2018 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010004

參展科別　數學

作品名稱　費馬多邊形數定理之延伸探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

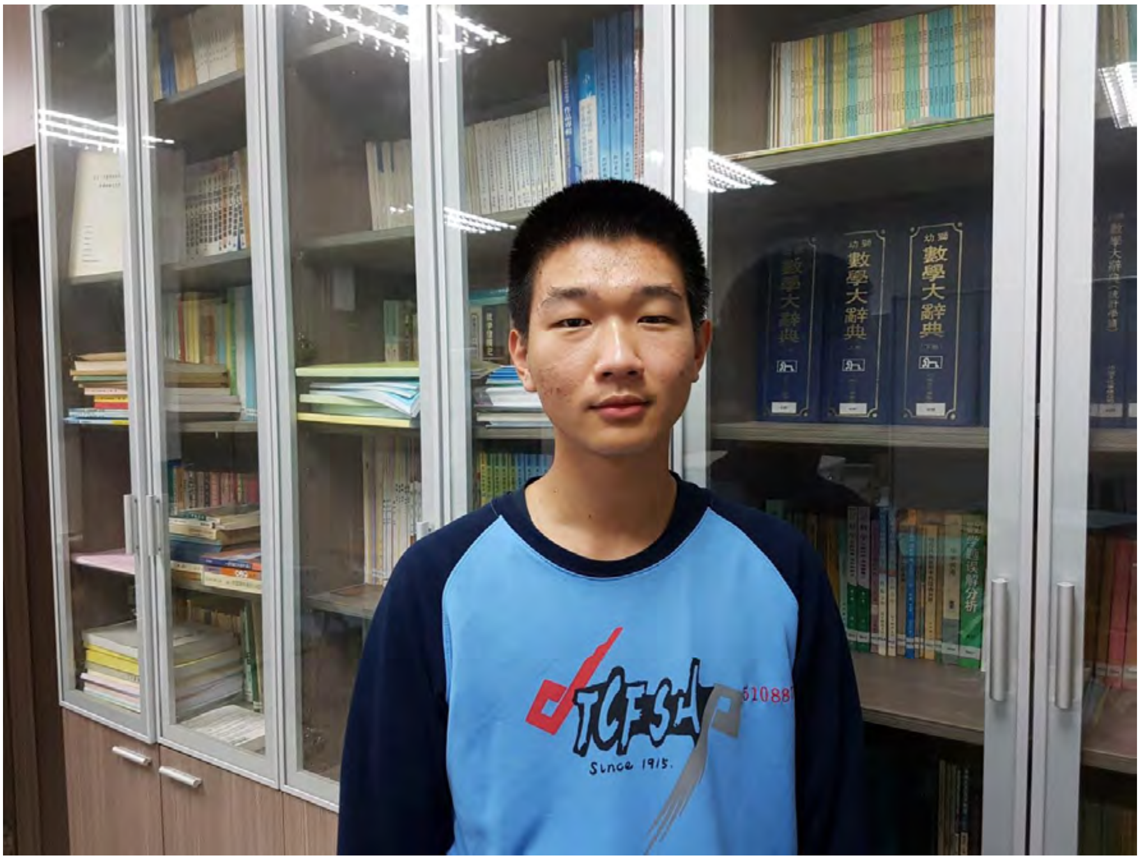
就讀學校　臺中市立臺中第一高級中學

指導教師　蔡政樺

作者姓名　廖松毅

關鍵詞　費馬多邊形數定理、二階差數列、
四平方和定理

作者簡介



我是廖松毅，目前就讀於臺中市立臺中第一高級中學科學班二年級。

我平時喜歡看歷史小說、美國職棒，當然，最喜歡的事還是閱讀數學新知，藉由廣泛的閱讀新知來獲取研究的靈感。偶然之間，我讀到了陶哲軒的科普著作，因而展開了這一段與費馬多邊形數定理的美麗邂逅。

在這次研究費馬多邊形數定理的過程中，我感受到了自己對於數學研究的熱忱，同時也更加確立了人生目標，持續地朝向成為純理論數學家之路前進。

摘要

本研究旨在研究費馬多邊形數定理(任意非負整數必可表成 k 個 k 邊形數的和)的一般化情況，也就是說，任意非負整數是否能表成給定的二次多項式數列中所選取的γ項和。以數學模型敘述，就是探討對一個已知的二次多項式an^2+bn+c，是否可找到一正整數γ，滿足$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\gamma,$使得$x=\sum_{i=1}^{\gamma}(a{\alpha_i}^2+b\alpha_i+c)$。

本作品主要探討若此探究模型存在，那麼數列$\langle a_n\rangle$的一般式an^2+bn+c與γ值之間會存在什麼關係，並期望能運用一個簡潔明瞭又一般化的數學式表示。本文亦提供另一個數學模型，探討γ值與某些特殊係數 a,b,c 之間的關聯性。而本文探尋$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1,a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},a+b\equiv 0(mod\ 2)$(此為本文主要探討的二次式)，求得此二次式所對應之γ值的方法為先令$p=\frac{2a}{a+b}+2$，再藉由所建立的模型二，求出$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值，接著再用所建立的模型一來求得$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的$\gamma$值，進而依循此方法最後得出任意形如$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的二次式之$\gamma$值。

Abstract

This study aims to study the generalization of Fermat polygonal number theorem, which said every non-negative integer is a sum of at most *n* *n*-gonal numbers. That is to say that I study whether every non-negative integer is expressed as a sum of at most γ numbers which can be found in a quadratic polynomial sequence that is given with some coefficients. Describing by the mathematical model, that means discussing a given quadratic polynomial an^2+bn+c, whether I can find a positive integer γ which satisfies $\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\gamma,$ such that $x=\sum_{i=1}^{\gamma}(a{\alpha_i}^2+b\alpha_i+c)$.

This study mainly discusses if the model exists, I would explore the relationship between an^2+bn+c and the value of γ, and I hope to use a clear and general mathematical formula in order to show the relationship. This study also provides another mathematical model to find the relevance between γ and some special values of coefficients a, b, c. This article mainly investigates $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$ where a, b satisfy $a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},a+b\equiv 0(mod\ 2)$. The way to find the γ value is that letting $p=\frac{2a}{a+b}+2$ firstly. Then by Model 2 in this study, we can find the value γ of $\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$. By Model 1 in this study and the value γ of $\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$, we can solve the value γ of $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$. Therefore, we would find the value γ of any quadratic polynomial $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$.

壹、前言

一、研究動機

起初我無意間在一本書:<**陶哲軒教你聰明解數學**>中看到了**四平方和定理**，這定理勾起了我莫大的好奇心，於是我幾乎花了整整兩個禮拜的時間，想要嘗試證明此定理，無奈卻是徒勞無功，於是我便上網找了這一定理的證明，在看完證明後，這真是令我感到嘆為觀止，但維基百科告訴了我一個更加驚人的事實：這麼美麗的定理居然不過是**費馬多邊形數定理**的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定理後，我又對於數學之美有了更深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續推廣下去。也就是說，我們所討論的數列通式不再是$\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$，而是$an^2+bn+c$，本文便是要探討在數列$an^2+bn+c$中至少選取多少個數方能保證它們的和可組成任意非負整數。

二、研究目的

本研究主要是針對於給定二次多項式$f(n)=an^2+bn+c$，其中將n依序帶入所有非負整數可得一數列$\langle a_n\rangle$，並規定$a_{-1}=0$，則對於任何非負整數x，存在一個最小正整數γ使得：$x=\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}$(其中指標$\alpha_i$為一般式型如$an^2+bn+c$之數列$\langle a_n\rangle$中的第$\alpha_i$項)

（一）建構一個數學模型，以利延伸推廣相關問題之探究。

（二）運用所建構的數學模型，尋找出一些可應用的數學定理。

（三）運用上述定理，找出$\boldsymbol{\gamma}$與$\boldsymbol{a,b,c}$的關係式。

貳、研究方法或過程

一、前人的研究成果

（一）四平方和定理：

任意非負整數必可表成四個完全平方數的和。(證明詳見參考文獻 1)

