。

(3) 任2圓的位似內心與另3圓的蒙日點連線（如$\overleftrightarrow{I_{AB}M_{CDE}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}M_{BDE}}$等共$C_2^5=10$條線），則此10條連線必皆通過五圓蒙日點，如圖1-6。

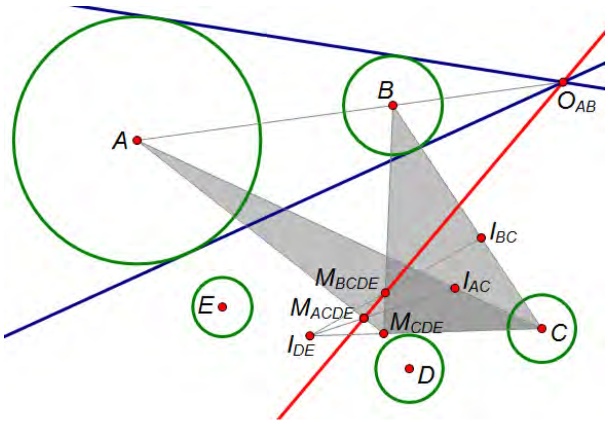
＜證明＞如右圖1-4

1° $\triangle ACM_{CDE}$中，I_{AC}、I_{DE}、M_{ACDE}分別在三邊延長線上，且依【定理 1-1】知此三點共線，由 Menelaus 定理與位似定理知

$\dfrac{\overline{AM_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}M_{CDE}}}=\dfrac{r_A}{r_C}\times\dfrac{\overline{CI_{DE}}}{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}$，同理在

$\triangle BCM_{CDE}$中，以I_{BC}、I_{DE}、M_{BCDE}為截線得

$\dfrac{\overline{M_{CDE}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}B}}=\dfrac{r_C}{r_B}\times\dfrac{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}{\overline{CI_{DE}}}$。



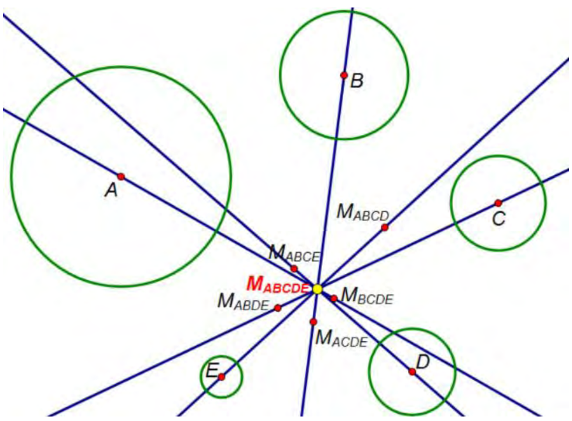
▲圖 1-4：五圓廣義蒙日線

2° 在$\triangle ABM_{CDE}$中，O_{AB}、M_{BCDE}、M_{ACDE}分別在三邊延長線上，由上述1°及位似定理

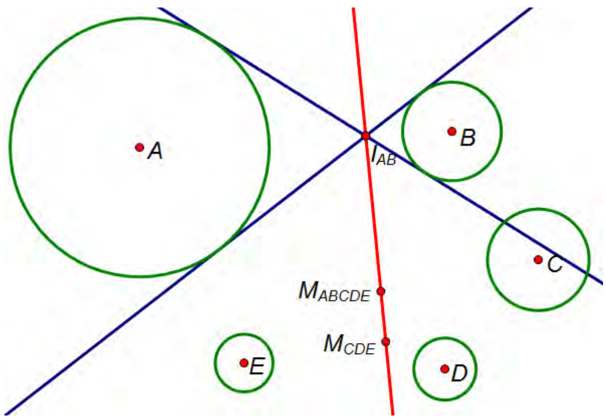
可得$\dfrac{\overline{AM_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}M_{CDE}}}\times\dfrac{\overline{M_{CDE}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}B}}\times\dfrac{\overline{BO_{AB}}}{\overline{O_{AB}A}}=\left(\dfrac{r_A}{r_C}\times\dfrac{\overline{CI_{DE}}}{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}\right)\times\left(\dfrac{r_C}{r_B}\times\dfrac{\overline{I_{DE}M_{CDE}}}{\overline{CI_{DE}}}\right)\times\dfrac{r_B}{r_A}=1$，

由 Menelaus 逆定理可證得O_{AB}、M_{BCDE}、M_{ACDE}三點共線。

3° 同理可證得另九組亦分別三點共線。類比【定理 1-1】證明方式亦可證得(2)、(3)。 ■



▲圖 1-5：五圓蒙日點



▲圖 1-6：五圓中，兩圓與另三圓蒙日點關係

由四圓、五圓的結果，我們大膽提出下面 n 個圓情形的猜測，並透過數學歸納法得證。

【定理 1-3】n 圓蒙日點

設A_1、A_2、…、A_{n-1}、A_n為平面上的n個外離圓（$n \in \mathbb{N}$，$n \geq 3$），則有下列三個結果：

(1) 任選2圓作位似外心（如作$O_{A_1A_2}$），此2圓再分別與另n-2圓作蒙日點（如作$M_{A_1A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}$、$M_{A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}$），則此三點共線，稱為**$n$圓廣義蒙日線**。

(2) 任1圓的圓心與另n-1圓的蒙日點連線，即作出$\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}}$、$\overleftrightarrow{A_2M_{A_1A_3\cdots A_{n-1}A_n}}$等線，則此$n$線共點，稱其為**$n$圓蒙日點**，並以符號$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$表示。

(3) 任2圓的位似內心與另n-2圓的蒙日點連線（如$\overleftrightarrow{I_{A_1A_2}M_{A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}}$），則此$C_2^n$條線必皆通過四圓蒙日點。

＜證明＞

1° 當 $n = 3,4,5$ 時，根據蒙日定理、【定理1-1】、【定理1-2】，則敘述(1)(2)(3)成立。

2° 假設 $n = k$ 時成立（其中$k \in \mathbb{N}$，$k \geq 5$），即下列敘述(1)(2)(3)。

(1) 任2圓的位似外心，與此2圓分別和另k-2圓構成的兩個k-1圓蒙日點形成三點共線。

(2) 任1圓的圓心與另k-1圓的蒙日點連線共點。

(3) 任2圓的位似內心與另k-2圓的蒙日點連線必通過k圓蒙日點。

3° 當$n = k + 1$，代入敘述(1)時：

(1) $\triangle A_1A_2M_{A_2A_3\cdots A_k}$中，$M_{A_1A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_k}$、$M_{A_1A_2\cdots A_k}$分別在三邊延長線上，

依上述2°（3）知此三點共線，由Menelaus定理與位似定理知

$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} = \frac{r_{A_1}}{r_{A_2}} \times \frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} \quad ;$$

同理在$\triangle A_{k+1}A_2M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}$中，以$M_{A_2A_{k+1}}$、$M_{A_3A_4\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$為截線得

$$\frac{\overline{M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}A_{k+1}}} = \frac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}}。$$

(2) $\triangle A_1A_{k+1}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}$中，$M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$、$O_{A_1A_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由上述3°(1)及位似定理可得

$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{\overline{M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}A_{k+1}}} \times \frac{\overline{A_{k+1}O_{A_1A_{k+1}}}}{\overline{O_{A_1A_{k+1}}A_1}}$$

$$= \left(\frac{r_{A_1}}{r_{A_2}} \times \frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}\right) \times \left(\frac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_k}M_{A_2A_3A_4\cdots A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_k}}} \times \frac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}}\right) \times \frac{r_{A_{k+1}}}{r_{A_1}} = 1，$$

(3) 由Menelaus逆定理可證得$M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}$、$O_{A_1A_{k+1}}$三點共線，同理可證得其它組三點共線。敘述成立。

4° 當 $n=k+1$，代入敘述(2)時：

(1) 作$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle M_{A_2A_3\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}$，由定義及上述3°可知

$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$O_{A_1A_2}$，

$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$交於$O_{A_1A_3}$，

$\overleftrightarrow{M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$O_{A_2A_3}$。

(2) 根據蒙日線定理知$O_{A_1A_2}$、$O_{A_1A_3}$、$O_{A_2A_3}$三點共線，並由Desargues定理可得

$\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_2M_{A_1A_3A_4\cdots A_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_3M_{A_1A_2A_4\cdots A_{k+1}}}$三線交於一點。

(3) 同理可寫出其他式，結合3°可得此$k+1$線共交一點$M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$。敘述成立。

5° 當$n=k+1$，代入敘述(3)中時：

(1) $\triangle A_1A_2M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，$M_{A_1A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$分別在三邊延長線上，且依4°知此三點共線，由Menelaus定理與位似定理知

$$\frac{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}A_1}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}}=\frac{r_{A_1}}{r_{A_2}}\times\frac{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}。$$

同理在$\triangle A_{k+1}A_2M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，以$M_{A_{k+1}A_2}$、$M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$為截線

得$\dfrac{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}A_{k+1}}}=\dfrac{r_{A_2}}{r_{A_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{A_2M_{A_3A_4\cdots A_{k-1}A_k}}}$。

(2) $\triangle A_1A_{k+1}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}$中，$M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_1A_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由上述5°（1）及位似定理可知

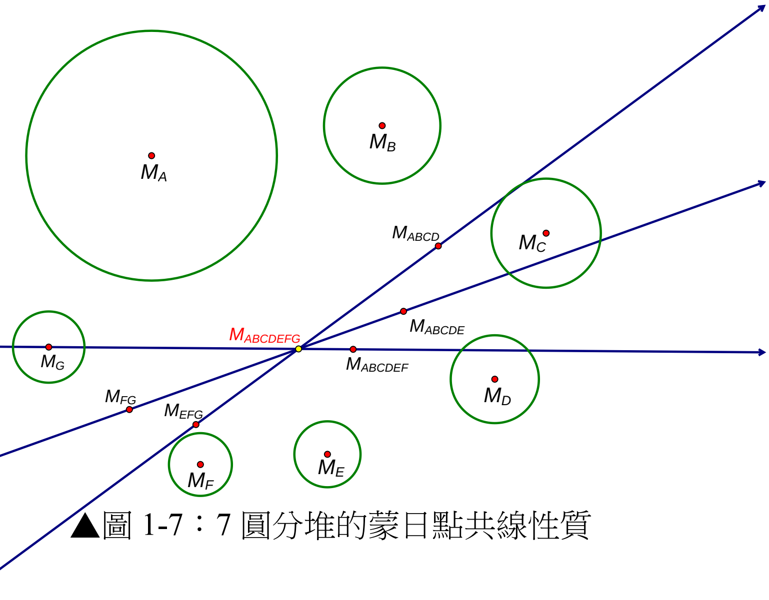
$$\frac{\overline{A_1M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}}\times\frac{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}M_{A_1A_{k+1}}}}{\overline{M_{A_1A_{k+1}}A_1}}=1。$$

(3) 由Ceva逆定理知$\overleftrightarrow{A_1M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+1}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}$、$\overleftrightarrow{M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_{k+1}}}$三線共點，結合上述4°便可證明$\overleftrightarrow{M_{A_1A_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}}$通過$M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$，同理可證得其他線亦皆通過$M_{A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$。結果成立。

6° 由1°~5°，並由數學歸納法知，$\forall n\in\mathbb{N}$，$n\geq 3$，【定理1-3】均成立。

■

由 1、2 圓蒙日點的定義可將定理 1-3 的 (2)、(3)敘述視為「1 圓與另 n-1 圓蒙日點連線通過 n 圓蒙日點」、「2 圓與另 n-2 圓蒙日點連線通過 n 圓蒙日點」，而在七圓中也發現除上述兩性質外，3 圓與另 4 圓蒙日點連線亦通過 7 圓蒙日點。於是我們大膽猜測「***k* 圓與另 *n-k* 圓蒙日點連線通過 *n* 圓蒙日點**」，發現其結果令人驚豔。

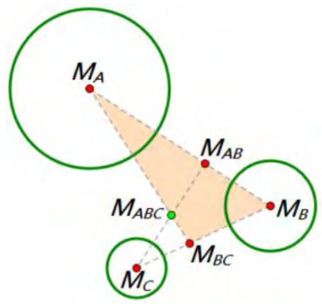


▲圖 1-7：7 圓分堆的蒙日點共線性質

我們一開始亦想藉由數學歸納法的方式證明，但由於此定理有兩個變數，過程會太過繁瑣，有失定理之美，因此轉而想先找出蒙日點與各圓位置、半徑大小的幾何量關係，期待透過代數方法為此定理做出較簡潔的證明。

首先由 3 圓情形討論，如右圖 1-8，在△ $M_AM_BM_{BC}$(即△ ABC)中，M_{AB}、M_{ABC}、M_C分別在三邊延長線上且共線，由 Menelaus 定理與位似定理得 $\frac{\overline{M_AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}M_{BC}}}=\frac{\overline{M_AM_{AB}}}{\overline{M_{AB}M_B}}\times\frac{\overline{M_BM_C}}{\overline{M_CM_{BC}}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{r_B+r_C}{r_C}=\frac{\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}{\frac{1}{r_A}}$，

所以 $\boldsymbol{\overline{M_AM_{ABC}}:\overline{M_{ABC}M_{BC}}=\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}\right):\left(\frac{1}{r_A}\right)}$。



▲圖 1-8：證明簡圖

在 $\overline{M_BM_C}$上，由分點公式知 $\overrightarrow{OM_{BC}}=\frac{r_C}{r_B+r_C}\cdot\overrightarrow{OM_B}+\frac{r_B}{r_B+r_C}\cdot\overrightarrow{OM_C}$，

而在$\overline{M_AM_{BC}}$上，由分點公式知 $\overrightarrow{OM_{ABC}}=\frac{\frac{1}{r_A}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}\cdot\overrightarrow{OM_A}+\frac{\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}\cdot\overrightarrow{OM_{BC}}$，

將第一式代入第二式化簡可得 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{ABC}}=\frac{1}{r_A}\cdot\overrightarrow{OM_A}+\frac{1}{r_B}\cdot\overrightarrow{OM_B}+\frac{1}{r_C}\cdot\overrightarrow{OM_C}}$。

從上述這兩個關係式，我們可以大膽推測在 n 個圓時的公式，並以數學歸納法證明。

【定理 1-4】蒙日點間的距離關係、蒙日點坐標與各圓半徑及坐標關係

設A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n為平面上 n 個外離圓，半徑分別為r_1、r_2、……、r_{n-1}、r_n，則

(1) $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\frac{1}{r_1}\right)$。

(2) $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$。

＜(1)證明＞

1° 當 n=2 時，由位似定理知$\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2}}$ ：$\overline{M_{A_1A_2}M_{A_2}} = \frac{1}{r_2}$ ：$\frac{1}{r_1} = \left(\sum_{i=2}^{2}\frac{1}{r_i}\right)$ ：$\left(\frac{1}{r_1}\right)$，

敘述成立。

2° 假設 $n=k$ 時成立，即 $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}$ ：$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_2A_3\cdots A_{k-1}A_k}} = \left(\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$ ：$\left(\frac{1}{r_1}\right)$，

則當 $n=k+1$ 時，則在$\triangle M_{A_1}M_{A_2}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}$中，$M_{A_1A_2}$ 、$M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}$ 、$M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}$

分別在三邊延長線上且共線，由 Menelaus 定理、位似定理與假設可得

$$\frac{\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}} = \frac{\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2}}}{\overline{M_{A_1A_2}M_{A_2}}} \times \frac{\overline{M_{A_2}M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}}}{\overline{M_{A_3A_4\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}}} = \frac{r_1}{r_2} \times \frac{\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_2}} = \frac{\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_1}},$$

故知 $\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}}$ ：$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}M_{A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}}} = \left(\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{r_i}\right)$ ：$\left(\frac{1}{r_1}\right)$ ，敘述亦成立。

3° 根據上述，由數學歸納法知 $\forall n \in \mathbb{N}$，$n \geq 2$，

$\overline{M_{A_1}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}$ ：$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n}} = \left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{r_i}\right)$ ：$\left(\frac{1}{r_1}\right)$ 。

＜(2)證明＞

1° 當 n=2 時，由定理 1-4、向量分點公式知 $\overrightarrow{OM_{A_1A_2}} = \frac{r_2}{r_1+r_2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{r_1}{r_1+r_2}\overrightarrow{OA_2}$，整理可得

$\overrightarrow{OM_{A_1A_2}} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA_1}}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} + \frac{\frac{\overrightarrow{OA_2}}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\frac{\overrightarrow{OA_i}}{r_i}}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}}$，故知 $\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2}} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$，敘述成立。

2° 假設當 $n=k$ 時成立，即 $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$，則當 $n=k$+1 時，

由定理 1-4 敘述(1)、向量分點公式知 $\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA_{k+1}}}{r_{k+1}} + \overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_{k+1}}}$

將假設帶入，整理便得$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}}} = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$，敘述亦成立。

3° 根據上述，由數學歸納法知 $\forall n \in \mathbb{N}$，$n \geq 2$，

$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$ 。

■

藉由此兩關係式，可以透過向量的方法給出「**圓分堆的蒙日點共線性質**」的簡單證明，並也可以同時將【定理 1-4】中的敘述(1)「1、n-1、n 圓蒙日點之間的距離關係」，推廣至「k、n-k、n 圓蒙日點之間的距離關係」，統整及證明如下：

【定理 1-5】「圓分堆的蒙日點共線性質」與「k、n-k、n 圓蒙日點之間的距離關係」

設A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、A_n為平面上的 n 個外離圓，半徑分別為r_1、r_2、$\ldots\ldots$、r_{n-1}、r_n，若 $k\in\mathbb{N}$ 且 $1\le k\le n-1$，則有下列兩個結果：

(1) $M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}$、$M_{A_1A_2\cdots A_n}$三點共線。

(2) $\overline{M_{A_1A_2\cdots A_k}M_{A_1A_2\cdots A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_n}M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}}=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$。

＜證明＞

1° 由定理 1-4 知$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_k}}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$，

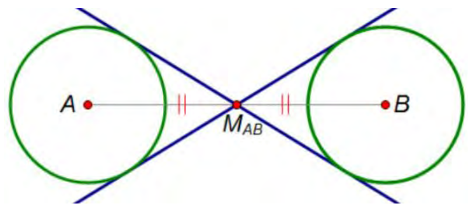
$\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}}=\sum_{i=k+1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$， $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_n}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)$。

2° 因$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}}+\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right)\cdot\overrightarrow{OM_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}$

由向量性質知 $M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}$、$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$三點共線，且

$\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right):\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i}\right)$。■

若各圓半徑大小皆相同，上述會發生什麼情況呢？由於半徑相同，兩圓蒙日點即為連心線段的中點，如右圖所示。而三圓情形的蒙日點便可視為兩圓連心線的中點連線到第三圓的圓心，即三角形重心的定義，推廣至 n 圓亦如此。於是平面上的 n 個點，若分別以各點為圓心作出半徑大小相等的圓時，透過定理 1-5 的公式可以導出以下兩個關於重心的性質。



▲圖 1-9：二圓蒙日點為連心線段中點

【定理 1-6】平面上 n 點的重心性質

設平面上的 n 個點 A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、A_n， 若n、$k\in\mathbb{N}$，且 $1\le k\le n-1$，則：

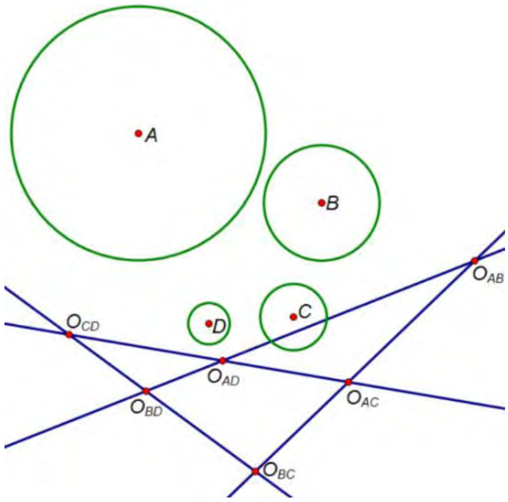
(1) $G_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}$、$G_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}$、$G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$三點共線。

(2) $\overline{G_{A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k}G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}}:\overline{G_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}G_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_{n-1}A_n}}=(n-k):k$。

這項結果不僅重新解釋了重心之間線段比的關係，同時也推廣了「**點分堆的重心共線性質**」，並且「**在權衡不同圖形的位置與大小方面，蒙日點似乎比重心更能用來表達圖形關係**」，值得在後續作更深入的探討。

二、平面上蒙日圓的性質與推廣

既然有代表多圓的一點（蒙日點），那麼「**會不會有代表多圓的一條線（蒙日線）呢？對四圓的任意兩圓作位似外心是否都共線呢？**」如圖 2-1，很明顯四圓蒙日線並未成立。又想，那麼「**會不會也有代表多圓的一圓（蒙日圓）呢？**」透過實驗我們驚訝發現「**在平面上的兩個圓，過任一圓心作另一圓的切線，四條切線所形成的四邊形會有一內切圓，而其圓心洽為此兩圓的蒙日點**」，稱此內切圓為**蒙日圓**，如圖 2-2 所示。



▲圖 2-1：四圓任兩圓作位似外心，共有四條三圓蒙日

＜證明＞

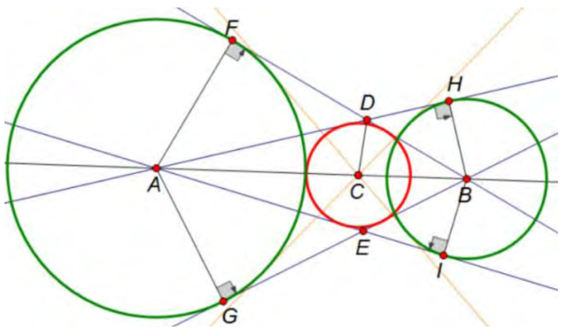
1° 如右圖，由切線性質與全等性質不難得到

$\triangle ABD \cong \triangle ABE$，得$\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{AE}$，

