# 2018 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　**010008**

參展科別　數學

作品名稱　「乘」「乘」有序—乘二數列及乘五數列的探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　臺北市立第一女子高級中學

指導教師　鄭凱鐘

作者姓名　廖沛妍

關鍵詞　數列、遞迴關係式、生成函數

# 作者簡介


我是廖沛妍，一個喜歡數學的的怪女孩，與我所愛的數列相遇是件幸福的事，研究的過程雖然艱辛，卻不曾想過要放棄，一路上跌跌撞撞卻又柳暗花明，如同一場驚奇的探索之旅，感謝老師的協助，家人、同學的鼓勵與支持，其實去年來到國際科展會場觀摩作品時，當時沒什麼研究成果的我便暗自下了決心，自己有天也要踏上這個舞台，沒想到很快地今年就輪到自己展示自己的作品了，希望能與各路高手切磋交流，學習更多經驗及想法，繼續努力！

# 摘要

有一數列從 1 開始，下一項為前一項個別數字乘以 $m$，其中 $m$ 為一正整數，$2 \le m \le 10$，將此定義為乘 $m$ 數列，本文以兩大部分來架構出乘二數列及乘五數列的性質，討論數列的區塊結構，進而判斷數字是否為乘二數列或者乘五數列的其中一項。接著再進入針對位數規律的討論：依照乘 $m$ 數列的規律，讓人聯想到可以透過其位數的有向圖 *D(directed graph)*與鄰接矩陣 *A(Adjacency matrix)*進行轉換，再利用矩陣計算來求證遞迴關係式，進而求出生成函數和特徵方程式，最終獲得乘二數列及乘五數列的位數估計函數，以解決原先獲知此種數列時伴隨之相關問題。研究的最後發展出乘二數列及乘五數列之間的連結，加入了與乘二、乘五、乘十的規則的關係。未來希望能研究其他乘 $m$ 數列並發展出共通性。

# Abstract

*Multiplying m Sequences (M-m sequences, for short ) are built by beginning with 1, and then replacing each digit with m times its value to get the next. For example, the first five terms in M-2 sequence are 1,2,4,8,16, but the sixth term is defined as* $1\times 2=2, 6\times 2=12$*, so we get 212. Below are the first terms in M-2 sequence: 1,2,4,8,16,212,424,848,16816*$\cdots$

*Basically, this study is divided into two sections, M-2 Sequence* $\{a_n\}$ *and M-5 Sequence* $\{b_n\}$*. First, we discuss the properties of M-2 Sequence and M-5 Sequence by separating each term into several blocks. For instance,* $a_n = \underbrace{\boxed{a_{n-4}}}_{1st\ block}\ \underbrace{\boxed{a_{n-5}}}_{2nd\ block}\ \underbrace{\boxed{a_{n-4}}}_{3rd\ block}$*,*

$b_n = \underbrace{\boxed{b_{n-3}}}_{1st\ block}\ 0\ \underbrace{\boxed{b_{n-1}}}_{2nd\ block}$ *. Thus, we are able to see if a string of numbers belongs to M-2 Sequence or M-5 Sequence.*

*Next, we signify their digits through Directed graph and Adjacency matrix. By using matrix calculation, we prove the recurrence relation that satisfies the number of digits of every term, and find their generating functions and characteristic equations. Accordingly, we get the estimated functions of the sequences' digits for the purpose of solving the original problem we saw in a mathematical article: How many times do we need to multiply in order to make the digit greater than 1000?*

*In the end of the study, by adding the pattern of multiplying 2, multiplying 5, and multiplying 10, we develop a connection between M-2 Sequence and M-5 Sequence. We hope to study other M-m sequences and further develop a common property of M-m sequences.*

# 一、 前言

## (一)、研究動機

利用課餘時間翻閱由國立臺灣科學教育館出版的《科學研習》月刊第 55 卷第 4 期，偶然注意到了其中一個專欄「森棚教官的數學題」專欄。裡面提出這樣的問題：有一數列從 1 開始乘以 2，特別的地方在於是個別數字乘以 2，非整個數字乘以 2。於是此數列首項為 1，第二項為 2，第三項為 4，第四項為 8，第五項為 16，接下來因為$1\times 2=2$以及$6\times 2=12$，第六項為 212，第七項為 424……以此類推。試問乘以幾次，所得的答案會超過 1000 位數。我認為這個數列看起來雖然陌生，但是初步觀察後感覺數列對稱且數字重複性高，非常美觀且有趣。除了乘以 2 的數列之外，某天突然發現乘以 5 的數列與乘以 2 一樣美觀，更靈機一動，想到$2\times 5=10$，十分好奇乘以 5 的數列會不會與乘以 2 有甚麼關係呢？便同時間著手於此兩個數列的性質。

## (二)、研究目的

1.找出乘二數列的性質並釐清乘二數列位數的規律

2.找出乘五數列的性質並釐清乘五數列位數的規律

3.發掘乘二數列與乘五數列之間的性質

# 二、 研究過程與方法

(一)、名詞定義與先備知識

1、乘 $m$ 數列：首項是 1，下一項為前一項個別數字乘以 $m$，其中 $m$ 為一正整數，$2\le m\le 10$。設乘二數列$\{a_n\}:\{1,2,4,8,16,212,424,848,16816\cdots\}$；乘五數列$\{b_n\}:\{1,5,25,1025,501025,250501025,10250250501025\cdots\}$。本研究針對乘二數列與乘五數列進行探討。

2、$\otimes m$：以$\otimes m$表示本研究中的乘 $m$ 規則，例如：$16\otimes 2=212$,

$1025\otimes 5=501025$。

3、$t(a_n)$：乘二數列位數；$t(b_n)$：乘五數列位數。

4、中心數$k_n$：指乘二數列$\{a_n\}$中第 $n$ 項中，最中間的數字。若$t(a_n)$為奇數，

$k_n$為由左數來第$\dfrac{t(a_n)+1}{2}$位數；若$t(b_n)$為偶數，$k_n$為由左數來第$\dfrac{t(b_n)}{2}$及

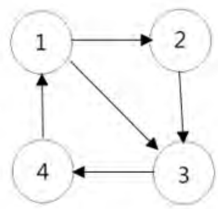
$\dfrac{t(b_n)}{2}+1$位數。

5、有向圖 $D$ *(directed graph)* 與鄰接矩陣 $A$ *(adjacency matrix)*：

因為乘 $m$ 數列很強調前項到後項的關聯，所以覺得適合將之架構在圖論模型上以利分析。在閱讀數學傳播的文章《用矩陣方法探討三階遞迴數列》以及《尋尋冪冪…非負矩陣冪序列初探》後，發覺有向圖與鄰接矩陣最具相關性。因此在底下介紹之，其中有向圖由結點和連接這些點的邊所組成，且每條邊皆被規定一個方向；至於鄰接矩陣則是運用代數方法解決圖論問題的一個工具。

對於只考慮點與線連接的圖形，可以借助矩陣把它對應成數表。

$D=$




$$\longleftrightarrow \quad A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

如上圖，以有向圖 $D$ 為例，把 $n$ 個頂點對應於 $n$ 階方陣。若點$i$到點 $j$ 有連通（即規定方向為$i\to j$），那麼對應於矩陣中第$i$行第 $j$ 列的位置寫上 1，否則，在矩陣中第$i$列、第$j$行的位置為 0，則 $A$ 稱為 $D$ 的鄰接矩陣，而 $D$ 稱為 $A$ 的伴隨有向圖，並利用矩陣 $A$ 的計算，回推有向圖 $D$ 的性質。

(二)、乘二數列$\{a_n\}$的性質

乘二數列$\{a_n\}$：

1, 2, 4, 8, 16, 212, 424, 848, 16816, 21216212, 424212424, 848424848,

1681684816816, 2121621216816212 16212......