（二）費馬多邊形數定理：

任意非負整數必可表成k個k邊形數的和。(證明詳見參考文獻 2)

二、名詞定義

（一）泛費馬二次式數列及其指標值:

對於給定二次多項式$f(n)$，將n從 0、1、2⋯依序代入，並規定$a_{-1}=0$，得一數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，若存在一最小正整數$\gamma$，使得任意一個非負整數皆能表成此數列中所選取的$\gamma$項之和，則稱此二次式$f(n)$為**泛費馬二次式**，而數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$為「**泛費馬二次式數列**」，此時並稱$\gamma$值為泛費馬二次式$f(n)$的「**指標值**」，

用符號「$\gamma=order(f(n))$」表示。

換句話說，若二次式$f(n)$為泛費馬二次式，且$a_n=f(n),\forall n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$，

並規定$a_{-1}=0$，使得數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$為泛費馬二次式數列，則存在一個最小正整數$\gamma$，

使得$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_\gamma\in\{-1,0\}\cup\mathbb{N}$, 滿足$x=\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}$。

（二）泛費馬二次式函數A：

若對於每一個泛費馬二次式$f(n)$，都存在一個泛費馬二次式$f(n)$的「指標值」，使得泛費馬二次式數列存在，我們稱如此泛費馬二次式$f(n)$與γ值的對應關係為**泛費馬二次式函數**，用符號「$\gamma=A(f(n))$」表示。

（三）泛費馬二次式函數A之定義域：

本研究欲建構一個泛費馬二次式函數A，探討任意非負整數是否能表成給定數列中所選取的γ項之和，因此，我們有需要將其定義域及值域作深入的論述與探究。根據泛費馬二次式函數A之定義，可知其定義域為某些特定的二次式(在本研究中，主要探討的是以下所說的狹義定義域)，而值域為正整數。

1. **狹義定義域**：

給定二次式$f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，

其中係數$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},1\right)$滿足$a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z}$ 且$a+b\equiv 0(mod\ 2)$之條件時，

我們稱$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$滿足泛費馬二次式函數A的狹義定義域。

2. **廣義定義域：**

給定二次式$f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$，其中係數$(\frac{a}{2},\frac{b}{2},c)$同時滿足下列三個條件時，

我們稱$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$滿足泛費馬二次式函數A的廣義定義域。

(1) $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(2) 存在一個非負整數n, 使得 $\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + c = 1.$

(3) $a + b \equiv 0 (mod\ 2)$

三、預備性質

（一）若a, b為正奇數，且$b^2 < 4a, b^2 + 2b + 4 > 3a$，

則$\exists s, t, u, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 使得$\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$

【證明】

因為a, b為正奇數$\Rightarrow 4a - b^2 \equiv 3 (mod\ 8)$，藉由費馬多邊形數定理中，

高斯所證出的$n = 3$時的特例可知：存在三正奇數$x \geq y \geq z$，

滿足$4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2$

又因為b, x, y, z皆為奇數$\Rightarrow b + x + y + z, b + x + y - z$兩數中必有一數為 4 的倍數

1. 假設$b + x + y + z \equiv 0 (mod\ 4)$

則令$\begin{cases} s = \frac{b+x+y+z}{4} \\ t = \frac{b+x-y-z}{4} \\ u = \frac{b-x+y-z}{4} \\ v = \frac{b-x-y+z}{4} \end{cases}$

2. 假設$b + x + y - z \equiv 0 (mod\ 4)$

則令$\begin{cases} s = \frac{b+x+y-z}{4} \\ t = \frac{b+x-y+z}{4} \\ u = \frac{b-x+y+z}{4} \\ v = \frac{b-x-y-z}{4} \end{cases}$

即可滿足$\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$, 其中$s \geq t \geq u \geq v$

接下來我們須證明$v > -1$, 即是證明$v \geq 0 (\because v \in \mathbb{Z})$

$\because b^2 + 2b + 4 > 3a \Rightarrow b + 4 > \sqrt{12a - 3b^2}$

又因為$4a - b^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \sqrt{12a - 3b^2} \geq x + y + z$

$\therefore b + 4 > x + y + z \Rightarrow\ v > -1$, 得證

四、建構數學模型

（一）模型一：

型如$t\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n\right)+c, t\in\mathbb{N}$之二次式所對應的泛費馬二次式$\gamma$值之上下界模型

1. 已知泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n$的$\gamma$值為$\gamma_0$，所求為$A(t\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n\right)+c)$的$\gamma$值，其中$t\in\mathbb{N}$

2. 顯而易見地，若t, c不互質，則$A(t\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n\right)+c)$的$\gamma$值不存在，故以下所探討的皆是$t, c$互質的情況

3. 令$r\in\{0, c, 2c, \dots, (t-1)c\}$，設$x=\sum_{i=1}^{\gamma_0}\left(\frac{at}{2}{\alpha_i}^2+\frac{bt}{2}\alpha_i+c\right)+r$

   $$=t\sum_{i=1}^{\gamma_0}(\frac{a}{2}{\alpha_i}^2+\frac{b}{2}\alpha_i)+c\gamma_0+r$$

4. 一一列舉後，若發現當$x<c\gamma_0$時，任一數x可表示成數列

   $\langle\frac{at}{2}n^2+\frac{bt}{2}n+c\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$\gamma_0+t-1$項之和，

   則$A\left(\frac{at}{2}n^2+\frac{bt}{2}n+c\right)$有上界為$\gamma_0+(t-1)$，

   即$A\left(\frac{at}{2}n^2+\frac{bt}{2}n+c\right)\le\gamma_0+(t-1)$

   (當$c=1$時，此假定必成立，以下稍作說明)

   【說明】

   因為我們所探討的是二次式，故$t\neq 0$，即$t\geq 1$，

   所以一一列舉後發現：$0=a_{-1}\times(\gamma_0+t-1), 1=a_0+a_{-1}\times(\gamma_0+t-2), \dots,$

   $\gamma_0-1=a_0\times(\gamma_0-1)+a_{-1}\times t$，因此此假定必成立。

5. $A\left(\frac{at}{2}n^2+\frac{bt}{2}n+c\right)$的$\gamma$值的下界亦為$\gamma_0+(t-1)$，以下將論證之:

   【論證】

   因為承 3.之假設

$$x = t\sum_{i=1}^{\gamma_0}\left(\frac{a}{2}{\alpha_i}^2 + \frac{b}{2}\alpha_i\right) + c\gamma_0 + r \Rightarrow x - r \equiv c\gamma_0 (mod\ t), c\gamma_0\text{為一定值}$$

$\Rightarrow r$的可能值必涵蓋了模t的所有剩餘

設$r \in \{k_0 t, k_1 t + 1, k_2 t + 2, \dots, k_{t-1} t + (t-1)\}$, 其中$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{t-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

且$\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$且 $0 \le m \le t-1$，必定存在一數x，使得其所對應的$r = k_m t + m$，

又易得知必存在一非負整數$m_1, 0 \le m_1 \le t-1$，

使得$(\gamma_0 + t - 1)c \equiv m_1 (mod\ t)$

並且$\because \forall \langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle \frac{at}{2}n^2 + \frac{bt}{2}n + c \rangle_{n=-1}^{\infty}$中的$a_i$項, 只要$i \ne -1$,

則保證$a_i \equiv c (mod\ t)$

也就是說，$\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$且 $0 \le m \le t-1, mc$此數至少須由m個數之和表示之

因此當$r = k_{m_1} t + m_1$時，該r所對應到的所有x至少須由

$\sum_{i=1}^{\gamma_0}\left(\frac{at}{2}{\alpha_i}^2 + \frac{bt}{2}\alpha_i + c\right) + (t-1)c$來表示之，

故$A\left(\frac{at}{2}n^2 + \frac{bt}{2}n + c\right) = \gamma_0 + (t-1)$

(定理 3、4、5、6 等定理的證明皆用此模型，詳細舉例及應用請見各定理之證明)