由圓外切四邊形性質知四邊形$ADBE$有內接圓。

2° $\angle ADF=\angle BDH$，由三角形 AA 相似性質知

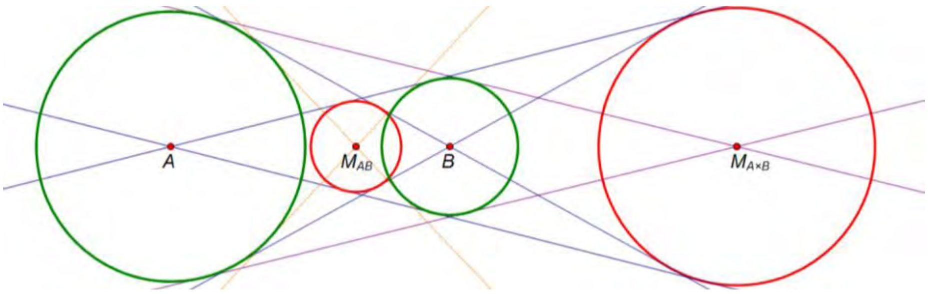
$\triangle ADF \sim \triangle BDH$，$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AF}:\overline{BH}$，



▲圖 2-2：圓 C 為圓 A、B 的蒙日圓。

3° C 為四邊形$ADBE$內心，知$\overline{CD}$為$\angle ADB$的角平分線，

由角平分線性質得 $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AF}:\overline{BH}=r_A:r_B$，故可知 $C=M_{AB}$。 ■



▲圖 2-3：A、B 的蒙日圓$M_{A\cdot B}$與廣義蒙日圓

如圖 2-3，我們發現在連心線段$\overline{AB}$外亦有一圓與四條切線相切，相對於蒙日圓我們則稱此圓為圓 A 與圓 C 的「**廣義蒙日圓**」，並分別以符號$\boldsymbol{M_{A\cdot B}}$與$\boldsymbol{M_{A\times B}}$表示；另外，我們改變圓 A 與圓 B 的位置，發現兩圓不一定要外離，只要「**兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑**」，蒙日圓都會存在，整理如下：

【定義 2-1】蒙日圓與廣義蒙日圓

設 A、B 為平面上任意兩個圓，其**連心線不小於此兩圓最大半徑**，過 A 作 B 的切線，並過 B 作 A 的切線，則必存在與四線相切且圓心在連心線上的兩個圓。

(1) 若圓心在$\overline{AB}$上，則稱其為 A、B 的**蒙日圓**，以$\boldsymbol{M_{A\cdot B}}$（或$\boldsymbol{M_{AB}}$）表示，其圓心即為$I_{AB}$。

(2) 若圓心在$\overline{AB}$外，則稱其為 A、B 的**廣義蒙日圓**，以$\boldsymbol{M_{A\times B}}$表示，其圓心即為$O_{AB}$。

(3) 平面上的三圓，若其中一圓為另兩圓的蒙日圓，則稱此三圓為一組**蒙日圓關係**。

例如 A、B、M_{AB} 或 A、B、$M_{A\times B}$ 均構成一組蒙日圓關係。

重申上述符號「$A\cdot B$」與「$A\times B$」在本研究中僅用以表示作蒙日圓或廣義蒙日圓的過程，而非指向量所用的內積與外積概念。另外，對 A、B 兩圓而言，在不同情境中，符號M_{AB}既可代表此兩圓的蒙日圓，也可代表其圓心，同時也代表此兩圓的蒙日點；同理，符號$M_{A\times B}$亦可代表此二圓的廣義蒙日圓與圓心，同時也是廣義蒙日點。由於對 A、B 兩圓操作無先後問題，因此$M_{AB}=M_{BA}$、$M_{A\times B}=M_{B\times A}$，顯然是成立的。

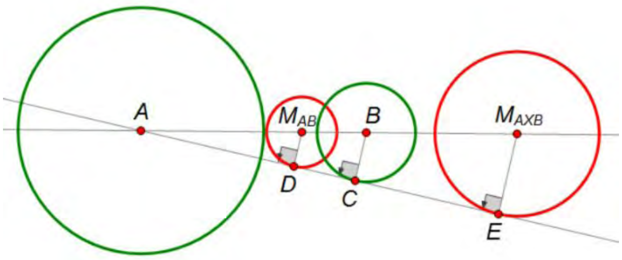
【定理 2-2】兩圓的蒙日圓與廣義蒙日圓的半徑與坐標

設r_A、r_B 分別表示圓 A、B 的半徑，則M_{AB}、$M_{A\times B}$與圓 A、B 的半徑和坐標的關係如下：

(1) 半徑關係：$\frac{1}{r_{M_{AB}}}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}$ 、 $\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|$ 。

(2) 坐標關係：$\overrightarrow{OM_{AB}}=\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}+r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A+r_B}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}}$、$\overrightarrow{OM_{A\times B}}=\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}-r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A-r_B}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}}{\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}}$。

＜證明＞如右圖 2-4



▲圖 2-4：證明簡圖

1° 由$\triangle ADM_{AB}\sim\triangle ACB$，可知

$\overline{AM_{AB}}:\overline{DM_{AB}}=\overline{AB}:\overline{BC}$，故得

$$\frac{1}{r_{M_{AB}}}=\frac{1}{\overline{DM_{AB}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AM_{AB}}+\overline{M_{AB}B}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{\overline{M_{AB}B}}{\overline{AM_{AB}}\times\overline{BC}}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\ 。$$

2° 由$\triangle ACB\sim\triangle AEM_{A\times B}$，可知$\overline{AM_{A\times B}}:\overline{EM_{A\times B}}=\overline{AB}:\overline{BC}$，故得

$$\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\frac{1}{\overline{EM_{A\times B}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}=\frac{|\overline{AM_{A\times B}}-\overline{M_{A\times B}B}|}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}=\left|\frac{1}{\overline{BC}}-\frac{\overline{M_{A\times B}B}}{\overline{AM_{A\times B}}\times\overline{BC}}\right|=\left|\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right|=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|。$$

3° 坐標關係由分點公式即可證明，故不再贅述。 ■

從兩圓的位似內(外)心(內、外公切線交點)的想法，推廣至兩圓的（廣義）蒙日圓，則**「若對先前 n 圓所探討的性質，引進蒙日圓的作法，會不會有什麼意想不到的結果呢？」**接下來，在「任意兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑」的前提下，我們以蒙日圓的想法重新先回到三圓情形進行討論，如下：

【定理 2-3】三圓蒙日圓定理

設 A、B、C 為平面上三個圓，且任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑。任 2 圓作蒙日圓，再與第三圓作蒙日圓，則此三圓會重合，稱其為此**三圓蒙日圓**，並以符號M_{ABC}表示；換句話說，即$M_{(AB)C}=M_{(BC)A}=M_{(AC)B}=M_{ABC}$，如圖 2-5。

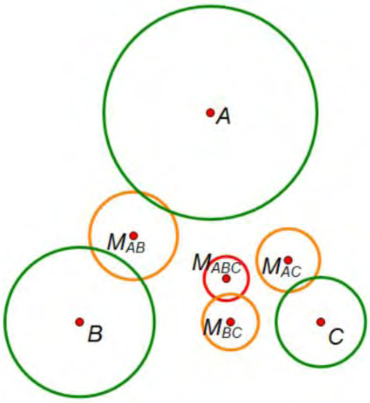
＜證明＞由半徑關係與坐標關係，可推得

1° $\frac{1}{r_{M_{(AB)C}}}=\frac{1}{r_{AB}}+\frac{1}{r_C}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}$。

同理，便可得知 $r_{M_{(AB)C}}=r_{M_{(BC)A}}=r_{M_{(AC)B}}$。

2° $\overrightarrow{OM_{(AB)C}}=\frac{r_{M_{AB}}\cdot\overrightarrow{OC}+r_C\cdot\overrightarrow{OM_{AB}}}{r_C+r_{M_{AB}}}=\frac{\frac{r_A\cdot r_B}{r_A+r_B}\cdot\overrightarrow{OC}+r_C\cdot\frac{r_B\cdot\overrightarrow{OA}+r_A\cdot\overrightarrow{OB}}{r_A+r_B}}{r_C+\frac{r_A\cdot r_B}{r_A+r_B}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OB}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OC}}{r_C}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$

，同理，可得 $\overrightarrow{OM_{(AB)C}}=\overrightarrow{OM_{(BC)A}}=\overrightarrow{OM_{(AC)B}}$。



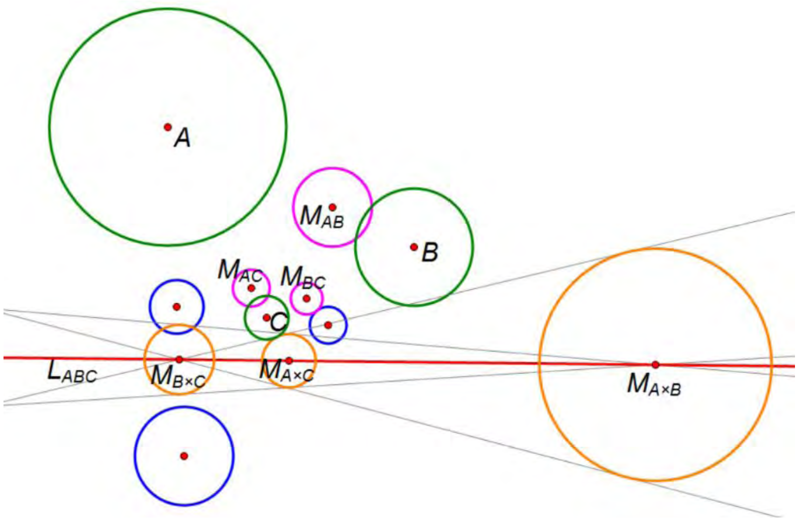
▲圖 2-5：三圓蒙日圓

3° 由上述知 $M_{(AB)C}=M_{(BC)A}=M_{(AC)B}$，以符號$M_{ABC}$表示之。 ■

【定理 2-4】蒙日線定理、廣義蒙日線定理與蒙日圓關係

設 A、B、C 為平面上三個圓，其中任兩圓連心線不小於其最大半徑，則有以下兩個結果，如下頁圖 2-6： (1) 作任兩圓的廣義蒙日圓，即 $M_{A\times B}$、$M_{B\times C}$、$M_{A\times C}$，此三圓為一組蒙日圓關係，且其連心線即為三圓 A、B、C 的蒙日線。 (2) 作任兩圓的廣義蒙日圓，與此兩圓分別再和另一圓作蒙日圓，如$(M_{A\times B}$、M_{AC}、$M_{BC})$、$(M_{A\times C}$、M_{AB}、$M_{BC})$、$(M_{B\times C}$、M_{AB}、$M_{AC})$，此三圓為一組蒙日圓關係，且其連心線即為此三圓的廣義蒙日線。

此定理的證明方法類同【定理 2-3】，故不再贅述。



▲圖 2-6：三圓蒙日線、廣義蒙日線、蒙日圓與廣義蒙日圓

廣義蒙日圓半徑大小的公式（$\frac{1}{r_{M_{A\times B}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right|$）會受到各圓半徑大小順序的影響，接下來的討論，不失一般性，我們皆以$r_A>r_B>r_C>\cdots\cdots$的方式進行討論。如圖 2-6 中的藍色圓，透過位置關係公式，算出在三圓情形的廣義蒙日圓共有三種，分別是：

$$\overrightarrow{OM_{BC\times A}}=\overrightarrow{OM_{A\times CB}}=\overrightarrow{OM_{A\times BC}}=\frac{-\frac{\overline{OA}}{r_A}+\frac{\overline{OB}}{r_B}+\frac{\overline{OC}}{r_C}}{-\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$$

$$\overrightarrow{OM_{B\times CA}}=\overrightarrow{OM_{AC\times B}}=\overrightarrow{OM_{A\times B\times C}}=\frac{+\frac{\overline{OA}}{r_A}-\frac{\overline{OB}}{r_B}+\frac{\overline{OC}}{r_C}}{+\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}}$$

$$\overrightarrow{OM_{B\times C\times A}}=\overrightarrow{OM_{A\times C\times B}}=\overrightarrow{OM_{AB\times C}}=\frac{+\frac{\overline{OA}}{r_A}+\frac{\overline{OB}}{r_B}-\frac{\overline{OC}}{r_C}}{+\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}}$$

更驚訝的是我們發現這三個圓的圓心，居然就是前置研究中三個圓的廣義蒙日點！

【定理 2-5】三圓的廣義蒙日圓

設 A、B、C 為平面上三個圓，且任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑，若$r_A>r_B>r_C$，則

(1) $M_{BC\times A}=M_{A\times CB}=M_{A\times BC}$，

(2) $M_{B\times CA}=M_{AC\times B}=M_{A\times B\times C}$，

(3) $M_{B\times C\times A}=M_{A\times C\times B}=M_{AB\times C}$，

上述所得的圓均稱為此**三圓的廣義蒙日圓**，其圓心分別是**三圓的廣義蒙日點**。

由上敘述及分點公式算出各座標即可證明，故不再贅述。

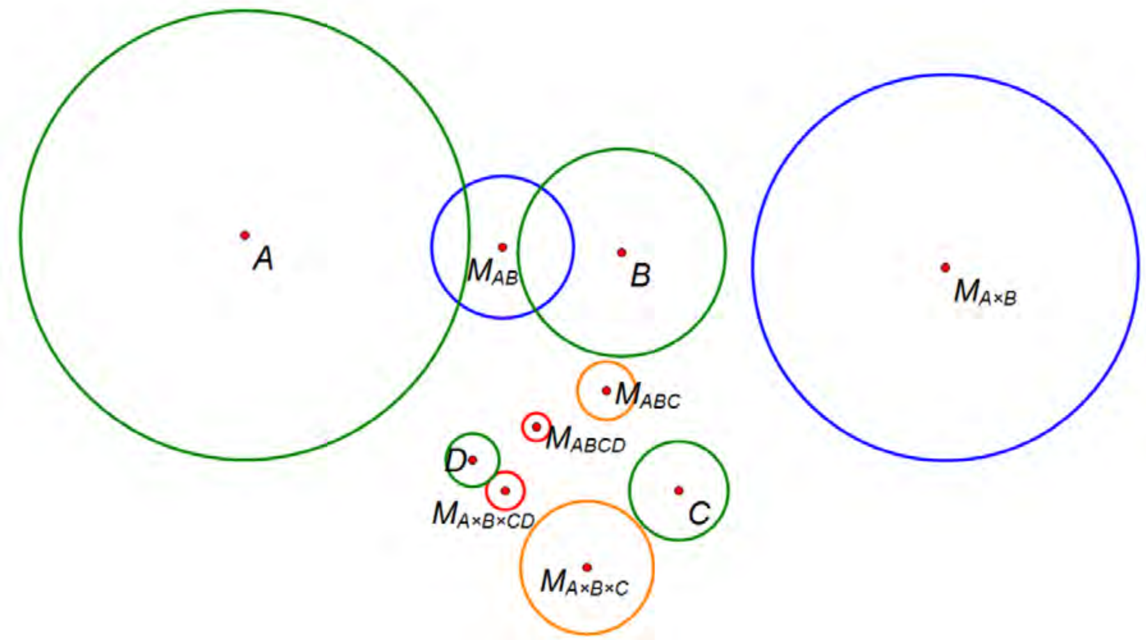
兩圓的蒙日圓圓心是位似內心，也可將其視為此兩圓的蒙日點；而兩圓的廣義蒙日圓圓心是位似外心，我們合理猜測此位似外心就是此兩圓的廣義蒙日點。基於此想法，我們好奇**「蒙日線定理及廣義蒙日點定理是否也能推廣至 *n* 個圓呢？」**

在討論此問題前，為了方便表達對 n 圓作蒙日圓或廣義蒙日圓的作圖過程，我們選定一個起始圓，依序對下一個圓作蒙日圓（或廣義蒙日圓），直到最後。如圖 2-7，以 A、B、C、D 的蒙日圓與其中一種廣義蒙日圓的作法為例：

$M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$　：表示由 A 對 B 作蒙日圓 $M_{A\cdot B}$，再對 C 作蒙日圓 $M_{A\cdot B\cdot C}$，再對 D 作蒙日圓 $M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$，其結果 $M_{A\cdot B\cdot C\cdot D}$即為此四圓的蒙日圓。

$M_{A\times B\times C\cdot D}$：表示由 A 對 B 作廣義蒙日圓 $M_{A\times B}$，再對 C 作廣義蒙日圓 $M_{A\times B\times C}$，再對 D 作蒙日圓 $M_{A\times B\times C\cdot D}$，所得圓 $M_{A\times B\times C\cdot D}$即為此四圓其中的一個廣義蒙日圓。

由上述可推知 n 圓的蒙日圓只有 1 個，而其廣義蒙日圓則有$2^{n-1}-1$個。



▲圖 2-7：四圓的蒙日圓與廣義蒙日圓

經過多次作蒙日圓或作廣義蒙日圓之後，所得的廣義蒙日圓的坐標與半徑如何求呢？透過位置關係與半徑關係，我們發現公式導出的規律：

【定理 2-6】*n* 圓廣義蒙日圓的半徑與坐標關係

設平面上的 *n* 個圓，且任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑，則必有$2^{n-1}-1$個廣義蒙日圓，其圓心定義為 ***n* 圓廣義蒙日點**，且圓半徑與圓心坐標有以下關係：

(1) 若由圓A_1開始，依序將半徑倒數累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果取絕對值的倒數即為所求圓半徑。例如：

$$\frac{1}{r_{M_{A\cdot B\times C\cdot D}}}=\left|\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right|\text{、}\frac{1}{r_{M_{A\times B\times C\times D}}}=\left|\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}\right|\text{。}$$

(2) 若由圓A_1開始，依序將圓坐標除以半徑的值累加，每作廣義蒙日圓時則變累減，再遇則又變回累加，以此類推，累計結果除以半徑的累計結果即為所求圓心坐標。例如：

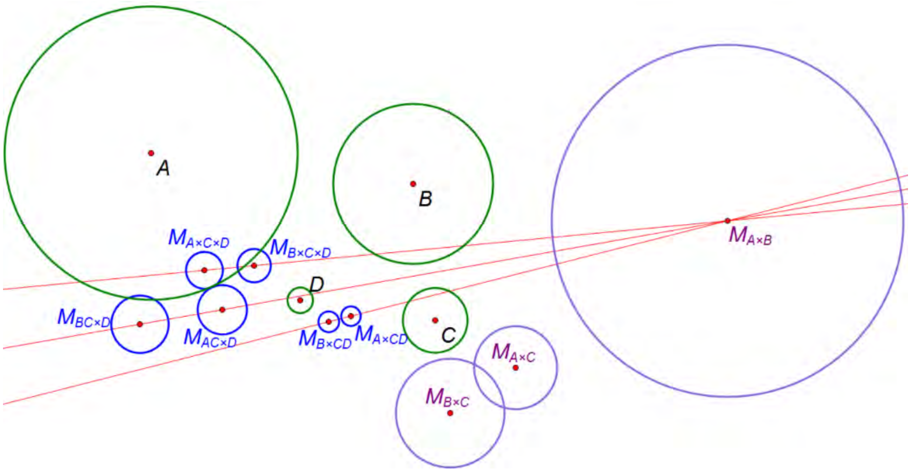
$$\overrightarrow{OM_{A\cdot B\times C\cdot D}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}+\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}-\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}}{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}}\text{、}\overrightarrow{OM_{A\times B\times C\times D}}=\frac{\frac{\overrightarrow{OM_A}}{r_A}-\frac{\overrightarrow{OM_B}}{r_B}+\frac{\overrightarrow{OM_C}}{r_C}-\frac{\overrightarrow{OM_D}}{r_D}}{\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{r_D}}\text{。}$$

既有 *n* 圓廣義蒙日點，不妨仿照廣義蒙日線「*n* 個圓中，任意 2 圓的位似外心，必與此 2 圓分別和另 *n*-2 圓所構成的兩組 *n*-1 圓蒙日點共線」，大膽推廣 *n* 圓蒙日線。

【定理 2-7】n 圓蒙日線

設平面上 *n* 個圓，且任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑。任意 2 圓的廣義蒙日圓圓心，與此 2 圓分別和另 *n*-2 圓所構成的兩組 *n*-1 圓廣義蒙日圓的圓心，形成三點共線。

如圖 2-8，以四圓 *A*、*B*、*C*、*D* 為例，其中三組$(M_{A\times B}$、$M_{A\cdot C\times D}$、$M_{B\cdot C\times D})$、$(M_{A\times B}$、$M_{A\times C\cdot D}$、$M_{B\times C\cdot D})$、$(M_{A\times B}$、$M_{A\times C\times D}$、$M_{B\times C\times D})$均三點共線，此類共線均稱為 ***n* 圓蒙日線**。



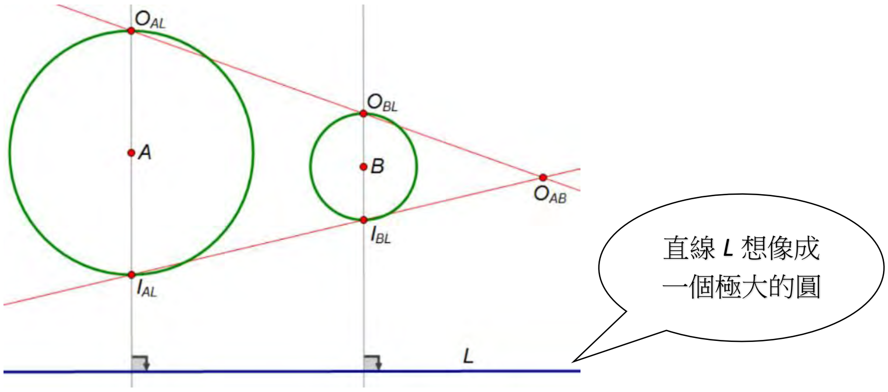
▲圖 2-8：四圓蒙日線（圖中僅顯示其中三條）。

至此，我們藉由蒙日圓的作法，成功地將蒙日定理的四大性質「**蒙日線、蒙日點、廣義蒙日線及廣義蒙日點，推廣至任意 *n* 個圓的情形均成立，且任兩圓不受外離限制，只要任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑即可**」。另外，在研究過程中，我們也因為蒙日圓的作法，有一些不一樣的發現或聯想，都將留到第肆章一併討論。