$\boxed{\text{引理 1-1}}$ 乘二數列$\{a_n\}$僅會出現$1,2,4,8,6$五個數字

證明：因為$2^1=2$ ,$2^2=4$ ,$2^3=8$ ,$2^4=16$ ，經由觀察以上數列可容易得知，1, 2, 4, 8, 6 五個數字會循環出現，因此乘二數列$\{a_n\}$中僅會出現 1, 2, 4, 8, 6 五個數字。

$\boxed{\text{引理1-2}}$ 乘二數列$\{a_n\}$中的一般項$a_n$可分成三區塊$a_n = \underset{\text{第一區塊}}{\boxed{a_{n-4}}}\ \underset{\text{第二區塊}}{\boxed{a_{n-5}}}\ \underset{\text{第三區塊}}{\boxed{a_{n-4}}}$ , $n \ge 6$。其中第三區塊必與第一區塊相同，皆為該項的前四項$a_{n-4}$ ，中間區塊為該項的前五項$a_{n-5}$。例如： $a_{12} = \underset{\text{第一區塊}}{\boxed{848}}\ \underset{\text{第二區塊}}{\boxed{424}}\ \underset{\text{第三區塊}}{\boxed{848}}$ ，其中$848=a_8$、$424=a_7$。第一區塊與第三區塊從$a_6$起可獨立視為以2為首項的乘二數列$\{a_n\}$。

因$a_5=16$ ， $a_5\otimes=16\otimes 2=212=a_6$ ，根據區塊分析可容易得知位數遞迴關係式滿足$t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}), n\ge 6$ ，將在後文探討。

$\boxed{\text{引理 1-3}}$ 乘二數列$a_n$的中心數$k_n$為$1,2,4,8,16$ ，且每五項一循環，即

$$k_n=\begin{cases}1 \to n\equiv 1 \pmod 5\\ 2 \to n\equiv 2 \pmod 5\\ 4 \to n\equiv 3 \pmod 5\\ 8 \to n\equiv 4 \pmod 5\\ 16 \to n\equiv 5 \pmod 5\end{cases}\quad。$$

$\boxed{\text{定理 1}}$ 求乘二數列中的第 $n$ 項$a_n$

假設$n\equiv c \pmod 5$,其中$1\le c\le 5 \Leftrightarrow$存在整數$d$使得$n-c=5d$ ，則中心數即為$k_c$。而欲求乘二數列中的第 $n$ 項$a_n$ ，先將中心數$k_c$向兩側分別$\otimes 2$ ，再將結果視為新的一項的第二區塊，再向兩側分別$\otimes 2$ ，得到第一區塊和第三區塊，以此類推，這樣的動作要進行的次數即為$d$次。例如：

$$a_3=4\to a_{3+5}=\boxed{8}4\boxed{8}\to a_{13}=a_{3+5\times 2}=\boxed{16816}848\boxed{16816}\ 。$$

於是，若給定一串數字，可利用定理 1 判斷是否為乘二數列中的一項：

步驟一：該串數字中僅含$1,2,4,8,6$

步驟二：若位數為奇數，中心數必為$1\vee 2\vee 4\vee 8$

若位數為偶數，中心數必為$16$

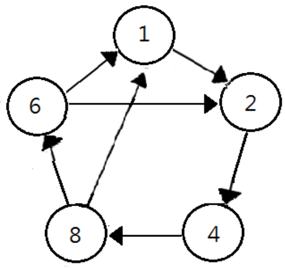
步驟三：利用中心數進行定理 1

符合這三個步驟的規則的一串數字必定是乘二數列的一項。

檢驗：$\frac{1}{\otimes 2}$ (即一一進行除以 2 的規則，檢驗是否回到初始值 1。)

(三)、乘二數列位數 $t(a_n)$ 的性質

明瞭乘二數列 $a_n$ 的性質後，為了回答研究動機中所提的問題：試問乘以幾次，所得的答案會超過 1000 位數？將接著研究乘二數列位數 $t(a_n)$ 的性質。首先由引理 1 可推導出乘二數列個別數字有向圖 $D$ 與鄰接矩陣 $A$，如下：

$D=$ 


$$\leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (4) \\ (8) \\ (6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (4) & (8) & (6) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} \end{array}$$

將乘二數列中第 $n$ 項的基本組成五數之出現個數以矩陣 $P_n=\begin{bmatrix} t_{n,1} & t_{n,2} & t_{n,4} & t_{n,8} & t_{n,6} \end{bmatrix}^T_{5\times 1}$ 表示，(其中右上角的 $^T$ 代表轉置矩陣)，而 $t_{n,1}$ 為第 $n$ 項 1 的出現個數，$t_{n,2}$ 為第 $n$ 項 2 的出現個數，$t_{n,4}$ 為第 $n$ 項 4 的出現個數，$t_{n,8}$ 為第 $n$ 項 8 的出現個數，$t_{n,6}$ 為第 $n$ 項 6 的出現個數。例如：$a_8=848$，$P_8=[0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0]^T$，$t(a_8)=t_{8,1}+t_{8,2}+t_{8,4}+t_{8,8}+t_{8,6}=1+2=3$。

$\boxed{\text{引理 2}}$ $P_{n+1}=AP_n$

證明：由名詞定義可知，鄰接矩陣 $A$ 乘以 $P_n$ 可得 $P_{n+1}=AP_n$

$$AP_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{n,1} \\ t_{n,2} \\ t_{n,4} \\ t_{n,8} \\ t_{n,6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{n,8}+t_{n,6} \\ t_{n,1}+t_{n,6} \\ t_{n,2} \\ t_{n,4} \\ t_{n,8} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{n+1,1} \\ t_{n+1,2} \\ t_{n+1,4} \\ t_{n+1,8} \\ t_{n+1,6} \end{bmatrix}=P_{n+1}$$

$\boxed{\text{引理 3}}$ 證明遞迴定義式

$P_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ , $P_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ , $P_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$ ,

$P_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$ , $P_5 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$ , $P_n = 2P_{n-4} + P_{n-5}$ ，當$n \geq 6$ 時

證明：利用數學歸納法

$(i)$ 當 $n$=6 時，

$$P_6 = AP_5 = A(P_1 + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T)$$

$$= P_2 + [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$= P_2 + [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T + [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$= P_2 + P_1 + P_2 = 2P_2 + P_1$ 命題成立

$(ii)$ 設 $n = k \ (k \geq 6)$ 時， $P_k = 2P_{k-4} + P_{k-5}$ 命題成立

則 $n$=$k$+1 時，$P_{k+1} = AP_k = A(2P_{k-4} + P_{k-5}) = 2AP_{k-4} + AP_{k-5} = 2P_{k-3} + P_{k-4}$成立

綜合$(i)(ii)$，可知：對於自然數$n \geq 6$ 時， $P_n = 2P_{n-4} + P_{n-5}$成立

為了在此基礎下進一步研究$t(a_n)$之值，下面的研究試著將遞迴關係項轉換成數列的項，再到生成函數的方程式中，希望藉由找到生成函數的根，回頭來解出原來的的遞迴關係式。

$\boxed{\text{定理 2}}$ (1) 乘二數列$\{a_n\}$的位數滿足遞迴關係式

$$\begin{cases} t(a_1) = 1,\ t(a_2) = 1,\ t(a_3) = 1,\ t(a_4) = 1,\ t(a_5) = 2 \\ t(a_n) = 2t(a_{n-4}) + t(a_{n-5}),\ n \geq 6\text{時} \end{cases}$$

(2) 當 $n$=5$k$ 時，$t(a_n)$ 為偶數，其餘皆為奇數

證明：(1) $T_n$ 為第 $n$ 項基本組成數字出現個數之矩陣，由引理 2 知

$P_n = 2P_{n-4} + P_{n-5}$ 成立，$t(a_n) = 2t(a_{n-4}) + t(a_{n-5})$ 亦成立。

(2) 由遞迴關係式$\begin{cases} t(a_1)=1, t(a_2)=1, t(a_3)=1, t(a_4)=1, t(a_5)=2 \\ t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}), n\ge 6時 \end{cases}$可知

$2t(a_{n-4})$為偶數，推得$t(a_n)$與$t(a_{n-5})$必同奇偶，

又因為$t(a_5)=2$為偶數，所以$t(a_{5k}), \forall k\in \mathrm{N}$皆為偶數，其餘皆為奇數。

由定理 2 我們可以了解到，除了以定理 1 直觀觀察的方式推得位數遞迴關係式，還能藉由矩陣的運算得知，且對數列的了解度更高、更嚴謹。

$\boxed{\text{定理 3}}$ (1) 乘二數列位數$t(a_n)$的生成函數$g(x)=\dfrac{x(1+x^2)}{1-x+x^2-x^3-x^4}$

(2) 乘二數列位數$t(a_n)$滿足特徵方程式$x^5-2x-1=0$

在定理 2 中，我們得出由乘二數列$\{a_n\}$位數構成的數列為$1,1,1,1,2,3,3,3,5,8\ldots$，

考慮生成函數時，增加規定$t(a_0)=0$，則形成$\{t(a_n)\}=\{0,1,1,1,1,2,3,3,3,5,8\ldots\}$。

針對數列$\{t(a_n)\}_0^\infty$，則函數

$g(x)=t(a_0)+t(a_1)x+t(a_2)x^2+t(a_3)x^3+\cdots+t(a_n)x^n\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}t(a_n)x^k$ 稱為$\{t(a_n)\}_0^\infty$的一般生成函數(*ordinary generating function*)。

證明：(1) 遞迴關係式$\begin{cases} t(a_1)=1, t(a_2)=1, t(a_3)=1, t(a_4)=1, t(a_5)=2 \\ t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}), n\ge 6時 \end{cases}$

在考慮$t(a_n)$的生成函數$g(x)$時， 再加入規定$t(a_0)=0$，

由於$t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5})$，故試著將$g(x)$分別乘上$-2x^4$及$-x^5$。

令$g(x)=t(a_0)+t(a_1)x+t(a_2)x^2+t(a_3)x^3+t(a_4)x^4+t(a_5)x^5\cdots+t(a_n)x^n+\cdots$