（二）模型二：

型如$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n (a \in \mathbb{Q}^+, b \in \mathbb{Q})$之二次式所對應的泛費馬二次式$\gamma$值之上下界模型

1. 為了求泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n$的$\gamma$值，設所求為$\gamma_0$，

   則「任意非負整數皆可表成數列$\langle \frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」

2. 因為滿足「任意非負整數皆可表成數列$\langle \frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」

   故數列$\langle \frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中必有一項為1，為單純化計算，我們假設當$n = 1$時，

   $\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n = 1 \Rightarrow a + b = 2$，故將$a$代換為$p - 2$，$b$代換為 $4 - p$，其中$p \in \mathbb{Q}$

   因此存在一個最小正整數β，使得$\beta(p-2) \in \mathbb{N}, \beta(4-p) \in \mathbb{Z}$成立

   (觀察可知β即為p的分母)

3. 設$x=\sum_{i=1}^{\gamma_0}(\frac{p-2}{2}{\alpha_i}^2+\frac{4-p}{2}\alpha_i)$，則$\beta x=\sum_{i=1}^{\gamma_0}\frac{\beta(p-2)}{2}{\alpha_i}^2+\frac{\beta(4-p)}{2}\alpha_i$

   故「任意非負整數皆可表成數列$\langle\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」等價於「任意形如$\beta x, x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$的非負整數皆可表成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」

4. 另外，令$b'\in\{b_0,b_0+2,\dots,b_0+2s\}$，$s\in\mathbb{N}\cup\{0\}, b_0$為奇數,

   $r\in\{0,\beta,2\beta,\dots,(\beta(p-2)-1-2s)\beta\}$,

   (在步驟(4)~(6)中，$s=0$)

   故$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists b',r,$使得$\beta x\equiv\beta b'+r(mod\ \beta(p-2))$

   且定義$a'=2\left(\frac{\beta x-\beta b'-r}{\beta(p-2)}\right)+b'=\left(1-\frac{2}{p-2}\right)b'+\frac{2\beta x-2r}{\beta(p-2)}$, 故$a'$為奇數,

   並且$\beta x=\frac{\beta(p-2)}{2}(a'-b')+\beta b'+r=\frac{\beta(p-2)}{2}a'+\frac{\beta(4-p)}{2}b'+r$

   且a',b'若欲滿足預備性質，則$b'^2<4a',{b'}^2+2b'+4>3a'$

$${b'}^2<4a'\Rightarrow 0<b'<2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}$$

$$b'^2+2b'+4>3a'\Rightarrow b'>\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}$$

$$\Rightarrow b\in(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}},\ 2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}})$$

5. 若

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}\right)\right|\geq 2+2s，$$

   則奇數b_0存在，並稱

   $\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}\right)\right|$此式為$b'$之距離式。

又因為$0 \leq r \leq (\beta(p-2)-1-2s)\beta$，故

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}, 2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)$$

$$\subset \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}, 2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)$$

$$\therefore \left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}\right)\right| \geq$$

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|$$

因此若x滿足下述的不等式

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right| \geq 2+2s,$$

則奇數b_0存在，並稱此式為b'的小距離式。

6. 假定若：

(1) 若當非負整數x大於某一由s所對應到的非負整數m時，奇數b_0存在，

(2) 當非負整數$x \leq m$時，若形如βx的非負整數皆可表示成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中所選取的$\beta(p-2)+3-2s$項之和。

則「任意形如$\beta x, x \in \mathbb{N}$的非負整數皆可表成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」此命題成立，且其中$\gamma_0 \leq \beta(p-2)+3-2s$，且因為 3.中所述的等價關係，故原命題「任意非負整數皆可表成數列$\langle\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\gamma_0$項之和」中，$\gamma_0 \leq \beta(p-2)+3-2s$

(註：

若「當$x \leq m$時，βx皆可表示成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中所選取的$\beta(p-2)+3-2s$項之和。」此敘述不成立，

則將$\{0,\beta,2\beta,3\beta,4\beta,\ldots,m\beta\}$此集合中的每個數都嘗試從

$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出最少個數之和來組成這些非負整數，根據$\gamma$的定義

可知，只要找出在此集合中需要耗費最多數才可以組成的數，設需要k個數方可以組成此數，則k即為所求之γ值。)

7. 接下來我們令$s=1$，重新執行步驟 4.~6.，若步驟 6.的假定仍然成立，則 $\gamma_0 \le \beta(p-2)+1$，接著令$s=2,3,\ldots$，設當$s=0,1,2,\ldots s_0$時，步驟 6.的假定皆成立，但當$s=s_0+1$時，步驟 6.的假定不成立，

則$\gamma_0=\beta(p-2)+3-2s_0$或$\beta(p-2)+3-2s_0-1$，

論證過程如下:

【論證】

顯而易見地，若假定(6)於$s=s_0+1$時不成立，則情況有二:

(1)不存在正整數m

(2)$\exists x_1 < m$，使得βx_1不可表示成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的

$\beta(p-2)+3-2(s_0+1)$項之和

令b'的小距離式$=f(x,p,s)$，觀察可知，$lim_{x\to\infty} f(x,p,s)=\infty$

$\Rightarrow$對於任意大的大於 2 的有理數p非負整數s，必存在正整數m，使得b'的小距離式$\ge 2+2s$

且以上二情況必有一情況成立，故「$\exists x_1 < m$，使得βx_1不可表示成數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中選取的$\beta(p-2)+3-2(s_0+1)$項之和」此敘述成立

$\Rightarrow \gamma_0 > \beta(p-2)+3-2(s_0+1)$

因此$\gamma_0=\beta(p-2)+3-2s_0$或$\beta(p-2)+3-2s_0-1$

(定理 9、10、11、12 以及參考文獻中費馬多邊形數定理的證明皆用此模型，詳細舉例及應用請見各定理之證明)

五、研究過程與方法

（一）【探究過程一】

首先，我們從費馬多邊形數探討有關泛費馬二次式數列與泛費馬二次式函數之間的對應關係。

若兩個泛費馬二次式數列之間存在一個平移變換關係時，則此二個泛費馬二次式數列對應到的γ值有何關係？

【基本例探究】

先從以下的基本例出發，假設$\langle a_n\rangle=\langle\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,1,3,6,10,15,\cdots\rangle$

$\langle b_n\rangle=\langle\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,0,1,3,6,10,15,\cdots\rangle$

根據費馬多邊形數定理，可知$\gamma=A\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)=A\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)=3$

由上式可知，縱使泛費馬二次多項式數列不同，但其γ值依舊可能相同。再進一步分析，此兩數列似乎存在一種平移變換關係，因為數列$\langle a_n\rangle$的第 1,2,3,4,⋯項依序為數列$\langle b_n\rangle$的第 2,3,4,5,⋯項。

因此我們想深入探究在此情形下的兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係。

定理 1 即在探討在兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係，對其所對應的γ值之關係式。

【定理 1】

若兩個相異泛費馬二次式數列，分別為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,f(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$、$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,g(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$，且$g(n)=f(n-k),\ k\in\mathbb{N}$，則此兩個泛費馬二次式數列之$\gamma$值存在$\langle a_n\rangle$的$\gamma$值大於或等於$\langle b_n\rangle$的$\gamma$值之關係。

【證明】

令$f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c,g(n)=\frac{a}{2}(n-k)^2+\frac{b}{2}(n-k)+c,$且$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$

位於泛費馬二次多項式函數 A 的定義域內

顯然地，$a_{n-k}=b_n\Rightarrow a_n=b_{n+k}$

$$\Rightarrow\forall x\in N,x=\sum_{m=1}^{\langle a_n\rangle\text{的}\gamma\text{值}}a_{\alpha_m}$$

$$\Rightarrow x=\sum_{m=1}^{\langle a_n\rangle\text{的}\gamma\text{值}}b_{\alpha_m+k}$$

而$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$較$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$又多出了$b_0,b_1,b_2\ldots b_{k-1}$項