三、非外離圓的蒙日定理及其性質的變換關係

在第一節中，為因應兩圓內、外公切線的作圖需要，必須在各圓外離或外切的前提下進行探討；為突破研究，在第二節提出新工具「蒙日圓」的作法，因而將定理推廣至只要「任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑」即可；但是我們仍好奇在此條件限制外，也就是平面上的任意圓，蒙日定理是否仍會成立？另外，從蒙日圓與各圓坐標與半徑的公式中可發現，其似乎不受各圓位置大小之限制，於是我們便著手尋找更「Well-defined」的作法來探討。

偶然間，我們在《世界著名平面几何经典著作钩沉》[6]一書中看見：「**因一直線可視為一極大圓，其圓心在直線垂直方向無窮遠處，故一圓與一直線之相似心為此圓垂直於此直線之直徑的兩端。**」透過此想法，若將蒙日線定理中的其中一圓極大化，變為直線，則有以下性質：「給定平面上任意兩圓 A、B 與一直線 L，分別過兩圓圓心作 L 的垂線，並分別交兩圓於O_{AL}、I_{AL}與 O_{BL}、I_{BL}，則由蒙日線定理知 O_{AL}、O_{BL}、O_{AB}共線，由廣義蒙日線定理知 I_{AL}、I_{BL}、O_{AB}共線，因此可推知 $\overleftrightarrow{O_{AL}O_{BL}}$、$\overleftrightarrow{I_{AL}I_{BL}}$ 交於 O_{AB}，如圖 3-1。」

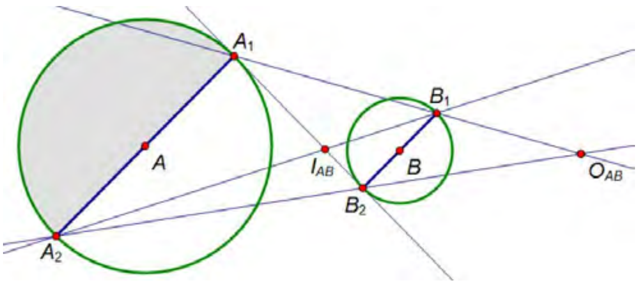


▲圖 3-1：兩圓與一極大圓（直線）的蒙日線定理

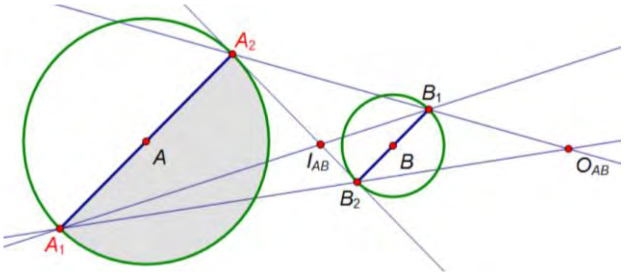
透過上述想法，我們嘗試簡化兩圓位似外心的作圖：「若給定平面上任意兩圓，可以透過假設存在一條任意直線 L，利用前述性質作出兩圓位似外心；又因為直線 L 為任意直線，故只要作兩圓互相平行的直徑，對應交點連線即為兩圓的位似外心」。同理，透過廣義蒙日線的定義，亦可推導出位似內心的作圖方式，以下以「**兩圓平行直徑作位似中心**」簡述此作圖過程。因此，可以得到以下結論：

【定理 3-1】兩圓平行直徑作位似中心

給定平面上的任意兩圓 A、B，作兩圓平行直徑$\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$，則 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_2B_2}$交於$O_{AB}$，$\overleftrightarrow{A_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2B_1}$交於$I_{AB}$，如下頁圖 3-2(a)。



▲圖 3-2(a)：位似中心作圖方式



▲圖 3-2(b)：圓 A 旋轉 180°之結果

若將上圖中的圓 A，以圓心為中心旋轉$180°$，將如圖 3-2(b)所示，可發現此時的$\overleftrightarrow{A_1B_1}$與$\overleftrightarrow{A_2B_2}$交於 I_{AB}，$\overleftrightarrow{A_1B_2}$與$\overleftrightarrow{A_2B_1}$交於 O_{AB}，也就是說，經旋轉後此兩組交點的位置會交換。由此可想像，位似內心與位似外心（原兩圓的內公切線交點與外公切線交點）也可從動態觀點中看到其變換關係。

透過「兩圓平行直徑作位似中心」的作圖方式解決了先前「任兩圓須外離或連心線不小於此兩圓最大半徑」的條件限制，提出更一般的作法與結論，也就是「任意兩圓均可做出位似內心與位似外心」，也因此不僅得到**「任意 *n* 圓均可滿足蒙日定理的所有性質」**，同時衍生以動態變換觀點來看「**若將若干圓旋轉180°後，蒙日定理會有什麼樣的變化？**」。

透過動態幾何實驗，首先觀察到一件有趣的現象：「M_{ABC}在圓 A 旋轉$180°$（或圓 B、圓 C 皆旋轉$180°$）後會變為$M_{A\times BC}$。」為方便表達，以符號「$M_{ABC} \xrightarrow{A\ or\ B,C} M_{A\times BC}$」表示此過程，並稱「**對圓 *A* 作旋轉變換**」。其它相關實驗結果如下表 3-1：

▼表 3-1：三圓、四圓蒙日點經旋轉變換之前後對照表

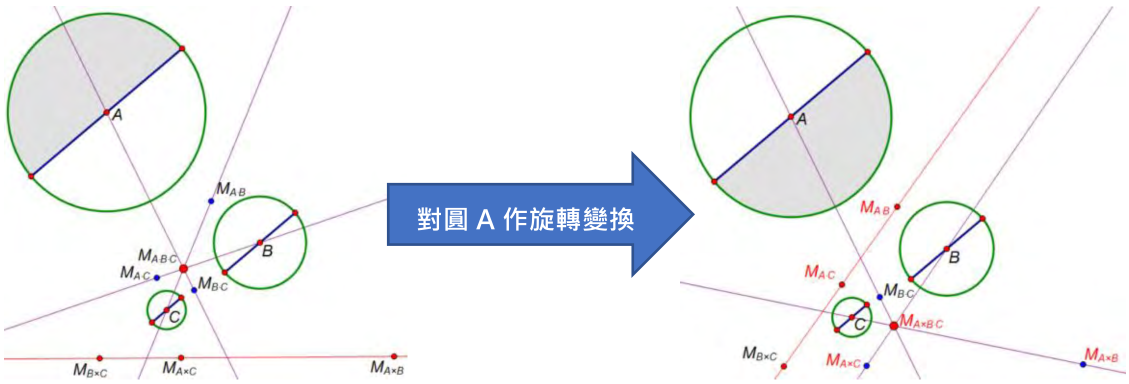
$M_{ABC} \xrightarrow{B\ or\ A,C} M_{A\times B\times C}$	$M_{ABC} \xrightarrow{C\ or\ A,B} M_{AB\times C}$	$M_{ABCD} \xrightarrow{A\ or\ B,C,D} M_{A\times BCD}$
$M_{ABCD} \xrightarrow{B\ or\ A,C,D} M_{A\times B\times CD}$	$M_{ABCD} \xrightarrow{C\ or\ A,B,D} M_{AB\times C\times D}$	$M_{ABCD} \xrightarrow{D\ or\ A,B,C} M_{ABC\times D}$
$M_{ABCD} \xrightarrow{A,B\ or\ C,D} M_{AB\times CD}$	$M_{ABCD} \xrightarrow{A,C\ or\ B,D} M_{A\times B\times C\times D}$	$M_{ABCD} \xrightarrow{A,D\ or\ B,C} M_{A\times BC\times D}$

由上述可以觀察到圓旋轉$180°$時，會發現**蒙日點的符號變換性質：「當某圓旋轉$180°$時，其與前、後圓的操作關係會變號，即“ × 變 · ”或“ · 變 × ”。」**以下面為例：

$M_{A\cdot B\cdot C\times D\cdot E} \xrightarrow{B,D} M_{A\times B\times C\cdot D\times E}$　（B 與 D 的兩側符號均變號）

$M_{A\times B\cdot C\cdot D\times E} \xrightarrow{A,C,D} M_{A\cdot B\times C\cdot D\cdot E}$　（C、D 之間的符號因變換兩次而維持不變）

藉此，我們嘗試重新檢視三圓蒙日線定理「給定平面上的三圓A、B、C，作任兩圓的廣義蒙日點，則此三點共線，即$M_{A\times B}$、$M_{A\times C}$、$M_{B\times C}$三點共線」，倘若將圓 A 旋轉$180°$，則由前述的符號變換性質，此定理將變為「$M_{A\cdot B}$、$M_{A\cdot C}$、$M_{B\times C}$三點共線」，發現此線竟是三圓的其中一條廣義蒙日線；同理，若將 B 或 C 旋轉，亦可得另兩條廣義蒙日線。同樣地，對蒙日點定理「給定平面上的三圓A、B、C，作出任兩圓蒙日點與第三圓圓心的連線，則此三線共點，即$\overleftrightarrow{CM_{A\cdot B}}$、$\overleftrightarrow{BM_{A\cdot C}}$、$\overleftrightarrow{AM_{B\cdot C}}$三線共點」，可發現若將圓 A 旋轉$180°$，此定理將變為「$\overleftrightarrow{CM_{A\times B}}$、$\overleftrightarrow{BM_{A\times C}}$、$\overleftrightarrow{AM_{B\cdot C}}$三線共點」，亦是三圓其中一個廣義蒙日點；旋轉圓 B 或圓 C，也會得到另兩個廣義蒙日點。



▲圖 3-3：三圓蒙日線、蒙日點，對圓 A 作旋轉變換之前後對照圖

更令人驚奇的，此符號變換性質竟可以重新描述蒙日線與廣義蒙日線、蒙日點與廣義蒙日點之間的關係，整理如下頁敘述：

【定理 3-2】圓旋轉變換下的蒙日定理

給定平面上的任意 n 個圓：

(1) 作出其 ***n* 圓蒙日點**$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$，若將其中 k 個圓作旋轉變換，則必將其變換為一個 ***n* 圓廣義蒙日點**，其總個數為 $2^{n-1}-1$ 個。

(2) 作出其中一條 ***n* 圓廣義蒙日線**，以$\left(M_{A_1\times A_2}、M_{A_1A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}、M_{A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}\right)$為例，若將$A_1$或$A_2$以外的其中 k 個圓作旋轉變換，則必將其變換為其中一條 ***n* 圓蒙日線**，其總個數為 $C_2^n\cdot(2^{n-2}-1)$個。

(3) 若將圓分成兩堆 k 個與 n-k 個，若 k 圓作其一廣義蒙日點為 $M(k)$，n-k 圓作其一廣義蒙日點為$M(n-k)$，則必存在兩個 n 圓廣義蒙日點$M(n)$，使得$M(k)$、$M(n-k)$、$M(n)$共線。此性質稱之為**「圓分堆的廣義蒙日點分堆共線性質」**。

＜證明＞

1° 由符號變換性質可知，蒙日點$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$經變換後，部分（或全部）的符號「‧」會變為「×」，故知其必為此 *n* 圓的其中一個廣義蒙日點。從 *n* 個圓中取 *k* 個圓作旋轉，因此方法數為C_k^n，又因將 *k* 圓作旋轉或將另 *n-k* 圓旋轉的結果相同，且$1 \le k \le n-1$，故變換的總方法數為$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} C_k^n = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n-1} C_k^n + C_0^n + C_n^n - 2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_k^n - 1$

$= \frac{1}{2} \times 2^n - 1 = 2^{n-1} - 1$，故 *n* 圓的廣義蒙日點總個數為$2^{n-1} - 1$個。

2° 同1°方法可證得，廣義蒙日線$(M_{A_1 \times A_2}$、$M_{A_1A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n}$、$M_{A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n})$經變換後必為此 *n* 圓的其中一條蒙日線。從 *n*-2 個圓中取 *k* 個圓作旋轉，因此方法數為C_k^{n-2}，又$1 \le k \le n-2$，故變換的總方法數為$\sum_{k=1}^{n-2} C_k^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} C_k^{n-2} + C_0^{n-2} - 1$

$= \sum_{k=0}^{n-2} C_k^{n-2} - 1 = 2^{n-2} - 1$，並且須從 *n* 圓中先選 2 圓作為$A_1$或$A_2$，因此 *n* 圓蒙日線的總個數為$C_2^n \cdot (2^{n-2} - 1)$條。

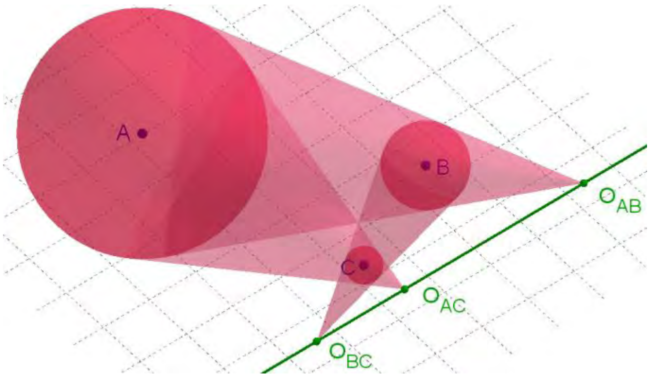
3° 由圓分堆的蒙日點共線性質知$M_{A_1A_2\cdots A_k}$、$M_{A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n}$、$M_{A_1A_2\cdots A_n}$三點共線，由符號變換性質知部分（或全部）的符號「‧」會變為「×」，因此可知**圓分堆的廣義蒙日點亦有分堆共線性質**。以$n = 7$，$k = 3$ 為例，若給定$M_{A_1 \times A_2A_3}$、$M_{A_4 \times A_5 \times A_6A_7}$，則可找到$M_{A_1 \times A_2A_3 \cdot A_4 \times A_5 \times A_6A_7}$、$M_{A_1 \times A_2A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6A_7}$與其共線，其證明可由$M_{A_1A_2A_3}$、$M_{A_4A_5A_6A_7}$、$M_{A_1A_2A_3 \cdot A_4A_5A_6A_7}$共線，再分別對$A_1$、$A_5$或$A_2$、$A_3$、$A_5$作旋轉變換後便可得知。 ■

除了上述對蒙日線、廣義蒙日點個數的重新詮釋外，若將【定理 3-2】敘述(3)，以 *n=2*、*k=1* 代入，也就是給定任意兩圓 *A*、*B*，從圓分堆的廣義蒙日點分堆共線性質可知M_A、M_B、$M_{A \cdot B}$、$M_{A \times B}$共線，為「兩圓的位似內心與位似外心必在兩圓連心線上」性質提出了另一種新的解釋方式。蒙日線與廣義蒙日線可以在各圓的旋轉變換之下互相轉換，同樣的，蒙日點與廣義蒙日點也有如此關係，總括結論「**在旋轉變換的動態觀點下，任意 n 圓的蒙日線與廣義蒙日線、蒙日點與廣義蒙日點之間，均分別具有互相轉換的關係。**」

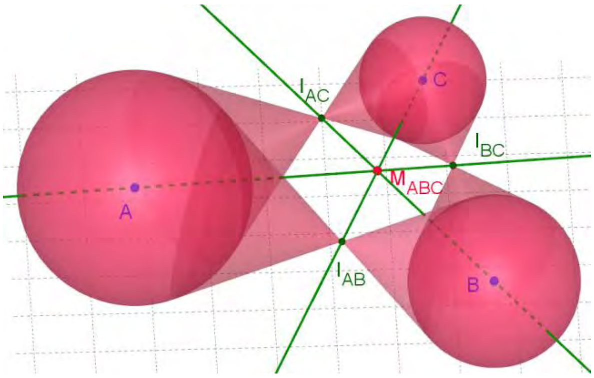
四、N維空間中的蒙日定理

接下來，我們大膽地從三維空間中的球體與多面體出發，以至探討N維空間中蒙日定理的存在性。

首先在三球情形，由於作過三球心的平面可將三球截出共平面的三個圓，便可透過前述平面上的定理知蒙日線與蒙日點必然存在，又因球體亦可透過前節所述，以兩球平行直徑作出位似中心，不受兩球需外離的限制，因此有「**空間中的三個球A、B、C，任兩球的位似外心 O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}共線**，如圖4-1；**任一球球心與另兩球位似內心的連線$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$共點**，如圖4-2」。同理，「**球心共平面的$n$個球也必存在$n$球蒙日點與廣義蒙日線等性質**」。



▲圖 4-1：空間中三球的蒙日線



▲圖 4-2：空間中三球的蒙日點

然而，對於四個以上的球，各球心並**不一定共平面**，那蒙日定理是否仍會成立呢？我們發現可以透過分別作過其中三球的平面，再由各平面上的線段比以Menelaus與Ceva定理證出，說明如下：

【定理4-1】4球蒙日點與廣義蒙日線

假設A、B、C、D為空間中的四個任意球，則以下三點敘述成立：

(1) 任2球作位似外心（如選A、D作出O_{AD}），此2球再分別與其餘2球作蒙日點（如A與B、C作M_{ABC}，D 與B、C作M_{BCD}），則此三點共線，稱為**四球廣義蒙日線**，如下頁圖4-3。

(2) 任1球的球心與另3球的蒙日點連線，即$\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$，則此四線共點，稱此點為**四球蒙日點**，並以符號M_{ABCD}表示，如下頁圖4-4。

(3) 任2球的位似內心與另2球的位似內心連線，即$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$，則此三線皆通過四球蒙日點，如P.27圖4-5。

<(1)證明>如圖 4-3

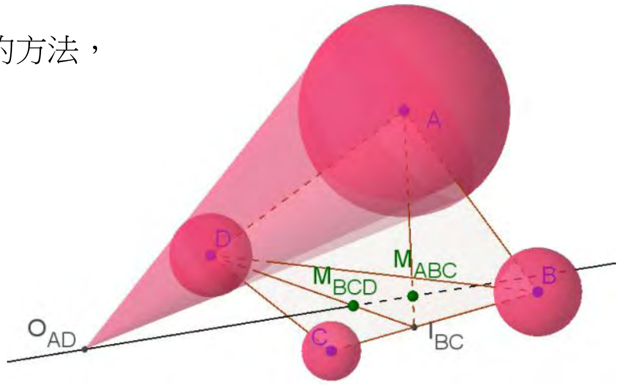
1° 在△ ABI_{BC}中，可透過如證明【定理 1-1】的方法，

由 Menelaus 定理得$\frac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}=\frac{r_A}{r_B}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CI_{BC}}}$，

同理在△ BDI_{BC}中得$\frac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}=\frac{r_B}{r_D}\times\frac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{BC}}$，

2° 在△ $AI_{BC}D$中，M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD}分別在三邊延長線上，由上述1°及位似定理

得 $\frac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}\times\frac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}\times\frac{\overline{DO_{AD}}}{\overline{O_{AD}A}}=1$，



▲圖 4-3： 4 球的廣義蒙日線
（圖中僅顯示其中一條）

由 Menelaus 逆定理可得M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD}三點共線。同理另有五組三點共線。

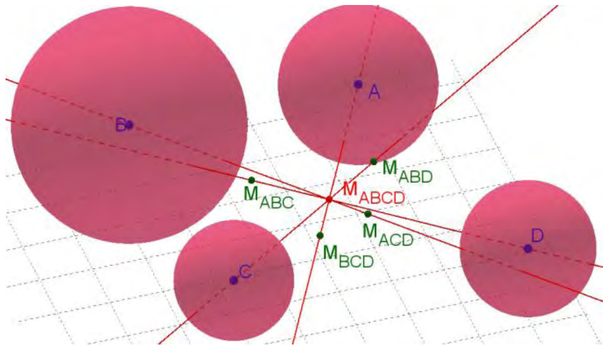
<(2)證明>如圖 4-4

1° 作△ ABC、△ $M_{BCD}M_{ACD}M_{ABD}$，

根據上述(1)知 $\overleftrightarrow{M_{ACD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{AC}$ 交於O_{AC}，

$\overleftrightarrow{M_{BCD}M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 交於O_{AB}。



▲圖 4-4：4 球的蒙日點

2° 由蒙日線定理知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，

並由 Desargues 定理得 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點。

同理可證 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$三線共點，

故 $\overleftrightarrow{AM_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$四線共點。

<(3)證明>如下頁圖 4-5

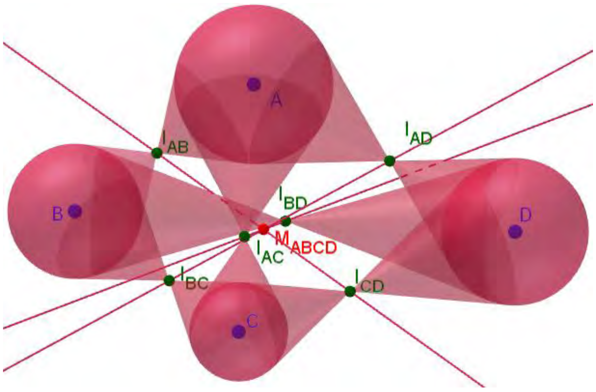
1° 在△ BDI_{AB}中，可透過如證明【定理 1-1】方法，藉由 Menelaus 定理得

$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}=\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{BC}}}$，同理在△ BCI_{AB}中得$\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{BC}A}}{\overline{AB}}$ 。

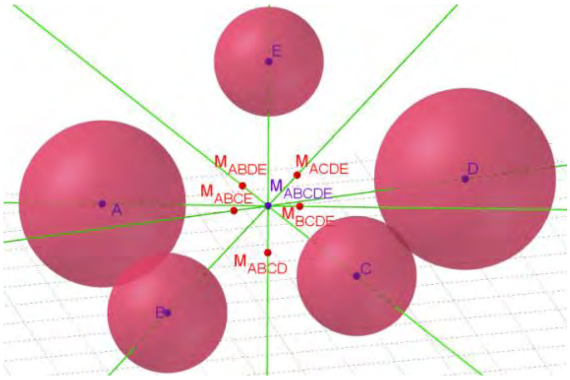
2° 在△ CDI_{AB}中，由上述1°及位似定理得$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}\times\frac{\overline{CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}D}}=1$，

由 Ceva 逆定理知 $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點，結合上述(2)便可證明$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$通過點$M_{ABCD}$。同理可得$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$皆通過$M_{ABCD}$。

