2018 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010005

參展科別　數學

作品名稱　積少成多—以階差級數計算填數字方法數並推導其生成函數

得獎獎項　大會獎：二等獎

就讀學校　國立臺南第一高級中學

指導教師　林倉億

作者姓名　陳致仁、林益良

關鍵詞　路徑圖、階差級數、生成函數

作者簡介

我們是陳致仁與林益良，來自於台南市，目前就讀台南一中三年級。

數學是我們自國中以來就深感興趣的領域，也是我們學業上較得心應手的科目，升上高中之後，我們因為興趣而進入了數學科展，燃起了我們的數學魂。在發想的過程中，我們不僅僅提升數學能力，更解決了許多困難，學習到數學以外的知識，例如：表達能力、成果展現、同儕合作…….。

對於能夠參與這次的國際科展真的是既興奮又期待，希望可以藉由這次的國際科展，和來自世界各國的學生多多交流，在短暫的高中生涯中留下一個難忘的回憶。

摘要

本研究主要解決的問題為：在任意多邊形上填入特定範圍的正整數，使得相鄰兩邊上的數差 1，求符合以上條件的填數字方法數。

為了解決問題，本研究做了兩項突破。第一項是題目的轉變，將問題轉變成路徑問題。第二項則是將路徑數計算的方式（加法原理）之逆運算，求出從原點前往含直線 $y=-x$ 及其右半平面上的任意格子點之捷徑數，並搭配巴斯卡三角形中的組合數列，成功地推導、證明此問題方法數的公式。

接著本研究將原題延伸，推廣至討論任相鄰兩邊上的數之差為固定某一正整數的情形，也成功地推導、證明其方法數公式。最後，本研究討論原題目的生成函數並成功導出。

Abstract

The study aims to answer this question: "on the condition that a confined set of natural numbers are filled to each side of a polygon, with two adjacent numbers differing from one another by 1, how many methods are there?"

We managed to derive and prove the equations of our question by two main breakthroughs: (1) changing the original question into another different type of question; that is, how many paths there are from the original to the target grid point of shortest length possible in the coordinate plane, and (2) expanding the calculation method from the area of the path question to half of coordinate plane which is above line $y=-x$. Then, we applied combinations on Pascal's triangle to our breakthrough (2), and we successfully solved our question and proved the equation we derived.

Afterward, we extended our original question, further considering the condition that two adjacent numbers differ from one another by any fixed natural number. We successfully solved it and proved its equations.

Finally, we manage to find the generating functions of our original question. The generating functions are on the condition that the range of number –1~*n*– we fill in is fixed and that the number of edges in the polygon –*m*– we fill in is variable. We derived the generating functions ultimately.

壹、 研究動機

在學習排列組合這單元時，遇到了這個題目：

> 104 年指考數學乙單選第 1 題：
>
> 將正方形 ABCD 的每一條邊各自標上 1、2、3 中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊，都標有恰好差 1 的兩個數。滿足這種條件的標示法總共有多少種？ (A)2 (B)4 (C)6 (D)8 (E)10。（答案為 D）

此題的限制條件，不利於直接利用排列數或組合數計算，而畫出樹狀圖後也必須將不符條件的一一刪去。所幸滿足此題的方法數很少，只需將 8 種方法畫出即可。然而，若持續將邊數擴大：六邊形、八邊形……，或者允許填入的數字範圍改成 1~4、1~5……，可想而知方法數將會遽增！我們想知道將邊數、數字範圍兩條件擴大時，任何情形的方法數究竟為何。

貳、 研究目的

一、在 $2m$ 邊形的每一邊上填入 1~n 中的一個正整數，且相鄰邊上的數必須相差 1。以 m、n 求出符合以上填數字規則的方法數。

二、持續擴展問題，將相鄰的兩邊差 1 改成差 2、3、……、q，求出上述個種情形的方法數。

三、求出方法數的生成函數。

四、推導、證明公式後，尋求公式與已知組合學成果之間的關係。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、整數數列線上大全、Mathtype、Microsoft Office Word

肆、 名詞解釋

1. n：定義可填入的數字範圍是 1、2、3、……、n，填數時不一定要全部都用到，只要符合任相鄰兩邊上的正整數相差 1 的條件即可。

2. a_1：第一邊 $\overline{A_1A_2}$ 所填入的數字，設定第一個數 a_1，再依邊的順序去+1、-1，最後再回到 a_1

達成循環，就算是一種符合條件的方法。

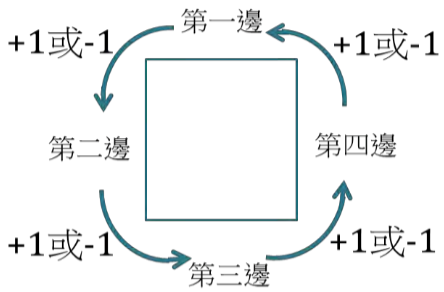
3. $S_{n,m}$：在多邊形 $A_1A_2A_3...A_{2m}$ ($2m$ 邊形)的每一邊上各自填入一個 1~n 中的正整數，且相鄰邊上的數都必須相差 1，填數字的方法數為 $S_{n,m}$。

4. $val\left\{n,a_1,(\alpha,\beta)\right\}$：從原點 $(0,0)$ 走至目標點 (α,β) 的捷徑走法數總和，以「加法原理」疊加即可算出。因 n、a_1 會影響走路徑的範圍，所以表示時以 $val\left\{n,a_1,(\alpha,\beta)\right\}$ 表示。

5. Δ：當問題推廣時，定義任意相鄰兩邊填入的數字固定差為 Δ。

伍、研究內容

1. 先備條件：多邊形的邊數必為偶數。



如右圖，當任意相鄰兩邊皆差 1 時，我們可以將(+1)及(-1)視為在頂點上的一次運算，由第一邊 $\overline{A_1A_2}$ 運算下去，最後回到 $\overline{A_1A_2}$ 的過程我們可以將其運算表示如下：

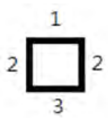
$a_1+1-1+1-1......=a_1$　　可知　　$+1-1+1-1......=0$

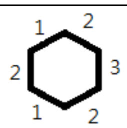
即代表**+1 與-1 的次數是一樣多的**，我們又定義每頂點上代表做一次運算，所以代表此多邊形的邊數必定為偶數。

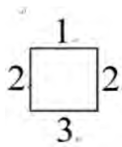
2. 完整命題

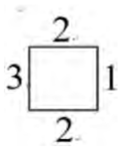
有了先備條件我們可以完整地命題：

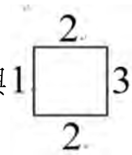
> 在多邊形 $A_1A_2A_3...A_{2m}$ ($2m$ 邊形)的每一邊上各自填入一個 1~n 中的正整數，且相鄰邊上的數都必須相差 1，求填數字的方法數 $S_{n,m}$。

例如： 

或 

皆是符合的填數字方式。其中我們遵循原本的命題，不考慮旋轉與鏡射情形，例如： 

與 

與 

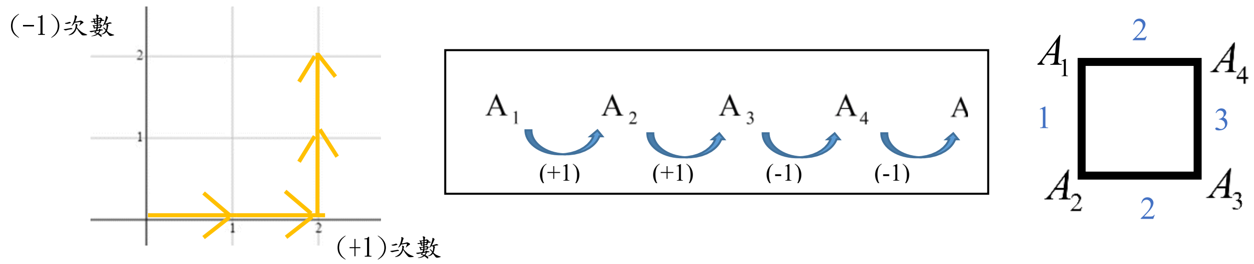
皆視為不同的填入方法。

3. 問題的轉變——捷徑問題

3-1 我們曾經畫出樹狀圖討論，但過於費時及狹隘，因此我們換一個新的角度解析題目：

把<u>**(+1)、(-1)的選擇**</u>轉變成在坐標平面上走路徑的<u>**兩個方向(上、右)**</u>；<u>**(+1)、(-1)運算的次數**</u>視為<u>所走的路徑</u>。

[例 1]：下圖的路徑走法所代表的是：



若依照此路徑，如果第一邊填入 1 (a_1=1)，便可以對應到一組符合題意的方法(1,2,3,2)。

由上述例子可知，<u>每一種路徑都對應著一種“(+1)、(-1)”運算的排列方式</u>，若再設定第一邊填上的數字 a_1 ，即可以對應到一組符合題意的方法。

也就是說，<u>我們所要求得的方法數總和便可以對應到成捷徑問題的路徑總數</u>。

3-2 走路徑的規則：

(1) 在坐標平面上，把(+1)視為向右走一單位(x 軸方向)、(-1)視為向上走一單位(y 軸方向)，在格子點上走路徑。

(2) 由原點 $(0,0)$ 出發，因為 $2m$ 邊形 $A_1A_2A_3...A_{2m}$ 中，(+1)、(-1)各有 m 次，所以終點即是點坐標 (m,m) =>各個終點坐標皆落於直線 $y=x$ 上。

(3) 計算路徑總和時，以「加法原理」累加。

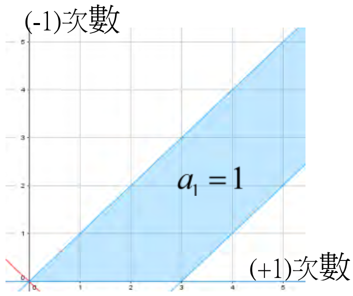
3-3 走路徑範圍：

由於數字範圍限於 1,2,……,n，因此走捷徑也存在範圍限制，請見[例 2] ：

[例 2]：在 $2m$ 邊形上填入數字 1,2,3,4，且第一邊上填入的數字為 1($a_1=1$) :

第一邊上填入的數字為 1($a_1=1$)時，第一步便不能為(-1)，也就是不可向上走，只能向右走；而且最多只能連續(+1)三次，即向右 3 次，否則數字會大於 4。因此我們得知，無論在第幾步，(-1)(+1)所的次數累計起來，必須介於(+3)和(+0)之間。按照這個規則填數，便會出現下圖中所示之「走路徑」的範圍，即$\begin{cases} x-3\le y\le x \\ y\ge 0 \\ x\in N\cup\{0\} \end{cases}$。

仿[例 2]的討論，即可給定當首數=a_1時的走路徑範圍



[定理一] 當可填入的數字範圍為 1,2,3,……,n，且第一邊填入的數為a_1時，走路徑的範圍為

$$\begin{cases} x-(n-a_1)\le y\le x+(a_1-1) \\ y\ge 0 \\ x\in N\cup\{0\} \end{cases}。$$