$-2x^4g(x)=-2t(a_0)x^4-2t(a_1)x^5-2t(a_2)x^6\cdots-2t(a_n)x^{n+4}+\cdots$

$-x^5g(x)=-t(a_0)x^5-t(a_1)x^6-t(a_2)x^7\cdots-t(a_n)x^{n+5}-\cdots$

接著三式相加，得

$(1-2x^4-x^5)g(x)=x+x^2+x^3+x^4$

故$g(x)=\dfrac{x+x^2+x^3+x^4}{(1-2x^4-x^5)}=\dfrac{x(1+x)(1+x^2)}{(1+x)1-x+x^2-x^3-x^4}=\dfrac{x(1+x^2)}{1-x+x^2-x^3-x^4}$

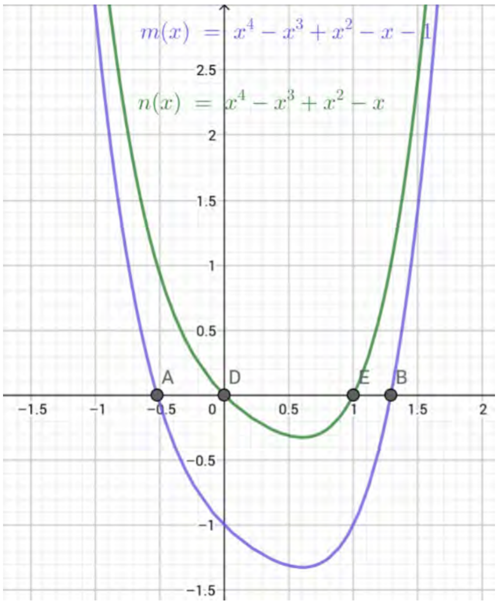
(2) 由前面所得的齊次(指關係的常數項為零)遞迴關係式知

$t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}),n\geq 6$，可改寫成 $r^n=2r^{n-4}+r^{n-5}$，兩邊同除 $r^{n-5}$，得到 $r^5=2r+1$，即 $r^5-2r-1=0$，定 $r$ 為 $x^5-2x-1=0$ 的根。因此 $x^5-2x-1=0$ 為乘二數列位數 $t(a_n)$ 遞迴關係式的特徵方程式。

$$x^5-2x-1=(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x-1\right)=(x+1)\left[x(x-1)(x^2+1)-1\right]=0$$

而此特徵方程式有 5 個不同的特徵根。$x^4-x^3+x^2-x-1=0$ 的根藉由繪圖軟體 *Geogebra* 協助，可由圖形平移來看根的分布狀態：

令 $m(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$，其中 $m(-1)=3,\ m(0)=m(1)=-1$。




將圖形向上平移一單位，令新函數為 $n(x)=x^4-x^3+x^2-x=x(x-1)(x^2+1)$，其中 $n(0)=n(1)=0$，另外還有兩個共軛虛根。

由此可知 $m(x)$ 也有二實根、二虛根，再利用勘根定理，知特徵方程式的 5 個根包含-1、1.29064…和-0.51879…還有兩個共軛虛根 $z,\bar{z}$。

因此，可得知

$$\left(x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x-1\right)=\left(x+1\right)\left(x-1.29064\cdots\right)(x-0.51879)(x-z)(x-\bar{z})$$

其中 $\dfrac{t(a_n)}{t(a_{n-1})}\cong 1.29064\ldots$，為乘二數列的位數成長率。故假設齊次解有形式

$$t(a_n)=a(-1)^n+b(1.29)^n+c(-0.51)^n+d(z)^n+e(\bar{z})^n,\ a,b,c,d,e\in\mathrm{R}$$

為了決定未定係數 $a,b,c,d,e$，將 $t(a_1),t(a_2),t(a_3),t(a_4),t(a_5)$ 代入解聯立方程式

$$\begin{cases}t(a_1)=-a+(1.29)b+(-0.519)c+d(z)+e(\bar{z})=1\\ t(a_2)=a+1.6641b+0.269361c+d(z)^2+e(\bar{z})^2=1\\ t(a_3)=-a+2.1466b-0.139798359c+d(z)^3+e(\bar{z})^3=1\\ t(a_4)=a+2.7692b+0.072555348c+d(z)^4+e(\bar{z})^4=1\\ t(a_5)=-a+3.5723b-0.0376562c+d(z)^5+e(\bar{z})^5=2\end{cases}$$

因數字含無理數及虛數，難以進行計算，我想選擇單以 1.29064⋯部分來求出乘二數列的位數估計函數。

$\boxed{\text{定理 4}}$ 乘二數列位數估計值 $t(a_n) \cong \dfrac{(1.29064)^n}{1.944}$

將位數估計值的函數設為 $t(a_n) \cong \dfrac{1}{k}(1.29064)^n$，並將項數 $n$ 以及實際位數值 $t(a_n)$ 代入，$k \cong \dfrac{(1.29064)^n}{t(a_n)}$ 利用 *Excel* 的計算輔助（參見附件三），可發現在 $n$ 足夠大時，$k$ 值取到小數點第二位的數值會固定在 1.944。可得出 1.29064880134671 的項數次方除以正確位數值，也就是所除之常數值 $k$，會大約等於 1.944。因此，得到定理 4：乘二數列位數估計值 $t(a_n) \cong \dfrac{(1.29064)^n}{1.944}$ 。

到此，可根據上述研究回答題目當初專欄所提出的問題：「從 1 開始要『乘以二』幾次，得到的答案會超過 1000 位數？」 可提出兩種方法如下：

$\boxed{\text{方法一}}$

由定理 2 遞迴關係式求值：

以定理 2 之遞迴關係式 $\begin{cases} t(a_1)=1,\ t(a_2)=1,\ t(a_3)=1,\ t(a_4)=1,\ t(a_5)=2 \\ t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}),\ n\ge 6\text{時} \end{cases}$，將位數值一一代入後可得出：$t(a_{29})=781,\ t(a_{30})=1048$，則乘二數列的第 30 項起，會超過 1000 位數。

$\boxed{\text{方法二}}$

由定理 4 位數估計值求值：

以定理 4 之 $t(a_n) \cong \dfrac{(1.29064)^n}{1.944}$ 計算

$$t(a_n) \cong \frac{(1.29064880134671)^n}{1.944} \ge 1000$$

$$\left(1.29064880134671\right)^{n} \geq 1944$$

$$n \geq \log_{(1.29064880134671)} 1944 = \frac{\log 1944}{\log\left(1.29064880134671\right)} = \frac{3.2886962605}{0.1108080823847774} \approx 29.679$$

取整數 $n$=30

於是，我們能夠得知，針對研究動機中數學專欄提出的問題，無論是由方法一的遞迴關係式，或是方法二的位數估算值，皆能得出相同的結果，也就是從第 30 項起，數字會開始大於 1000 位數。

(四)、乘五數列$\{b_n\}$的性質

乘五數列$\{b_n\}$ ：1,5,25,1025,501025,250501025,10250250501025……

$\boxed{\text{引理 4-1}}$ 乘五數列$\{b_n\}$僅會出現$1,0,2,5$ ，且第一個數字$1,5,2$ 三個一循環。

證明：由以上觀察可容易得知，因為$5^0=1,\ 5^1=5,\ 5^2=25$ ，且$2\times 5=10$ ，可知四個數字會循環出現，由此，乘五數列$\{b_n\}$中僅會出現 1,5,2,0 五個數字。且根據乘法規律可發掘第一個數字會$1,5,2$ 三個一循環，即第 $n$ 項的第一個數字

$$\begin{cases} 1 \to n \equiv 1 (\operatorname{mod} 3) \\ 5 \to n \equiv 2 (\operatorname{mod} 3) \\ 2 \to n \equiv 0 (\operatorname{mod} 3) \end{cases}$$ 。

$\boxed{\text{引理4-2}}$ 乘五數列$b_n$ 可分成二區塊$b_n = \underset{\text{第一區塊}}{b_{n-3}}\ \ 0\ \ \underset{\text{第二區塊}}{b_{n-1}}$ , $n \geq 4$ (位數大於3時)，其中第一區塊為該項前三項，第二區塊為該項前一項，中間以0區隔第一區塊與第二區塊。例如：$b_5 = \underset{\text{第一區塊}}{5}\ \ 0\ \underset{\text{第二區塊}}{1025}$ ， $b_6 = b_5 \otimes 5 = \underset{\text{第一區塊}}{25}\ \ 0\ \ \underbrace{501025}_{\text{第二區塊}}$ 。

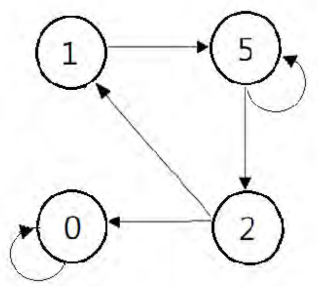
第一區塊由$b_4$起為獨立的一個$b_n$數列，第二區塊由$b_4$起，為一個首項是3的$b_n$數列。根據區塊分析容易得知位數遞迴關係式滿足$t(b_n) = t(b_{n-1}) + 1 + t(b_{n-3})$ , $n \geq 4$ ，將在後文詳細探討。