$\Rightarrow \langle a_n \rangle$的$\gamma$值大於或等於$\langle b_n \rangle$的$\gamma$值

（二）【探究過程二】

觀察 A 函數的狹義定義域與廣義定義域，可發現它們最大的差異在於，狹義定義域中泛費馬二次式的常數項恆為 1，在廣義定義域中則不恆為 1，因此我們想探討常數項的變化對該數列的γ值會有什麼改變。

【探究基本例】

1. 首先針對兩個泛費馬二次式$\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$與$\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$，

   分別得到第一個數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle \frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1 \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,0,0,1,3,6,\cdots \rangle$，

   因為此數列是相當於三角形數列，故$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)=3$，

   且另一個數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle \frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2 \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,2,1,1,2,4,7,\cdots \rangle$，

   其中非負整數 10 至少需由 1,2,7 三個正整數之和表達，

   所以$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\right)\geq 3 \ldots [1]$

   且當非負整數$x \geq 4$時，則x可表成 $3+\sum_{i=1}^{3} a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{\alpha_i}+1\right)=\sum_{i=1}^{3} b_{\alpha_i}$，

   其中$a_{\alpha_i} \in \left\{a_n \middle| a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right\}$，，

   又$0=0\times 3$，$1=1+0+0$，$2=2+0+0$，$3=1+2+0$，

   故$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\right) \leq 3 \ldots [2]$，

   由[1]及[2]，所以$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\right)=3$

   綜合以上，得$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)$與$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\right)$分別所對應的$\gamma$值相等。

2. 接著對照兩個泛費馬二次式n^2-2n+1與n^2-2n+2，分別得到第一個數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle n^2-2n+1 \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,0,1,4,9,16,\cdots \rangle$，因為此數列相當於四邊形數列，故$\mathrm{A}(n^2-2n+1)=4$，且另一個數列$\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle n^2-2n+2 \rangle_{n=-1}^{\infty}$ $=\langle 0,2,1,2,5,10,17,26,37\cdots \rangle$，其中非負整數 58 至少需由 1,2,7,50 四個正整數之和表達，所以$\mathrm{A}(n^2-2n+2)\geq 4 \ldots [3]$

若$x \geq 5$時，x可表成$4+\sum_{i=1}^{4} a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{4}(a_{\alpha_i}+1)=\sum_{i=1}^{4} b_{\alpha_i}$，

其中$a_{\alpha_i} \in \{a_n | a_n=n^2-2n+1\}$，

另外$0=0\times 4$，$1=1+0\times 3$，$2=2+0\times 3$，$3=1+2+0\times 2$，

$4=2+2+0\times 2$，故$\mathrm{A}(n^2-2n+2) \leq 4$ ... [4]

由[3]及[4]，可知$\mathrm{A}(n^2-2n+2)=4$

綜合以上，得$\mathrm{A}(n^2-2n+1)$與$\mathrm{A}(n^2-2n+2)$分別所對應的γ值相等。

3. 根據上述兩個例子之探究結果，我們發現$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1)$之$\gamma$值會恆等於 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c)$之$\gamma$值。

   因此，我們猜想：若$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1)=\gamma$，且$\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$可組成

   0 至$\gamma(c-1)-1$等非負整數,其中$a_{\alpha_i} \in \left\{a_n \middle| a_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c\right\}$,

   則 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c)=\gamma$。

   接著，我們進一步論證猜想的結果，並整理成以下定理 2：

【定理 2】

若$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)=\gamma$，且$\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$可組成1 至$\gamma(c-1)-1$等正整數,

其中$a_{\alpha_i} \in \left\{a_n \middle| a_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c\right\}$, 則$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c)=\gamma$。

【證明】

因$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1)=\gamma$，給定任意非負整數$x$，

x可表成$\sum_{i=1}^{\gamma} b_{\alpha_i}$，其中$b_{\alpha_i} \in \left\{b_n \middle| b_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right\}$，

令$y=x+\gamma(\mathrm{c}-1)$，則

$$y=\sum_{i=1}^{\gamma} b_{\alpha_i}+\gamma(\mathrm{c}-1)=\sum_{i=1}^{\gamma}(b_{\alpha_i}+\mathrm{c}-1)=\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$$

其中$a_{\alpha_i}=b_{\alpha_i}+c-1 \in \left\{b_n+c-1 \middle| b_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right\}=\left\{a_n \middle| a_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c\right\}$，

故$\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$可表示出任意一個大於等於 $1+\gamma(c-1)$的非負整數，

又根據已知條件，$\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$可組成$1 \sim \gamma(c-1)$，

故$\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$可表示出任意非負整數，即 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) \le \gamma \dots [1]$，

接著，我們證明 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) < \gamma$不成立：

若 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) < \gamma$時，則 $A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) \le \gamma - 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\gamma-1}(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c)$可表示出任意的正整數，

$$\sum_{i=1}^{\gamma-1}(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) = \sum_{i=1}^{\gamma-1}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right) + (c-1)(\gamma-1)$$

即$\sum_{i=1}^{\gamma-1}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)$可表示出任意的正整數

換句話說，$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1) \le \gamma - 1$，故矛盾，

即我們的假設$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) < \gamma$不成立，也就是說，$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) \ge \gamma$

再加上[1]的結論，故$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c) = \gamma$，得證。

（三）【探究過程三】

接著我們便開始針對型如$\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1$之特殊二次式(即三角形數的正整數倍加 1 (註:加 1 是為了滿足狹義定義域))，探討其γ值。

【探究基本例】

1. 首先，我們先從$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$開始探究，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1 \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0,1,2,4,7,11,16,\dots \rangle$。

   因為非負整數 19 至少需由 1,2,16 三個非負整數之和表達，

   所以$A\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right) \ge 3 \dots [1]$，

   又假設$p_3(n) = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

   且假設一非負整數

$x=\sum_{i=1}^{3}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2}{n_i}^2+\frac{1}{2}n_i+1)=\sum_{i=1}^{3}(p_3(\alpha_i)+1)=\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3$，

根據費馬多邊形數定理知，$p_3(\alpha_i)$中取出三個數之和可組成任意非負整數，

故從$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3}$，

這三個數的和可組成任意大於等於 3 的非負整數，

又$0=0\times 3, 1=1+0\times 2, 2=2+0\times 2$，故$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)\le 3\ldots[2]$

由[1]及[2]，知$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)=3$

2. 接下來，我們開始探究n^2+n+1，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle n^2+n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,3,7,13,21,31,\ldots\rangle$，因為非負整數 12 至少需由 1,1,3,7 四個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(n^2+n+1)\ge 4\ldots[3]$，

   又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{3}({n_i}^2+n_i+1)+r=\sum_{i=1}^{3}(2p_3(\alpha_i)+1)+r$

   $=2\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3+r$，根據費馬多邊形數定理，

   $p_3(\alpha_i)$三個數之和可組成任意非負整數，

   所以$2\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3$ 可表示出任意大於等於 3 且模 2 餘 1 的數，

   故若令$0\le r\le 1$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3}$與一個$a_{-1}$或$a_0$，

   這四個數之和可組成任意大於等於 3 的非負整數，

   又$0=0\times 4, 1=1+0\times 3, 2=1+1+0\times 2$，故$\mathrm{A}(n^2+n+1)\le 4\ldots[4]$

   由[3]及[4]，知$\mathrm{A}(n^2+n+1)=4$

3. 接著，我們開始探究$\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,4,10,19,31,46,\ldots\rangle$，因為非負整數 17 至少需由 1,1,1,4,10 五個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1\right)\ge 5\ldots[5]$，

   又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{3}{2}{n_i}^2+\frac{3}{2}n_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{3}(3p_3(\alpha_i)+1)+r$

   $=3\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3+r$，

   根據費馬多邊形數定理，$p_3(\alpha_i)$三個數之和可組成任意非負整數，

   所以$3\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3$可表示出任意大於等於 3 且模 3 餘 0 的非負整數，

故若令$0 \leq r \leq 2$的話，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}$與兩個$a_{-1}$或$a_0$，

這五個數之和可組成所有大於等於 3 的非負整數，

又$0 = 0 \times 5, 1 = 1 + 0 \times 4, 2 = 1 + 1 + 0 \times 3$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right) \leq 5 \dots [6]$，