證明：

(1) $\because -(n-a_1)\le 0\le a_1-1$，$\therefore y=x$上落在第一象限的格子點有位於上述範圍之中。令$(t,t)$為$y=x$上落在第一象限的任意格子點，則用$t$個(+1)（向右）與$t$個(-1)（向上）交錯排列：$1,-1,1,-1,\cdots,1,-1$或$-1,1,-1,1,\cdots,-1,1$，即可從原點出發走到$(t,t)$，故$(t,t)$位於走路徑之範圍內。

(2) $\forall t\in N$，點$(t+k,t)\in y=x-k$，$k=1,2,\cdots,n-a_1$，則從原點以符合走路徑規則的方式走到點(t,t)後，再向右走k單位，即可走到點$(t+k,t)$。又$0<k\le n-a_1$，所以此種走法符合走路徑規則。

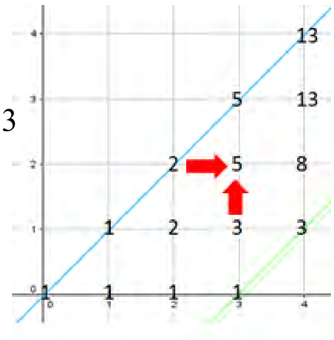
(3) 同理可證，$\forall t\in N$，可從原點以符合走路徑規則的方式走到點$(t,t+k)\in y=x+k$。

由(1)、(2)、(3)可知，位於$\begin{cases} x-(n-a_1)\le y\le x+(a_1-1) \\ y\ge 0 \\ x\in N\cup\{0\} \end{cases}$範圍內的格子點，均可原點以符合走路徑規則的方式走到。*Q.E.D.*

3-4 $S_{n,m}=\sum_{i=1}^{n} val\{n,i,(m,m)\}$

我們以 $val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}$ 表示當可以填入的數字範圍為 1~n，第一邊填入的數字為 a_1，由原點走到坐標中條件範圍內任意點 (α,β) 時的路徑數，則：

$$val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}=val\{n,a_1,(\alpha-1,\beta)\}+val\{n,a_1,(\alpha,\beta-1)\}$$



上式即為解路徑問題時所用到的加法原理。

以右圖中的 $val\{4,1,(3,2)\}=5$，$val\{4,1,(2,2)\}=2$，$val\{4,1,(3,1)\}=3$ 為例，便滿足 $val\{4,1,(3,2)\}=val\{4,1,(2,2)\}+val\{4,1,(3,1)\}$

其中，若 $val\{n,a_1,(x,y)\}$ 超出走路徑的範圍，則記為 0。

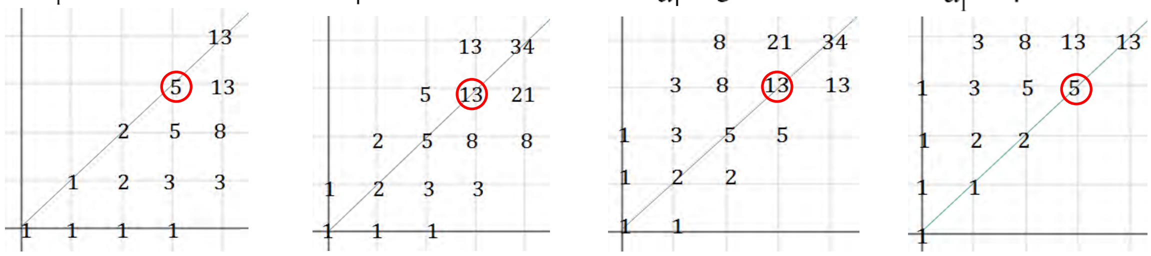
我們只要將各個首數所產生的圖形中的 $val\{n,i,(m,m)\}$ 全部相加，也就是將所有首數所產生的合法填數字的方法數加總，就會得到我們所要求的解答。

於是我們得到：$S_{n,m}=\sum_{i=1}^{n} val\{n,i,(m,m)\}$。

以 $S_{4,3}$ 的求法為例說明。（$S_{4,3}$：在六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的每一邊上各自填入一個 1,2,3,4 中的正整數，且相鄰邊上的數都必須相差 1 之方法數。）

依 a_1 的四種情況算路徑總數：

$a_1=1$　$a_1=2$　$a_1=3$　$a_1=4$



各個 a_1 情形中由 $(0,0)$ 走到 $(3,3)$ 的路徑數（紅色圈中的數字）加起來就是答案，即

$S_{4,3}=\sum_{i=1}^{4} val\{4,i,(3,3)\}=5+13+13+5=36$。

4　引入巴斯卡三角形中的組合數列搭配階差級數求方法數

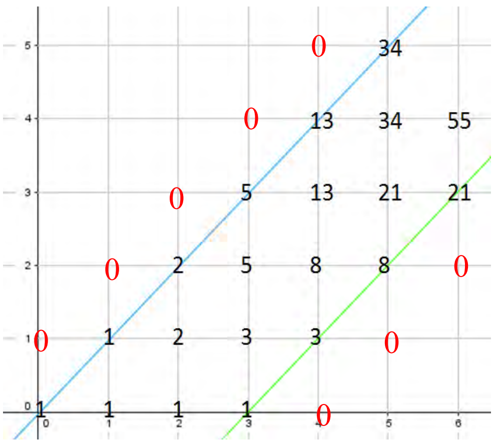
到目前為止，我們只能一一累加路徑再將方法數算出。然而我們發現，經由下文中 4-1、4-2 關鍵性的步驟後，便可得到更為簡單便捷的算法。

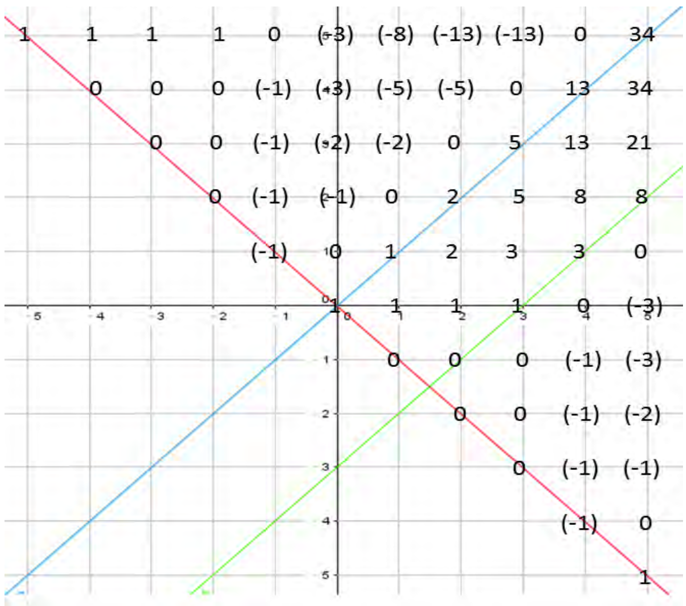
4-1　補項：

我們把 $val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}$ **視為數列，不再僅限於路徑總數**，而當初的走路徑範圍便成了一個**尚未填完**的數列並**可繼續向第二、第四象限擴充**。$val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}$ 擴充的方式變為連續使用加法原理來反推未知數。

以左下圖($n=4$、$a_1=1$)為例，由於 $y=x$，$y=x-1$ 上的數字相同($(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta-1)$)，依據加法原理 $(\alpha,\beta)=(\alpha-1,\beta)+(\alpha,\beta-1)$，又 $(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta-1)$，所以可以推得直線 $y=x+1$ 格子點上的各個值 $val\{4,1,(x,x+1)\}$ 都要填上 0

依據同樣的方式，延伸一排後繼續往左上及右下填數字，使原本平行四邊形的範圍填滿成在 $y\geq -x$ 的三角形範圍，在這個三角形範圍中的每項都符合 $val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}=val\{n,a_1,(\alpha-1,\beta)\}+val\{n,a_1,(\alpha,\beta-1)\}$。如右下圖所示：





而在 $y\leq -x$ 範圍內的格子點，由於加法原理原先定義的關係(所求＝左邊＋下面)，故無法推測該點的數字。

4-2 利用階差級數計算方法數：

在給定 n 及 a_1 的條件下，以 $val(\alpha,\beta)$ 代替 $val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}$，我們所要求的數字為 $val(m,m)$，而很明顯的，$y=-x$ 格子點上的數列只出現了(0)、(1)、(-1)（證明請見 6.2 節），如此一來就可以利用階差級數來計算 $val(m,m)$。

以 $x=m$ 、 $y=m$ 、 $y=-x$ 當作三邊圍出三角形後，將其逆時鐘旋轉 45°，如下圖：

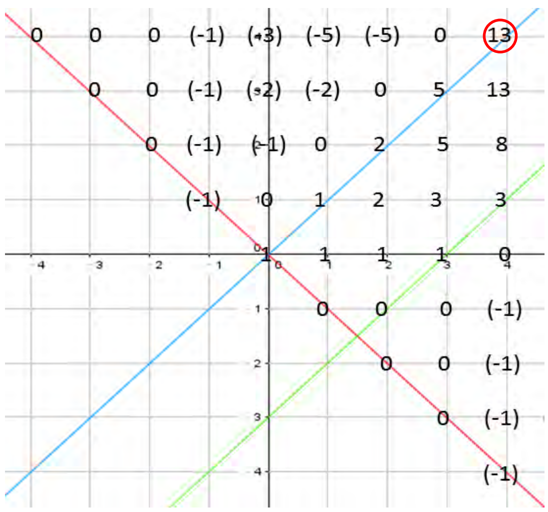
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & val(m,m) & & & \\
 & & val(m-1,m) & & val(m,m-1) & & \\
 & val(m-2,m) & & val(m-1,m-1) & & val(m,m-2) & \\
val(m-3,m) & & val(m-2,m-1) & \vdots & val(m-1,m-2) & & val(m,m-3) \\
val(-m,m) & val(-m+1,m-1) & & \cdots\cdots & & val(m-1,-m+1) & val(m,-m)
\end{array}
$$

$y=-x$ 格子點上的數列只出現了 0、1、-1

$$
\begin{aligned}
& val(m,m) \\
&= 1\times val(m-1,m)+1\times val(m,m-1) \\
&= 1\times val(m-2,m)+2\times val(m-1,m-1)+1\times val(m,m-2) \\
&= 1\times val(m-3,m)+3\times val(m-2,m-1)+3\times val(m-1,m-2)+1\times val(m,m-3) \\
& \quad \vdots \\
&= C_0^{2m}val(-m,m)+C_1^{2m}val(-m+1,m-1)+\ldots\ldots+C_{2m-1}^{2m}val(m-1,-m+1)+C_{2m}^{2m}val(m,-m)
\end{aligned}
$$