$\boxed{\text{定理 5}}$ 求乘五數列中的第 $n$ 項 $b_n$

假設 $n \equiv e \pmod 3 \Leftrightarrow$ 存在整數 $f$ 使得 $n-e=3f$ ，則由引理 4-1 可找出第一個數字。而欲求乘五數列中的第 $n$ 項 $b_n$ ，先將第一個數字視為第一區塊將其⊗5 再⊗5 ，得出第二區塊，放於原數字後，中間以 0 區隔。再將結果看作是一項的第一區塊，以此類推重複此步驟，從第一個數字開始進行算起，此步驟要執行 $f$ 次。例如： $b_1=1 \to 1\otimes 5\otimes 5=25 \to b_4=\underbrace{1}_{b_1}0\underbrace{\boxed{25}}_{1\otimes5\otimes5} \to b_7=\underbrace{\boxed{1025}}_{b_4}0\underbrace{\boxed{250501025}}_{b_4\otimes5\otimes5}$ 。

(五)、乘五數列位數 $t(b_n)$ 的性質

欲研究乘五數列位數 $t(b_n)$ 的性質，第一步先由引理4推導出乘五數列個別數字有向圖 $D$ 與鄰接矩陣 $A$，如下：

$D=$ 

$$\leftrightarrow \quad B=\begin{array}{c} \\ (1) \\ (5) \\ (2) \\ (0) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (5) & (2) & (0) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

$\boxed{\text{定理 6}}$ 乘五數列 $\{b_n\}$ 的位數滿足遞迴關係式

(1) $\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+1+t(b_{n-3}), n\ge 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-2})-t(b_{n-5}), n\ge 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_{n+1})=t(b_n)+\sum_{k=0}^{n} C^{n-k}_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \end{cases}$

證明：(1) 因 $b_3=25$ ， $b_3\otimes 5=25\otimes 5=1025=b_4$ ，而 $0\times 5=0$ 會保留至下一項， $b_4=\underbrace{1}_{\text{第一區塊}}\ 0\ \underbrace{25}_{\text{第二區塊}}$ 中的第一區塊，也就是數字 1，會使接下來所有項的開頭皆是該項前三項； $b_4$ 中 0 右側的數字 25，會使接下來所有項的開頭皆是該項前一項。由此性質可推論出位數滿足

$t(b_n)=t(b_{n-1})+1+t(b_{n-3})$，其中的 1 為分割點 0 所占的位數，因而造成

遞迴關係式$\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+1+t(b_{n-3}), n\ge 4 \end{cases}$。

證明：(2) 已知(1)成立，可利用(1)推得之

$t(b_k)=t(b_{k-1})+1+t(b_{k-3})$

$t(b_k)=t(b_{k-1})+1+t(b_{k-3})+\left[t(b_{k-5})-t(b_{k-5})\right]$

$t(b_k)=t(b_{k-1})+\left[1+t(b_{k-3})+t(b_{k-5})\right]-t(b_{k-5})$

$t(b_k)=t(b_{k-1})+t(b_{k-2})-t(b_{k-5})$原式成立

證明：(3)（第一部分）配合乘五數列基本組成數字個數有向圖可以發現，只有 $2\times5=10$ 、 $5\times5=25$ 成為二位數，所以若$b_n$ 中有 2 和 5 的出現，則$b_{n+1}$ 必會各增加一個位數。因此$t(b_{n+1})=t(b_n)$ 加上$b_n$ 的 2 之出現個數，再加上$b_n$ 的 5 之出現個數，意即 2 的個數與 5 的個數會重複加。可得 $t(b_{n+1})=t(b_n)+(b_n$ 中的 2 出現個數$)+(b_n$ 中的 5 出現個數$)$ 。

由下表可清楚分析：

| 項數 $n$ | $\{b_n\}$ | 2 的個數 | 5 的個數 | 2+5 的個數 | 總位數$t\left(b_n\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 5 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 25 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 1025 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 5 | 501025 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 6 | 250501025 | 2 | 3 | 5 | 9 |
| 7 | 10250250501025 | 3 | 4 | 7 | 14 |

於是定義 2 的個數與 5 的個數的總和為$t'(b_n)$，其中 $t(b_{n+1})=t(b_n)+t'(b_n)$，配合（1）可知，滿足遞迴關係式

$\begin{cases} t'(b_1)=0, t'(b_2)=1, t'(b_3)=2 \\ t'(b_n)=t'(b_{n-1})+t'(b_{n-3}), n\ge 4 \end{cases}$。

（第二部分）底下欲證明，若$t'(b_n)=\sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}$是正確的，則

$t'(b_n)=t'(b_{n-1})+t'(b_{n-3})$恆成立。

證明時分三種情形討論：

$(i)$ 當$n=3r(r\in N)$，為使$n-k\ge\left[\frac{k}{2}\right]$，$k$的最大值只能是$\frac{2n}{3}$

$$\Rightarrow t'(b_n)=\sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}=C_0^n+C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C_{\frac{n}{3}-1}^{\frac{n}{3}+1}+C_{\frac{n}{3}}^{\frac{n}{3}}$$ ；同理，

$$t'(b_{n-3})=\sum_{k=0}^{n-3} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-3-k}=C_0^{n-3}+C_0^{n-4}+C_1^{n-5}+C_1^{n-6}+C_2^{n-7}+\cdots+C_{\frac{n}{3}-2}^{\frac{n}{3}+1}+C_{\frac{n-3}{3}}^{\frac{n-3}{3}}$$

$(ii)$ 當$n=3r+1$ $(r\in N)$，為使$n-k\ge\left[\frac{k}{2}\right]$，且$\left[\frac{\frac{2n+1}{3}}{2}\right]=\left[\frac{2r+1}{2}\right]=r$

$$\Rightarrow t'(b_n)=\sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}=C_0^n+C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C_{\frac{n-1}{3}}^{\frac{n+2}{3}}+C_{\frac{n-1}{3}}^{\frac{n-1}{3}}$$ ；同理，

$$t'(b_{n-3})=\sum_{k=0}^{n-3} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-3-k}=C_0^{n-3}+C_0^{n-4}+C_1^{n-5}+C_1^{n-6}+C_2^{n-7}+\cdots+C_{\frac{n-4}{3}}^{\frac{n-1}{3}}+C_{\frac{n-4}{3}}^{\frac{n-4}{3}}$$

$(iii)$ 當$n=3r+2$ $(r\in N)$，為使$n-k\ge\left[\frac{k}{2}\right]$，$k$的最大值只能是

$\frac{2n-1}{3}$，且$\left[\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}\right]=\left[\frac{2r+1}{2}\right]=r$

$$\Rightarrow t'(b_n)=\sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}=C_0^n+C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C_{\frac{n+1}{3}-1}^{\frac{n+4}{3}}+C_{\frac{n+1}{3}-1}^{\frac{n+1}{3}}$$ ；同

理，$$t'(b_{n-3})=\sum_{k=0}^{n-3} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-3-k}=C_0^{n-3}+C_0^{n-4}+C_1^{n-5}+C_1^{n-6}+C_2^{n-7}+\cdots+C_{\frac{n-5}{3}}^{\frac{n+1}{3}}+C_{\frac{n-2}{3}-1}^{\frac{n-2}{3}}$$

而至於 $t'(b_n)$ 的情況有些不同，值得特別留意。

先看第一種情形(1) 當 $n=3r(r\in N)$ ：

此時 $n-1=3r-1=3(r-1)+2$ ，使得

$$t'(b_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-1-k}_{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+C_1^{n-3}+C_1^{n-4}+C_2^{n-5}+\cdots+C^{\frac{n+3}{3}}_{\frac{n-3}{3}}+C^{\frac{n}{3}}_{\frac{n}{3}-1}\ ,$$

故兩式相加

$$t'(b_{n-3})+t'(b_{n-1}) = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+(C_0^{n-3}+C_1^{n-3})+(C_0^{n-4}+C_1^{n-4})+\cdots+(C^{\frac{n}{3}}_{\frac{n}{3}-2}+C^{\frac{n}{3}}_{\frac{n}{3}-1})+C^{\frac{n-3}{3}}_{\frac{n-3}{3}}$$

$$=C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+(C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C^{\frac{n}{3}+1}_{\frac{n}{3}-1})+C^{\frac{n-3}{3}}_{\frac{n-3}{3}}$$

$$=C_0^{n}+C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C^{\frac{n}{3}+1}_{\frac{n}{3}-1}+C^{\frac{n}{3}}_{\frac{n}{3}}=t'(b_n)$$

再看第二種情形(2)當 $n=3r+1(r\in N)$ ：

$$t'(b_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-1-k}_{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+C_1^{n-3}+C_1^{n-4}+C_2^{n-5}+\cdots+C^{\frac{n+2}{3}}_{\frac{n-4}{3}}+C^{\frac{n-1}{3}}_{\frac{n-1}{3}}\ ,$$