由[5]及[6]，知$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right) = 5$

4. 再來，我們開始探究$2n^2 + 2n + 1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列為$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 2n^2 + 2n + 1 \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0,1,5,13,25,41,61,\dots \rangle$，因為非負整數 22 至少需由 1,1,1,1,4,13 六個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(2n^2 + 2n + 1) \geq 6 \dots [7]$，

   又假設一非負整數$x = \sum_{i=1}^{3}\left(2{n_i}^2 + 2n_i + 1\right) + r = \sum_{i=1}^{3}(4p_3(\alpha_i) + 1) + r$

   $= 4\sum_{i=1}^{3} p_3(\alpha_i) + 3 + r$，

   根據費馬多邊形數定理，$p_3(\alpha_i)$三個數之和可組成任意非負整數，

   所以$4\sum_{i=1}^{3} p_3(\alpha_i) + 3$可表示出任意大於等於 3 且模 4 餘 3 的非負整數，

   故若令$0 \leq r \leq 3$的話，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}$與三個$a_{-1}$或$a_0$，

   這六個數之和可組成所有大於等於 3 的非負整數，

   又$0 = 0 \times 6, 1 = 1 + 0 \times 5, 2 = 1 + 1 + 0 \times 4$，

   故$\mathrm{A}(2n^2 + 2n + 1) \leq 6 \dots [8]$，由[7]及[8]，知$\mathrm{A}(2n^2 + 2n + 1) = 6$

5. 根據 1.、2.、3.、4.的結論可以猜想:若$a \in \mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1\right) = a + 2$

【定理 3】

已知二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1\right)$，

若$a \in \mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1\right) = a + 2$。

【證明】

設我們所探討的二次多項式為$\frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1, a \in \mathbb{N}$，

此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列為$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle \frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + 1 \rangle_{n=-1}^{\infty}$

$= \langle 0, 1, a+1, 3a+1, 6a+1, 10a+1, 15a+1, \dots \rangle$

當$a=1$時

根據上述探究基本例 1.的敘述可得證

當$a\geq 2$時

其中我們考慮正整數$5a+2$，因為$a\geq 2\Rightarrow 6a+1>5a+2$，

所以非負整數$5a+2$至少需由$(3a+1)\times 1+(a+1)\times 1+1\times a$，

共$a+2$個非負整數之和表達，故$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)\geq a+2\ldots[9]$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{a}{2}{n_i}^2+\frac{a}{2}n_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{3}(ap_3(\alpha_i)+1)+r$

$=a\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_3(\alpha_i)$三個數之和可組成任意非負整數，

所以$a\sum_{i=1}^{3}p_3(\alpha_i)+3$可表示出任意大於等於 3 且模$a$餘 3 的非負整數，

故若令$0\leq r\leq a-1$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3}$與$a-1$ 個a_{-1}或a_0，

這$a+2$個數的和可組成所有大於等於 3 的非負整數，

又$0=0\times(a+2),1=1+0\times(a+1),2=1+1+0\times a$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)\leq a+2\ldots[10]$

由[9]及[10]，知$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$

得證

（四）【探究過程四】

接著，我們便開始針對型如an^2+1之特殊二次式(即四邊形數的正整數倍加 1 (註:加一是為了滿足狹義定義域))，探討其γ值。

【探究基本例】

1. 首先，我們先從n^2+1開始探究，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle n^2+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,2,5,10,17,26,37,50,65,\ldots\rangle$，因為非負整數 58 至少須由 1,2,5,50 四個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(n^2+1)\geq 4\ldots[1]$

   又令$p_4(n)=n^2$，

   並假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{4}({n_i}^2+1)=\sum_{i=1}^{4}(p_4(\alpha_i)+1)=\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(\alpha_i)$四個數之和可組成任意非負整數，

故$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$四個數之和可組成任意大於等於 4 的非負整數，

又$0=0\times 4, 1=1+0\times 3, 2=2+0\times 3, 3=2+1+0\times 2$，

故$\mathrm{A}(n^2+1)\leq 4 \ldots [2]$，

由[1]及[2]，知$\mathrm{A}(n^2+1)=4$

2. 接下來，我們開始探究$2n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 2n^2+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,3,9,19,33,51,\ldots\rangle$，因為非負整數 17 至少須由 1,1,3,3,9 五個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(2n^2+1)\geq 5 \ldots [3]$

   又假設一非負整數

   $x=\sum_{i=1}^{4}(2{n_i}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(2p_4(\alpha_i)+1)+r=2\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4+r$，

   根據費馬多邊形數定理，$p_4(\alpha_i)$四個數之和可組成任意非負整數，

   所以$2\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於 4 且模 2 餘 0 的非負整數，

   故若令$0\leq r\leq 1$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與一個$a_{-1}$或$a_0$，

   這五個數之和可組成任意大於等於 4 的非負整數，

   又$0=0\times 5, 1=1+0\times 4, 2=1+1+0\times 3, 3=3+0\times 4$，

   故$\mathrm{A}(2n^2+1)\leq 5 \ldots [4]$，

   由[3]及[4]，知$\mathrm{A}(2n^2+1)=5$

3. 接著，我們開始探究$3n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 3n^2+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,4,13,28,49,76,\ldots\rangle$，因為非負整數 24 至少須由 1,1,1,4,4,13 六個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(3n^2+1)\geq 6 \ldots [5]$，

   又假設一非負整數

   $x=\sum_{i=1}^{4}(3{n_i}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(3p_4(\alpha_i)+1)+r=3\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4+r$，

   根據費馬多邊形數定理，$p_4(\alpha_i)$四個數之和可組成任意非負整數，

   所以$3\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於 4 且模 3 餘 1 的非負整數

   故若令$0\leq r\leq 2$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, a_{\alpha_4}$與二個$a_{-1}$或$a_0$，

   這六個數之和可組成任意大於等於 4 的非負整數，

又$0=0\times 6, 1=1+0\times 5, 2=1+1+0\times 4, 3=1+1+1+0\times 3$，

故$\mathrm{A}(3n^2+1)\le 6\ldots[6]$，

由[5]及[6]，知$\mathrm{A}(3n^2+1)=6$

4. 再來，我們開始探究$4n^2+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 4n^2+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,5,17,37,65,101,\ldots\rangle$，因為非負整數 31 至少須由 1,1,1,1,5,5,17 七個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(4n^2+1)\ge 7\ldots[7]$

   又假設一非負整數

   $x=\sum_{i=1}^{4}(4{n_i}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(4p_4(\alpha_i)+1)+r=4\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4+r$，

   根據費馬多邊形數定理，$p_4(\alpha_i)$四個數之和可組成任意非負整數，

   所以$4\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於 4 且模 4 餘 0 的非負整數，

   故若令$0\le r\le 3$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4}$與三個$a_{-1}$或$a_0$，

   這七個數之和可組成任意大於等於 4 的非負整數，

   又$0=0\times 7, 1=1+0\times 6, 2=1+1+0\times 5, 3=1+1+1+0\times 4$，

   故$\mathrm{A}(4n^2+1)\le 7\ldots[8]$

   由[7]及[8]，知$\mathrm{A}(4n^2+1)=7$

5. 根據 1.、2.、3.、4.的結論可以猜想:若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}(an^2+1)=a+3$

【定理 4】

已知二次式an^2+1之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}(an^2+1)$，

若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}(an^2+1)=a+3$。

【證明】

設我們所探討的二次多項式為$an^2+1, a\in\mathbb{N}$

此二次多項式所形成的泛費馬二次多項式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle an^2+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$

$=\langle 0,1, a+1, 4a+1, 9a+1, 16a+1, 25a+1,\ldots\rangle$

設$a=1$，則根據上述探究基本例 1.的敘述可得證

設$a=2$，則根據上述探究基本例 2.的敘述可得證

設$a\ge 3$

其中考慮非負整數$7a+3$，因為$a \geq 3 \Rightarrow 9a+1>7a+3$，

所以非負整數$7a+3$至少需由$(4a+1)\times 1+(a+1)\times 2+1\times a$，

共$a+3$個非負整數之和表達，

故$\mathrm{A}(an^2+1) \geq a+3 \ldots [9]$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{4}(a{n_i}^2+1)+r=\sum_{i=1}^{4}(ap_4(\alpha_i)+1)+r$