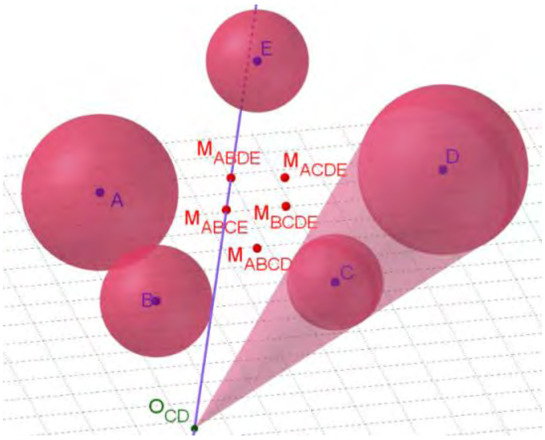
■



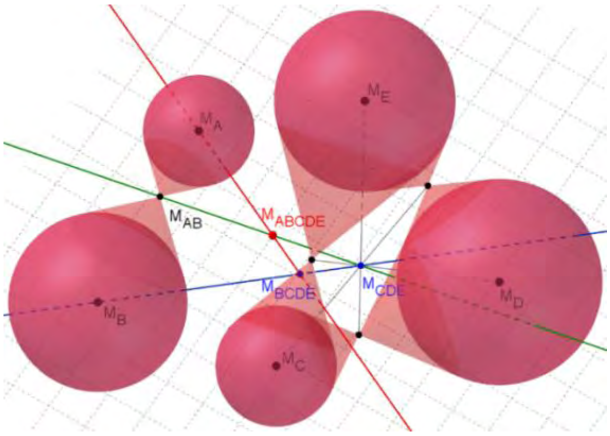
▲圖 4-5：任意 2 球的蒙日點與另 2 球的蒙日點連線必通過 4 球蒙日點



▲圖 4-6：5 球的蒙日點



▲圖 4-7：5 球的廣義蒙日線（圖中僅顯示其中一條）



▲圖 4-8：5 球分堆的蒙日點共線性質

透過實驗與仿照前面的證明，我們發現空間中球心不共平面的 5 個外離球的蒙日點、廣義蒙日線以及球分堆的蒙日點共線等性質也會成立，如上圖 4-6、4-7、4-8。接著，仿照定理 1-3 的數學歸納法方式，上述性質亦可推廣至 n 球情形，結論如下，證明就不再贅述。

【定理 4-2】*n* 球蒙日點與 *n* 球分堆的蒙日點共線性質

假設A_1、A_2、⋯、A_{n-1}、A_n為空間中n個任意球（$n \in \mathbb{N}$，$n \geq 3$），則以下三點敘述成立：

(1) 任2球作位似外心，此2球再分別與另n-2球作出n-1球蒙日點，則此三點共線，稱為***n*球廣義蒙日線**。

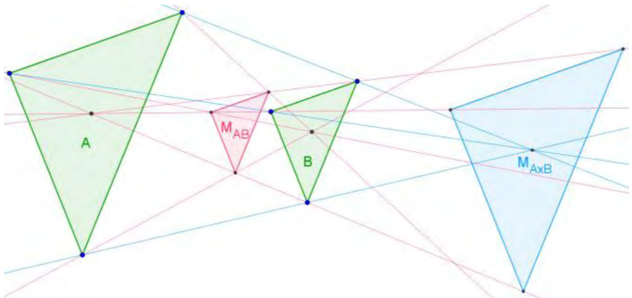
(2) 任1球的球心與另n-1球的蒙日點連線，則此n線共點，稱其為***n*球蒙日點**，仍以符號$M_{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$表示。

(3) 任意***k*球的蒙日點**與另***n*-*k*球的蒙日點**連線必皆通過***n*球蒙日點**。

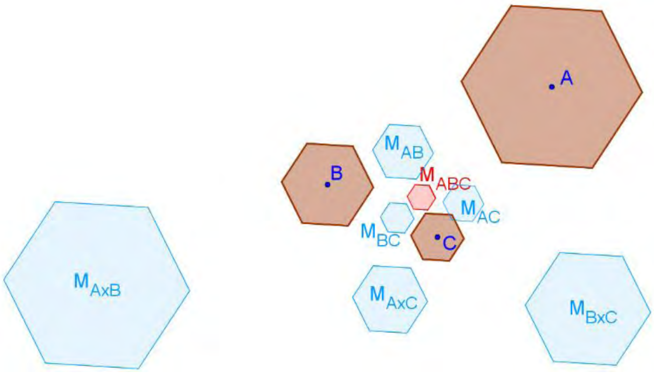
（***n*球分堆的蒙日點共線性質**）

接下來，除了平面上的圓或空間的球以外，一般位似圖形（含位似體）其蒙日定理是否仍然成立？例如，平面上互為位似的多邊形或空間的多面體，是否也會有相對應的蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線、蒙日位似圖形（以下簡稱蒙日形）等性質呢？舉例說明如下：

由於多邊形並不像圓有明確的中心（圓心），不失一般性，以重心作為代表多邊形的中心，我們會發現「平面上兩個位似多邊形 A、B，任一個多邊形的重心與另一多邊形的各頂點連線，其對應連線交點所形成的多邊形亦與 A、B 互為位似，稱其為多邊形 A、B 的**蒙日形**，仍以M_{AB}表示，其重心即為 A、B 的**位似內心**；而多邊形 A、B 的**廣義蒙日形**，以$M_{A\times B}$表示，其重心即為 A、B 的**位似外心**。」

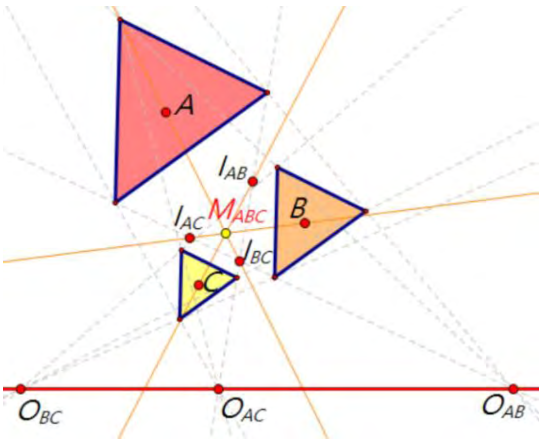


▲圖 4-9：兩個三角形 A、B的蒙日形M_{AB}與廣義蒙日形$M_{A\times B}$

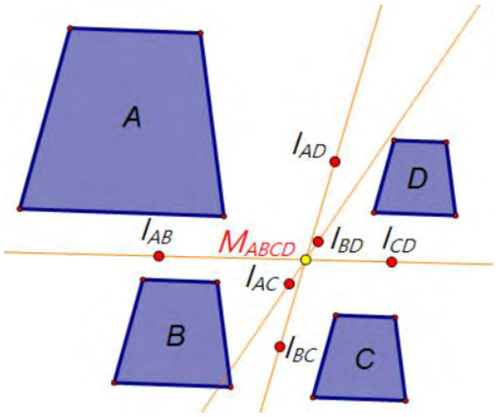


▲圖 4-10：位似六邊形 A、B、C的蒙日形M_{ABC}

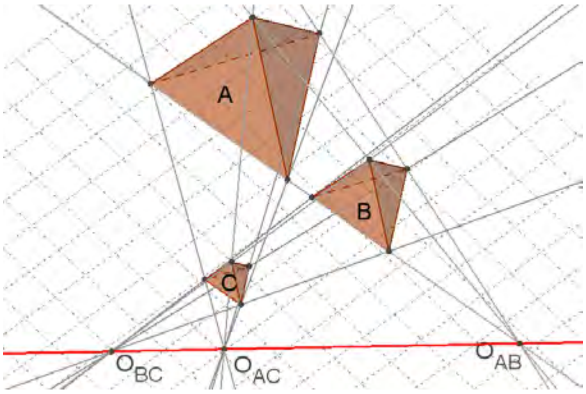
同樣地，「**平面上三個位似圖形 A、B、C，任 1 個位似圖形與另 2 個位似圖形的蒙日形的蒙日形，則三個蒙日形會重合，稱其為此三個位似圖形的蒙日形，以M_{ABC}表示，同時三位似圖形的蒙日線亦存在**」。再者，我們也嘗試推廣至任意 n 個位似圖形的情形中。以平面上的三角形與四邊形，以及空間中四面體、六面體為例，如下頁圖 4-11～圖 4-14：



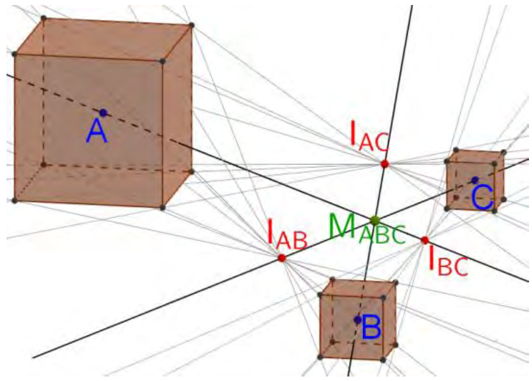
▲圖 4-11：三個三角形的蒙日線與蒙日點



▲圖 4-12：四個四邊形分堆的蒙日點性質



▲圖 4-13：三個四面體的蒙日線



▲圖 4-14：三個六面體的蒙日點

從上面的例子，無論有多少個多邊形或多面體，我們發現「**只要互為位似圖形，都能滿足蒙日定理等相關性質**」，其證明如同探討圓或球時所述，就不再贅述。

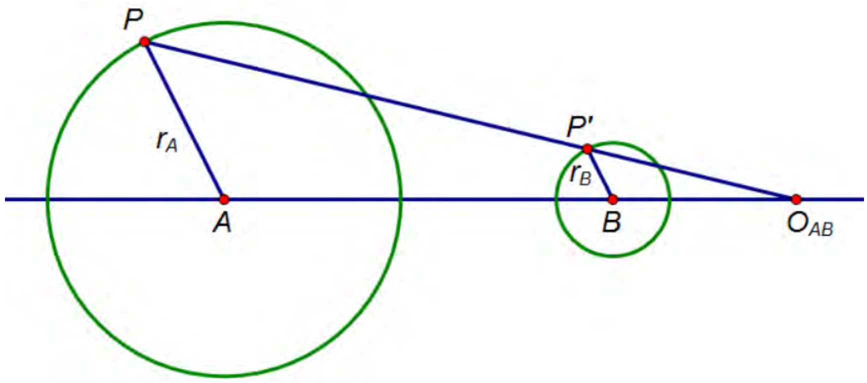
截至目前，我們將蒙日定理推廣至二維平面及三維空間的任意 n 個位似圖形，接著我們想進一步了解「蒙日定理在任意 N 維空間中是否仍然成立呢？」首先，為了更方便探討 N 維空間的抽象幾何，我們嘗試引用位似變換的定義，並退回到從「點的位似變換」開始探討，希望以此來描述所熟悉的圓或球，最後再推廣至 N 維空間的任意位似形體。

【定義 4-3】點的位似變換

設O為平面上的一定點，H平面上的變換。若H對於任意對對應點P、P'，都有$\overrightarrow{OP'}=k\ \overrightarrow{OP}$（$k$ 為非零實數），則稱H為一**位似變換**，記為$H(O,k)$，O稱為**位似中心**，k稱為**位似比**。

若以$H(O,k)$將P映至P'，則記為 $P \xrightarrow{H(O,k)} P'$；其中若$k>0$，則稱$O$為**位似外心**，若$k<0$，則稱$O$為**位似內心**。

設平面上任意兩圓A、B，作出其位似外心O_{AB}，若將圓A上的任意一點P作位似變換，使得$P \xrightarrow{H\left(O_{AB},\ \frac{r_B}{r_A}\right)} P'$，不難證明$P'$必落在圓$B$上；若$P$在圓$A$上轉一圈，$P'$亦會在圓$B$上轉一圈。於是，若對於$A$上的任何一點$P$都有$B$上的一點$P'$與其對應，其中$\overrightarrow{OP'} = k\ \overrightarrow{OP}$，我們則以「$A \xrightarrow{H(O,k)} B$」，表示變換H將圓A映至圓B的過程。



▲圖 4-15：點與圓的位似變換

以此定義，「給定兩圓A、B，作出其位似外心O_{AB}」將等價於「給定圓A，並以$H\left(O_{AB},\frac{r_B}{r_A}\right)$將$A$映至$B$」或是「先給定圓$B$，再以$H\left(O_{AB},\frac{r_A}{r_B}\right)$將$B$映至$A$」，因此我們可以用位似變換重新描述蒙日線定理，如下：

【定理 4-4】位似變換觀點下的蒙日線定理

給定平面上的一圓A，若$A \xrightarrow{H\left(O_{AB},\frac{r_B}{r_A}\right)} B$、$B \xrightarrow{H\left(O_{BC},\frac{r_C}{r_B}\right)} C$，則必有一變換$H\left(O_{AC},\frac{r_C}{r_A}\right)$可將$A$映至$C$，且$O_{AB}$、$O_{BC}$、$O_{AC}$共線。

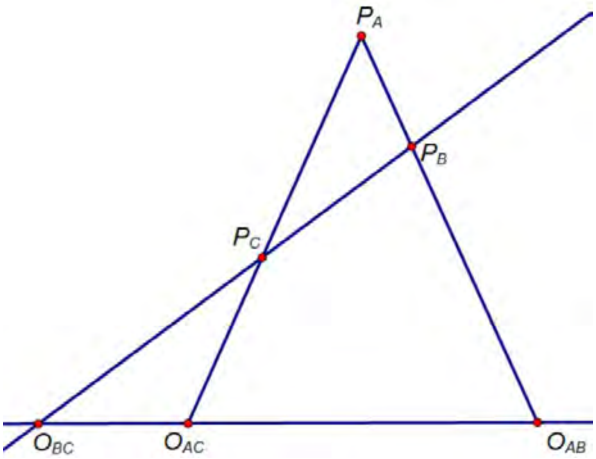
將圓視為「平面上的動點到定點為等距離的點集合或軌跡圖形」，倘若我們能證明前述所有性質對於「點」皆能成立，也就是圓上的各對對應點皆有蒙日定理的性質，那麼平面上各圓的蒙日定理就很顯然成立；同樣道理，由無限多點所組成的球體，甚至是 N 維的超球體都可以用此方式來解釋。因此，接下來我們將著重在將前述的定理以「點」的形式重述並且證明。首先，我們將三圓退化為三點，從圖形可以發現，這其實就是我們熟悉的 Menelaus 及 Ceva 定理，說明如下：

【定理 4-5】平面上三點的蒙日定理

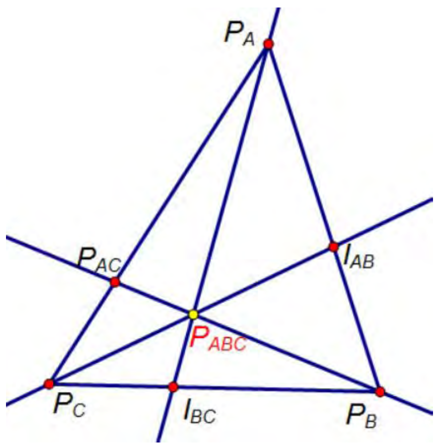
給定平面上的點P_A、O_{AB}、O_{BC}、I_{AB}、I_{BC}，與正數r_A、r_B、r_C：

(1) 若$P_A \xrightarrow{H\left(O_{AB},\frac{r_B}{r_A}\right)} P_B$、$P_B \xrightarrow{H\left(O_{BC},\frac{r_C}{r_B}\right)} P_C$，則必可找到唯一一點$O_{AC}$，使得$P_A \xrightarrow{H\left(O_{AC},\frac{r_C}{r_A}\right)} P_C$，且$O_{AB}$、$O_{BC}$、$O_{AC}$共線，如圖 4-16。

(2) 若$P_A \xrightarrow{H\left(I_{AB},-\frac{r_B}{r_A}\right)} P_B$、$P_B \xrightarrow{H\left(I_{BC},-\frac{r_C}{r_B}\right)} P_C$，則必可找到唯一一點$P_{AC}$，使得$P_A \xrightarrow{H\left(P_{AC},-\frac{r_C}{r_A}\right)} P_C$，且$\overleftrightarrow{P_C I_{AB}}$、$\overleftrightarrow{P_A I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{P_B I_{AC}}$共點，此點以符號$P_{ABC}$表示，如圖 4-17。



▲圖 4-16：平面上三點的蒙日線



▲圖 4-17：平面上三點的蒙日點

<證明>

1° 由位似變換定義知$\overline{P_A O_{AB}}：\overline{O_{AB} P_B} = r_A：r_B$ 、 $\overline{P_B O_{BC}}：\overline{O_{BC} P_C} = r_B：r_C$，

若在$\overleftrightarrow{P_A P_C}$上找一點$O_{AC}$，使得$\overline{P_A O_{AC}}：\overline{O_{AC} P_C} = r_A：r_C$，可知其唯一，並且

$\frac{\overline{P_A O_{AB}}}{\overline{O_{AB} P_B}} \times \frac{\overline{P_B O_{BC}}}{\overline{O_{BC} P_C}} \times \frac{\overline{P_C O_{AC}}}{\overline{O_{AC} P_C}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1$，由 Menelaus 定理可證得$O_{AB}$、$O_{BC}$、$O_{AC}$共線。

2° 由位似變換定義知$\overline{P_A I_{AB}}：\overline{I_{AB} P_B} = r_A：r_B$、$\overline{P_B I_{BC}}：\overline{I_{BC} P_C} = r_B：r_C$，

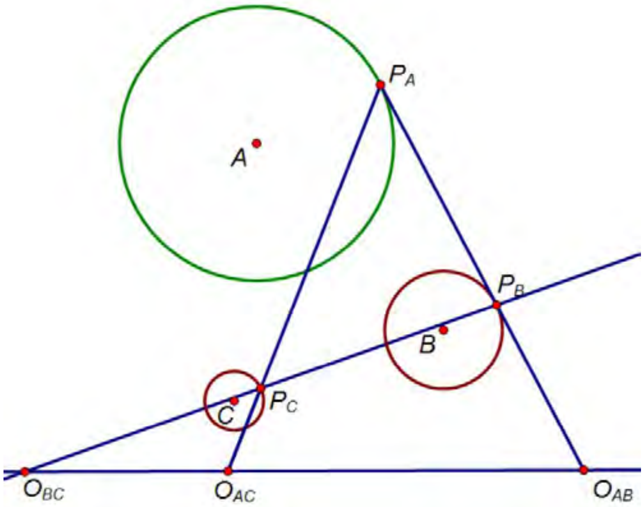
若在$\overleftrightarrow{P_A P_C}$上找一點$P_{AC}$，使得$\overline{P_A I_{AC}}：\overline{I_{AC} P_C} = r_A：r_C$，可知其唯一，並且

$\frac{\overline{P_A I_{AB}}}{\overline{I_{AB} P_B}} \times \frac{\overline{P_B I_{BC}}}{\overline{I_{BC} P_C}} \times \frac{\overline{P_C P_{AC}}}{\overline{P_{AC} P_C}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1$，由 Ceva 定理可證得$\overleftrightarrow{P_C I_{AB}}$、$\overleftrightarrow{P_A I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{P_B P_{AC}}$共點。

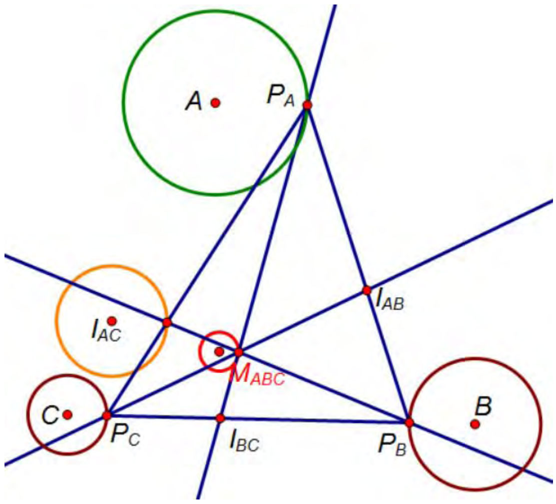
■

注意到此時P_{AC}並非如I_{AB}、I_{BC}為一定點，而是會隨著 *A* 點位置改變的動點，故不稱其為I_{AC}，暫以P_{AC}稱之。

給定一圓A與圓上一動點P_A，若再給定點O_{AB}、O_{BC}、I_{AB}、I_{BC}與正數r_A、r_B、r_C，由前述可知，隨著P_A在圓A上運動， P_B與P_C的軌跡分別為圓B與圓C，如圖 4-18，不難看出此時的圖形即為三圓蒙日線與蒙日點定理。值得注意的是，定理 4-3(2)中的共點P_{ABC}，隨著P_A在圓A上運動，其P_{ABC}的軌跡為圓 A、B、C 的蒙日圓；而當P_A在圓 A 的圓心 A 點位置時，P_B與P_C的軌跡即分別為圓 B 與圓 C 的圓心 B 點和 C 點，此時P_{AC}的軌跡為一圓，其圓心即為I_{AC}；P_{ABC}的軌跡即為蒙日圓，其圓心也就是蒙日點M_{ABC}。

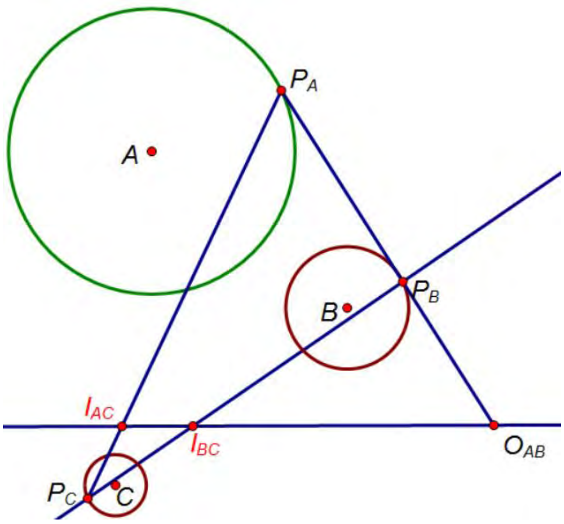


▲圖 4-18(a)：平面上三圓的蒙日線

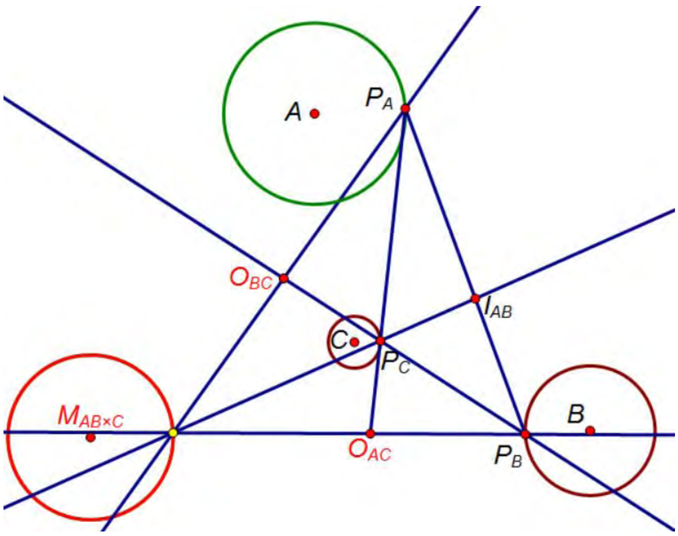


▲圖 4-18(b)：平面上三圓的蒙日點

接下來我們嘗試討論定理 4-3 敘述中的定值r_A、r_B、r_C為負數的情形，如圖 4-19，即為$r_C < 0$的情形，可以發現其結果就是前一節的想法「對圓C作旋轉變換」，也就是說「透過改變定值的正負，可以將蒙日線、蒙日點與廣義蒙日線、廣義蒙日點互相變換。」