[例 3]：在右圖中 ：$(n=4,a_1=1)$

$13=val\{4,1,(4,4)\}=C_3^8\times(-1)+C_4^8\times(+1)+C_8^8\times(-1)$



所以我們得知，在坐標平面上 $y\ge x$ 內的格子點所代表的數字均可以利用 $y=-x$ 上的數列搭配特定的組合數表示。

以下將探討 $y=-x$ 數列的規律。

5 規律及證明

5-1 尋求規律：

當 n=4 時，在直線 $y=-x$ 格子點上的數列，由左上至右下分別為：

$a_1=1$ 時，$\{......1,0,0,0,(-1),\underline{1},0,0,0,(-1),1......\}$；$a_1=2$ 時，$\{......1,0,0,(-1),0,\underline{1},0,0,(-1),0,1......\}$；

$a_1=3$ 時，$\{......1,0,(-1),0,0,\underline{1},0,(-1),0,0,1......\}$；$a_1=4$ 時，$\{......1,(-1),0,0,0,\underline{1},(-1),0,0,0,1......\}$。

當 n=5 時，在直線 $y=-x$ 格子點上的數列，由左上至右下分別為：

$a_1=1$ 時，$\{......1,0,0,0,0,(-1),\underline{1},0,0,0,0,(-1),1......\}$

$a_1=2$ 時，$\{......1,0,0,0,(-1),0,\underline{1},0,0,0,(-1),0,1......\}$

$a_1=3$ 時，$\{......1,0,0,(-1),0,0,\underline{1},0,0,(-1),0,0,1......\}$

$a_1=4$ 時，$\{......1,0,(-1),0,0,0,\underline{1},0,(-1),0,0,0,1......\}$

$a_1=5$ 時，$\{......1,(-1),0,0,0,0,\underline{1},(-1),0,0,0,0,1.......\}$

(註：數列中標示底線的數字代表原點的位置，其值恆為 1)

(請參見「附錄 1：在坐標平面上完整填數圖」)

由上述兩個例子我們可以發現，在直線 $y=-x$ 格子點上的數列只出現了 0、1、(-1)（證明請見 5-2 節）且排列方式受 n 與 a_1 的值影響。

我們將 1 與(-1)出現的規律歸納為以下二點（證明請見 5-2 節）：

(1) 任意最接近的兩個 1 之間與兩個(-1)之間的間距皆為 $n+1$。

(-1)和(-1)的間距皆為 $(n+1)$

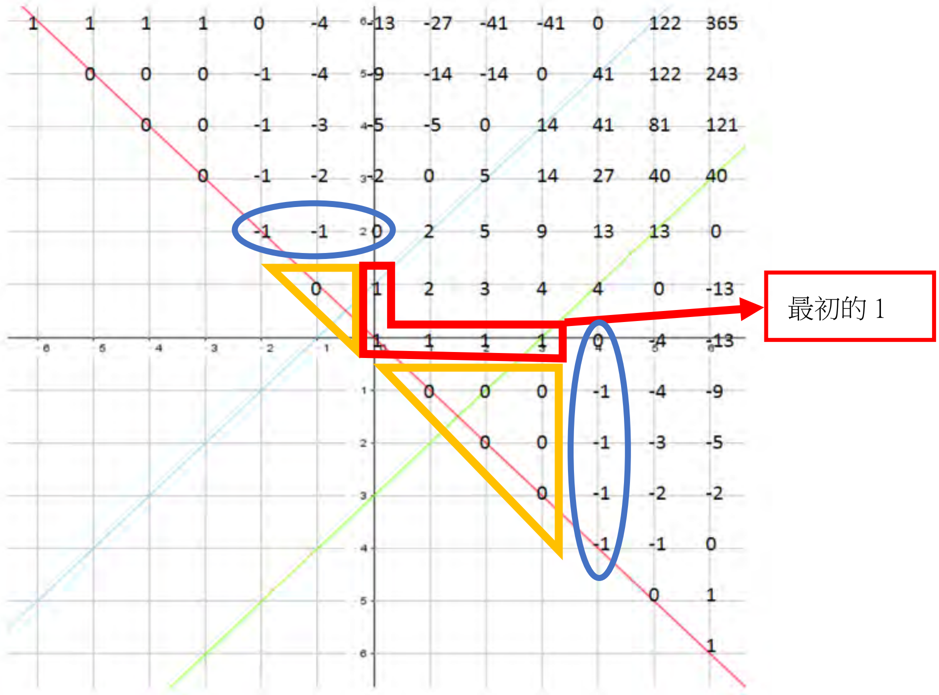
$\{......0,1,0...0,(-1),0...0,\underline{1},0...0,(-1),0...0,1,0......\}$

1 和 1 的間距皆為 $(n+1)$

(2) 1 的位置不受 a_1 影響，但(-1)的位置卻會隨著 a_1 的不同而改變，且 1 與(-1)的間距主要受 a_1 影響：

在直線 $y=-x$ 格子點上的數列，1 與第二象限最接近的(-1)間距為 a_1；與第四象限最接近的(-1)間距為 $n+1-a_1$。

5-2 證明：

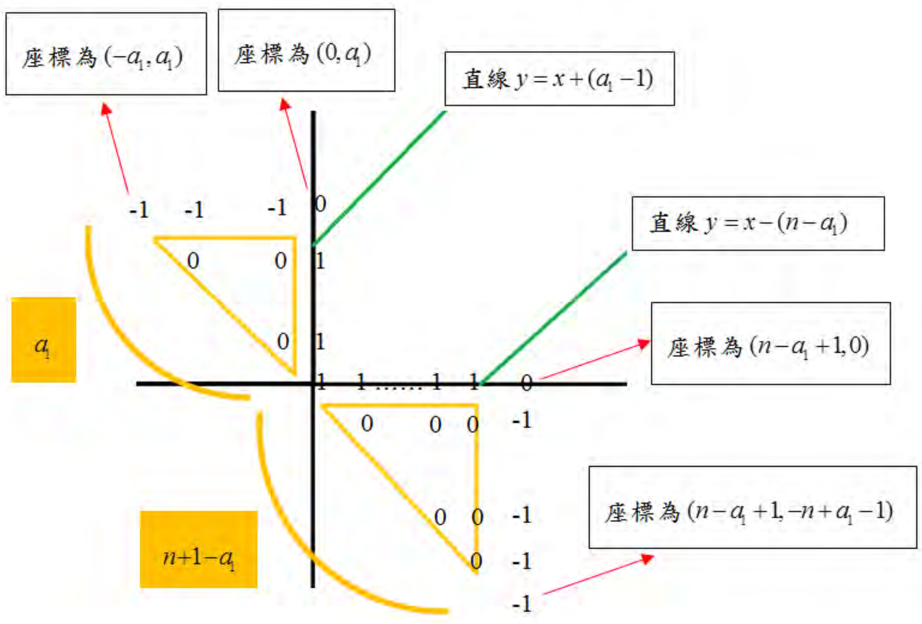


(1) 欲證 $y=-x$ 上任意最接近的兩個 1、兩個(-1)之間的間距皆為 $n+1$：

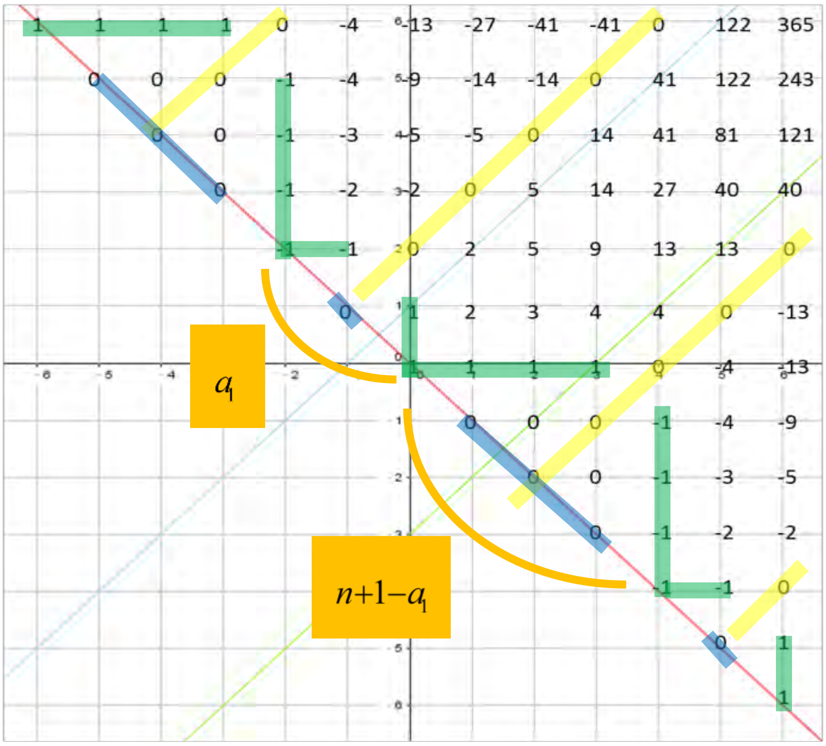
當可填入的數字範圍為 1,2,3,……,n，且第一邊填入的數為 a_1 時，x 軸上 $(0,0),(1,0),\cdots,(n-a_1,0)$ 以及 y 軸上 $(0,1),(0,2),\cdots,(0,a_1-1)$ 上的數字均為 1，再依據加法原理補項方式可知，在這些 x 軸上的 1，其下方的數都為 0，同樣地，在這些 y 軸上的 1，其左方的數也都為 0（例如上圖中兩三角形區域）。

又已知走路徑範圍為 $x-(n-a_1)\le y\le x+(a_1-1)$，又 $val\{n,a_1,(n+1-a_1,0)\}=0$，可知從 $(n+1-a_1,-1)$ 以下至 $(n+1-a_1,-n-1+a_1)$ 的值都為(-1)，且在直線 $y=-x$ 格子點上的數列中，位於第四象限且最接近原點的(-1)坐標為 $(n+1-a_1,-n-1+a_1)$；同理，由 $val\{n,a_1,(0,a_1)\}=0$ 可知從 $(-1,a_1)$ 以左至 $(-a_1,a_1)$ 的值都為(-1)，在直線 $y=-x$ 格子點上的數列中，位於第二象限且最接近原點的(-1)坐標為 $(-a_1,a_1)$。 詳見下圖所示。

因此我們證明了 5-1 所歸納的(2)：「在直線 $y=-x$ 格子點上的數列，原點上的 1 與第二象限最接近的(-1)間距為 a_1；原點上的 1 與第四象限最接近的(-1)間距為 $n+1-a_1$，故兩個接近原點的(-1)的間距為 $a_1+(n+1-a_1)=n+1$。」