$=a\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_4(\alpha_i)$四個數之和可組成任意非負整數，

所以$a\sum_{i=1}^{4}p_4(\alpha_i)+4$可表示出任意大於等於 4 且模$a$餘 4 的非負整數，

故若令$0 \leq r \leq a-1$的話，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4}$與$a-1$個$a_{-1}$或$a_0$，

這$a+3$ 個數之和可組成所有大於等於 4 的非負整數，

又$0=0\times(a+3), 1=1+0\times(a+2), 2=1+1+0\times(a+1),$

$3=1+1+1+0\times a$，

故$\mathrm{A}(an^2+1) \leq a+3 \ldots [10]$

由[9]及[10]，知$\mathrm{A}(an^2+1)=a+3$，

得證

（五）【探究過程五】

接著，我們繼續針對型如$\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$之特殊二次式(即五邊形數的正整數倍加 1 (註:加一是為了滿足狹義定義域))，探討其γ值。

【探究基本例】

1. 首先，我們先從$\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$開始探究，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,2,6,13,23,36,\ldots\rangle$，因為非負整數 11 至少須由 1,2,2,6 四個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}\mathrm{n}^2-\frac{1}{2}\mathrm{n}+1\right) \geq 4 \ldots [1]$

   又令$p_5(n)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

且假設一非負整數

$x=\sum_{i=1}^{5}(\frac{3}{2}{n_i}^2-\frac{1}{2}n_i+1)=\sum_{i=1}^{5}(p_5(\alpha_i)+1)=\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$，

根據費馬多邊形數定理，$p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

故$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$五個數之和可組成任意大於等於 5 的正整數，

又$0=0\times 5,1=1+0\times 4,2=2+0\times 4,3=1+2+0\times 3,4=2+2+0\times 3$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)\le 5\ldots[2]$

由[1]及[2]，知$4\le A\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)\le 5$

但因為根據我們建構的數學模型一當中的論證，故$A\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)=5$

2. 接下來，我們開始探究$3n^2-n+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 3n^2-n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,3,11,25,45,71,\ldots\rangle$，因為非負整數 19 至少須由 1,1,3,3,11 五個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(3\mathrm{n}^2-\mathrm{n}+1)\ge 5\ldots[3]$

   又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{5}(3{n_i}^2-n_i+1)+r=\sum_{i=1}^{5}(2p_5(\alpha_i)+1)+r$

   $=2\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5+r$，根據費馬多邊形數定理，

   $p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

   所以$2\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$可表示出任意大於等於 5 且模 2 餘 1 的非負整數，

   故若令$0\le r\le 1$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4},a_{\alpha_5}$與一個$a_{-1}$或$a_0$，

   這六個數之和可組成任意大於等於 5 的非負整數，

   又$0=0\times 6,1=1+0\times 5,2=1+1+0\times 4,3=3+0\times 5,4=3+1+0\times 4$，

   故$\mathrm{A}(3n^2-n+1)\le 6\ldots[4]$

   由[3]及[4]，知$5\le\mathrm{A}(3n^2-n+1)\le 6$

   但因為根據我們建構的數學模型一當中的論證，故$\mathrm{A}(3n^2-n+1)=6$

3. 接著，我們開始探究$\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,4,16,37,67,108,\ldots\rangle$，因為非負整數 31 至少須由 1,1,1,4,4,4,16 七個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}\left(\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)\ge 7\ldots[5]$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{9}{2}{n_i}^2-\frac{3}{2}n_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{5}(3p_5(\alpha_i)+1)+r$

$=3\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

所以$3\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$可表示出任意大於等於 5 且模 3 餘 2 的非負整數，

故若令$0\leq r\leq 2$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4},a_{\alpha_5}$與二個$a_{-1}$或$a_0$，

這七個數之和可組成任意大於等於 5 的非負整數，

又$0=0\times 7,1=1+0\times 6,2=1+1+0\times 5,3=1+1+1+0\times 4,$

$4=4+0\times 6$，故$\mathrm{A}\left(\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)\leq 7\ldots[6]$

由[5]及[6]，知$\mathrm{A}\left(\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)=7$

4. 接下來，我們開始探究$6n^2-2n+1$，此二次多項式所形成的泛費馬二次式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 6n^2-2n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,5,21,49,89,145,\ldots\rangle$，因為非負整數 40 至少須由 1,1,1,1,5,5,5,21 八個非負整數之和表達，所以$\mathrm{A}(6\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+1)\geq 8\ldots[7]$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{5}(6{n_i}^2-2n_i+1)+r=\sum_{i=1}^{5}(4p_5(\alpha_i)+1)+r$

$=4\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

所以$4\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$可表示出任意大於等於 5 且模 4 餘 1 的非負整數，

故若令$0\leq r\leq 3$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4},a_{\alpha_5}$與三個$a_{-1}$或$a_0$，

這八個數之和可組成任意大於等於 5 的非負整數，

又$0=0\times 8,1=1+0\times 7,2=1+1+0\times 6,3=1+1+1+0\times 5,$

$4=1+1+1+1+0\times 4$，

故$\mathrm{A}(6n^2-2n+1)\leq 8\ldots[8]$

由[7]及[8]，知$A(6n^2-2n+1)=8$

5. 再接下來，我們開始探究$\frac{15}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1$，此二次式所形成的泛費馬二次式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{15}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,6,26,61,111,182,\ldots\rangle$，因為非負整數 49 至

少須由 1,1,1,1,1,6,6,6,26 九個非負整數之和表達，

所以$A\left(\frac{15}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1\right)\geq 9 \dots [9]$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{15}{2}{n_i}^2-\frac{5}{2}n_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{5}(5p_5(\alpha_i)+1)+r$

$=5\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

所以$5\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$可表示出任意大於等於 5 且模 5 餘 0 的非負整數，

故若令$0\leq r\leq 4$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4},a_{\alpha_5}$與四個$a_{-1}$或$a_0$，

這九個數之和可組成任意大於等於 5 的非負整數，

又$0=0\times 9,1=1+0\times 8,2=1+1+0\times 7,3=1+1+1+0\times 6,$

$4=1+1+1+1+0\times 5$，

故$A\left(\frac{15}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1\right)\leq 9 \dots [10]$

由[9]及[10]，知$A\left(\frac{15}{2}n^2-\frac{5}{2}n+1\right)=9$

6. 根據 1.、2.、3.、4.、5.結論可以猜想:若$a\in\mathbb{N}$，則$A\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$

【定理 5】

已知二次式$\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$之泛費馬二次式函數為$A\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)$，

若$a\in\mathbb{N}$，則$A\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$。

【證明】

設我們所探討的二次式為$\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1,a\in\mathbb{N}$

故探討的泛費馬二次多項式數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$

$=\langle 0,1\,,a+1\,,5a+1\,,12a+1\,,22a+1\,,35a+1\,,\dots\rangle$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{3a}{2}{n_i}^2-\frac{a}{2}n_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{5}(ap_5(\alpha_i)+1)+r$

$=a\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5+r$，

根據費馬多邊形數定理，$p_5(\alpha_i)$五個數之和可組成任意非負整數，

所以$a\sum_{i=1}^{5}p_5(\alpha_i)+5$可表示出任意大於等於 5 且模$a$餘 5 的非負整數，

故若令$0\le r\le a-1$的話，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4},a_{\alpha_5}$與$a-1$ 個a_{-1}或a_0，

這$a+4$個數之和可組成所有大於等於 5 的正整數，

又$0=0\times(a+4),1=1+0\times(a+3),2=1+1+0\times(a+2),$

$3=1+1+1+0\times a,4=1+1+1+1+0\times(a-1)$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)\le a+4$，且因為根據我們建構的數學模型一當中的論證，