故兩式相加

$$t'(b_{n-3})+t'(b_{n-1}) = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+(C_0^{n-3}+C_1^{n-3})+(C_0^{n-4}+C_1^{n-4})+(C_1^{n-5}+C_2^{n-5})+\cdots+(C^{\frac{n-1}{3}}_{\frac{n-4}{3}}+C^{\frac{n-1}{3}}_{\frac{n-1}{3}})+C^{\frac{n-4}{3}}_{\frac{n-4}{3}}$$

$$=C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+(C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C^{\frac{n-1}{3}+1}_{\frac{n-1}{3}})+C^{\frac{n-1}{3}}_{\frac{n-1}{3}}$$

$$=C_0^{n}+C_0^{n-1}+C_1^{n-2}+C_1^{n-3}+C_2^{n-4}+\cdots+C^{\frac{n+2}{3}}_{\frac{n-1}{3}}+C^{\frac{n-1}{3}}_{\frac{n-1}{3}}=t'(b_n)$$

最後看第三種情形(3) 當 $n=3r+2(r\in N)$ ：

$$t'(b_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-1-k}_{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+C_1^{n-3}+C_1^{n-4}+C_2^{n-5}+\cdots+C^{\frac{n+1}{3}}_{\frac{n-2}{3}}+C^{\frac{n-2}{3}}_{\frac{n-2}{3}}$$

兩式相加

$$t'(b_{n-3})+t'(b_{n-1}) = C_0^{n-1}+C_0^{n-2}+(C_0^{n-3}+C_1^{n-3})+(C_0^{n-4}+C_1^{n-4})+(C_1^{n-5}+C_2^{n-5})+\cdots+(C^{\frac{n+1}{3}}_{\frac{n-5}{3}}+C^{\frac{n+1}{3}}_{\frac{n-2}{3}})+(C^{\frac{n-2}{3}}_{\frac{n-2}{3}-1}+C^{\frac{n-2}{3}}_{\frac{n-2}{3}})$$

$$= C_0^{n-1} + C_0^{n-2} + (C_1^{n-2} + C_1^{n-3} + C_2^{n-4} + \cdots + C_{\frac{n-2}{3}}^{\frac{n+1}{3}+1} + C_{\frac{n-2}{3}}^{\frac{n-2}{3}+1})$$

$$= C_0^{n} + C_0^{n-1} + C_1^{n-2} + C_1^{n-3} + C_2^{n-4} + \cdots + C_{\frac{n+1}{3}-1}^{\frac{n+4}{3}} + C_{\frac{n+1}{3}-1}^{\frac{n+1}{3}} = t'(b_n)$$

因此得知，若 $t'(b_n) = \sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}$ ，則 $t'(b_n) = t'(b_{n-1}) + t'(b_{n-3})$ 恆成立。

可知 $t'(b_n) = \sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}$ ，

因此 $t(b_{n+1}) = t(b_n) + \sum_{k=0}^{n} C_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}^{n-k}$ 。

$\boxed{\text{定理 7}}$ 當 $n = 7k+1,\ 7k+2,\ 7k+6\ (k \in N)$ 時，$t(b_n)$ 為奇數，其餘皆為偶數。

證明：乘五數列 $\{b_n\}$ 位數 $t(b_n)$ 的前幾項為 1, 1, 2, 4, 6, 9, 14, 21…：

初始值 $t(b_1) = 1$ (奇數)，$t(b_2) = 1$ (奇數)，$t(b_3) = 2$ (偶數)

$t(b_1) + t(b_3) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 = t(b_4)$ (奇數 + 偶數 +1 = 偶數)
$t(b_2) + t(b_4) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6 = t(b_5)$ (奇數 + 偶數 +1 = 偶數)
$t(b_3) + t(b_5) + 1 = 2 + 6 + 1 = 9 = t(b_6)$ (偶數 + 偶數 +1 = 奇數)
$t(b_4) + t(b_6) + 1 = 4 + 9 + 1 = 14 = t(b_7)$ (偶數 + 偶數 +1 = 偶數)
$t(b_5) + t(b_7) + 1 = 6 + 14 + 1 = 21 = t(b_8) = t(b_{1+7})$ (偶數 + 奇數 +1 = 奇數)
$t(b_6) + t(b_8) + 1 = 9 + 21 + 1 = 31 = t(b_9) = t(b_{2+7})$ (偶數 + 奇數 +1 = 奇數)
$t(b_7) + t(b_9) + 1 = 14 + 31 + 1 = 46 = t(b_{10}) = t(b_{3+7})$ (偶數 + 奇數 +1 = 偶數)

$t(b_8) + t(b_{10}) + 1 = 21 + 46 + 1 = 68 = t(b_{11}) = t(b_{4+7})$ (偶數 + 奇數 +1 = 偶數)(規則同 4)
…以此類推，同理可證 $t(b_n)$ 會與 $t(b_7)$ 有相同的奇偶條件，則可得當
$n = 7k+1,\ 7k+2,\ 7k+6\ (k \in N)$ 時，$t(b_n)$ 為奇數，其餘皆為偶數。

$\boxed{\text{定理 8}}$ (1) 乘五數列位數 $t(b_n)$ 的生成函數 $h(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x}{x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1}$

(2) 乘五數列位數 $t(b_n)$ 滿足特徵方程式 $x^5 - x^4 - x^3 + 1 = 0$

在定理 6 中，我們得出由乘五數列$\{b_n\}$位數所構成的數列為 1, 1, 2, 4, 6, 9, 14, 21…，考慮生成函數時，增加規定$t(b_0)=0$，則形成$\{t(b_n)\}=\{0, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 14, 21\ldots\}$。針對數列$\{t(b_n)\}_0^\infty$，則函數$h(x)=t(b_0)+t(b_1)x+t(b_2)x^2+t(b_3)x^3+\cdots+t(b_n)x^n\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}t(b_n)x^k$稱為$\{t(b_n)\}_0^\infty$的一般生成函數(*ordinary generating function*)。

證明：(1) 由定理 6，乘五數列位數$t(b_n)$的遞迴關係式滿足

$$\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-3})+1, n\ge 4 \end{cases}$$

在考慮$t(b_n)$的生成函數$h(x)$時， 再加入規定$t(b_0)=0$

$\because t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-3})+1$

$\therefore t(b_n)-t(b_{n-1})-(b_{n-3})-1=0$

故試著將$h(x)$分別乘上$-x$及$-x^3$

令 $h(x)=t(b_0)+t(b_1)x+t(b_2)x^2+t(b_3)x^3+\cdots+t(b_n)x^n+\cdots$

$-xh(x)=\quad -t(b_0)x-t(b_1)x^2-t(b_2)x^3-t(b_3)x^4+\cdots+t(b_{n-1})x^n+\cdots$

$-x^3h(x)=\quad -t(b_0)x^3-\ldots-t(b_{n-3})x^n+\ldots$

接著將三式相加，得$(1-x-x^3)h(x)=x+x^3+x^4+x^5+\cdots+x^n+\cdots$

引入 $-\dfrac{1}{1-x}=-1-x-x^2-x^3-\cdots-x^n-\cdots$

即$(1-x-x^3)h(x)-\dfrac{1}{1-x}=-1-x^2$

$$\Rightarrow (1-x-x^3)h(x)=(\frac{1}{1-x}-1-x^2)=\frac{1-(1-x)-x^2(1-x)}{1-x}$$

$$=\frac{1-(1-x)-x^2(1-x)}{1-x}=\frac{x-x^2+x^3}{1-x}=\frac{x(1-x+x^2)}{1-x}$$

$$h(x)=\frac{x(1-x+x^2)}{(1-x)(1-x-x^3)}$$

$$h(x)=\frac{x^3-x^2+x}{x^4-x^3+x^2-2x+1}$$

證明：(2) 因為定理 6 (2)為齊次遞迴方程式，因此利用定理 6 (2)來求特徵方程式。根據前面所得的遞迴關係式定理 6 (2)可得

$$\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-2})-t(b_{n-5}), n\geq 6 \end{cases}$$

將 $t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-2})-t(b_{n-5})$ 對等改寫成 $s^n=s^{n-1}+s^{n-2}-s^{n-5}$ ，兩邊同除以 $s^{n-5}$ ，得到 $s^5=s^4+s^3-1$ ，即 $s^5-s^4-s^3+1=0$ ，或說 $s$ 為 $x^5-x^4-x^3+1=0$ 的根，因此可得，其特徵方程式為 $x^5-x^4-x^3+1=0$

$$\left(x+1\right)(x-1)(x^3-x^2-1)=0$$

故其中三次方程式 $x^3-x^2+1=0$ 套用公式解得其根，故此特徵方程式有 5 個不同的特徵根 $\pm 1,\ \sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3},$

$\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3},\ \sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3}$ ，其中

$\frac{t(b_{n+1})}{t(b_n)}\cong 1.4665571\cong \sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3}$ ，為乘五數列位數成長率。