▲圖 4-19(a)：平面上三圓的廣義蒙日線



▲圖 4-19(b)：平面上三圓的廣義蒙日點

接下來，我們嘗試以點的形式重述【定理 1-1】，透過如第一節的證明方式，證得平面上 n 點的蒙日定理性質，如下：

【定理 4-6】平面上四點的蒙日定理

給定平面上的點P_A、O_{AB}、I_{AB}、I_{BC}、I_{CD}，與正數r_A、r_B、r_C、r_D：

(1) 若$P_A \xrightarrow{H\left(O_{AB},\frac{r_B}{r_A}\right)} P_B$、$P_B \xrightarrow{H\left(I_{BC},-\frac{r_C}{r_B}\right)} P_C$、$P_C \xrightarrow{H\left(I_{CD},-\frac{r_D}{r_C}\right)} P_D$，則必可找到唯一一點$I_{AD}$，

使得 $P_A \xrightarrow{H\left(I_{AD},-\frac{r_D}{r_A}\right)} P_D$，且$P_{ACD}$、$P_{BCD}$、$O_{AB}$共線，如圖 4-20。

(2) 若$P_A \xrightarrow{H\left(I_{AB},-\frac{r_B}{r_A}\right)} P_B$、$P_B \xrightarrow{H\left(I_{BC},-\frac{r_C}{r_B}\right)} P_C$、$P_C \xrightarrow{H\left(I_{CD},-\frac{r_D}{r_C}\right)} P_D$，則必可找到唯一一點$I_{AD}$，

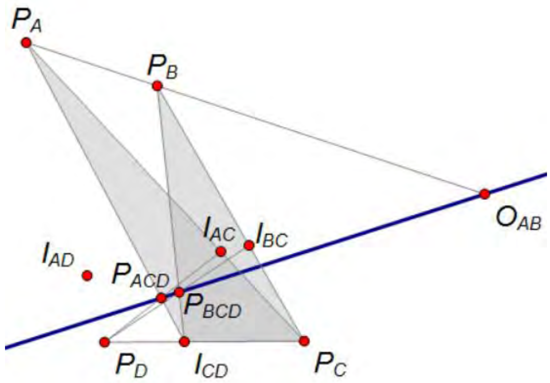
使得 $P_A \xrightarrow{H\left(I_{AD},-\frac{r_D}{r_A}\right)} P_D$，且 $\overleftrightarrow{P_AP_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{P_BP_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{P_CP_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{P_DP_{ABC}}$四線共點，

稱其為P_{ABCD}，如圖 4-21。

(3) 承(2)，必可找到唯一一點I_{AC}、I_{BD}，分別使得$P_A \xrightarrow{H\left(I_{AC},-\frac{r_C}{r_A}\right)} P_C$、$P_B \xrightarrow{H\left(I_{BD},-\frac{r_D}{r_B}\right)} P_D$，且

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$必皆通過$P_{ABCD}$。

＜(1)證明＞



▲圖 4-20：平面上四點的廣義蒙日線

1° 在△$P_AP_CI_{CD}$中，以I_{AC}、P_D、P_{ACD}為截線，

由 Menelaus 定理知 $\frac{\overline{P_AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}P_C}} \times \frac{\overline{P_CP_D}}{\overline{P_DI_{CD}}} \times \frac{\overline{I_{CD}P_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}P_A}} = 1$，

並由定義知 $\frac{\overline{P_AI_{AC}}}{\overline{I_{AC}P_C}} = \frac{r_A}{r_C}$，於是上式可改寫為

$\frac{\overline{P_AP_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}I_{CD}}} = \frac{r_A}{r_C} \times \frac{\overline{P_CP_D}}{\overline{P_DI_{CD}}}$；同理，在△$P_BP_CI_{CD}$中，以

I_{BC}、P_D、P_{BCD}為截線可得 $\frac{\overline{I_{CD}P_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_B}} = \frac{r_C}{r_B} \times \frac{\overline{P_DI_{CD}}}{\overline{P_CP_D}}$。

2° 在△$P_AP_BI_{CD}$中，O_{AB}、P_{ACD}、P_{BCD}分別在三邊延長線上，由上述1°及定義

可得 $\frac{\overline{P_BO_{AB}}}{\overline{O_{AB}P_A}} \times \frac{\overline{P_AP_{ACD}}}{\overline{P_{ACD}I_{CD}}} \times \frac{\overline{I_{CD}P_{BCD}}}{\overline{P_{BCD}P_B}} = \frac{r_B}{r_A} \times \left(\frac{r_A}{r_C} \times \frac{\overline{P_CP_D}}{\overline{P_DI_{CD}}}\right) \times \left(\frac{r_C}{r_B} \times \frac{\overline{P_DI_{CD}}}{\overline{P_CP_D}}\right) = 1$，

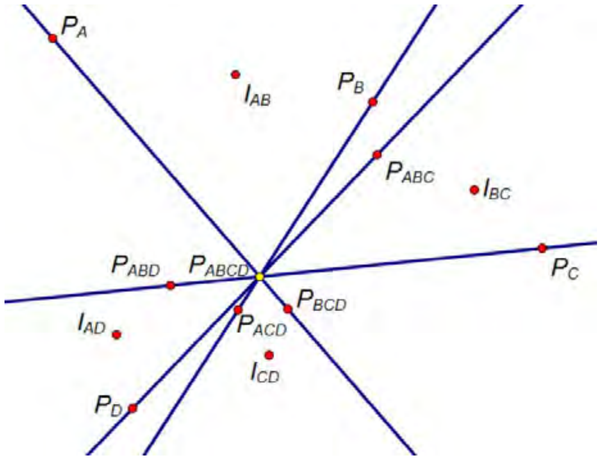
由 Menelaus 逆定理可證得 O_{AB}、P_{ACD}、P_{BCD}三點共線。

同理，$(O_{AC}$、P_{ABD}、$P_{BCD})$、$(O_{AD}$、P_{ABC}、$P_{BCD})$、$(O_{BC}$、P_{ABD}、$P_{ACD})$、

$(O_{BD}$、P_{ABC}、$P_{ACD})$、$(O_{CD}$、P_{ABC}、$P_{ABD})$亦分別三點共線。

＜(2)證明＞

1° 作△ $P_AP_BP_C$與△ $P_{BCD}P_{ACD}P_{ABD}$，根據(1)可知



▲圖 4-21：平面上四點的蒙日點

$\overleftrightarrow{P_{BCD}P_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{P_AP_B}$交於 O_{AB}，$\overleftrightarrow{P_{ACD}P_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{P_BP_C}$交於$O_{BC}$，$\overleftrightarrow{P_{BCD}P_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{P_AP_C}$交於$O_{AC}$。

2° 由蒙日線定理知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，

並且由 Desargues 定理可得 $\overleftrightarrow{P_AP_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{P_BP_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{P_CP_{ABD}}$ 三線共點，同理，

$\overleftrightarrow{P_AP_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{P_BP_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{P_DP_{ABC}}$ 三線共點，

故 $\overleftrightarrow{P_AP_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{P_BP_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{P_CP_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{P_DP_{ABC}}$ 四線共交一點。

＜(3)證明＞

1°在△ $P_BP_DI_{AB}$中，以I_{BD}、P_{ABD}、P_A為截線，

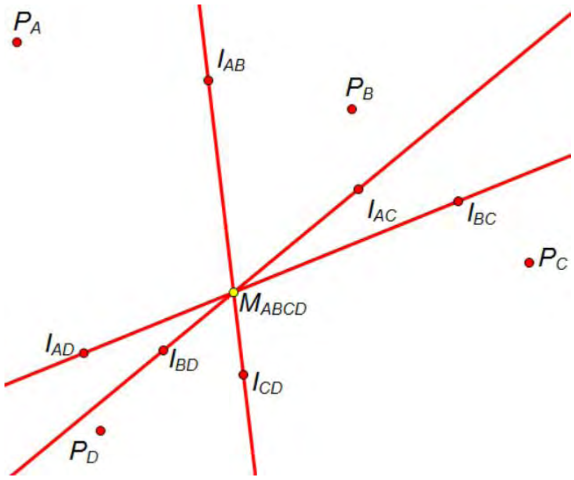
由 Menelaus 定理知 $\frac{\overline{P_BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}P_D}}\times\frac{\overline{P_DP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}P_A}}{\overline{P_AP_B}}=1$，

並由定義知 $\frac{\overline{P_BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}P_D}}=\frac{r_B}{r_D}$

則上式可改寫為 $\frac{\overline{P_DP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}I_{AB}}}=\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{P_BP_A}}{\overline{P_AI_{AB}}}$。

同理，在△ $P_BP_CI_{AB}$中，以I_{BC}、P_{ABC}、P_A為截線

可得 $\frac{\overline{I_{AB}P_{ABC}}}{\overline{P_{ABC}P_C}}=\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}P_A}}{\overline{P_AP_B}}$。



▲圖 4-22：平面上四點的分堆性質

2°在△ $P_CP_DI_{AB}$中，I_{CD}、P_{ABD}、P_{ABC} 分別在三邊延長線上，由上述1°及定義

可得 $\frac{\overline{P_DP_{ABD}}}{\overline{P_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}P_{ABC}}}{\overline{P_{ABC}P_C}}\times\frac{\overline{P_CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}P_D}}=\left(\frac{r_D}{r_B}\times\frac{\overline{BP_A}}{\overline{P_AI_{AB}}}\right)\times\left(\frac{r_B}{r_C}\times\frac{\overline{I_{AB}P_A}}{\overline{P_AB}}\right)\times\frac{r_C}{r_D}=1$，

由 *Ceva* 逆定理知 $\overleftrightarrow{P_DP_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{P_CP_{ABD}}$ 三線共點，

又根據(2) $\overleftrightarrow{P_DP_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{P_CP_{ABD}}$ 交於P_{ABCD}，則可證得 $\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$ 通過點P_{ABCD}。

同理，$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$ 亦皆通過P_{ABCD}。 ■

仿照平面上四點的蒙日定理的作法，我們可以很容易地推廣到平面上 *n* 點的蒙日定理，如下，證明過程就不再贅述。

【定理 4-7】平面上 *n* 點的蒙日定理

給定平面上的點P_1、O_{12}、I_{12}、I_{23}、⋯、$I_{n-1\,n}$，與正數r_1、r_2、⋯、r_n：

(1) 若$P_1 \xrightarrow{H\left(O_{12},\frac{r_2}{r_1}\right)} P_2$、$P_2 \xrightarrow{H\left(I_{23},-\frac{r_3}{r_2}\right)} P_3$、$P_3 \xrightarrow{H\left(I_{34},-\frac{r_4}{r_3}\right)} P_4$、⋯、$P_{n-1} \xrightarrow{H\left(I_{n-1\,n},-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)} P_n$，則必可找到唯一一點$I_{1n}$使得$P_1 \xrightarrow{H\left(I_{1n},-\frac{r_n}{r_1}\right)} P_n$，且$P_{134\cdots n}$、$P_{234\cdots n}$、$O_{12}$共線。

(2) 若$P_1 \xrightarrow{H\left(I_{12},-\frac{r_2}{r_1}\right)} P_2$、$P_2 \xrightarrow{H\left(I_{23},-\frac{r_3}{r_2}\right)} P_3$、⋯⋯、$P_{n-1} \xrightarrow{H\left(I_{n-1\,n},-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)} P_n$，則必可找到唯一一點$I_{1n}$使得$P_1 \xrightarrow{H\left(I_{1n},-\frac{r_n}{r_1}\right)} P_n$，且$\overleftrightarrow{P_1P_{234\cdots n}}$、$\overleftrightarrow{P_2P_{134\cdots n}}$、⋯、$\overleftrightarrow{P_nP_{12\cdots n-1}}$共點，稱其為$P_{12\cdots n}$。

在上述定理中，我們只要將起始點P_1繞著一圓繞行一圈，不難得知P_2、P_3、⋯⋯P_n的軌跡亦為一圓，也就可以說明平面上的 *n* 圓有蒙日定理的性質。又因為位似變換的定義是以向量的方式定義，而向量可以推廣至 3 維空間，甚至是 *N* 維空間，因此可以透過同樣的方法，確認 *N* 維空間中的 *n* 個球面也必具有蒙日定理的性質。例如：給定一個二維球面S_1與球上一點P_1，若再給定O_{12}、I_{12}、I_{23}、⋯、$I_{n-1\,n}$，與正數r_1、r_2、⋯、r_n，透過【定理 4-7】的結論可以作出$P_2 \sim P_n$，隨著P_1在S_1繞行一周，$P_2 \sim P_n$的軌跡將亦為二維球面$S_2 \sim S_n$，此時$P_1 \sim P_n$滿足蒙日定理，因此可以確定球面$S_1 \sim S_n$也滿足蒙日定理。

最後，由於位似變換的定義並不只適用於圓或球，任意圖形只要相似且對應點連線共點便屬之，因此不難推得任意的位似圖形也都有蒙日定理；又因為向量的推廣，我們還可以類比【定理 4-1】的證明方式更進一步地指出，*N* 維空間中的任意形體，只要互相位似便能滿足蒙日定理。

【定理 4-8】N 維位似圖形的蒙日定理

設 *N* 維空間的 *n* 個圖形，若此 *n* 圖形皆互相位似，則其必滿足蒙日點、蒙日線等蒙日定理性質。

本研究至此，我們從三圓的蒙日定理出發，推廣至 *n* 個圓、*n* 個球，以至 *N* 維空間內的任意圖形，我們發現「*N* 維空間中的任意 *n* 個圖形，只要圖形互相位似，必定含有蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點、廣義蒙日線、蒙日形與廣義蒙日形等性質。」換句話說，「***N* 維空間中的任意 *n* 個位似圖形（位似體），其蒙日定理等相關性質均成立。**」這將使蒙日定理在實

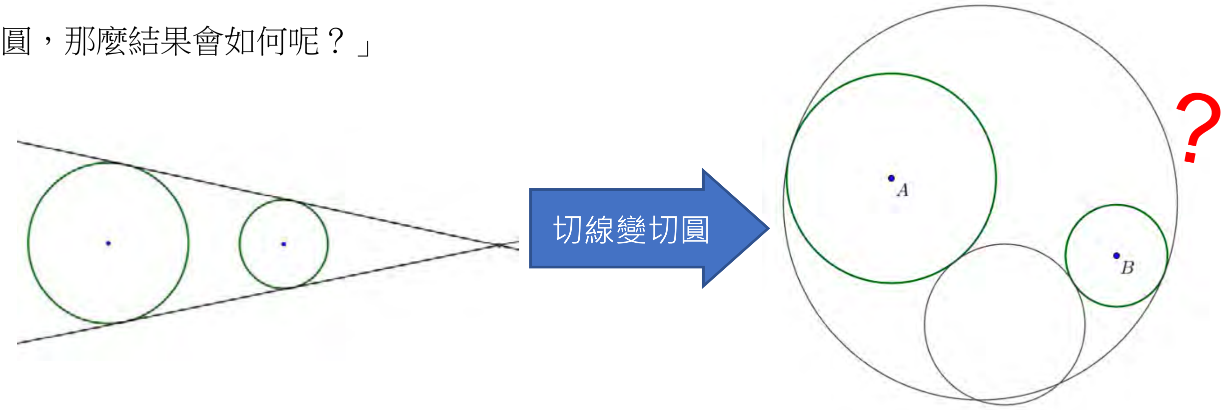
體世界與抽象空間圖形關係的應用，更獲得進一步的推廣。

五、不同條件變換觀點下的蒙日定理

在前面各節中，主要是平面或空間直角坐標系中的探討，以直線作圖找出兩圓的位似中心，但是「如果不是直線、如果不是在直角坐標系，那麼蒙日定理的性質是否依然存在？」本研究最後欲以不同條件變換觀點下，探討蒙日定理的存在性，並以切線變成切圓、平面座標變成球面座標為例，探討如下：

（一）切線變成切圓的蒙日定理

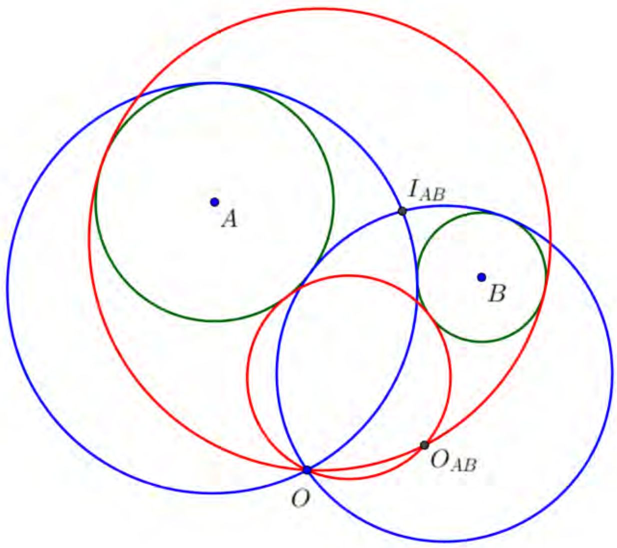
在第三節中曾提到「一直線可視為一極大圓」，而在本研究前述的討論中，主要是以「作兩圓公切線的交點」為前提，然而「如果不是做兩圓公切線的交點而是做兩圓的公切圓，那麼結果會如何呢？」



由於兩圓的公切圓有無限多個，無法確立唯一，經嘗試後發現只要增加一個定點，以「過一定點作兩圓公切圓」的方式進行作圖即可，說明如下：

【定義 5-1】過一定點作兩圓公切圓

平面上兩圓 A、B 與一定點 O，過 O 作 A、B 的公切圓共有四個，如下圖 5-1，其中： (1)「與 A、B 同時外切」及「與 A、B 同時內切」的兩個公切圓，類比兩圓的外公切線，稱之為**圓 A、B 的外公切圓**（如圖中紅色圓），並仍以O_{AB}表示此兩個外公切圓的其中一個交點（另一交點即為 O 點），並以「以 O 作出O_{AB}」簡記作圖過程。 (2)「與 A 外切與 B 內切」及「與 A 內切與 B 外切」的兩個公切圓，類比兩圓的內公切線，稱之為**圓 A、B 的內公切圓**（如圖中藍色圓），並仍以I_{AB}表示此兩個公切圓的的其中一個交點（另一交點即為 O 點），並以「以 O 作出I_{AB}」簡記作圖過程。



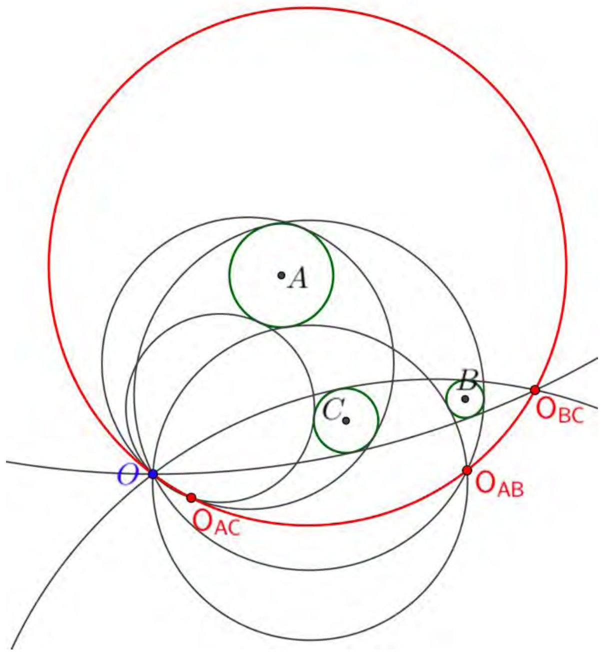
▲圖 5-1：過定點 O 的圓 A、B 的內、外公切圓

若以此新定義，嘗試將任兩圓的「公切線想像成公切圓」，重新討論三圓時，是否還存在蒙日線與蒙日點呢？

首先討論蒙日線定理，給定平面上的三圓 A、B、C 與一定點 O，以 O 分別作出 O_{AB}、O_{BC}、O_{AC}，以之前蒙日線定理來看，我們猜測此三點共線（蒙日線）。然而，在圖 5-2 中所見，此三點顯然並不在同一條直線上，而是與定點 O 一同構成一組**四點共圓**的關係，不妨將此圓稱為「**蒙日線圓**」。

在上述的想法中，我們將前提由六條直線（公切線）變換成六個圓（公切圓），其結論由三點共線（蒙日線）變為四點共圓（蒙日線圓），便顯得自然而合理。

另外，由於六個公切圓共交於此定點 O，這不禁令人聯想到「**通過此定點 O 的六圓，即為此六條直線對以此定點 O 為中心的反演結果**」，為了後續證明，以下先介紹有關反演變換的相關性質：



▲圖 5-2：三圓的蒙日線圓

【定義 5-2】反演變換

給定平面上半徑為r、圓心為O的圓，對平面上任一異於O的點P，將其變換為$\overrightarrow{OP}$上的一點P'，使得$\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「**$P'$為$P$關於$O$的反演點**」。基於此定義，對於平面上的任一圖形$F$，皆可將其上所有的點分別作關於$O$的反演點，形成一新的圖形$F'$，我們亦稱「**$F'$為$F$關於$O$的反演圖形**」。以下簡列幾個常用圖形之反演結果：