(2) 以下將證明格子點上的數字有對稱的性質。



觀察上圖可以發現，數列都以黃色線（其格子點上的數字均為 0）為對稱軸，出現了對稱軸兩側數列互為相反數的關係。證明如下：令 z_1 、 z_2 、 z_3 為三個已知的值，依照 $val\{n,a_1,(\alpha,\beta)\}=val\{n,a_1,(\alpha-1,\beta)\}+val\{n,a_1,(\alpha,\beta-1)\}$ 補填數列中的缺項：

Step1：填出 $-z_1$、$-z_2$、$-z_3$

$$\begin{array}{cccc} & & -z_3 & 0 \\ & -z_2 & 0 & z_3 \\ -z_1 & 0 & z_2 & \\ 0 & z_1 & & \end{array}$$

Step2：再用相同方式填出下一排

$$\begin{array}{ccccc} & & -z_6 & -z_3 & 0 \\ & -z_5 & -z_2 & 0 & z_3 \\ -z_4 & -z_1 & 0 & z_2 & z_6 \\ & 0 & z_1 & z_5 & \\ & & z_4 & & \end{array}$$

(2.1) 若直線 $y=x+k$ 的格子點上的數列值均為 0，即 $val\{n,a_1,(x,x+k)\}=0$，則直線 $y=x+k+1$ 與直線 $y=x+k-1$ 格子點上的數列會有相反數的關係（見 Step1），即 $val\{n,a_1,(x,x+k+1)\}=-val\{n,a_1,(x+1,x+k)\}$。

(2.2) 若直線 $y=x+k+1$ 與直線 $y=x+k-1$ 格子點上的數列會有相反數的關係，則直線 $y=x+k+2$ 與直線 $y=x+k-2$ 格子點上的數列也有相反數的關係（見 Step2），即 $val\{n,a_1,(x,x+k+2)\}=-val\{n,a_1,(x+2,x+k)\}$

(2.3) 可用數學歸納法證明，若 $val\{n,a_1,(x,x+k)\}=0$，則

$val\{n,a_1,(x,x+k+\beta)\}=-val\{n,a_1,(x+\beta,x+k)\}$，$(k,\beta\in$ 整數$)$。$Q.E.D.$

(3) 由(1)：在原路徑範圍邊界外的兩斜直線 $y=x+a_1$ 與 $y=x+a_1-n-1$ 上的數皆為 0

由(2.3)：若 $y=x+k$ 上的數為 0，則 $val\{n,a_1,(x,x+k+\beta)\}=-val\{n,a_1,(x+\beta,x+k)\}$

將直線 $y=x+a_1$ 與 $y=x+a_1-n-1$ 上的數皆為 0 的特性，代入(2.3)可以得到:

$$y=x+a_1+t(n+1)\text{ 上的數皆為 0，} t\in\mathbb{Z}$$

原本路徑範圍中 $y=x$ 的數，以此特性做對稱

$$val\{n,a_1,(x,x)\}=val\{n,a_1,\left(x,x+a_1+t(n+1)-a_1-t(n+1)\right)\}$$

$$=-val\{n,a_1,\left(x-a_1-t(n+1),x+a_1+t(n+1)\right)\}$$

$x=0$ 代入 $\quad val\{n,a_1,(0,0)\}=1=-val\{n,a_1,\left(-a_1-t(n+1),a_1+t(n+1)\right)\}$

$$\Rightarrow val\{n,a_1,\left(-a_1-t(n+1),a_1+t(n+1)\right)\}=-1$$

也就是說直線 $y=x+2\left[a_1+t(n+1)\right]$ 與直線 $y=-x$ 的交點上的數為(-1)，因此最相近的兩

個(-1)距離皆為 n+1。

又直線 $y=x+a_1$ 上的數皆為 0，若直線 $y=x+2\left[a_1+t(n+1)\right]$ 上的數依此做對稱：

$$val\left\{n,a_1,\left(x,x+2a_1+2t(n+1)\right)\right\}=val\left\{n,a_1,\left(x,x+a_1+a_1+2t(n+1)\right)\right\}$$

$$=-val\left\{n,a_1,\left(x+a_1+2t(n+1),x+a_1\right)\right\}$$

$x=-a_1-t(n+1)$ 代入

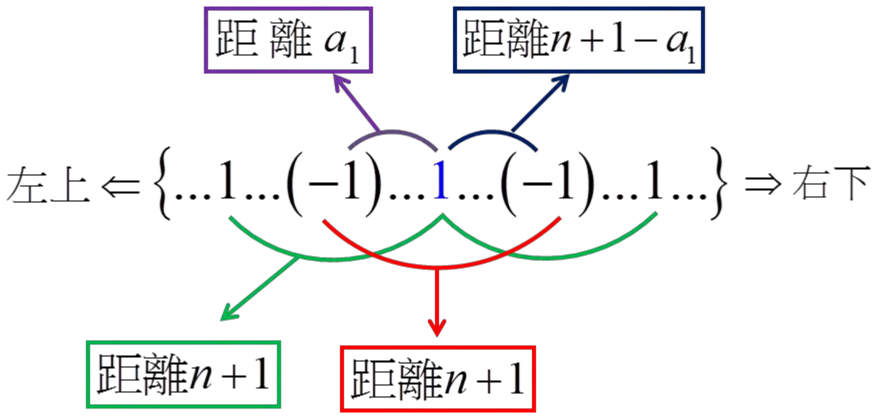
$$val\left\{n,a_1,\left(-a_1-t(n+1),a_1+t(n+1)\right)\right\}=-1=-val\left\{n,a_1,\left(t(n+1),-t(n+1)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow val\left\{n,a_1,\left(t(n+1),-t(n+1)\right)\right\}=1$$

也就是說直線 $y=x+2t(n+1)$ 與直線 $y=-x$ 的交點上的數為 1，因此最相近的兩個 1 距離皆為 n+1。

由(1)(2)(3)可以證得定理二：

[定理二] 在直線 $y=-x$ 上的格子點數列中，除了值為 1 與(-1)外，其餘的值皆為 0，其中最相近的兩個 1、最相近的兩個(-1)，距離皆為 n+1。（下圖中間的 1 位於坐標原點）



6 $S_{n,m}$ 式子的推導：

由定理二可知，$y=-x$ 上的 1 與(-1)會在原點兩側以間距為 n+1 的方式出現，因此，我們只要知道每一個 1 與(-1)的出現的位置，再搭配 5-2 所述的階差級數，就可以推導出 $val\{n,a_1,(m,m)\}$。

[引理一]：令 r_1、r_2 分別為 m、$m-a_1$ 除以 n+1 的餘數，則：

(1) $y=-x$ 上自左上角向右下角數來第一個 1 出現在第 r_1 個位置，且 $y=-x$ 上共有 $\frac{2(m-r_1)}{n+1}+1$ 個 1。

(2) $y=-x$ 上自左上角向右下角數來的第一個(-1)出現在第 r_2 個位置，且 $y=-x$ 上共有 $\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]+1$ 個 1。（其中[ ]為高斯符號）

證明：

(1) 由定理二可知，$y=-x$ 上（從點 $(-m,m)$ 到點 $(m,-m)$）的 1 會以間距為 n+1 的方式出現，又原點上的數必為 1，故 $y=-x$ 上自左上角向右下角數第 r_1 個位置（即坐標 $(-m+r_1,m-r_1)$）是 1，接下來每間距 n+1 會再出現 1，故共有 $\frac{2(m-r_1)}{n+1}+1$ 個 1。

(2) 由定理二可知，$y=-x$ 上（從點 $(-m,m)$ 到點 $(m,-m)$）的(-1)會以間距為 n+1 的方式出現，且在原點左上方間距為 a_1（即坐標 $(-a_1,a_1)$）上的數為(-1)，故 $y=-x$ 上自左上角向右下角數第 r_2 個位置（即坐標 $(-m+r_2,m-r_2)$）是(-1)，接下來每間距 n+1 會再出現(-1)，故共有 $\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]+1$ 個(-1)。*Q.E.D.*

6-1　$val\{n,a_1,(m,m)\}$ 的推導：

由於我們已經知道在 $y=-x$ 上數列的規律，再搭配 5-2 所述的階差級數，由這些條件便可以推導出 $val\{n,a_1,(m,m)\}$。

由引理一可知道 1 與(-1)出現的位置與個數，故 $val\{n,a_1,(m,m)\}$ 中由 $y=-x$ 格子點上的 1 所組成的值為：

$$1\cdot C^{2m}_{r_1}+1\cdot C^{2m}_{r_1+(n+1)}+1\cdot C^{2m}_{r_1+2(n+1)}+\ldots+1\cdot C^{2m}_{r_1+\frac{2(m-r_1)}{n+1}(n+1)}=\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}}C^{2m}_{r_1+(n+1)i}$$

同樣地，$val\{n,a_1,(m,m)\}$ 中由 $y=-x$ 格子點上的(-1)所組成的值為：

$$(-1)\cdot C^{2m}_{r_2}+(-1)\cdot C^{2m}_{r_2+(n+1)}+(-1)\cdot C^{2m}_{r_2+2(n+1)}+\ldots+(-1)\cdot C^{2m}_{r_2+\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right](n+1)}=-\sum_{i=0}^{\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]}C^{2m}_{r_2+(n+1)i}$$

將兩式合併即為 $val\{n,a_1,(m,m)\}$ 之值。我們將這個結果寫成定理三。

[定理三] $val\{n,a_1,(m,m)\}=\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]} C_{r_2+(n+1)i}^{2m}$，其中 r_1 、 r_2 分別為 m 、 $m-a_1$ 除以 n+1 的餘數。

[例 4] 欲求 $val\{5,1,(7,7)\}$？

由上述公式得：

$$\begin{matrix} a_1=1 \\ n=5 \\ m=7 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} k_1=1, r_1=1 \\ k_2=1, r_2=0 \\ k_3=1 \end{cases} \quad val\{5,1,(7,7)\}=\sum_{i=0}^{2} C_{1+6i}^{14}-\sum_{i=0}^{2} C_{6i}^{14}=C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_0^{14}-C_6^{14}-C_{12}^{14}$$

6-2 $S_{n,m}$ 的推導：

如果我們想要求 $S_{n,m}$ ，則必須將首數從 1~n 的 $val\{n,a_1,(m,m)\}$ 全部相加，請看下例 ：

[例 5] 欲求 $S_{5,7}$？ $S_{5,7}=\sum_{i=1}^{5} val\{5,i,(7,7)\}$

$$=val\{5,1,(7,7)\}+val\{5,2,(7,7)\}+val\{5,3,(7,7)\}+val\{5,4,(7,7)\}+val\{5,5,(7,7)\}$$

$$=(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_0^{14}-C_6^{14}-C_{12}^{14})+(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_5^{14}-C_{11}^{14})+(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_4^{14}-C_{10}^{14})$$

$$+(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_3^{14}-C_9^{14})+(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}-C_2^{14}-C_8^{14}-C_{14}^{14})$$

$$=5\left(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}\right)-C_0^{14}-C_2^{14}-C_3^{14}-C_4^{14}-C_5^{14}-C_6^{14}-C_8^{14}-C_9^{14}-C_{10}^{14}-C_{11}^{14}-C_{12}^{14}-C_{14}^{14}$$