則假設齊次解有形式 $t(b_n)=a(1)^n+b(-1)^n+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})^n$

$+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})^n\ +e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})^n$

, $a,b,c,d,e\in R$ 。

為了決定未定係數 $a,b,c,d,e$ ，將 $t(b_1),t(b_2),t(b_3),t(b_4),t(b_5)$ 代入解聯立方程式

$$\begin{cases}
t(b_1)=a-b+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})+e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})=1 \\
t(b_2)=a+b+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})^2+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})^2+e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})^2=1 \\
t(b_3)=a-b+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})^3+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})^3+e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})^3=2 \\
t(b_4)=a+b+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})^4+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})^4+e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})^4=4 \\
t(b_5)=a-b+c(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3})^5+d(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\frac{1}{3})^5+e(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}\omega+\frac{1}{3})^5=6
\end{cases}$$

與乘二數列的位數特徵方程式一樣，數字含無理數及虛數，雖有確定的數值，仍難以進行計算，我利用$\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}}+\frac{1}{3}\cong 1.465571$求出乘五數列的位數估計函數。

定理 9 乘五數列位數估計值$t(b_n)\cong\frac{(1.465571)^n}{0.972072}$

將位數估計值的函數設為$t(b_n)\cong\frac{1}{m}(1.465571)^n$，並將項數 $n$ 以及實際位數值$t(b_n)$代入，$k\cong\frac{(1.465571)^n}{t(b_n)}$利用 *Excel* 的計算輔助，可發現在 $n$ 足夠大時，$k$ 值取到小數點第二位的數值會固定在 1.12。可得出 1.47 的項數次方除以正確位數值，也就是所除之常數值 $m$，會大約等於 1.12。因此，得到乘五數列位數估計值$t(b_n)\cong\frac{(1.465571)^n}{0.972072}$。

(六)、乘二數列與乘五數列之關聯

定理 10 (1) 乘二數列$\{a_n\}$中的一項$a_n$經乘五規則又經乘二規則後，每一位數後面都會增加 0，亦即$(a_n\otimes 5)\otimes 2=a_n\otimes 10$，且$n>3$後沒有交換律。

例如：

$(a_8\otimes 5)\otimes 2=(848\otimes 5)\otimes 2=402040\otimes 2=804080=a_8\otimes 10$

$(a_8\otimes 2)\otimes 5=(848\otimes 2)\otimes 5=16816\otimes 5=53040530\neq a_8\otimes 10$

(2) 乘二數列$\{a_n\}$中的一項$a_n$的每一位數後面都增加 0，再將每一位數與其所附帶的 0 視為一組二位數，將其除以五，則會得出下一項，也就是經乘二規則，亦即$a_n\otimes 10\times\frac{1}{\otimes 5}=a_n\otimes 2=a_{n+1}$，可看成將定理 10 (1)移項亦成立，且因為乘二數列本身除以五無法整除，因此容易推得沒有交換律。例如：

$a_8\otimes 10\times\frac{1}{\otimes 5}=(848\otimes 10)\times\frac{1}{\otimes 5}=804080\times\frac{1}{\otimes 5}=424$

證明：(1) 透過個別數字$\otimes 5$又$\otimes 2$的轉換，如下表：

| 原始$a_n$中的數字 | 經$\otimes 5$ | 再$\otimes 2$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 1,0 |
| 2 | 1,0 | 2,0 |
| 4 | 2,0 | 4,0 |
| 8 | 4,0 | 8,0 |
| 6 | 3,0 | 6,0 |

$1 \to 10,\ 2 \to 20,\ 4 \to 0,\ 8 \to 80,\ 6 \to 60$，且因乘二數列中僅會出現$1,2,4,8,6$五個數字，因此定理 10 (1)必成立，而其餘數字$(3,5,7,9\cdots)$皆沒有此規律。

證明：(2) 透過個別數字$\otimes 10$又$\dfrac{1}{\otimes 5}$的轉換，如下表：

| 原始$a_n$中的數字 | 經$\otimes 10$ | 再$\dfrac{1}{\otimes 5}$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 |
| 2 | 20 | 4 |
| 4 | 40 | 8 |
| 8 | 80 | 16 |
| 6 | 60 | 12 |

$1 \to 2,\ 2 \to 4,\ 4 \to 8,\ 8 \to 16,\ 6 \to 12$，可對應到乘二數列的有向圖，將$a_n$引導至$a_{n+1}$。乘二數列中的每一項必符合此規律，然而反之並不成立（即符合此規律者不一定為乘二數列中的一項），因為其他數字也符合此規律。

$\boxed{\text{定理 11}}$ (1) 乘五數列經乘二規則又經乘五規則後，每一位數(0 依然為 0)後面都會增加 0，亦即$(b_n \otimes 2) \otimes 5 = b_n \otimes 10$，且$n > 2$後沒有交換律。

例如：$(b_4 \otimes 2) \otimes 5 = (1025 \otimes 2) \otimes 5 = (20410) \otimes 5 = 1002050 = 1025 \otimes 10 = b_4 \otimes 10$

$(b_4 \otimes 5) \otimes 2 = (1025 \otimes 5) \otimes 2 = (501025) \otimes 2 = 10020410 \neq b_4 \otimes 10$

(2) 乘五數列$\{b_n\}$中的一項$b_n$的每一位數後面都增加 0，再將每一位數與其所附帶的 0 視為一組二位數或三位數，將其除以二，則會得出下一

項，也就是經乘五規則，亦即$b_n \otimes 10 \times \frac{1}{\otimes 2} = b_n \otimes 5 = b_{n+1}$，可看成將定理 11 (1)移項亦成立，且因為乘五數列本身為奇數無法被 2 整除，因此容易推得沒有交換律。例如：

$$b_4 \otimes 10 \times \frac{1}{\otimes 2} = (1025 \otimes 10) \times \frac{1}{\otimes 2} = 1002050 \times \frac{1}{\otimes 2} = 501025$$

證明：(1) 透過個別數字⊗2 又⊗5 的轉換，如下表：

| 原始$b_n$ 中的數字 | 經⊗2 | 經⊗5 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1,0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 2,0 |
| 5 | 1,0 | 5,0 |

凡乘以 2 後仍為個位數字或 10 的數皆符合此規律(含$1,2,3,4,5$)，因此同定理 9，僅能證明乘五數字各項皆符合此規律，而符合此規律者不一定為乘五數列中的一項。

證明：(2) 透過個別數字⊗10 又$\frac{1}{\otimes 2}$的轉換，如下表：

| 原始$a_n$ 中的數字 | 經⊗10 | 再$\frac{1}{\otimes 2}$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 |
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 10 |
| 5 | 50 | 25 |

$1 \to 5,\ 0 \to 0,\ 2 \to 10,\ 5 \to 25$ ，可對應到乘五數列的有向圖，將$b_n$引導至$b_{n+1}$。乘五數列中的每一項必符合此規律，然而反之並不成立（即符合此規律者不一定為乘五數列中的一項），因為其他數字也符合此規律。

# 三、 研究結果與討論

(一)、研究結果

1. 乘二數列及乘五數列的區塊分析

| | |
|---|---|
| $a_n$ | $a_n = \underbrace{\boxed{a_{n-4}}}_{\text{第一區塊}}\ \underbrace{\boxed{a_{n-5}}}_{\text{第二區塊}}\ \underbrace{\boxed{a_{n-4}}}_{\text{第三區塊}}, n \ge 6$ |
| $b_n$ | $b_n = \underbrace{\boxed{b_{n-3}}}_{\text{第一區塊}}\ 0\ \underbrace{\boxed{b_{n-1}}}_{\text{第二區塊}}, n \ge 4$ |

2. 針對乘二數列及乘五數列位數的性質及規律的研究結果，以表格整理如下：

| | 乘二數列位數 $t(a_n)$ | 乘五數列位數 $t(b_n)$ |
|---|---|---|
| 鄰接矩陣 | $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}_{5\times5}$ | $\begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix}_{4\times4}$ |
| 遞迴關係式 | $\begin{cases} t(a_1)=1,\ t(a_2)=1,\ t(a_3)=1,\ t(a_4)=1,\ t(a_5)=2 \\ t(a_n)=2t(a_{n-4})+t(a_{n-5}),\ n\ge6 \end{cases}$ | $\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+1+t(b_{n-3}), n\ge4 \end{cases}$ 或<br>$\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_n)=t(b_{n-1})+t(b_{n-2})-t(b_{n-5}), n\ge6 \end{cases}$<br>或 $\begin{cases} t(b_1)=1, t(b_2)=1, t(b_3)=2 \\ t(b_{n+1})=t(b_n)+\sum_{k=0}^{n} C^{n-k}_{\left[\frac{k}{2}\right]} \end{cases}$ |
| 奇偶值 | 奇數、奇數、奇數、奇數、偶數，每五項一循環 | 奇數、奇數、偶數、偶數、偶數、偶數、奇數、偶數，每七項一循環 |
| 生成函數 | $g(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{1-x+x^2-x^3-x^4}$ | $h(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{x^4-x^3+x^2-2x+1}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 特徵方程式 | $x^5-2x-1=0$ | $x^5-x^4-x^3+1=0$ |
| 位數估計值 | $t(a_n)\cong\dfrac{(1.29064880134671)^n}{1.944}$ | $t(b_n)\cong\dfrac{(1.465571)^n}{0.972072}$ |