故$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$，因此得證

（六）【探究過程六】

在定理 3~定理 5 中，我們所討論的皆是特定多邊形數的數列之倍數加 1，也因此我們想找出對於任意多邊形數的數列之倍數加 1 的數列之γ值。

【探究基本例】

從定理 3~定理 5 中可得知:

在三角形數列的倍數中：若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$

在正方形數列的倍數中：若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}(an^2+1)=a+3$

在五邊形數列的倍數中：若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$

由以上三個特例可合理推測出：當$a\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N},$

$$\mathrm{A}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$$

【定理 6】

已知二次式$\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1$之泛費馬二次式函數為：

$\mathrm{A}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)$，若$a,m\in\mathbb{N}$ 且$m\ge 3$，

則 $\mathrm{A}\left(\dfrac{a(m-2)}{2}n^2+\dfrac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$

【證明】

設我們所探討的二次式為$\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1$

故探討的泛費馬二次式數列為$\langle 0,1\ ,a+1\ ,am+1\ ,a(3m-3)+1\ ,\ldots\rangle$

令$p_m(n)=\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$

又假設一非負整數$x=\sum_{i=1}^{m}(\frac{a(m-2)}{2}{\alpha_i}^2+\frac{a(4-m)}{2}\alpha_i+1)+r=\sum_{i=1}^{m}(ap_m(\alpha_i)+1)+r$

$=a\sum_{i=1}^{m}p_m(\alpha_i)+m+r$，因為形如$p_m(\alpha_i)$中$m$個數之和可組成任意非負整數，

所以$a\sum_{i=1}^{m}p_m(\alpha_i)+m$可表示出任意大於等於$m$且模$a$餘$m$的非負整數，

故若令$0\leq r\leq a-1$的話，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},\ldots,a_{\alpha_m}$與$a-1$個$a_{-1}$或$a_0$

這$a+m-1$個數的和可組成所有大於等於m的非負整數，

又$0=0\times(a+m-1),1=1+0\times(a+m-2),\ldots,m-1=1\times(m-1)+0\times a$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)\leq a+m-1$

且因為根據我們建構的數學模型一當中的論證，所以

$$\mathrm{A}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$$

因此得證

(在此證明中，關鍵是我們須先知道$\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$的$\gamma$值，在往後的定理中，我們將繼續運用此方法，並將此方法整理並建構為模型一)

（七）【探究過程七】

在前幾個定理中，我們所討論的都是$\frac{t(m-2)}{2}n^2+\frac{t(4-m)}{2}n+1,(t,m$為正整數$,m\geq 3)$

這與我們的目標：$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{Z},a+b\equiv 0(mod\ 2))$仍有一段差距，

所以我們接下來要討論的是在$m>2$的的前提下,將m的可能值拓展到有理數之可行性，

故原式變成：$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，$t\in\mathbb{N}$，$p\in\mathbb{Q}$，$p>2$，$tp\in\mathbb{N}$

(因為所探討的數是有理數，故將m改成p以示區別，且因為我們探討的是非負整數數列，故需加入$tp\in\mathbb{N}$此條件)

【探究基本例】

將$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$與$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$相互對照後可得知: $\begin{cases}a=t(p-2)\\b=t(4-p)\end{cases}$

並聯立後，可知$t=\frac{a+b}{2}$，$p=\frac{2a}{a+b}+2$

【定理 7】

若a為正整數，b為整數，則對於一組數對(a,b)，必存在一個大於 2 之有理數p，及一正整數t，使得tp為正整數，且滿足$t(p-2)=a$，$t(4-p)=b$，即型如$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$之二次式恆可表示為$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，對於所有正整數$n$。

【證明】

設$\begin{cases}a=t(p-2)\\b=t(4-p)\end{cases}$，可知：

$$\because t=\frac{a+b}{2}\text{，}p=\frac{2a}{a+b}+2$$

$\therefore \forall a$、b滿足狹義定義域，$\exists t$、p滿足$t\in\mathbb{N}$，$p\in\mathbb{Q}$ 且$p>2$，$tp=2a+b\in\mathbb{N}$

因此可得證

（八）【探究過程八】

接下來，我們想要仿定理 3~5 的推演方式，先固定p開始討論。

【探究基本例】

令$p=\frac{5}{2}$時，原式變為$\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1$，接著，我們想根據定理 6 的脈絡進行討論，

所以必須先行探討$\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n$的$\gamma$值，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{5}{2},\frac{9}{2},7,10,\frac{27}{2},\frac{35}{2},\dots\rangle$，

但由於我們探討的是非負整數數列，故將上述一般式乘以 2，

變成$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,2,5,9,14,20,27,35,\dots\rangle$

(同時因為乘過 2 的緣故，故$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列組成非負整數之探討等價於$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列組成非負偶數之探討)，在列舉了數個偶數後可發現大致上此數列中四個數的和即可組成所有非負偶數。於是我們猜想: 「$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中四個數的和即可組成所有非負偶

數，也就是說，從$\langle \frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出四個數之和即可組成所有非負整數。」

於是若猜想為真，依據模型一可知(詳見下方證明)，

$$\mathrm{A}\left(\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1\right)=a+3$$

【定理 8】

已知二次式$\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1\right)$，

若$\frac{a}{2}\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1\right)=a+3$

【證明】

1. 我們先將「$\langle \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中四個數的和即可組成所有非負偶數」這段敘述

   轉化成較易證明的簡易形式。令$a_i=\frac{1}{2}i^2+\frac{3}{2}i$

   設一非負偶數 $2x=\sum_{i=1}^{4}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}{\alpha_i}^2+\frac{3}{2}\alpha_i$

   $$\Leftrightarrow 16x+36=\sum_{i=1}^{4}(4{\alpha_i}^2+12\alpha_i+9)=\sum_{i=1}^{4}(2\alpha_i+3)^2$$

   因此「$\langle \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中四個數的和即可組成所有非負偶數」若且唯若

   「$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，使得 $16x+36=\sum_{i=1}^{4}(2\alpha_i+3)^2$」

2. 證明：「$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，

   使得 $16x+36=\sum_{i=1}^{4}(2\alpha_i+3)^2$」

   若$x=0$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0,\alpha_4=0$,成立

   若$x=1$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0,\alpha_4=1$,成立

   若$x=2$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=1,\alpha_4=1$,成立

   若$x=3$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=1,\alpha_3=1,\alpha_4=1$,成立

   若$x=4$,則$\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1,\alpha_4=1$,成立

   若$x=5$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=2,\alpha_4=2$,成立

   若$x=6$,則$\alpha_1=0,\alpha_2=1,\alpha_3=2,\alpha_4=2$,成立

若$x=7,$則$\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=2,\alpha_4=2,$成立

若$x=8,$則$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=1,\alpha_4=4,$成立

若$x>8,$

則根據高斯的三角形數定理(費馬多邊形數定理在三角形數數列的特例)可知：

$\exists m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}\cup\{0\},$

滿足$\begin{cases}16x-85=\sum_{i=1}^{3}(2m_i+1)^2\\16x-133=\sum_{i=1}^{3}(2n_i+1)^2\end{cases}$

若$\prod_{i=1}^{3}n_i\neq 0,$則$\alpha_1=n_1-1,\alpha_2=n_2-1,\alpha_3=n_3-1,\alpha_4=5,$成立

若$\prod_{i=1}^{2}n_i\neq 0,n_3=0,$則讓$m_1=n_1,m_2=n_2,m_3=3,$

$\alpha_1=m_1-1,\alpha_2=m_2-1,\alpha_3=m_3-1,\alpha_4=4,$成立

若$n_1\neq 0,\mathrm{n}_2=\mathrm{n}_3=0,$則讓$m_1=n_1,m_2=2,m_3=2,$

$\alpha_1=m_1-1,\alpha_2=m_2-1,\alpha_3=m_3-1,\alpha_4=4,$成立

若$n_1=n_2=n_3=0,$則$x=1,$與$x>8$的條件不合

故得證

因此「$\langle\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中四個數的和即可組成所有非負偶數」成立