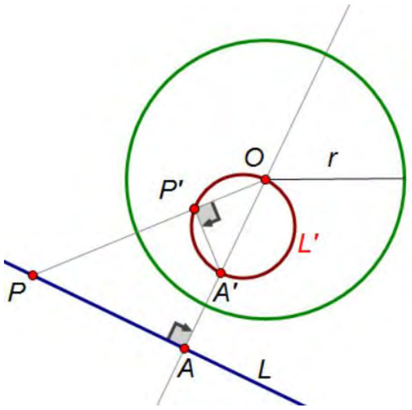
(1) 過O之一直線反演成過O之一直線。

(2) 不過O之一直線反演成過O之一圓。

(3) 過O之一圓反演成不過O之一直線。

(4) 不過O之一圓反演成不過O之一圓。

＜證明＞



1° 由反演定義可知，直線上的任何一點，經反演後仍為同一直線上的另一點，因此(1)的結果顯然成立。

2° 如右圖，給定平面上一不過O的直線L，過O作直線L的垂線，並交L於A，A'為A關於O的反演點。設L上的一動點P，因$\overline{OA}\times\overline{OA'}=\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，故知$\triangle OAP\sim\triangle OP'A'$，又$\angle OAP=\angle OP'A'=90°$，故知$P'$在以$\overline{OA'}$為直徑的圓上。因此$L$關於$O$的反演圖形$L'$為過$O$的一圓，反言之，過$O$的一圓經反演後為不過$O$的直線。故(2)、(3)成立。

3° 給定平面上一不過O的圓K，其半徑為k，過O作一直線交K於A、B兩點，並分別作A、B關於O的反演點A'、B'，過A'作一直線平行$\overline{BK}$，並交$\overline{OK}$於P。設過O對K的切線長為t，由圓外冪性質知$\overline{OA}\times\overline{OB}=t^2$，由反演定義知$\overline{OA}\times\overline{OA'}=\overline{OB}\times\overline{OB'}=r^2$，兩式相除得$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}=\frac{r^2}{t^2}=c^2$（其中$c^2$為一常數，由$r$、$t$決定），並由三角形相似性質可知$\frac{\overline{OP}}{\overline{OK}}=\frac{\overline{A'P}}{k}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}=c^2$，故知$\overline{OP}=\overline{OK}\times c^2$且$\overline{A'P}=k\times c^2$。由上兩式可知，對於所有過$O$直線交$K$於$A$、$B$兩點，$P$為定點，且$\overline{P\,A'}$長度為定值，故$A'$的軌跡，即圓$K$關於$O$的反演圖形，為一不過$O$的圓。故(4)成立。 ■

由於以上的性質，我們以反演變換來解釋上述【定理 5-2】的結果「**平面上三圓，過定**

點作任意兩圓外公切圓的交點，則此三交點與定點必四點共圓」就顯得自然而合理了！

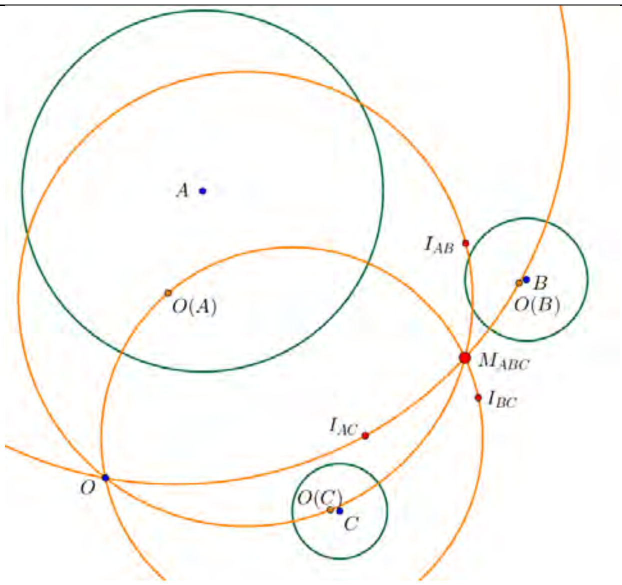
【定理 5-3】反演後的蒙日線圓

給定平面上的三圓 A、B、C 與一定點 O，若以 O 作出O_{AB}，同理作出 O_{BC} 、O_{AC}，則 O_{AB} 、O_{BC} 、O_{AC}與 O 四點共圓，並稱其為**蒙日線圓**，如前頁圖 5-2。

同樣地，「**平面上三圓，過定點作任意兩圓內公切圓的交點，與另一圓圓心的連線是否會共交一點呢？**」這樣的猜測經過檢驗證實是錯的（如圖 5-3），但若將此交點與圓心的連線（直線）亦想成是圓，再加上些微條件修正，便可得到漂亮的反演後蒙日點，說明如下：

【定理 5-4】反演後的蒙日點

給定平面上的三圓 A、B、C 與一定點 O，若以 O 作出I_{AB}，以定點 O 對 A 作反演點 $O(A)$，並作過 O、$O(A)$、I_{BC}的三點圓，稱為圓 A'，同理作出圓 B'、圓C'，則圓 A'、B'、C'三圓共點，稱其為**反演後的蒙日點**，並以「以 O 作出M_{ABC}」表示過程，如圖 5-3。



▲圖 5-3：反演後的蒙日點

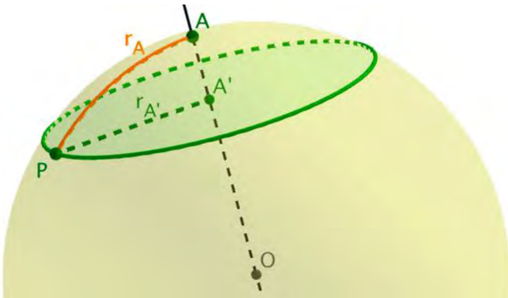
利用反演變換的觀點，以兩圓的公切線為前提的蒙日定理，可以變換成以兩圓的公切圓，而得到不一樣的新面貌，將其推廣至平面上 n 個圓時，結果應該不難想像。又試想其它如 Desargues 定理、Pascal 定理及 Brianchon 定理，甚至更基本的 Menelaus、Ceva 定理等相關共點與共線性質，是不是也會有類似的發現呢？這樣的觀點，實在是提供了無限的想像。

（二）球面座標中的蒙日定理

在前面蒙日定理的探討，主要是在平面或空間的直角座標系上進行討論，若以我們身處

在地球這個球面上來想，不禁令人好奇，在球面座標上的三個圓，是否也存在蒙日定理的相關性質呢？

為使研究過程更清楚的表達，我們先將球面上會使用到的符號做一些約定：



設球面 O 上的一圓，其圓心為 A'，若$\overrightarrow{OA'}$與球面交於 A 點，我們稱「A 點為圓 A' 在球面上的**球面圓心**」；在平面時，我們都以圓 A' 稱呼此圓，但為方便後續表達，在球面上時一律以「圓 A」稱呼此圓，特別強調，此時 A 點非指此圓的圓心，而是此圓的球面圓心。若以**球面圓心** A 點，與圓 A'上一任意點 P，作一經弧，則稱「$\widehat{AP}$為圓 A'在球面上的**球面圓半徑**，並以r_A表之。」

在定義球面上兩圓的位似中心之前，先從球面上作圓的切線開始討論，如下：

【作圖 5-5】球面上，過圓外一點作切圓

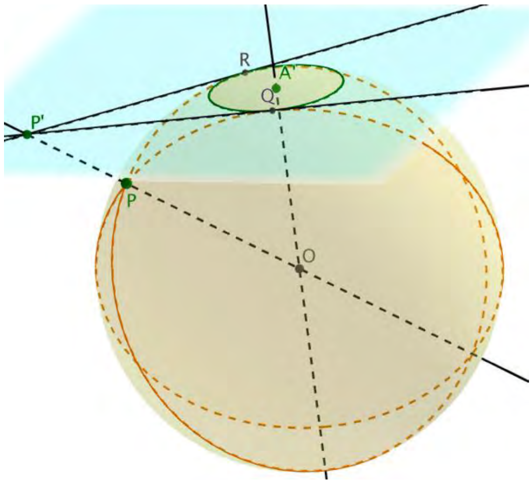
在球面 O 上，給定一圓 A 及圓外一點 P，試作：過 P 點與圓 A 相切的兩大圓，此兩大圓以下仍以切線稱之，如圖 5-4。

〈作法〉

1° 作一平面 E，過圓心 A'且垂直$\overrightarrow{OA'}$，且$\overrightarrow{OP}$交平面 E 於一點 P'。

2° 在平面 E 上，過圓 A' 外一點 P'，作與圓 A' 相切的兩直線，並與圓 A' 相切於 Q、R 兩點。

3° 作兩平面 $P'QO$、$P'RO$，分別與球面 O 截出兩個大圓，即為過圓外 P 點與圓 A' 相切的兩大圓。為避免混淆，仍稱此兩大圓為**切線**。



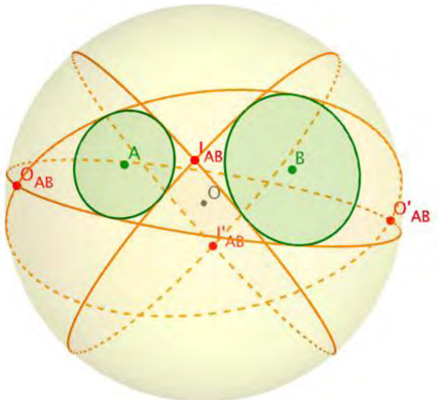
▲圖 5-4：球面上，過圓外一點作切線

【作圖 5-6】球面上，作兩圓的內、外公切線

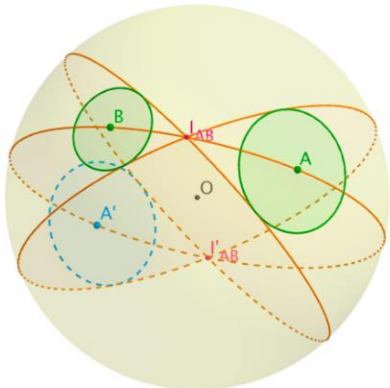
在球面 O 上，給定兩個外離圓 A、B，試作與圓 A、B 均相切的兩大圓，兩大圓交點在 A、B 之間者，稱此兩大圓為內公切線，其交點則為位似內心I_{AB}、I'_{AB}，否則稱為外公切線，其交點則為位似外心O_{AB}、O'_{AB}，如圖 5-5。

仿照平面上兩圓公切線作法及【作圖 5-5】，即可得到上述所求。其中兩組公切線交點即為「球面上兩個圓的位似中心」，其中一組交點為位似內心，一組交點為位似外心，均各有兩點，且兩點互為對頂。

有別於平面上兩圓的相關性質，如圖 5-6，我們發現到，球面上任意兩圓 A、B，作其兩內公切線（大圓）交於位似內心 I_{AB} 與 I'_{AB}。若作圓 A 的對頂圓A'，則I_{AB}與I'_{AB}會轉換為圓 A'與圓 B 的位似外心，我們稱之為**球面上兩圓位似中心的「對頂變換性質」。**



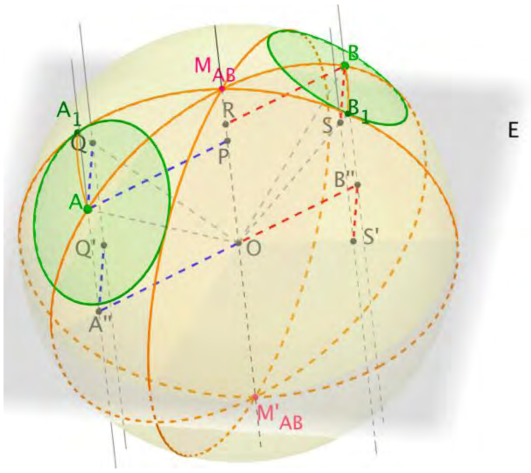
▲圖 5-5：球面上，兩圓公切線作圖



▲圖 5-6：對頂變換性質

【定理 5-7】球面上的位似比

設單位球面 O 上的兩圓 A、B，球面半徑分別為r_A、r_B，作兩圓 A、B 的公切線，兩圓與兩公切線的切點分別為A_1、A_2與B_1、B_2。令$\widehat{AA_1}$=r_A、$\widehat{BB_1}$=r_B、$\widehat{AM_{AB}} = a$、$\widehat{BM_{AB}} = b$，則 $\frac{\sin r_A}{\sin r_B} = \frac{\sin a}{\sin b}$，如圖 5-7。



▲圖 5-7：球面位似比

＜證明＞

1° 作一平面 E 通過球心且垂直於$\overleftrightarrow{OM_{AB}}$，

2° 作 $\overline{AP} \perp \overleftrightarrow{OM_{AB}}$、$\overline{BR} \perp \overleftrightarrow{OM_{AB}}$、

$\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{OA_1}$、$\overline{BS} \perp \overleftrightarrow{OB_1}$。

其中 $\overline{AQ} = \sin r_A$、$\overline{BS} = \sin r_B$、

$\overline{AP} = \sin a$、$\overline{BR}=\sin b$ 。

3° 將$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$、$\overline{BS}$、$\overline{BR}$ 正射投影至平面 E 上，

得$\overline{A''Q'}$、$\overline{A''O}$、$\overline{B''S'}$、$\overline{B''O}$。

4° $\because \overline{AP} \perp \overleftrightarrow{OM_{AB}}$ $\therefore \overline{AP}//$平面 E；

又$\overline{BS} \perp \overleftrightarrow{OB_1}$ 且 平面OB_1M_{AB} ⊥平面 E $\therefore$ $\overline{BS}//$平面 E，

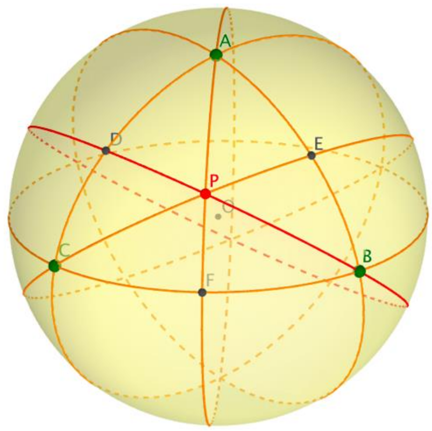
同理 $\overline{BR}//$平面E、$\overline{AQ}//$平面 E。

5° 由4°可推知，$\overline{A''Q'} = \overline{AQ}$、$\overline{B''S'} = \overline{BS}$、$\overline{A''O} = \overline{AP}$、$\overline{B''O}=\overline{BR}$，

且$\because$ $\overline{AQ}$、$\overline{BS} \perp$ 平面OB_1M_{AB} $\therefore \overline{A''Q'}//\overline{B''S'}$。

6° 由上述，根據相似性質，則$\frac{\overline{A''O}}{\overline{B''O}} = \frac{\overline{A''Q'}}{\overline{B''S'}} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BS}} \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin r_A}{\sin r_B}$。 ■

為方便處理球面上共點共線之證明，我們引用文獻上**球面三角形的 Menelaus 定理、Ceva 定理**，與平面上時相近，只是將線段比換成經弧的正弦值。說明如下，如圖 5-8。



▲圖 5-8：球面 Menelaus、Ceva 定理

球面 Menelaus 定理

「球面上有一球面三角形 ACF，若有一大圓與三邊大圓交於 D、P、B 三點，則 $\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DC}} \times \frac{\sin \widehat{CB}}{\sin \widehat{BF}} \times \frac{\sin \widehat{FP}}{\sin \widehat{PA}} = 1$，反之亦然。」

球面 Ceva 定理

「球面上有一球面三角形 ABC，過 A、B、C 三點分別各作一個大圓與三邊交於 D、E、F 三點，若三大圓共交於一點 P，則 $\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DC}} \times \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{FB}} \times \frac{\sin \widehat{BE}}{\sin \widehat{EA}} = 1$，反之亦然。」

接下來，我們類比直角坐標系中的蒙日定理，探討球面上三圓的蒙日定理是否成立？

【定理 5-8】球面上三圓的蒙日線

球面上任意三圓 A、B、C，任兩圓作其位似外心O_{AB}、O'_{AB}、O_{BC}、O'_{BC}、O_{AC}、O'_{AC}，則六個位似外心共一大圓，並稱此大圓為「**球面上三圓的蒙日線**」，如圖 5-9。

＜證明＞

1° 作一球面三角形 ABC。

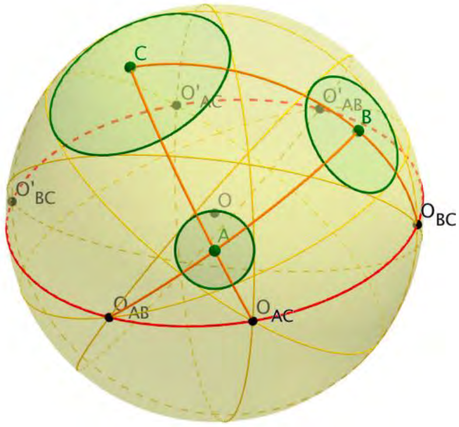
2° 由球面上的**位似比**得知：

$$\frac{\sin \widehat{AO_{AB}}}{\sin \widehat{O_{AB}B}} \times \frac{\sin \widehat{BO_{BC}}}{\sin \widehat{O_{BC}C}} \times \frac{\sin \widehat{CO_{AC}}}{\sin \widehat{O_{AC}A}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1，$$

3° 由球面 Menelaus 逆定理知O_{AB}、O_{BC}、O_{AC}三點共一大圓。

4° $\because (O_{AB}、O'_{AB})$、$(O_{BC}、O'_{BC})$、$(O_{AC}、O'_{AC})$互為對頂，

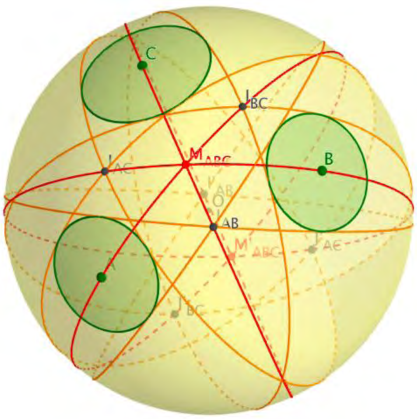
$\therefore O_{AB}$、O'_{AB}、O_{BC}、O'_{BC}、O_{AC}、O'_{AC}六點共一大圓 ■



▲圖 5-9：球面三圓蒙日線

【定理 5-9】球面上三圓的蒙日點

球面上任意三圓 A、B、C，若任一圓的球面圓心（A、B、C）與另兩圓的位似內心（I_{BC}、I_{CA}、I_{AB}）作大圓（如$\widehat{AI_{BC}}$、$\widehat{BI_{CA}}$、$\widehat{CI_{AB}}$），則此三大圓共交於M_{ABC}與 M'_{ABC}兩點，且此兩點互為對頂，均稱為「**球面上三圓的蒙日點**」，如圖 5-10。



▲圖 5-10：球面三圓蒙日點

＜證明＞

1° 作一球面三角形 ABC

2° 由球面上的**位似比性質**得知：

$$\frac{\sin \widehat{AI_{AB}}}{\sin \widehat{I_{AB}B}} \times \frac{\sin \widehat{BI_{BC}}}{\sin \widehat{I_{BC}C}} \times \frac{\sin \widehat{CI_{AC}}}{\sin \widehat{I_{AC}A}} = \frac{r_A}{r_B} \times \frac{r_B}{r_C} \times \frac{r_C}{r_A} = 1，$$

3° 由球面的 *Ceva* 逆定理知$\widehat{AI_{BC}}$、$\widehat{BI_{AC}}$、$\widehat{CI_{AB}}$三大圓共點於M_{ABC}與 M'_{ABC}。 ■

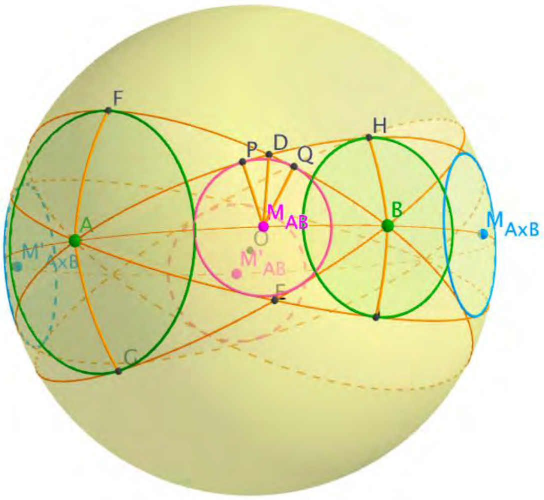
我們成功將三圓的蒙日定理推廣到球面上之後，很自然會思考「那麼球面上的多圓是否也存在蒙日圓、廣義蒙日圓等蒙日定理相關性質呢？」類比「平面上兩圓的蒙日圓」做法，結果如下：

【定理 5-10】球面上兩圓的蒙日圓、廣義蒙日圓

球面上兩圓 A、B，作過一圓心與另一圓相切的兩條切線(大圓)，共四條切線，如圖 5-11，

(1) 在兩圓 A、B 之間與四條切線相切的兩圓，均為圓 A、B 的蒙日圓，記作M_{AB}與 M'_{AB}，其圓心均為圓 A、B 的位似內心，亦是蒙日點，且互為對頂。

(2) 在兩圓 A、B 之外與四條切線相切的兩圓，均為圓 A、B 的廣義蒙日圓，記作$M_{A\times B}$與 $M'_{A\times B}$，其圓心均為圓 A、B 的位似外心，亦是廣義蒙日點，且互為對頂。



▲圖 5-11：球面蒙日圓

＜證明＞

1° 在球面三角形中 ADB、AEB 中，$\because \angle DAB = \angle EAB$、$\angle DBA = \angle EBA$，又$\widehat{AB} = \widehat{AB}$，

$\therefore$ $ADB \cong AEB$，得$\widehat{AD} + \widehat{BE} = \widehat{AE} + \widehat{BD}$，$\therefore$ 球面四邊形 $ADBE$ 有內切圓，