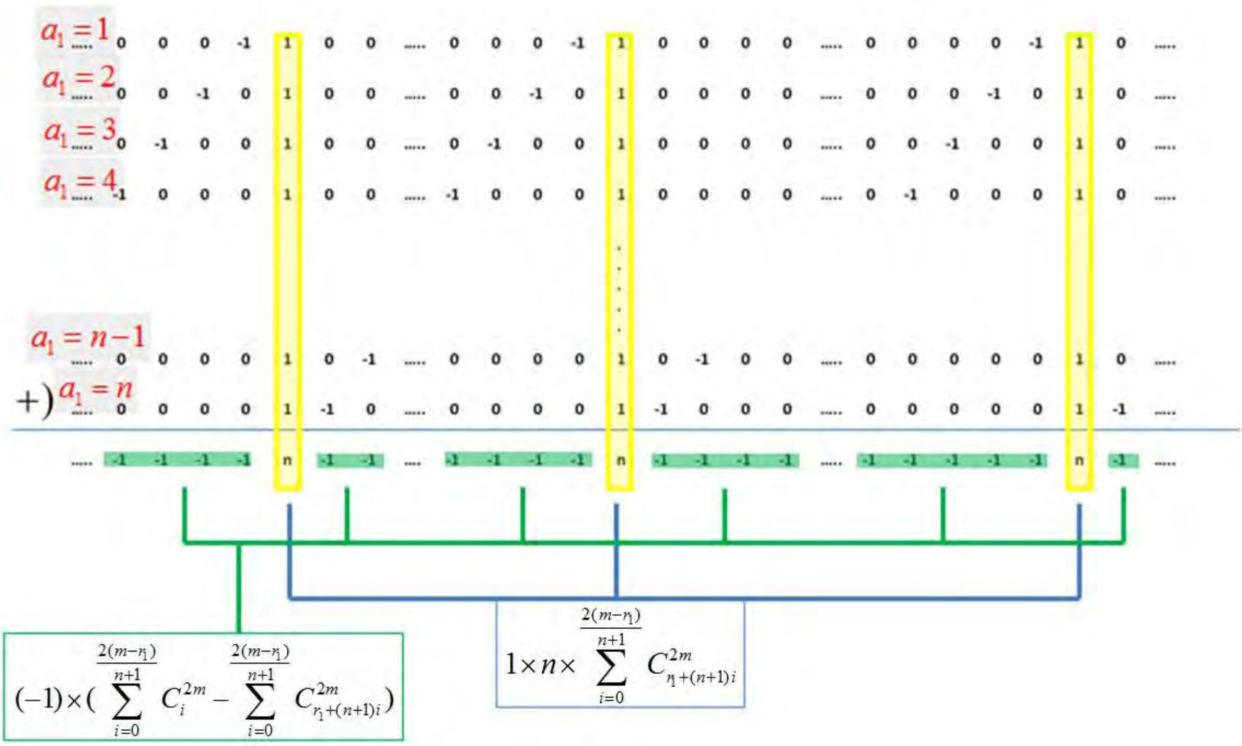
$$=5\left(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}\right)-2^{14}+\left(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}\right)=6\left(C_1^{14}+C_7^{14}+C_{13}^{14}\right)-2^{14}=20760-16384=4376$$

我們發現當我們想要求得 $S_{n,m}$ 時，可以利用二項式定理將我們的公式合併成更簡潔的形式，運用同樣的方式便可以推導出 $S_{n,m}$ 的公式，即定理四。

[定理四] $S_{n,m}=\sum_{i=0}^{n} val\{n,i,(m,m)\}=\left(n+1\right)\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-2^{2m}$

證明：

下圖表示在 $a_1=1\sim n$ 時，用 $y=-x$ 上的數搭配階差級數求和的表示法之總和，即 $S_{n,m}=\sum_{i=1}^{n} val\{n,i,(m,m)\}$，由定理二可知，在加總後的 $y=-x$ 上除了 1 所在的位置外，其餘位置上都會有一個(-1)，如下圖綠色部分，而每個 1 所在的位置上，都會有 n 個 1，如下圖黃色部分：(圖中任一橫排代表各個首數時所產生的 $y=-x$ 上的數列)



利用二項式定理合併綠色部分，將公式化簡:

$$
\text{則 } S_{n,m}=\sum_{i=1}^{n} val\{n,i,(m,m)\}=1\times n\times\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}+(-1)\times\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_i^{2m}-\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)
$$

$$
=(n+1)\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_i^{2m}=(n+1)\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-2^{2m}\text{。}\quad Q.E.D.
$$

特別的是，當 $n\geq m$ 時，由於 $r_1=m$，因此帶入公式會得到更為簡潔的結果，我們將其寫成定理五：

[定理五] ：當 $n\geq m$ 時，$S_{n,m}=(n+1)C_m^{2m}-2^{2m}$ 。

7 推廣問題

7-1 推廣問題與最初研究問題間的關係

當初的命題為「以 1,2,……,n 填入 2m 邊形的邊上，並使任相鄰的兩邊上的數差 1」，但若以廣義的角度來解讀，n 代表的即是數字範圍，因此原命題可以等價於:「以 1+p ,2+p , 3+p , …… ,n+p 填入 2m 邊形的邊上，並使任相鄰的兩邊上的數差 1」。

同樣地，任相鄰的兩邊差 1 若以廣義的角度來解讀，1 代表的則是等差數列中的公差，因此原命題又可等價於：「以 $p+\Delta, p+2\Delta, p+3\Delta,\cdots, p+n\Delta$ 填入 2m 邊形的邊上，並使任相鄰的兩邊上的數都差 Δ 」。

7-2 以具體例子說明：

若用 1,2,3,……,n 填入 2m 邊形的邊上，特別的是任兩邊上的數改為相差 2，此時必須要考慮 n 的奇偶性，其方法數可以用下表表示：

(1) 當 n 為奇數時，即 $n=2t-1$

a_1	實際用到的數字	等價於(相差為一的情形)
$a_1=1$	1,3,5,…,2t-1	$a_1=1$ 時，用 1,2,3,…,t 填入 2m 邊形的邊上
$a_1=2$	2,4,6,…,2t-2	$a_1=1$ 時，用 1,2,…,t-1 填入 2m 邊形的邊上
	…	
$a_1=2t-2$	2,4,6,…,2t-2	$a_1=t-1$ 時，用 1,2,…,t-1 填入 2m 邊形的邊上
$a_1=2t-1$	1,3,5,…,2t-1	$a_1=t$ 時，用 1,2,3,…,t 填入 2m 邊形的邊上

$S_{t,m}$

$S_{t-1,m}$

故所求即為 $S_{t-1,m}+S_{t,m}$ 。

(2) 當 n 為偶數時，即 $n=2t$

a_1	實際用到的數字	等價於(相差為一的情形)
$a_1=1$	1,3,5,…,2t-1	$a_1=1$ 時，用 1,2,3,…,t 填入 2m 邊形的邊上
$a_1=2$	2,4,6,…,2t	$a_1=1$ 時，用 1,2,…,t 填入 2m 邊形的邊上
	…	
$a_1=2t-1$	1,3,5,…,2t-1	$a_1=t-1$ 時，用 1,2,…,t 填入 2m 邊形的邊上
$a_1=2t$	2,4,6,…,2t	$a_1=t$ 時，用 1,2,3,…,t 填入 2m 邊形的邊上

$S_{t,m}$

$S_{t,m}$

故所求即為 $S_{t,m}+S_{t,m}=2S_{t,m}$ 。

7-3 推廣後的問題之方法數：

我們將問題推廣為「在多邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2m}$ ($2m$ 邊形)的每一邊上各自填入一個 1~n 中的正整數，且相鄰邊上的數都必須相差Δ，求填數字的方法數。」而我們發現可以將此命題轉變成原來的命題(相鄰邊上的數都必須相差 1)，由於我們已知原本命題$S_{n,m}$之公式，所以我們便嘗試以$S_{n,m}$來表示推廣後問題的解。

觀察 7-3 例子的規律會發現，假設填入的數字為$\{v_1,v_2,v_3,......,v_t\}$，其中$v_{i+1}-v_i=\Delta$，且第一邊上填入的數為$v_j$，則此推廣問題會等價於最初研究問題$a_1=j$的情形$(1\le j\le t)$。因此，我們可以此方法寫出推廣問題方法數的一般公式：

[定理六] 在 $2m$ 邊形的每一邊上填入 1~n 中的一個正整數，且相鄰邊上的數必須相差Δ，其中$n=\Delta\cdot t+u$時，則填入的方法數為$u\cdot S_{(t+1),m}+(\Delta-u)\cdot S_{t,m}$。

證明：

(1) 先用Δ將 1,2,……,n 分成Δ類，定義集合$Q_k=\{i\,|\,1\le i\le n\ ,i\equiv k \bmod q\}$,$k=1,2,......,\Delta$，

令$|Q_k|$表示Q_k中的元素個數。若$u\ne 0$則$|Q_k|=\begin{cases} t+1, 當 1\le k\le u \\ t, 當 (u+1)\le k\le\Delta \end{cases}$；若$u=0$，則

$|Q_k|=t$，$\forall k=1,2,......,\Delta$。

(2) 若相異兩數j、j'同屬於某個Q_{k_0}，則當$a_1=j$或$a_1=j'$時，可填入的數字集合均為Q_{k_0}。

(3) 若將Q_k中的元素由小而大排列，則j在Q_k中是第$(\frac{j-k}{\Delta}+1)$個。

(4) 若$a_1=j$，則填入的方法數等價於最初的研究問題「在 $2m$ 邊形的每一邊上填入$1\sim|Q_k|$中的一個正整數，且相鄰邊上的數必須差 1」中$a_1=(\frac{j-k}{\Delta}+1)$的方法數，即為

$val\left\{|Q_k|,(\frac{j-k}{\Delta}+1),(m,m)\right\}$。

(5) 令$j_1\le j_2\le......\le j_{|Q_k|}$是$|Q_k|$中所有元素，則$\sum_{i=1}^{|Q_k|}val\left\{|Q_k|,(\frac{j_i-k}{\Delta}+1),(m,m)\right\}=S_{|Q_k|,m}$。

(6) 全部的方法數為：

$$\sum_{k=1}^{\Delta}\sum_{i=1}^{|Q_k|} val\left\{|Q_k|,(\frac{j_i-k}{\Delta}+1),(m,m)\right\}=\sum_{k=1}^{\Delta}S_{|Q_k|,m}=\sum_{k=1}^{u}S_{|Q_k|,m}+\sum_{k=u+1}^{\Delta}S_{|Q_k|,m}=u\cdot S_{(t+1),m}+(\Delta-u)\cdot S_{t,m}$$

Q.E.D.