3. 乘二數列與乘五數列之關聯：

$$(a_n\otimes 5)\otimes 2=a_n\otimes 10\text{ 、 }(b_n\otimes 2)\otimes 5=b_n\otimes 10\text{ ，}$$

$$(a_n\otimes 10)\times\frac{1}{\otimes 5}=a_n\otimes 2=a_{n+1}\text{ 、 }(b_n\otimes 10)\times\frac{1}{\otimes 2}=b_n\otimes 5=b_{n+1}\text{ 。}$$

(二)、討論

1. 鄰接矩陣：此次研究中使用鄰接矩陣證明位數遞迴關係式，透過文獻的閱讀與分析，了解其性質並推廣其用途。在證明過程中，矩陣的拆解及計算在應用上有其困難之處，最終仍能巧妙運用鄰接矩陣的性質證明乘二數列的位數遞迴關係式。目前乘五數列位數遞迴關係式的證明是透過觀察規律及簡易代換而成，若能妥善運用乘五數列位數的鄰接矩陣，可使研究更具一致性，但兩者皆能達到證明的目的已十分不容易。

2. 位數估計值：此次研究中以特徵方程式求出的根，包含了三次方程式求解，計算上有其困難點，在位數的函數上，只取其中一個特徵根，來解決原始問題，避免了數字含有無理根及虛根的問題。

3. 乘二數列與乘五數列之關聯：研究中原先因為$2\times 5=10$的緣故，採取了乘$m$數列中的乘二數列與乘五數列進行討論。最終能總結出兩者之關聯，目前仍尚未證出兩者更有力的連結，若能加強此處，並以遞迴關係式等前述定理作為根基，應能能達成本研究的研究目的之機率。

4. 乘二數列及乘五數列判斷上：得以判別一串數字是否為乘二數列或乘五數列，關於乘二數列及乘五數列的作法上能不能更加簡潔，並具一致性，是目前仍在努力的部分。

# 四、　結論與應用

(一)、結論

因一個數學專欄提到的特別規律以及提出的小問題，開啟了對這一連串特別的數列的認識與研究。

本研究分為兩大部分：在第一部分裡，透過觀察及討論，得出了數列位數的性質及規律。研究數列的文獻資料裡，大都利用矩陣、生成函數、特徵方程式、位數的一般式等切入，同理在此研究中試圖仿照一般數列的研究方法，得出針對乘二數列及乘五數列的規律，解決了原先在數學專欄中看見的問題。在第二部分裡，回到了數列本身，因$2\times5=10$的基本乘法得到啟發，找出乘二數列及乘五數列之間的關聯性，將兩種規律結合，竟然有了奇妙的結果。最後綜合前面所研究的性質，可以判斷一串數字是否為乘二數列或乘五數列的一項。

(二)、應用

有關於此規則的數列，目前找到的相關文獻資料較少，就連集結眾多數列的 *OEIS* 網站，雖然有列出這一系列的數列，所提供的資料也很有限。另外，數列的應用大多可運用在敘述自然現象，例如：描述 *DNA* 的序列等等，相關跨領域的應用面雖尚未被具體化，但我相信總有一天必能嶄露頭角。

(三) 、未來展望

研究過程中我發現相關文獻資料較少，只能從其他規律的數列的研究中，汲取實驗方法，希望能更透徹的了解乘二數列、乘五數列，甚至是乘 $m$ 數列，找尋可應用之處，或者是研究乘 $m$ 數列的共通性，讓更多人能注意到這一個規則的數列。

# 五、　參考文獻

(一)、中華民國第四十五屆中小學科學展覽高中組，哇！好多的 1、2、3！—外觀數列。

(二)、許介彥(2011)，2 遞迴函數、3 遞迴關係與計數問題，數學悠哉遊。

(三)、吳振奎，世界數學名題欣賞叢書(2)斐波那契數列，九章出版社，民 82 年。

(四)、柳柏濂(2012)，尋尋冪冪…非負矩陣冪序列初探，數學傳播 32 卷 3 期。

(五)、游森棚(2016)，森棚教官的數學題：一直乘以二，科學研習 55 卷 4 期，59 頁，網址：http://www.ntsec.gov.tw/User/Article.aspx?a=3137。

(六)、張福春、曾介玫(2012)，一般生成函數之應用，數學傳播 32 卷 3 期。

(七)、廖信傑(2014)，用矩陣方法探討三階遞迴數列，數學傳播 38 卷 1 期。

(八)、Herbert S. Wilf. Generatingfunctionology. (September 1, 1989), from https://www.math.upenn.edu/~wilf/gfologyLinked2.pdf

(九)、Neil James Alexander Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. （無日期）, from http://www.research.att.com/~njas/sequences/

附件一 乘二數列 python 程式碼

```
n=int(input())
k=[1]
j=0
for i in range(n):
    for K in k:
        print(K,end="")
    print()
    j=0
    while j<len(k):
        if k[j]==6:
            k[j]=1
            k.insert(j+1,2)
            j+=1
        elif k[j]==8:
            k[j]=1
            k.insert(j+1,6)
            j+=1
        else:
            k[j]*=2
```

附件二 乘五數列 python 程式碼

```
n=int(input())
k=[1]
j=0
for i in range(n):
for K in k:
        print(K,end="")
    print()
    j=0
    while j<len(k):
        if k[j]==2:
            k[j]=1
            k.insert(j+1,0)
            j+=1
        elif k[j]==5:
            k[j]=2
            k.insert(j+1,5)
```

```
        j+=1
    else:
        k[j]*=5
```