其球面圓心 M_{AB}為球面四邊形 $ADBE$ 之內心，

2° 作兩經弧$\widehat{PM_{AB}}$、$\widehat{QM_{AB}}$正交，$\because$ $\mathrm{M_{AB}}$為球面四邊形 $ABDE$ 之內心，$\therefore$ $\widehat{PM_{AB}} = \widehat{QM_{AB}}$，

3° 在球面三角形 APM_{AB}、BQM_{AB}中，由**球面正弦定理**可知

$\dfrac{\sin \widehat{AM_{AB}}}{\sin 90°} = \dfrac{\sin \widehat{PM_{AB}}}{\sin \angle DAB}$、$\dfrac{\sin \widehat{BM_{AB}}}{\sin 90°} = \dfrac{\sin \widehat{QM_{AB}}}{\sin \angle DBA}$，又$\widehat{PM_{AB}} = \widehat{QM_{AB}}$，$\therefore \dfrac{\sin \widehat{AM_{AB}}}{\sin \widehat{BM_{AB}}} = \dfrac{\sin\angle DBA}{\sin\angle DAB}$ ……(1)

4° 在球面三角形 ABF、ABH 中，由**球面正弦定理**可知$\dfrac{\sin r_A}{\sin \angle DBA} = \dfrac{\sin \widehat{AB}}{\sin 90°}$，

得$\sin \angle DBA = \dfrac{\sin r_A}{\sin \widehat{AB}}$， 同理可得$\sin\angle DAB = \dfrac{\sin r_B}{\sin \widehat{AB}}$，代回(1) 則可得 $\dfrac{\sin \widehat{AM_{AB}}}{\sin \widehat{BM_{AB}}} = \dfrac{\sin r_A}{\sin r_B}$，

5° 由球面位似比性質可知，$\because \dfrac{\sin \widehat{AM_{AB}}}{\sin \widehat{BM_{AB}}} = \dfrac{\sin r_A}{\sin r_B}$，$\therefore$ 球面蒙日圓圓心M_{AB}為兩圓位似內心，

同理亦可證$M_{A\times B}$為兩圓位似外心。 ■

【定理 5-11】球面上兩圓的蒙日圓與廣義蒙日圓的半徑與坐標

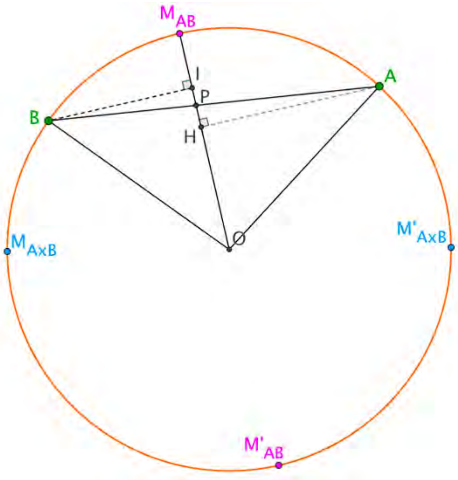
設在單位球面 O 上，r_A、r_B分別為兩圓 A、B 的球面半徑，則M_{AB}、$M_{A\times B}$與圓 A、B 的半徑和坐標的關係如下：

(1) $\overrightarrow{O_{M_{AB}}}=\dfrac{\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}+\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}}{\left|\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}+\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}\right|}$ ； $\overrightarrow{O_{M_{A\times B}}}=\dfrac{\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}-\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}}{\left|\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}-\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}\right|}$

(2) $\sin r_{M_{AB}}=\dfrac{\sin\widehat{AM_{AB}}\times\sin r_B}{\sin\widehat{AB}}$ 或 $\dfrac{\sin\widehat{BM_{AB}}\times\sin r_A}{\sin\widehat{AB}}$；

$\sin r_{M_{A\times B}}=\dfrac{\sin\widehat{AM_{A\times B}}\times\sin r_B}{\sin\widehat{AB}}$ 或 $\dfrac{\sin\widehat{BM_{A\times B}}\times\sin r_A}{\sin\widehat{AB}}$

＜證明＞



1° 如右圖，在平面 AOB 上，

連$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OM_{AB}}$，作$\overline{AB}$交$\overline{OM_{AB}}$於 P，

過 A、B 兩點分別對$\overline{OM_{AB}}$作垂線$\overline{AH}$、$\overline{BI}$。

2° $\overline{AH}=1\times\sin\widehat{AM_{AB}}$、$\overline{BI}=1\times\sin\widehat{BM_{AB}}$，

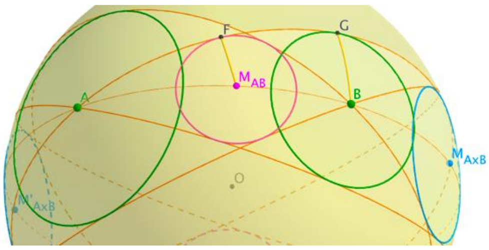
因為相似 ∴ $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BI}}=\dfrac{\sin\widehat{AM_{AB}}}{\sin\widehat{BM_{AB}}}=\dfrac{\sin r_A}{\sin r_B}$。

3° 由分點公式得$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}}{\sin r_A+\sin r_B}$，且 $\left|\overrightarrow{O_{M_{AB}}}\right|=1$

∴ $\overrightarrow{O_{M_{AB}}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{O_{M_{AB}}}\right|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}\overrightarrow{OP}=\left|\dfrac{\sin r_A+\sin r_B}{\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}}\right|\overrightarrow{OP}$

$=\left|\dfrac{\sin r_A+\sin r_B}{\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}}\right|\times\dfrac{\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}}{\sin r_A+\sin r_B}=\dfrac{\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}}{\left|\sin r_B\times\overrightarrow{OA}+\sin r_A\times\overrightarrow{OB}\right|}=\dfrac{\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}+\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}}{\left|\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}+\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}\right|}$

同理可證 $\overrightarrow{O_{M_{A\times B}}}=\dfrac{\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}-\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}}{\left|\frac{\overline{OA}}{\sin r_A}-\frac{\overline{OB}}{\sin r_B}\right|}$ 。



4° ∵ 經弧$\widehat{M_{AB}F}$、$\widehat{BG}$均與大圓 AFG 正交，

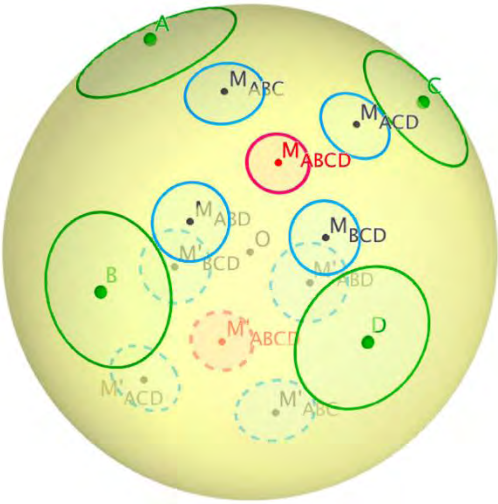
∴ 根據**球面位似比**可得$\dfrac{\sin\widehat{AM_{AB}}}{\sin\widehat{AB}}=\dfrac{\sin\widehat{M_{AB}F}}{\sin\widehat{BG}}=\dfrac{\sin r_{M_{AB}}}{\sin r_B}$

5° 將上式移項可得

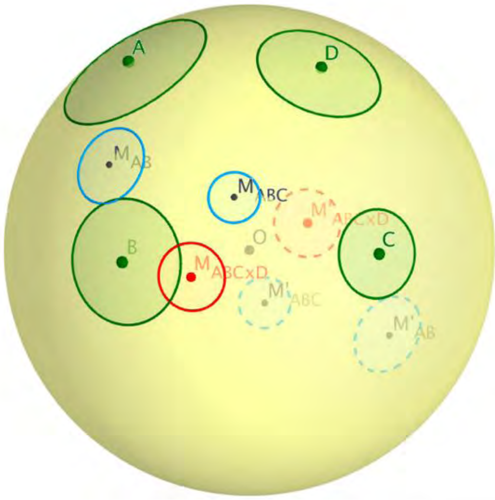
$\sin r_{M_{AB}}=\dfrac{\sin\widehat{AM_{AB}}\times\sin r_B}{\sin\widehat{AB}}$ 或 $\dfrac{\sin\widehat{BM_{AB}}\times\sin r_A}{\sin\widehat{AB}}$

同理可證 $\sin r_{M_{A\times B}}=\dfrac{\sin\widehat{AM_{A\times B}}\times\sin r_B}{\sin\widehat{AB}}$ 或 $\dfrac{\sin\widehat{BM_{A\times B}}\times\sin r_A}{\sin\widehat{AB}}$ 。 ■

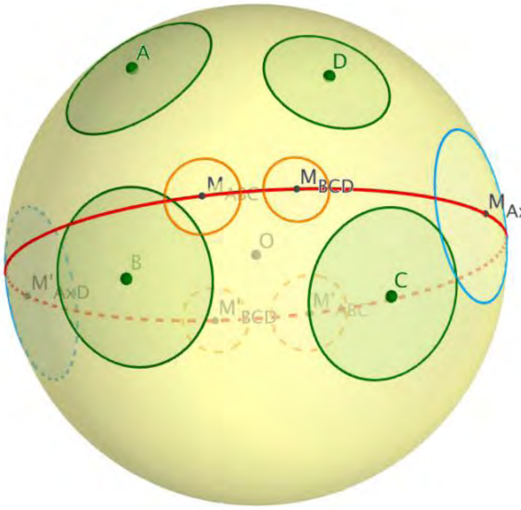
透過上述「球面上兩圓的蒙日圓與廣義蒙日圓」，我們就可仿照平面上的做法，推廣出球面上 n 個圓的蒙日圓、廣義蒙日圓，進而推廣到球面上 n 個圓的蒙日定理相關性質。僅以圖 5-12 球面四圓為例，過程就不再贅述。



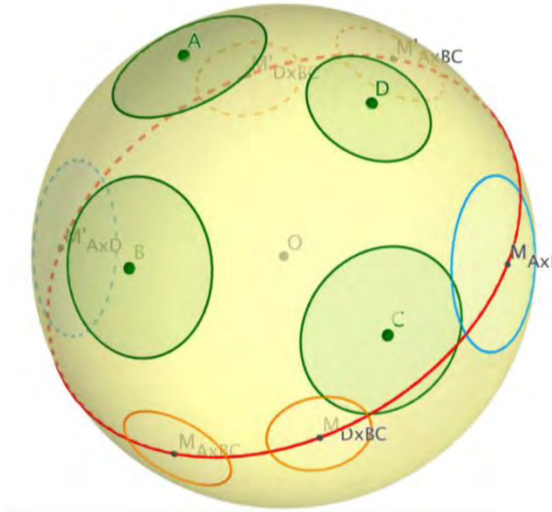
▲圖 5-12(a)：球面四圓蒙日圓、蒙日點



▲圖 5-12 (b)：球面四圓廣義蒙日圓、廣義蒙日點蒙日線、廣義蒙日線。



▲圖 5-12 (c)：球面四圓廣義蒙日線，M_{ABC}、M_{BCD}、$M_{A\times D}$及其對頂點，六點共大圓。



▲圖 5-12 (d)：球面四圓蒙日線：$M_{A\times BC}$、$M_{D\times BC}$、$M_{A\times D}$及其對頂，六點共大圓。

上述，我們成功地將蒙日定理從平面坐標推廣到球面座標，或許未來也可以考慮推廣到柱面、錐面等其它曲面上。

研究至此，透過切線變換成切圓，我們發現反演變換中及球面上的蒙日定理，進而引發更多想像，期待未來能跳脫熟悉的直角座標，在任意的空間中，探討 $\boldsymbol{n}$ 個位似圖形間是否仍然存在著蒙日線、蒙日點等蒙日定理相關性質？

肆、討　論

本研究最初以「內、外公切線」建構出原三個外離圓的蒙日定理的性質，並推廣至 n 個外離圓；後因為提出「蒙日圓」的作法，不僅使得條件只要「任兩圓連心線不小於此兩圓其最大半徑」外，進而突破前所未有的發現，例如：n 圓的蒙日線及廣義蒙日點。雖然從蒙日圓圓心坐標及半徑與各圓的位置大小關係（如【定理 2-6】)，即可理解各圓位置無須受限，但仍因提出「以兩圓平行直徑作位似中心」此跳脫公切線的作法，確定任意圓皆能滿足。此外，因為此工具方法的演進，更發現到一些有趣的性質，例如：圓分堆的廣義蒙日點共線性質、對圓作旋轉變換的符號變換性質（發現蒙日線與廣義蒙日線、蒙日點與廣義蒙日點是可以彼此轉換的）使我們更能全面看待幾何物件之間的關係。

再者，觀點改變所帶來的研究視野。最初我們將「兩圓內公切線交點類比至三圓的蒙日點」，進而有【定理 1-1】至【定理 1-3】的發現，更因將「定理**退化**為兩圓與一圓」的想法，合理定義兩圓蒙日點即為其位似內心、一圓蒙日點即為圓心本身，因此有「圓分堆的蒙日點共線」的驚人發現。而在第一節末，我們透過將「**點視為極小圓**」的想法，推廣了重心的分堆共線性質，並在第三節中又以將「**線視為極大圓**」的想法，定義出另一種位似中心的作圖方式，最後透過將「**切線視為切圓**」，分別展開關於反演變換觀點以及球面座標等不同條件變換觀點下的蒙日定理。

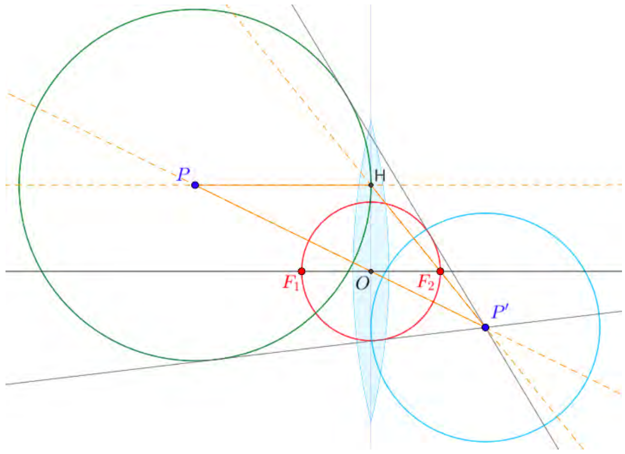
因著上述「工具方法的演進」及「觀點的改變」，對於研究發現產生極大的影響。接下來，就以在研究過程中，不一樣的發現或聯想的例子，提出討論與猜想，惟礙於時間及篇幅，未做進一步的證明，如下：

一、薄透鏡成像與蒙日圓的關聯

射影幾何常應用於光學或測量等方面，因此我們從日常生活中最常看到的透鏡成像性質著手，探討光學中的薄透鏡成像是否與蒙日定理有關？

如圖 1，O 為凸薄透鏡鏡心基準，F_1、F_2為其焦點，物距 p、像距 q、焦距 f。已知鏡片左方有一點 P，以幾何光學原理作圖如下，經橘色的光路，可得 P 點的成像點P'。

1. 作$\overleftrightarrow{PO}$連線
2. 作一過 P 平行光與鏡片交於 H，再射向焦點F_2，連接$\overleftrightarrow{HF_2}$
3. $\overleftrightarrow{PO}$與$\overleftrightarrow{HF_2}$交於$P'$，即為 P 點的成像點。



▲ 圖 1：點的凸薄透鏡成像

若以 P 為圓心、物距 p 為半徑作一圓 P，再以 O 為圓心、焦距 f 為半徑作一圓 O，由「兩圓平行直徑作位似中心」的想法，不難證明圓 P 與圓 O 的廣義蒙日圓圓心即為P'點，而其半徑亦恰為像距 q。又根據**【定理 2-6】**兩圓與其蒙日圓之間的半徑關係，圓P'的半徑倒數等於圓 P 與圓 O 的半徑倒數的總和，此時會發現其即為**薄透鏡成像公式**$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ 。

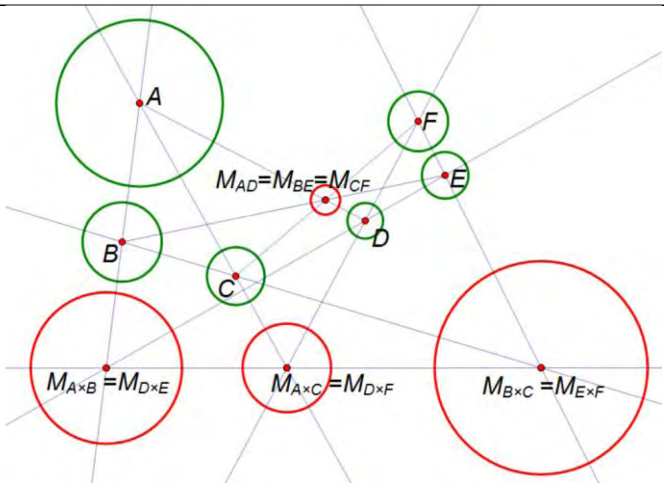
又從《工程光學》[1]一書中提到「***n*** **片相接的薄透鏡成像的系統焦距的倒數為每片鏡片焦距的倒數和**」，這似乎也與「n 個圓時蒙日圓與各圓之間的半徑關係」的結果相呼應。因此從蒙日圓與薄透鏡成像原理的關聯性，似乎可想像射影幾何中著名的蒙日定理與幾何光學必然有更多的關聯，未來對於幾何光學的探究存在更多的應用價值。

二、Desargues、Pascal 及 Brianchon 定理與蒙日定理的關聯

在射影幾何中，這些同樣是探討共點共線的定理，與蒙日定理會有什什麼關係呢？我們從以下三個重要定理進行發想、實驗與臆測，結果有出乎意外的發現。首先從 Desargues 定理「若兩個三角形對應頂點的連線共點，若且唯若其對應邊的交點共線」開始談起。

【Desargues 定理與蒙日定理的關係】

如圖 2，給定平面上六個圓，並分為 A、B、C 與 D、E、F 兩組，若對應各組任兩圓的蒙日圓皆重合，即$M_{A\times B} = M_{D\times E}$、$M_{A\times C} = M_{D\times F}$、$M_{B\times C} = M_{E\times F}$，則對應的蒙日圓重合，即 $M_{AD} = M_{BE} = M_{CF}$，其逆敘述亦成立。



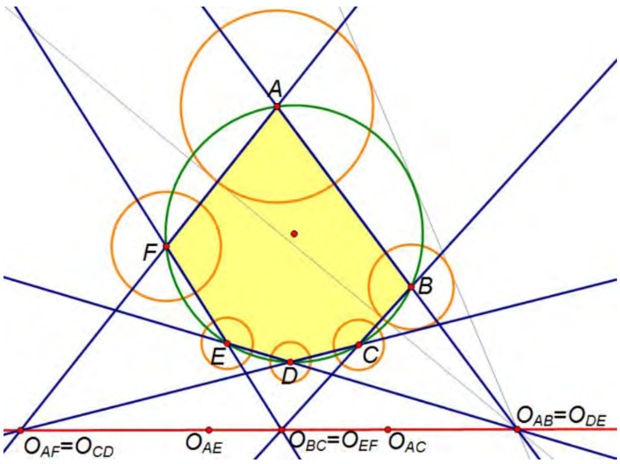
▲圖 2：Desargues 定理與蒙日圓關係

【Pascal 神秘六邊形定理與蒙日定理的關係】

平面上一圓內接六邊形 $ABCDEF$，由 Pascal 定理知「圓內接六邊形的三組對邊延長線交點共線」，如圖 3。若以 A 為圓心，作一半徑小於 A 點到此邊延長線上交點距離（即$\overline{AO_{AB}}$與$\overline{AO_{AF}}$）的一圓，再依序以下一個頂點 B 為圓心，使得此邊延長線上的交點為其位似外心作出圓 B，依此類推，作出圓 C、D、E、F，最後再由圓 F 作出圓A'，則以下兩點敘述成立： (1) 圓A'與圓 A 重合。 (2) 此六圓 A、B、C、D、E、F 中，任三圓的蒙日線皆恰為圓內接六邊形 $ABCDEF$ 的 Pascal 線；換句話說，此時六圓中的任意兩圓的位似外心，共C_2^6=*15* 個點均在 Pascal 線上。

在前述（如圖 2-1）中有個未處理的問題「**當平面上 n 個圓在什麼特殊條件下，任三圓的蒙日線會重合？**」，透過與 Pascal 定理的結合，似乎離問題的解答更近一步。

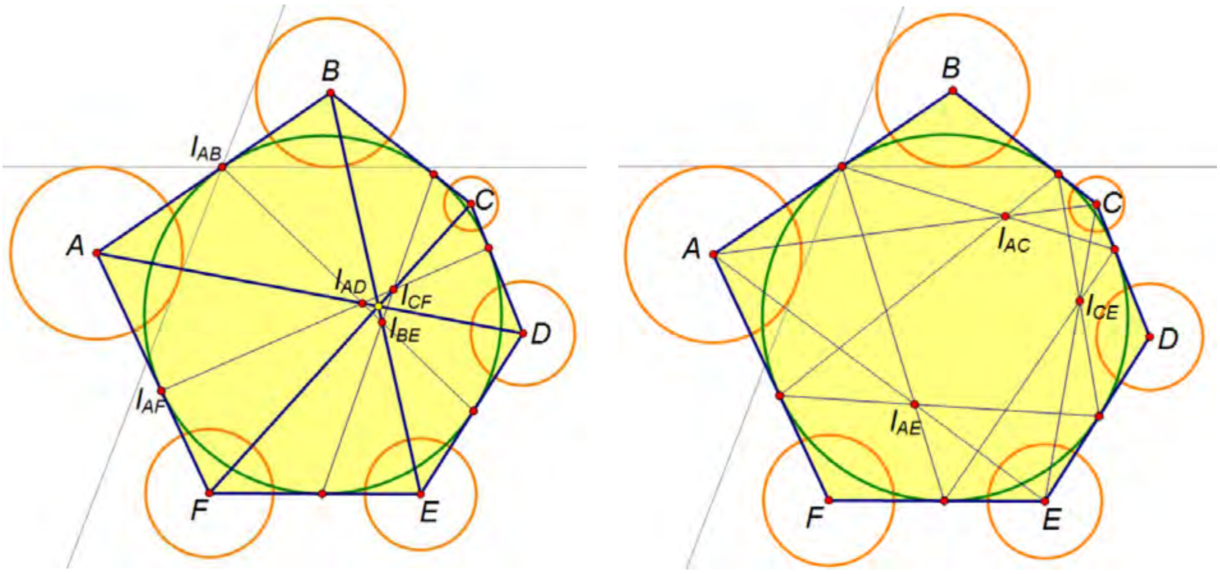
此發現使我們強烈懷疑與之對偶的 Brianchon 定理：「圓外切六邊形三條對角線共點」，亦跟蒙日定理有所關聯，發現如下：