8 當給定 n 時，求 $S_{n,m}$ 之生成函數

8-1. 由定理五知，當 $n\geq m$ 時， $S_{n,m}=(n+1)C_m^{2m}-2^{2m}$ 具有十分簡潔的形式，所以我們先找出 $(n+1)C_m^{2m}-2^{2m}$ 的生成函數，即找出 $F(x)$ 使 $F(x)=\sum_{k\geq 0}\left((n+1)C_k^{2k}-2^{2k}\right)x^k$ 。又定理五的適用範圍為 $n\geq m$ ，且 m 至少為 2 才會構成多邊形，再求出的 $F(x)$ 各項中，只有在 $x^2\sim x^n$ 符合我們需要的，其餘各項皆予以忽視。為了求得 $F(x)$ ，我們分為以下三個步驟：

(1) 考慮生成函數 $f(x)=\sum_{k\geq 0}A_kx^k=\sum_{k\geq 0}C_k^{2k}x^k$ ，其中

$$A_k=C_k^{2k}=\frac{(2k)!}{k!k!}=\frac{2k(2k-1)}{k^2}C_{k-1}^{2k-2}=\frac{4k-2}{k}A_{k-1}$$

得到遞迴關係 $kA_k=(4k-2)A_{k-1}$ ，比較 x^{k-1} 的係數，可以得到：

$$f'(x)=4\left(xf(x)\right)'-2f(x)=4xf'(x)+2f(x)$$

$$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{1-4x}=-\frac{1}{2}\left(\ln f(1-4x)\right)'$$

加上 $f(0)=C_0^0=1$ ，我們得到生成函數 $f(x)=\sum_{m\geq 0}C_m^{2m}x^m=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ 。

(2) 考慮另一生成函數 $g(x)=\sum_{m\geq 0}2^{2m}x^m$，並利用無窮級數公式得 $g(x)=\sum_{m\geq 0}2^{2m}x^m=\frac{1}{1-4x}$ 。

(3) 由(1)、(2) 得 $F(x)=(n+1)f(x)-g(x)=\frac{n+1}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$ 。

[定理七] 給定 n，當 $n\geq m$ 時，$S_{n,m}$ 即 $F(x)$ 中 $x^2\sim x^n$ 的 x^m 項係數，其中 $F(x)=\frac{n+1}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$ 。

8-2. 在 8-1 中已求得限制條件 $n \geq m$ 下的生成函數 $F(x)$，然而，其並非 $S_{n,m}$ 的生成函數的全貌，而且僅特定幾項符合 $S_{n,m}$ 。以下將探討將 $F(x)$ 一般化後的情形。從我們的研究結果可以得知 $S_{n,m} = (n+1) \sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m} - 2^{2m}$ ，接下來為了方便求得生成函數，令 $q = n+1$ 。將 $m=1, m=2, m=3 \ldots$ 帶入 $S_{n,m}$ 的公式中，列出下表：

$m=$	$q\times$	$\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}$	-2^{2m}
$m=1$		C_1^2	-4
$m=2$		C_2^4	-4^2
$m=3$		C_3^6	-4^3
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$m=q$		$C_0^{2q}+C_q^{2q}+C_{2q}^{2q}$	-4^q
$m=q+1$		$C_1^{2q+2}+C_{q+1}^{2q+2}+C_{2q+1}^{2q+2}$	-4^{q+1}
$m=q+2$	$q\times$	$C_2^{2q+4}+C_{q+2}^{2q+4}+C_{2q+2}^{2q+4}$	-4^{q+2}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$m=2q$		$C_0^{4q}+C_q^{4q}+C_{2q}^{4q}+C_{3q}^{4q}+C_{4q}^{4q}$	-4^{2q}
$m=2q+1$		$C_1^{4q+2}+C_{q+1}^{4q+2}+C_{2q+1}^{4q+2}+C_{3q+1}^{4q+2}+C_{4q+1}^{4q+2}$	-4^{2q+1}
$m=2q+2$		$C_2^{4q+4}+C_{q+2}^{4q+4}+C_{2q+2}^{4q+4}+C_{3q+2}^{4q+4}+C_{4q+2}^{4q+4}$	-4^{2q+2}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$m=3q$		$C_0^{6q}+C_q^{6q}+C_{2q}^{6q}+C_{3q}^{6q}+C_{4q}^{6q}+C_{5q}^{6q}+C_{6q}^{6q}$	-4^{3q}

由上表可以得知在 $\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}$ 中，中間項(若只有一項，該項即為中間項)就是中央二項式係數(C_m^{2m})，我們稱中間項所形成的數列為「中央數列」。我們可以仿照中央數列的構造方式，將每個中間項左側第 p 個數(若無則不計)，形成一個新的數列，稱為「第 p 行數列」。由於中間項兩側的數會對稱於中間項，所以每個中間項右側第 p 個數(若無則不計)所形成的數列，亦為「第 p 行數列」。「第 p 行數列」數列的一般項為 C_t^{2t+2pq}， $t=0,1,2,\cdots$。

8-3. 化橫為直

有了中央數列及第 p 行數列，便可以開始推導 $S_{n,m}$ 的生成函數 $F(x)=\sum_k S_{n,k}x^k$。由於在本研究中，$m\geq 2$，所以 $S_{n,1}$ 並不符合本研究的情形，但為了推導生成函數，必須給 $S_{n,1}$ 一個值，就利用定理五的公式 $S_{n,m}=(n+1)C_m^{2m}-2^{2m}$，定 $S_{n,1}=(n+1)C_1^2-2^2=2n-2$。因此，

$$F(x)=\sum_k S_{n,k}x^k=\sum_k\left((n+1)\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-2^{2k}\right)x^k=(n+1)\sum_k\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)x^k-\sum_k\left(2^{2k}\right)x^k$$ 其中的 $\sum_k\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)x^k$ 便是上表中的第 3 行 $\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}$ 配上對應 x^k 的結果。

直觀來看 $\sum_k\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)x^k$，就是依序把表中第 3 行的每一橫列加起來，再配上對應的 $x^1,x^2,x^3,\cdots$ 後求和。然而，接下來我們將化橫為直，利用中央數列與第 p 行數列來表示 $\sum_k\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)x^k$。

把第 p 行數列的每一項 C_t^{2t+2pq}， $t=0,1,2,\cdots$ 配上對應的 x^{pq}，得到第 p 行數列的生成函數為：

$$C_0^{2pq}x^{pq}+C_1^{2+2pq}x^{pq+1}+C_2^{4+2pq}x^{pq+2}+C_3^{6+2pq}x^{pq+3}+\cdots=\sum_k C_k^{2k+2pq}x^{pq+k},$$

為了計算方便，我們定義生成函數為從常數項展開的形式，恰巧得到第 p 行數列的生成

函數的首項為 x^{pq}，因此我們便令在已知 q 的前提下，在第 p 行上的數列生成函數為 $x^{pq}\cdot f_{p,q}(x)$

於是

$$f_{p,q}(x)=C_0^{2pq}+C_1^{2+2pq}x^1+C_2^{4+2pq}x^2+C_3^{6+2pq}x^3+\cdots=\sum_i C_i^{2i+2pq}x^i$$

而 $\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}$ 是利用 p 行上的數列，以及中央組合數所構成，但須考慮 p 行上的數列位於中央組合數的兩側，而左右兩項數列的值相同，因此在列出生成函數時，$x^{pq}\cdot f_{p,q}(x)$ 必須乘以二，但中央組合數只有一列，因此必須扣回一次中央組合數的生成函數

而在參考資料 5.中，有前人發現了以下的生成函數: $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{2n+k}x^n$

因此我們將 k 替換成 $2pq$，便可以得到 $S_{n,m}$ 的生成函數 ：

$$F(x)=\sum_k S_{n,k}x^k=2(n+1)\left(\sum_k\left(\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}} C_{r_1+(n+1)i}^{2m}\right)x^k\right)-\sum_k C_k^{2k}x^k-\sum_k\left(2^{2k}\right)x^k$$

$$=2(n+1)\sum_{p=0}\left(f_{p,q}(x)\cdot x^{pq}\right)x^k-(n+1)\sum_k C_k^{2k}x^k-\sum_k\left(4^k\right)x^k=2(n+1)\sum_{p=0}\left(\sum_i C_i^{2i+2pq}\cdot x^i\cdot x^{pq}\right)-(n+1)\sum_k C_k^{2k}x^k-\sum_k\left(4^k\right)x^k$$

$$=2(n+1)\sum_{p=0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2pq}\cdot x^{pq}\right)-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

而其中 $\sum_{p=0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2pq}\cdot x^{pq}\right)$ 為一無窮等比級數，其公比為: $\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2pq}\cdot x^{pq}$

而且當 0<x<0.25 時，此公比小於一，因此可以利用無無窮等比級數求和公式作進一步化簡 ：

$$F(x)=2(n+1)\sum_{p=0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2pq}\cdot x^{pq}\right)-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}}\sum_{p=0}\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2pq}\cdot x^{pq}\right)-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

$$=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}}\sum_{p=0}\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^{2q}x^q\right)^p-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}}\sum_{p=0}\left(\left(\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^q\right)^p-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

$$=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^q\right)}-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}\left(1-\left(\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^q\right)}-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

[定理八] 在已知 q 的前提下($q=n+1$)，$S_{n,m}$ 的生成函數 $F(x)$ 為 ：

$$F(x)=\sum_k S_{n,k}x^k=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}\left(1-\left(\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^q\right)}-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

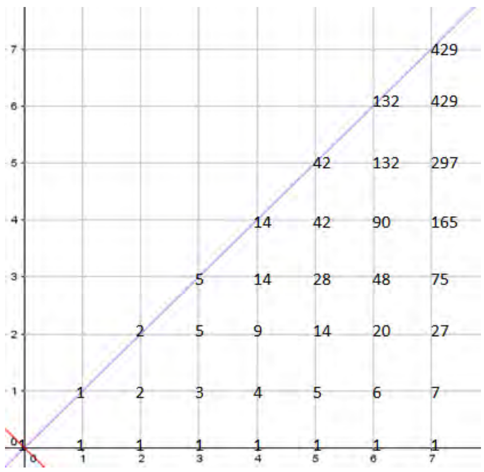
9 插曲：與 Catalan numbers 的關係

9-1 Catalan numbers：

Catalan numbers 是組合數學中一個常在各種計數問題中出現的數列，以比利時的數學家 Eugène Charles Catalan（1814–1894）命名。$C_0=1$ 前 10 項為：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796….，一般式為 ： $C_m=\frac{1}{m+1}C_m^{2m}=\frac{2m!}{m!(m+1)!}$ 。

9-2 Catalan’s triangle：

在坐標平面上定義一填數字方法：在正 x 軸的格子點上填入 1，以直線 $y=x$ 為分界線，定義 $y>x$ 上的格子點為 0，並依「加法原理」(左邊+下面)，則在坐標平面上所填出的數字會排成三角形，此三角形即稱為 Catalan’s triangle，見右圖：