附件三 乘二數列所除常數 $k$ 值 $k=\dfrac{(1.29)^n}{t(a_n)}$

| 項數 $n$ | 位數 $t(a_n)$ | $k$ 值 | 項數 $n$ | 位數 $t(a_n)$ | $k$ 值 | 項數 $n$ | 位數 $t(a_n)$ | $k$ 值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.290649 | 51 | 226249 | 1.979819 | 101 | 7.99E+10 | 1.946493 |
| 2 | 1 | 1.665774 | 52 | 300969 | 1.920872 | 102 | 1.03E+11 | 1.946773 |
| 3 | 1 | 2.14993 | 53 | 390685 | 1.90986 | 103 | 1.33E+11 | 1.943178 |
| 4 | 1 | 2.774804 | 54 | 491365 | 1.959892 | 104 | 1.72E+11 | 1.942294 |
| 5 | 2 | 1.790649 | 55 | 627898 | 1.9795 | 105 | 2.22E+11 | 1.945357 |
| 6 | 3 | 1.540732 | 56 | 828187 | 1.936976 | 106 | 2.86E+11 | 1.946695 |
| 7 | 3 | 1.988545 | 57 | 1082339 | 1.912923 | 107 | 3.7E+11 | 1.944181 |
| 8 | 3 | 2.566513 | 58 | 1373415 | 1.94566 | 108 | 4.77E+11 | 1.942541 |
| 9 | 5 | 1.98748 | 59 | 1747161 | 1.973985 | 109 | 6.16E+11 | 1.944501 |
| 10 | 8 | 1.603212 | 60 | 2284272 | 1.948665 | 110 | 7.94E+11 | 1.946321 |
| 11 | 9 | 1.839274 | 61 | 2992865 | 1.919579 | 111 | 1.03E+12 | 1.944882 |
| 12 | 9 | 2.373857 | 62 | 3829169 | 1.936407 | 112 | 1.32E+12 | 1.942998 |
| 13 | 13 | 2.121103 | 63 | 4867737 | 1.965994 | 113 | 1.71E+12 | 1.943953 |
| 14 | 21 | 1.694704 | 64 | 6315705 | 1.955669 | 114 | 2.2E+12 | 1.945813 |
| 15 | 26 | 1.766639 | 65 | 8270002 | 1.927613 | 115 | 2.84E+12 | 1.945284 |
| 16 | 27 | 2.195662 | 66 | 10651203 | 1.931678 | 116 | 3.67E+12 | 1.943524 |
| 17 | 35 | 2.186097 | 67 | 13564643 | 1.957641 | 117 | 4.74E+12 | 1.943687 |
| 18 | 55 | 1.795489 | 68 | 17499147 | 1.958541 | 118 | 6.11E+12 | 1.945293 |
| 19 | 73 | 1.745946 | 69 | 22855709 | 1.935365 | 119 | 7.89E+12 | 1.945432 |
| 20 | 80 | 2.05623 | 70 | 29572408 | 1.930541 | 120 | 1.02E+13 | 1.944015 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 97 | 2.188759 | 71 | 37780489 | 1.950322 | 121 | 1.32E+13 | 1.943641 |
| 22 | 145 | 1.889774 | 72 | 48562937 | 1.95829 | 122 | 1.7E+13 | 1.944844 |
| 23 | 201 | 1.759502 | 73 | 63210565 | 1.941781 | 123 | 2.19E+13 | 1.945393 |
| 24 | 233 | 1.959016 | 74 | 82000525 | 1.931886 | 124 | 2.83E+13 | 1.94441 |
| 25 | 274 | 2.150065 | 75 | 1.05E+08 | 1.944758 | 125 | 3.65E+13 | 1.943746 |
| 26 | 387 | 1.964713 | 76 | 1.35E+08 | 1.956058 | 126 | 4.71E+13 | 1.944508 |
| 27 | 547 | 1.794035 | 77 | 1.75E+08 | 1.946363 | 127 | 6.08E+13 | 1.94524 |
| 28 | 667 | 1.898893 | 78 | 2.27E+08 | 1.934639 | 128 | 7.84E+13 | 1.944685 |
| 29 | 781 | 2.093068 | 79 | 2.92E+08 | 1.941146 | 129 | 1.01E+14 | 1.943931 |
| 30 | 1048 | 2.013173 | 80 | 3.75E+08 | 1.95289 | 130 | 1.31E+14 | 1.944295 |
| 31 | 1481 | 1.838635 | 81 | 4.85E+08 | 1.949061 | 131 | 1.69E+14 | 1.945035 |
| 32 | 1881 | 1.8684 | 82 | 6.29E+08 | 1.937898 | 132 | 2.18E+14 | 1.94484 |
| 33 | 2229 | 2.034964 | 83 | 8.12E+08 | 1.939325 | 133 | 2.81E+14 | 1.944142 |
| 34 | 2877 | 2.034862 | 84 | 1.04E+09 | 1.949596 | 134 | 3.63E+14 | 1.944194 |
| 35 | 4010 | 1.88425 | 85 | 1.34E+09 | 1.950128 | 135 | 4.68E+14 | 1.944829 |
| 36 | 5243 | 1.859992 | 86 | 1.74E+09 | 1.941002 | 136 | 6.04E+14 | 1.944894 |
| 37 | 6339 | 1.985538 | 87 | 2.25E+09 | 1.938926 | 137 | 7.8E+14 | 1.944336 |
| 38 | 7983 | 2.03489 | 88 | 2.9E+09 | 1.946717 | 138 | 1.01E+15 | 1.944179 |
| 39 | 10897 | 1.924014 | 89 | 3.73E+09 | 1.94998 | 139 | 1.3E+15 | 1.944651 |
| 40 | 14496 | 1.866703 | 90 | 4.83E+09 | 1.943542 | 140 | 1.68E+15 | 1.944876 |
| 41 | 17921 | 1.948808 | 91 | 6.25E+09 | 1.939506 | 141 | 2.16E+15 | 1.944492 |
| 42 | 22305 | 2.020865 | 92 | 8.05E+09 | 1.944536 | 142 | 2.79E+15 | 1.944223 |
| 43 | 29777 | 1.953739 | 93 | 1.04E+10 | 1.949068 | 143 | 3.6E+15 | 1.944519 |
| 44 | 39889 | 1.882359 | 94 | 1.34E+10 | 1.945335 | 144 | 4.65E+15 | 1.944813 |
| 45 | 50338 | 1.925164 | 95 | 1.73E+10 | 1.940631 | 145 | 6E+15 | 1.944599 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 62531 | 2.000214 | 96 | 2.23E+10 | 1.943128 | 146 | 7.75E+15 | 1.944298 |
| 47 | 81859 | 1.97203 | 97 | 2.88E+10 | 1.9478 | 147 | 1E+16 | 1.944437 |
| 48 | 109555 | 1.90176 | 98 | 3.72E+10 | 1.946376 | 148 | 1.29E+16 | 1.944731 |
| 49 | 140565 | 1.913017 | 99 | 4.81E+10 | 1.941942 | 149 | 1.67E+16 | 1.944659 |
| 50 | 175400 | 1.978675 | 100 | 6.2E+10 | 1.94243 | 150 | 2.15E+16 | 1.944382 |

附件三 乘五數列位數、位數成長率 $\frac{t(b_{n+1})}{t(b_n)}$ 、所除常數 $k$ 值

$k = \frac{(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{54}} + \frac{1}{3})^n}{t(b_n)}$ 、位數估計值 $t(b_n) \cong \frac{(1.465571)^n}{0.972072}$

| 項數 $n$ | 位數 $t(b_n)$ | 位數成長率 | 所除常數 $k$ 值 | 位數估計值 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1.465571 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2.147899 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 1.57395 | 3 |
| 4 | 4 | 2 | 1.153368 | 4 |
| 5 | 6 | 1.5 | 1.126895 | 6 |
| 6 | 9 | 1.5 | 1.10103 | 10 |
| 7 | 14 | 1.555556 | 1.037338 | 14 |
| 8 | 21 | 1.5 | 1.013529 | 21 |
| 9 | 31 | 1.47619 | 1.006238 | 32 |
| 10 | 46 | 1.483871 | 0.993829 | 47 |
| 11 | 68 | 1.478261 | 0.985297 | 68 |
| 12 | 100 | 1.470588 | 0.981936 | 101 |
| 13 | 147 | 1.47 | 0.978978 | 148 |
| 14 | 216 | 1.469388 | 0.976435 | 216 |
| 15 | 317 | 1.467593 | 0.97509 | 317 |
| 16 | 465 | 1.466877 | 0.974222 | 466 |
| 17 | 682 | 1.466667 | 0.973494 | 682 |
| 18 | 1000 | 1.466276 | 0.973027 | 1000 |
| 19 | 1466 | 1.466 | 0.972742 | 1467 |
| 20 | 2149 | 1.465894 | 0.972528 | 2150 |
| 21 | 3150 | 1.465798 | 0.972378 | 3150 |
| 22 | 4617 | 1.465714 | 0.972283 | 4618 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 6767 | 1.46567 | 0.972217 | 6768 |
| 24 | 9918 | 1.465642 | 0.97217 | 9919 |
| 25 | 14536 | 1.465618 | 0.972139 | 14537 |
| 26 | 21304 | 1.465603 | 0.972118 | 21305 |
| 27 | 31223 | 1.465593 | 0.972104 | 31224 |
| 28 | 45760 | 1.465586 | 0.972094 | 45761 |
| 29 | 67065 | 1.465581 | 0.972087 | 67066 |
| 30 | 98289 | 1.465578 | 0.972082 | 98290 |
| 31 | 144050 | 1.465576 | 0.972079 | 144051 |
| 32 | 211116 | 1.465574 | 0.972077 | 211117 |
| 33 | 309406 | 1.465573 | 0.972076 | 309407 |
| 34 | 453457 | 1.465573 | 0.972075 | 453458 |
| 35 | 664574 | 1.465572 | 0.972074 | 664575 |
| 36 | 973981 | 1.465572 | 0.972073 | 973982 |
| 37 | 1427439 | 1.465572 | 0.972073 | 1427440 |
| 38 | 2092014 | 1.465572 | 0.972073 | 2092015 |
| 39 | 3065996 | 1.465571 | 0.972073 | 3065998 |
| 40 | 4493436 | 1.465571 | 0.972073 | 4493438 |
| 41 | 6585451 | 1.465571 | 0.972073 | 6585454 |
| 42 | 9651448 | 1.465571 | 0.972072 | 9651452 |
| 43 | 14144885 | 1.465571 | 0.972072 | 14144891 |
| 44 | 20730337 | 1.465571 | 0.972072 | 20730346 |
| 45 | 30381786 | 1.465571 | 0.972072 | 30381798 |
| 46 | 44526672 | 1.465571 | 0.972072 | 44526690 |
| 47 | 65257010 | 1.465571 | 0.972072 | 65257036 |
| 48 | 95638797 | 1.465571 | 0.972072 | 95638835 |
| 49 | 140165470 | 1.465571 | 0.972072 | 140165525 |
| 50 | 205422481 | 1.465571 | 0.972072 | 205422562 |

## 【評語】010008

考慮從 1 開始，依特定運算規則（將數字的各個位數的數字乘 2）所構造出的數列，第 n 項的大小估計問題，針對這個問題給出了完整的說明，對於改變運算數字(乘 2 改為乘 5)所得出的數列，也給出了結果。

這是一個有趣的問題。作者們藉由分析數字在乘 2（或乘 5）運算下的規律，針對數列位數的變化給出了一個遞迴關係，並由此遞迴關係得出位數的估計。說明清楚簡潔，值得嘉許。乘 2（或乘 5）運算所生成的數列是相對有規則的，對於其它的乘數，我們可以說些什麼呢？是否也有規律可循？如果能多一些相關的討論，應該會更精彩。另一方面，在作品最後提到了判斷一個給定的數字是否為乘 2（或乘 5）數列中的某一項的問題其實是有趣的，如果能把這部分說清楚會更好。