▲圖 3：Pascal 定理與蒙日圓關係

【Brianchon 定理與蒙日定理的關係】

> 平面上一圓外切六邊形 $ABCDEF$，作其對應頂點的連線，由 Brianchon 定理知其三線共點，另有多組廣義 Brianchon 點，如圖 4 所示。若以 A 為圓心，作一半徑小於 A 到切點距離的一圓，再依序以下一個頂點 B 為圓心，使得 AB 邊上的切點為其位似內心作出圓 B，依此類推，作出圓 C、D、E、F，最後再由圓 F 作出圓A'， 則以下兩點敘述成立：
>
> (1) 圓A'會與圓 A 重合。
>
> (2) 對角線兩圓的位似內心為廣義 Brianchon 點，與相隔一圓所做的位似內心亦為另一種廣義 Brianchon 點。



▲圖 4：Brianchon 定理與蒙日圓關係

上述三個定理與蒙日圓的關係，倘若以「各圓半徑極小時的退化觀點」來看，那麼我們可以想像**「原 Pascal 定理、Brianchon 定理及 Desargues 定理都可以視為是一種蒙日定理在各圓半徑極小時的退化結果」**。

這些有趣的發現似乎說明了蒙日定理在射影幾何中具有重要的地位，期待日後能發現其與更多定理美妙的結合。

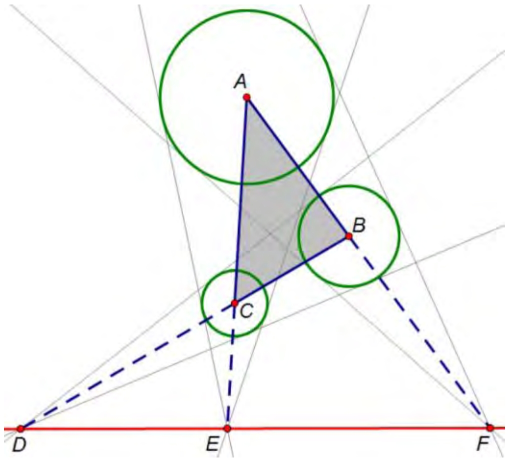
三、Menelaus 定理、Ceva 定理與蒙日定理間的關係

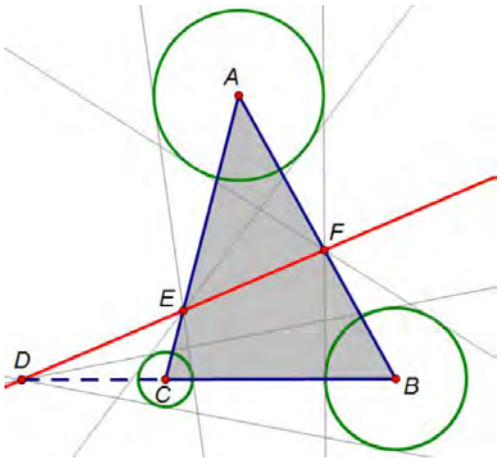
在證明【定理 4-5】「平面上三點的蒙日定理」時，我們發現其蒙日線、蒙日點性質，其實就是 Meneluas 定理以及 Ceva 定理的另類表述。

首先，我們仿照上述所提「各圓半徑極小時的退化觀點」，來看 Meneluas 定理、Ceva 定理與蒙日定理的關係。

【Menelaus **定理與蒙日線定理的關係**】

設平面上的一個ΔABC，若有一直線 L 在此三角形外，且與三邊延長線分別交於D、E、F，由 Menelaus 定理知 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。若以 A 為圓心，作一半徑小於 $\overline{AE}$與$\overline{AF}$的一圓 A，並以 B 為圓心作一圓 B 使得$F=O_{AB}$，接著以 C 為圓心作一圓 C 使得$D=O_{BC}$，最後以 A 為圓心作一圓A'，使得$E=O_{AC}$，則圓A'與圓 A 重合，且圓 A、B、C 的蒙日線即為 L，如圖 5。



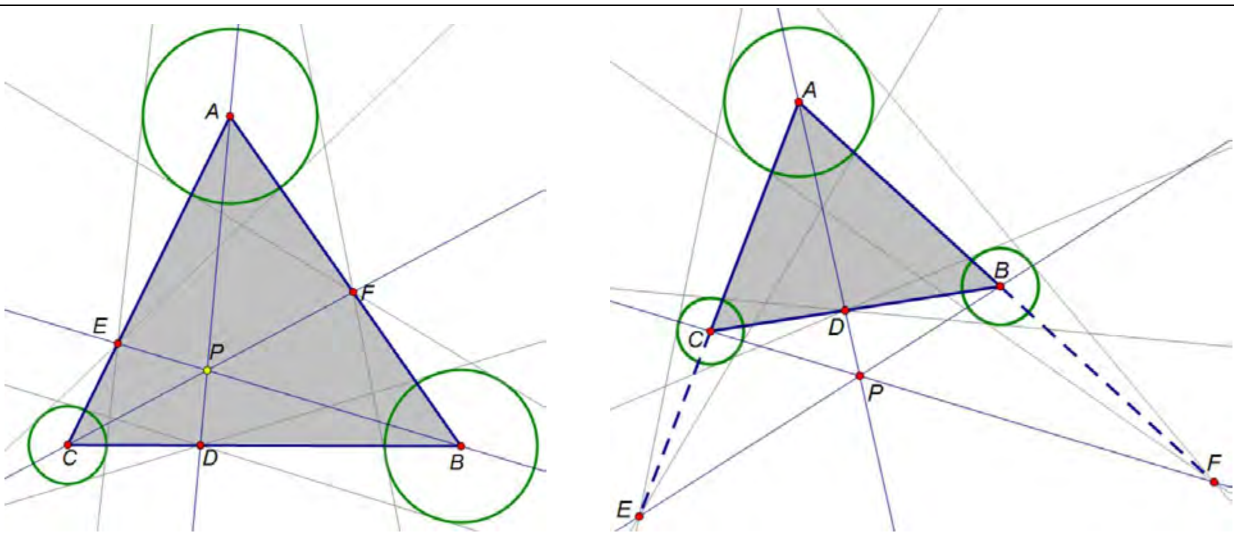


▲圖 5：Menelaus 定理與蒙日線、廣義蒙日線定理間的關係

上述說明了在ΔABC外的直線 L 是三圓的蒙日線，而對於過ΔABC內的直線 L，我們也可以用同樣的方法，說明其為三圓的一條廣義蒙日線，如右上圖所示。因此我們也可以想像**「原 Menelaus 定理可視為是三圓蒙日線、廣義蒙日線在圓半徑極小時的退化結果」**。

【Ceva 定理與蒙日點定理的關係】

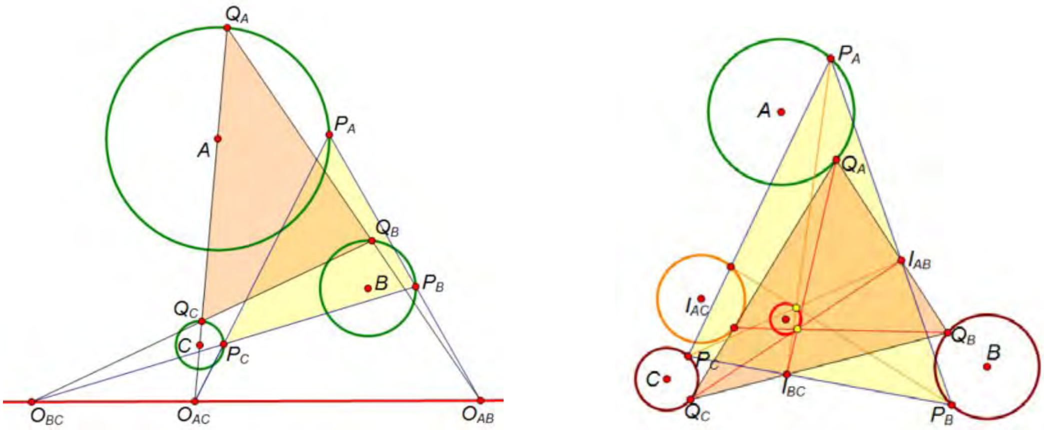
設平面上的一個ΔABC，若有一點 P 在三角形內部，且與三頂點的連線分別與對邊交於 D、E、F，由 Ceva 定理知 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。若以 A 為圓心，作一半徑小於 $\overline{AE}$與$\overline{AF}$的一圓 A，並以 B 為圓心作一圓 B 使得$F=I_{AB}$，接著以 C 為圓心作一圓 C 使得$D=I_{BC}$，最後以 A 為圓心作一圓A'，使得$E=I_{AC}$，則圓A'與圓 A 重合，且圓 A、B、C 的蒙日點即為 P，如圖 6。



▲圖 6：Ceva 定理與蒙日點、廣義蒙日點定理間的關係

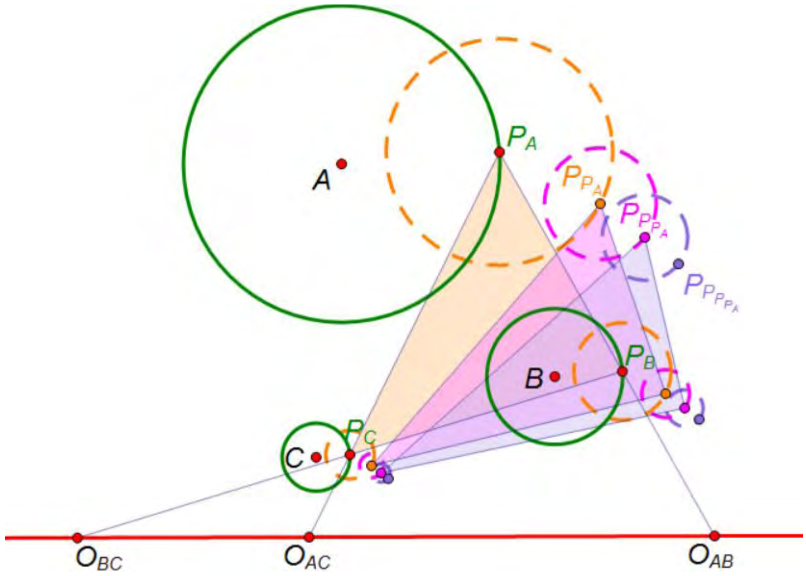
上述說明了在ΔABC內的點 P 是三圓的蒙日點，而對於在三角形外的點，我們也可以用同樣的方法，說明其為三圓的一個廣義蒙日點，如右上圖 6 所示。因此我們也可以想像「**原 Ceva 定理可視為是三圓蒙日點、廣義蒙日點在圓半徑極小時的退化結果**」。

接下來，我們再以另一種觀點來討論蒙日定理與此兩定理的關係。如圖 7，若以在第四節中將圓看成「平面上的動點到定點為等距離的點集合或軌跡圖形」，可發現蒙日線與蒙日點定理可視為分別由好幾個 Menelaus 定理及 Ceva 定理所堆疊而成的。



▲圖 7：Menelaus 定理、Ceva 定理與蒙日定理的關係

綜合以上，我們得到一個有趣的猜想：「**Menelaus 定理及 Ceva 定理可視為蒙日定理退化的結果；而蒙日定理可視為 Menelaus 定理及 Ceva 定理堆疊還原的結果。**」另外，也可以透過一層一層的觀點轉換來分析兩者關係，便有如圖 8 中，Menelaus 定理及蒙日定理一層接著一層、永無止境交互出現的有趣結果。



▲圖 8：以觀點的轉換，可見 Menelaus 與蒙日定理交錯出現的有趣結果

此外，由於蒙日定理在本研究中已成功推廣至 N 維空間的 n 個位似圖形，那麼對於 N 維空間的 n 個點，是否也可以透過蒙日定理圓的退化觀點，說明此情形下的 Menelaus 定理和 Ceva 定理呢？可想像這一個結論應該是必然的，值得日後作進一步證實。

伍、結　　論

正如本研究作品名稱**「道同」互相為「蒙」**，我們從平面上三圓的蒙日點定理推廣至n個圓、球，多邊形與多面體，以至N維空間的任何圖形，發現只要圖形皆互相「**位似**」，不論幾個都可以作出其「**蒙日點**」，不僅是代表多圓的蒙日點，也作出能代表多圓的蒙日圓，又因此將蒙日線及廣義蒙日點定理推廣至n個位似圖形中。茲將結論分述如下：

一、 平面上n個外離圓必有一個n圓蒙日點。

若將1圓時的圓心視為1圓蒙日點，2圓時的位似內心（內公切線交點）視為2圓蒙日點，則$\forall n \in \mathbb{N}$，$n \geq 3$，均有下列性質：

（一） 任意1圓的蒙日點與另n-1圓的蒙日點的連線必交於一點，即**n圓蒙日點**；其座標分量與各圓半徑倒數總和的乘積等於各圓座標分量除以該圓半徑的總和。

（二） 任意2圓的位似外心（外公切線交點），必與此2圓分別和另n-2圓所構成的蒙日點形成三點共線，稱之為**n圓廣義蒙日線。**

（三） 任意k圓的蒙日點與另n-k圓的蒙日點的連線必通過此n圓蒙日點；其中n圓蒙日點到k圓蒙日點與n-k圓蒙日點的距離比等於兩堆各圓半徑倒數總和的倒數比，稱之為「**n圓分堆的蒙日點共線性質」。**

（四） 若圓大小均相同，則n圓蒙日點即為各圓心所形成n邊形的重心，所以n邊形的重心也具有「**n點分堆的重心共線性質**」。

二、 平面上n個圓，且任兩圓連心線不小於此兩圓最大半徑，則必有一個**n圓蒙日圓**，其圓心即為n圓蒙日點。

「給定平面上任兩圓，且其連心線不小於此兩圓最大半徑。任一圓心對另一圓做切線，所得四條切線必有兩個內切圓，其中圓心在連心線段上的稱為**蒙日圓**，其圓心即為位似內心；在連心線段外的稱為**廣義蒙**日圓，其圓心即為位似外心」，以此重新定義兩圓位似中心的作圖方式，並發現以下性質：

（一） 任1圓的蒙日圓與另n-1圓的蒙日圓皆作蒙日圓，則此n個蒙日圓必重合，稱其為**n圓的蒙日圓**；其半徑的倒數為各圓半徑的倒數總和；其圓心座標即為n圓蒙日點的座標。

（二） 任意k圓的蒙日圓與另n-k圓的蒙日圓作蒙日圓，其必與n圓的蒙日圓重合，稱此性質為**n圓分堆的蒙日圓重合性質**。

（三） 在作n個圓的蒙日圓或廣義蒙日圓過程中，除了只作蒙日圓之外，其餘作圖最後所得到的圓，均稱為此**n圓的廣義蒙日圓**，其個數共有 $2^{n-1}-1$ 個。仿照蒙日圓的做法可以求出其半徑與圓心座標。

（四） 任意2圓的廣義蒙日圓圓心，必與此2圓分別和另n-2圓所構成的兩組廣義蒙日圓圓心形成三點共線，稱之為**n圓蒙日線**。

三、 平面上**任意n個圓**的蒙日定理及其性質的變換關係

以「一直線視為一極大圓」的想法，提出「平面上兩圓的平行直徑，其對應點連線的交點可得位似內、外心」重新定義兩圓位似中心的作圖方式，並發現以下性質：

（一）若將一圓作旋轉變換（以圓心旋轉180°）時，與之有關的蒙日點符號將變號，規則為「其與前後圓的操作關係變號」，即“×變·”或“·變×”。

（二）給定 n 圓並作出其蒙日點，若將其中 k 個圓作旋轉變換，則必將其變換為其中一個 n 圓廣義蒙日點，其總個數為 $2^{n-1}-1$ 個。

（三）給定 n 圓並作出其一廣義蒙日線，若將作位似外心的兩圓外的其中 k 個圓作旋轉變換，則必將其變換為其中一條 n 圓蒙日線，其總個數為 $C_2^n\cdot(2^{n-2}-1)$個。

（四）若將n圓任意分成k個與n-k個的兩堆，若k圓作其一廣義蒙日點$M(k)$，n-k圓作其一廣義蒙日點$M(n-k)$，則必存在兩個n圓廣義蒙日點$M(n)$，使得$M(k)$、$M(n-k)$、$M(n)$共線。

四、 透過證明「點的蒙日定理性質」成立，可推知「**在N維空間中的n個任意圖形，若皆互相位似，則其必滿足蒙日定理**」，包含蒙日點、蒙日線、廣義蒙日點與廣義蒙日線的存在，以及滿足圖形分堆的蒙日點共線性質均成立；同時亦可作出其蒙日形，亦滿足圖形分堆的蒙日形重合性質。

五、 反演變換及球面座標中的蒙日定理

以切線變成切圓、平面座標變成球面座標為例，探討不同條件變換觀點下蒙日定理的存在性，並發現以下性質：

（一） 經反演變換的蒙日定理：

1. 給定平面上三圓與一定點，過此定點作任兩圓的外公切圓交點，則三個交點與此定點必四點共圓，稱其為「**蒙日線圓**」。

2. 給定平面上三圓與一定點，過此定點作任兩圓的內公切圓交點，並以此定點分別對三圓作出反演點。作過此定點、任一圓反演點與另兩圓的內公切圓交點之三點圓，則共有三圓共交一點，稱其為「**反演後的蒙日點**」。

（二） 球面座標上的蒙日定理：

1. 球面上三個外離圓，任兩圓作其位似外心，則有六個位似外心共一大圓，並稱此大圓為「**球面上三圓的蒙日線**」。

2. 球面上三個外離圓，任一圓球面圓心與另兩圓位似內心作一大圓，則有三大圓共交於兩點，且此兩點互為對頂，均稱為「**球面上三圓的蒙日點**」。

3. 仿照平面上的做法，可將蒙日圓與廣義蒙日圓推廣至球面上，以至球面上的 n 個圓的蒙日定理相關性質。

六、 透過本研究所提出的觀點，可以找到更多與蒙日定理相關的性質，並可用以重新審視已知定理，找尋其與蒙日定理更進一步的關聯。舉例如下：

（一）蒙日圓與各圓的半徑關係，與幾何光學中的薄透鏡成像原理有關。

（二）Pascal定理、Brianchon定理及Desargues定理可以視為蒙日定理在各圓半徑極小時的退化結果。

（三）Menelaus定理及Ceva定理可視為蒙日定理退化的結果；而蒙日定理可視為Menelaus定理及Ceva定理堆疊還原的結果。

陸、應用及未來展望

一、 本研究藉由工具方法的演進及觀點的改變，發現許多漂亮的結果，極富應用價值，若應用在其它定理，勢必有更多尚未發現的結果，值得一探究竟。

二、 本研究大膽將蒙日定理推廣至N維空間及球面座標中，希望未來能夠進一步探討在柱面、錐面或其它不同曲面上的情形。

三、 本研究發現「分堆的蒙日點共線性質及蒙日圓重合性質」，但「**分堆的蒙日線共點性質**」是否成立？蒙日線與蒙日點間是否存在對偶性質？值得未來探討。

四、 從結論可知在N維空間中的n個圓（球）、多邊形或多面體等位似圖形，皆必存在一個類似平衡概念的中心點（蒙日點）或中心圖形（蒙日圓或蒙日形），其位置大小與這些圖形的位置大小有關，不禁令人想像「**是否可運用蒙日點或蒙日圓（球）的概念去權衡各個位似圖形的位置與大小關係？**」可想像的是，在權衡不同圖形的位置與大小方面，蒙日點、蒙日圓（球）似乎比重心更能用來表達圖形之間的關係。再者，本研究為射影幾何上的重要結果，或許可成為幾何光學應用的理論基礎。並在探究宇宙星體間奧秘關係方面上，期待亦能找到代表多個星體的**蒙日星體**，值得日後做進一步的探討。

柒、參考資料及其他

1. 田芊、廖延彪、孫立群（2006）。工程光學。清华大学出版社有限公司。
2. 左銓如（1998）。初等幾何研究。九章出版社。
3. 位似圖形（2013）。2016年6月13日，取自網址：
   http://www.twword.com/wiki/%E4%BD%8D%E4%BC%BC%E5%9C%96%E5%BD%A2
4. 項武義（2009）。基礎幾何學。五南圖書出版有限公司。
5. 蒙日定理和一个对偶定理（2007）。2016年6月13日，取自網址：
   https://matrix19.wordpress.com/2011/07/30/%E8%92%99%E6%97%A5%E5%AE%9A%E7%90%86%E5%92%8C%E4%B8%80%E4%B8%AA%E5%AF%B9%E5%81%B6%E5%AE%9A%E7%90%86/
6. 劉培杰（2009）。世界著名平面几何经典著作钩沉。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。
7. David Graham Searby （2009）. Forum Geometricorum.（Volume 9 P.181–193）. Retrieved December 8, 2016, from http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200918.pdf
8. Pierre Beaudry（1995）. The Geometry of the One and the Many. Retrieved May 30, 2016, from https://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/952_met_of_persp.html

【評語】010009

這篇論文由蒙日定理「平面上三圓彼此外公切線交點共線，以及彼此內公切線交點與另一圓的圓心的連線共點」、以及蒙日點定理「平面上外離的三圓，任兩圓的內公切線交點與第三圓圓心的連線共點」出發，作出數量、形狀及維度等方向的推廣。它先探討平面上四圓、五圓、最後歸結到 n 個圓的蒙日點，並探討相關性質；接著將這些論述推廣至空間中的球體；並在不同條件變換觀點下，探討蒙日定理的存在性。本論文的證明方法是透過位似定理，用了 Desargues、Pascal、Brianchon、Menelaus、Ceva 等定理。

整體來說,這篇論文有一定的成熟度,得到的結果有其趣味性。可以思考的點是，論文有各式各樣的定理，但是其主軸為何？或者另一種思考方式是，有沒有一種統一的定理，可以同時解釋這些各式各樣的定理？