特別的是，在 Catalan’s triangle 上， $y=x$ 所構成的數列正好就是 Catalan numbers 的數列，在 (m,m) 上的數字即代表 nth Catalan numbers， C_m 。

9-3 將 Catalan triangle 對應到研究內容

由於 Catalan triangle 只存在一個邊界，而且 Catalan numbers 正好出現在 $y=x$ 上，因此可以將此對應到我們的研究。由 Catalan triangle 的性質可知它不存在我們研究中所定義的「下界」，所以我們可視下界在「無窮遠處」，也就是當 $a_1=1$ 、 $n\to\infty$ 時所畫出的圖形（詳見附錄 2）。我們可以利用定理三 $val\{n,a_1,(m,m)\}=\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}}C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]}C_{r_2+(n+1)i}^{2m}$ ，其

中 r_1 、 r_2 分別為 m 、 $m-a_1$ 除以 n+1 的餘數，推導出 Catalan numbers 的一般項。

在定理三中，當 $n\to\infty$ 時， $r_1=m$ 、 $r_2=m-a_1$ ，再把 $a_1=1$ 代入，得

$$val\{n,1,(m,m)\}=\sum_{i=0}^{0}C_{m+(n+1)i}^{2m}-\sum_{i=0}^{k_2+k_3}C_{(m-1)+(n+1)i}^{2m}=C_m^{2m}-C_{m-1}^{2m}=\frac{2m!}{m!m!}-\frac{2m!}{(m+1)!(m-1)!}$$

$$=C_m^{2m}\times\frac{1}{m+1}=C_m$$

[定理九] $C_m=\lim_{n\to\infty}val\{n,1,(m,m)\}$ ， C_m 為 Catalan numbers 中的第 m 項。

陸、 結論

本研究以新的角度詮釋了最初的排列組合問題——將原題目轉變為捷徑走法、計算其路徑總數，然後將路徑數計算的方式（即加法原理），擴大至整個半平面（含直線 $y=-x$ 及其右半平面），並搭配巴斯卡三角形中的組合數列、階差級數，成功地推導、證明此問題方法數的公式（定理二、三、四、五）。

接著本研究將原題延伸，推廣至討論任相鄰兩邊上的數之差為固定某一正整數的情形，也成功地推導、證明其方法數公式（定理六）。最後，推得了在給定 n 的條件下，填數字方法數的生成函數（定理七、八），並證明可用本研究的成果，求得 Catalan numbers 的一般項（定理九）。以下是本研究最重要的成果：

[定理三]： $val\{n,a_1,(m,m)\}=\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}}C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{2(m-r_2)}{n+1}\right]}C_{r_2+(n+1)i}^{2m}$ ，其中 r_1 、 r_2 分別為 m 、 $m-a_1$ 除以 n+1 的餘數。

[定理四]： $S_{n,m}=\sum_{i=0}^{n}val\{n,i,(m,m)\}=(n+1)\sum_{i=0}^{\frac{2(m-r_1)}{n+1}}C_{r_1+(n+1)i}^{2m}-2^{2m}$ 。

[定理五]：當 $n\geq m$ 時， $S_{n,m}=(n+1)C_m^{2m}-2^{2m}$ 。

[定理六]： 在 $2m$ 邊形的每一邊上填入 1~n 中的一個正整數，且相鄰邊上的數必須相差 Δ ，其中 $n=\Delta\cdot t+u$ 時，則填入的方法數為 $u\cdot S_{(t+1),m}+(\Delta-u)\cdot S_{t,m}$ 。

[定理七] ：給定n，當$n \ge m$時，$S_{n,m}$即$F(x)=\dfrac{n+1}{\sqrt{1-4x}}-\dfrac{1}{1-4x}$中$x^2 \sim x^n$的$x^m$項係數。

[定理八] ：在已知q的前提下(q=n+1)，$S_{n,m}$的生成函數$F(x)$為：

$$F(x)=\sum_k S_{n,k}x^k=\frac{2(n+1)}{\sqrt{1-4x}\left(1-\left(\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^q\right)}-\frac{(n+1)}{\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{1-4x}$$

[定理九]：$C_m=\lim_{n\to\infty} val\{n,1,(m,m)\}$，$C_m$為 Catalan numbers 中的第$m$項。

柒、 未來展望

在研究的過程中，我們所求得的方法數是建立在$2q$邊形不能旋轉亦不能鏡射的限制下，若將此限制移除，那麼方法數將會大幅減少，是未來可以繼續努力研究的方向。

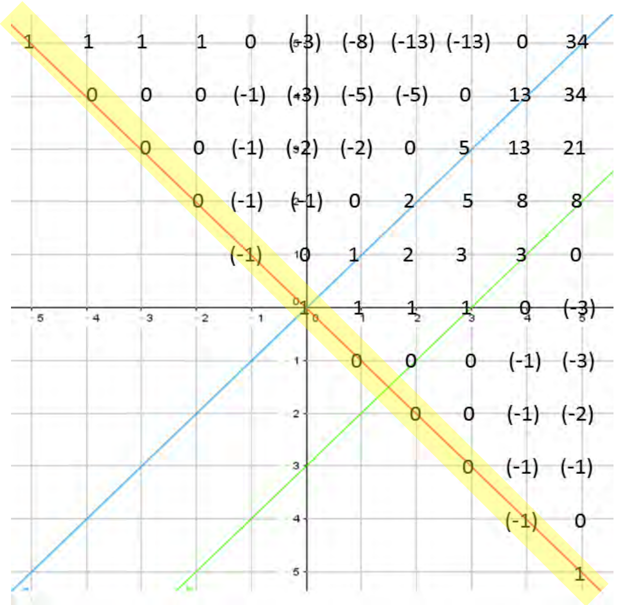
捌、 參考資料

1. A068551•*OEIS 整數數列線上大全*•取自 https://oeis.org/A068551。
2. A274878•*OEIS 整數數列線上大全*•取自 https://oeis.org/A274878。
3. 林晉宏(2011)，〈一般性 Catalan 數的組合意義及其用〉，《數學傳播》 第 35 卷第 1 期，頁 36-50。
4. 林延輯(2011) ，〈組合恆等式的$\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=4^n$兩個證明〉，《數學傳播》 第 38 卷第 1 期，頁 30-35。
5. Generating function for binomial coefficients $\binom{2n+k}{n}$ with fixed k • *MATHEMATICS* • 取自 https://math.stackexchange.com/questions/237810/generating-function-for-binomial-coefficients-binom2nkn-with-fixed-k

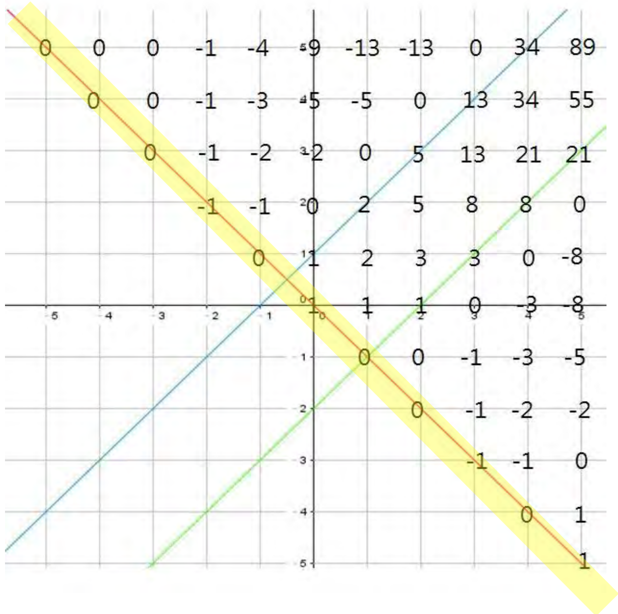
附錄 1

當 n=4 時，在坐標平面上之填數情形：

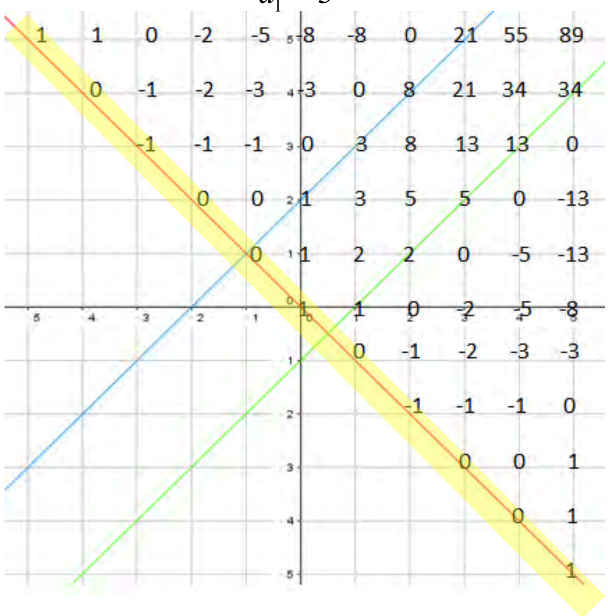
$a_1=1$



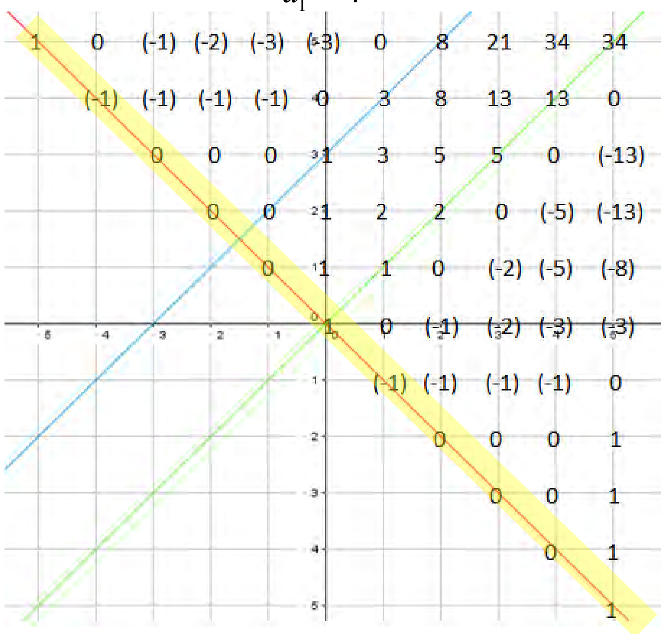
$a_1=2$



$a_1=3$



$a_1=4$



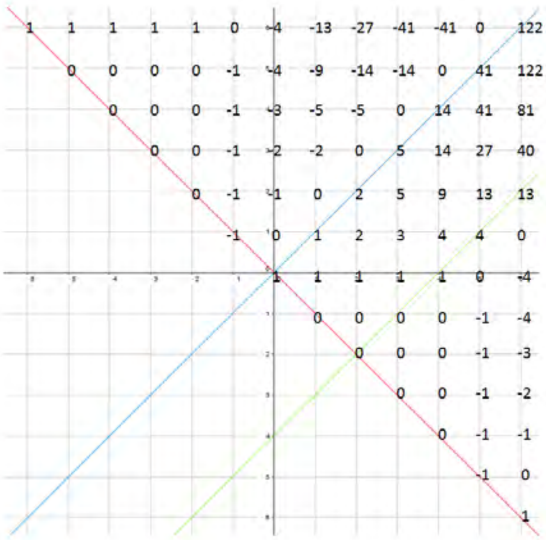
在直線 $y=-x$ 格子點上的數列，由左上至右下

$a_1=1$ 時，$\{......1,0,0,0,(-1),1,0,0,0,(-1),1......\}$；$a_1=2$ 時，$\{......1,0,0,(-1),0,1,0,0,(-1),0,1......\}$；

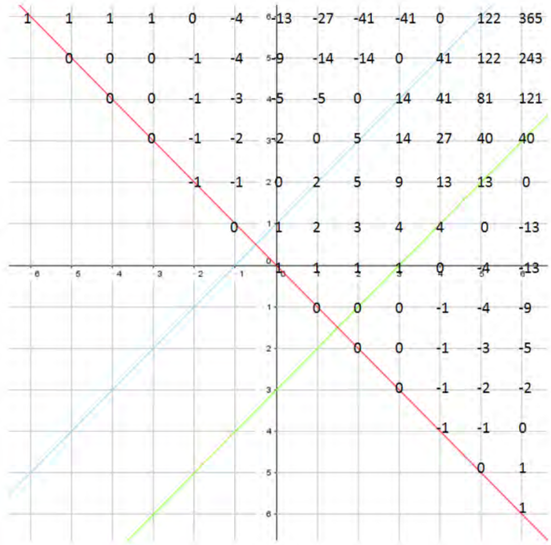
$a_1=3$ 時，$\{......1,0,(-1),0,0,1,0,(-1),0,0,1......\}$；$a_1=4$ 時，$\{......1,(-1),0,0,0,1,(-1),0,0,0,1......\}$。

當 n=5 時，在坐標平面上之填數情形：

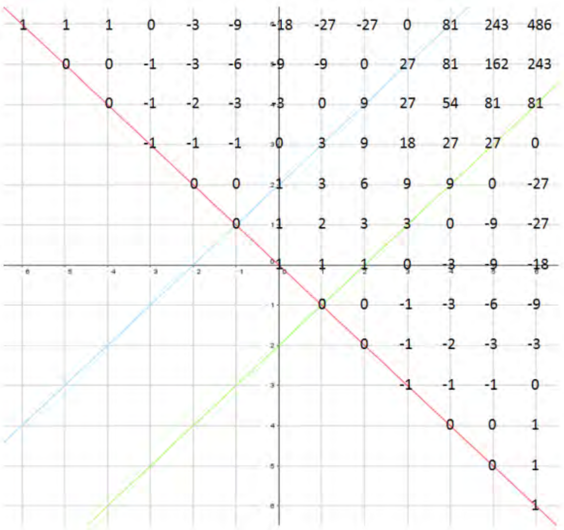
$a_1 = 1$



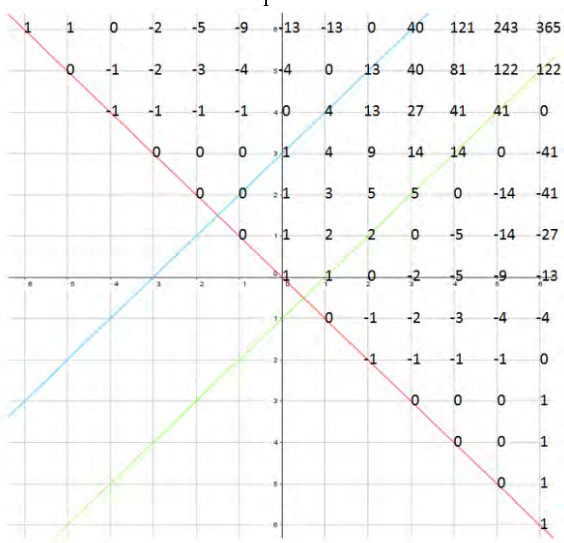
$a_1 = 2$



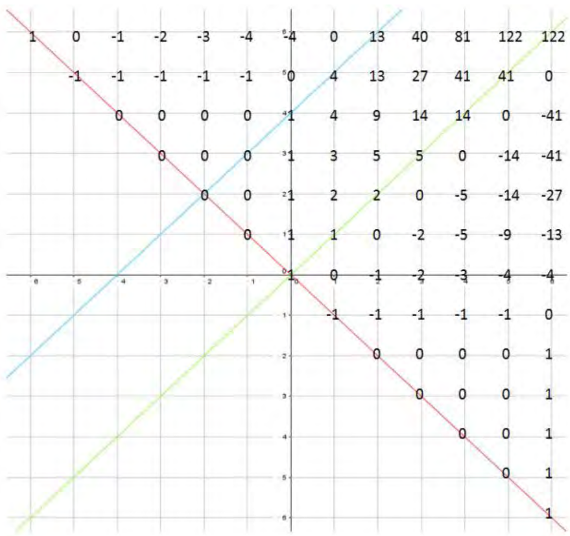
$a_1 = 3$



$a_1 = 4$



$a_1 = 5$



在直線 $y = -x$ 格子點上的數列，由左上至右下：

$a_1 = 1$ 時，$\{......1,0,0,0,0,(-1),1,0,0,0,0,(-1),1......\}$

$a_1 = 2$ 時，$\{......1,0,0,0,(-1),0,1,0,0,0,(-1),0,1......\}$

$a_1 = 3$ 時，$\{......1,0,0,(-1),0,0,1,0,0,(-1),0,0,1......\}$

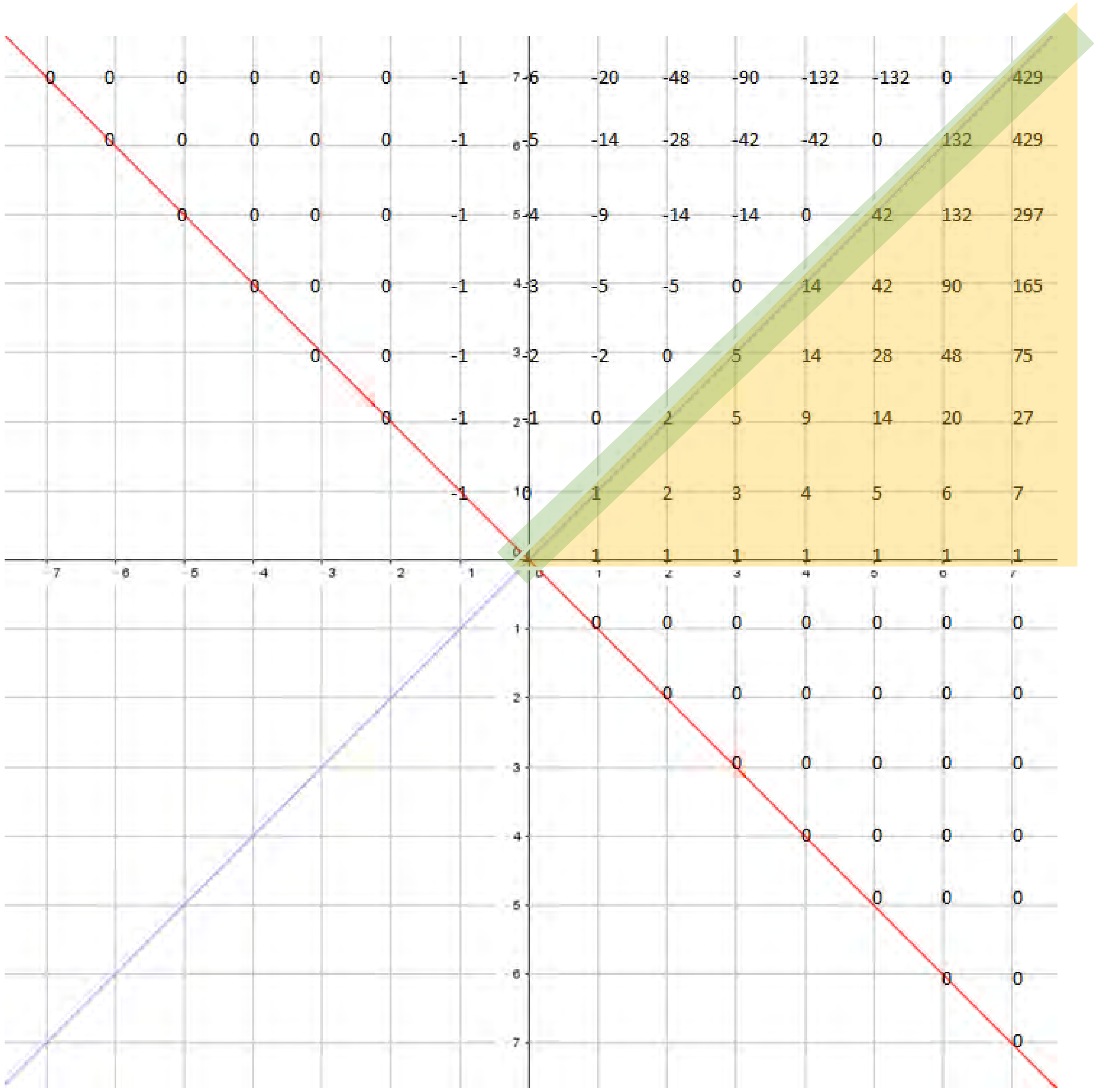
$a_1 = 4$ 時，$\{......1,0,(-1),0,0,0,1,0,(-1),0,0,0,1......\}$

$a_1 = 5$ 時，$\{......1,(-1),0,0,0,0,1,(-1),0,0,0,0,1......\}$

附錄 2

當 $a_1 = 1$、$n \to \infty$ 時所畫出的圖形(反黃部分為 Catalan triangle)

(綠色部分為 Catalan numbers)



【評語】010005

這篇論文研究的問題是︰在任意多邊形上填入特定範圍的正整數，使得相鄰兩邊上所填入數字的差是 1，目標是要求符合這種條件的填數方法數。

論文的解題方法是，把題目轉換成平面上某個區域內的路徑問題，搭配巴斯卡三角形中的組合數列，推導並證明出此問題方法數的公式。論文接著將問題延伸，推廣至討論任相鄰兩邊上的數之差為固定某一正整數的情形，也推導並證明出其方法數公式。最後，論文並討論原題目方法數的生成函數，求得特殊情形下的生成函數。

整體來說，這篇論文有一定的成熟度，得到的結果有其趣味性。還有改進空間的地方是其撰寫格式，舉例如下。

(1)小節的劃分可以再更有結構一點。