3. 因為「$\langle\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\rangle_{\mathrm{n}=-1}^{\infty}$數列中四個數的和即可組成所有非負偶數」

所以根據先前所述之等價關係

故從$\langle\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出四個數的和可組成所有非負整數... [1]

(註：若運用模型二的方法亦可得此結論)

4. 接著，設我們所探討的二次式為$\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1,\frac{a}{2}\in\mathbb{N},$

故探討的泛費馬二次式數列為

$$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,a+1,\frac{5}{2}a+1,\frac{9}{2}a+1,7a+1,\ldots\rangle$$

如前所設，令$a_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n$

又假設非負整數$x=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{a}{4}{\alpha_i}^2+\frac{3a}{4}\alpha_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{4}\left(a\times a_{\alpha_i}+1\right)+r$

$=a\sum_{i=1}^{4}a_{\alpha_i}+4+r$，

根據[1]的結論，所以數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$四個數之和可組成任意非負整數，

故若令$0\le r\le a-1$的話，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a_{\alpha_1},a_{\alpha_2},a_{\alpha_3},a_{\alpha_4}$與$a-1$個$a_{-1}$或$a_0$，

這$a+3$個數的和可組成所有大於等於 4 的非負整數，

又$0=0\times(a+3)$，$1=1+0\times(a+2)$，$2=1+1+0\times(a+1)$，

$3=1+1+1+0\times a$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{3a}{2}n+1\right)\le a+3$

又根據模型一的論證可知，$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{3a}{2}n+1\right)=a+3$，得證

（九）【探究過程九】

接下來，我們繼續帶入特定的p值進行探討。

【探究基本例】

令$p=\frac{7}{2}$，可得知所探討的泛費馬二次多項式數列為

$\frac{a(p-2)}{2}n^2+\frac{a(4-p)}{2}n+1=\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1$，根據模型一可知，

我們須先推論出$\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n$的$\gamma$值。

我們令$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,1,\frac{7}{2},\frac{15}{2},13,\dots\rangle$

但由於我們探討的是非負整數數列，故將上述一般式乘以 2，

變成$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,0,2,7,15,26,\dots\rangle$

(同時因為乘過 2 的緣故，故$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列組成非負整數之探討等價於$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列組成非負偶數之探討)，在列舉了數個偶數後可發現大致上此數列中六個數的和即可組成所有非負偶數。於是我們猜想: 「$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中六個數的和即可組成所有非負

偶數，即$\langle \frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出六個數的和即可組成所有非負整數。」於是若猜想為真，依據模型一可知(詳見下方證明)，$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1\right)=a+5$

【定理 9】

已知二次式$\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1\right)$，

若$\dfrac{a}{2}\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3a}{4}n^2+\dfrac{a}{4}n+1\right)=a+5$

【證明】

1. 我們將運用模型二，以證明

「$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle \frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中六個數的和即可組成所有非負偶數」這段敘述，根據前述的預備性質，

令b為某一隨著x改變的奇數，$r\in\{0,2,4\}$，且滿足$2x\equiv 2b+r(mod\ 3)$

設一非負偶數 $2x=\sum_{i=1}^{6}a_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{6}\frac{3}{2}{\alpha_i}^2+\frac{1}{2}\alpha_i=\frac{3}{2}(a-b)+2b+r$

則$a=2\left(\frac{2x-2b-r}{3}\right)+b=-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}(2x-r)$，(因為$a=2\left(\frac{2x-2b-r}{3}\right)+b$故$a$為奇數)

又我們發現：

(1) 若$b^2<4a\Rightarrow b^2+\frac{4}{3}b-\frac{8}{3}(2x-r)<0$

$$\Rightarrow b<\frac{-\dfrac{4}{3}+\sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{32}{3}(2x-r)}}{2}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{1+6(2x-r)}$$

(2) 若$b^2+2b+4>3a\Rightarrow b^2+3b+4-2(2x-r)>0\Rightarrow b>\frac{-3+\sqrt{8(2x-r)-7}}{2}$

因此$b\in(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8(2x-r)-7},-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{1+6(2x-r)}\ )$

又因為$0\leq r\leq 4$

$$\Rightarrow\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{16x-7},-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{12x-23}\ \right)$$

$$\subset(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8(2x-r)-7},-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{1+6(2x-r)}\ )$$

且當$x\geq 25$時，$\left|\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{12x-23}\right)-(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{16x-7})\right|>2$，

因此當$x \geq 25$時，在此區間中終必存在一非負奇數，

故當$x \geq 25$時，存在二奇數a, b滿足引理的假設，

所以任一大於等於 50 的非負偶數可表成 $2x = \frac{3}{2}(a-b) + 2b + r$

$$= \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + r = \sum_{i=1}^{4}(\frac{3}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i) + \mathrm{r} = \sum_{i=1}^{6}(\frac{3}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i)$$

也就是說從數列 $\langle\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出六個數之和，

即可組成大於等於 50 的非負偶數

故我們只須一一檢視數列$\langle\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$要組成$x = 0,2,4,\dots,48$時的情況：

$$\langle\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0,0,2,7,15,26,40,\dots\rangle$$

當$x = 0$時，$0 = 0 \times 6$；

當$x = 2$時，$2 = 2 + 0 \times 5$ ；當$x = 4$時，$4 = 2 \times 2 + 0 \times 4$；

當$x = 6$時，$6 = 2 \times 3 + 0 \times 3$ ；當$x = 8$時，$8 = 2 \times 4 + 0 \times 2$；

當$x = 10$時，$10 = 2 \times 5 + 0$ ；當$x = 12$時，$12 = 2 \times 6$；

當$x = 14$時，$14 = 7 \times 2 + 0 \times 4$ ；當$x = 16$時，$16 = 7 \times 2 + 2 + 0 \times 3$；

當$x = 18$時，$18 = 7 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 2$；當$x = 20$時，$20 = 7 \times 2 + 2 \times 3 + 0$；

當$x = 22$時，$22 = 7 \times 2 + 2 \times 4$ ；當$x = 24$時，$24 = 15 + 7 + 2 + 0 \times 3$；

當$x = 26$時，$26 = 26 + 0 \times 5$ ；當$x = 28$時，$28 = 26 + 2 + 0 \times 4$；

當$x = 30$時，$30 = 26 + 2 \times 2 + 0 \times 3$ ；當$x = 32$時，$32 = 26 + 2 \times 3 + 0 \times 2$；

當$x = 34$時，$34 = 26 + 2 \times 4 + 0$ ；當$x = 36$時，$36=26 + 2 \times 5$；

當$x = 38$時，$38 = 15 \times 2 + 2 \times 4$ ；當$x = 40$時，$40 = 40$；

當$x = 42$時，$42 = 40 + 2 + 0 \times 4$ ；當$x = 44$時，$44 = 40 + 2 \times 2 + 0 \times 3$;

當$x = 46$時，$46 = 40 + 2 \times 3 + 0 \times 2$ ；當$x = 48$時，$48 = 40 + 2 \times 4 + 0$;

故「$\langle\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$數列中六個數的和即可組成所有非負偶數」得證

2. 因為「從數列$\langle\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出六個數的和即可組成所有非負偶數」

假設非負偶數 $2x=\sum_{i=1}^{6}\frac{3}{2}{\alpha_i}^2+\frac{1}{2}\alpha_i \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{6}\frac{3}{4}{\alpha_i}^2+\frac{1}{4}\alpha_i$

所以從數列$\langle\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出六個數的和即可組成所有非負整數

3. 已知「從數列$\langle\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出六個數的和即可組成所有非負整數」

設我們所探討的二次式為$\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1, a\in\mathbb{N}$

故探討的泛費馬二次式數列

$\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1\ ,a+1\ ,\frac{7}{2}a+1\ ,\frac{15}{2}a+1\ ,13a+1,\ldots\rangle$

如前所設，$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$

又假設非負整數$x=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{3a}{4}{\alpha_i}^2+\frac{a}{4}\alpha_i+1\right)+r=\sum_{i=1}^{6}\left(a\times a_{\alpha_i}+1\right)+r$

$=a\sum_{i=1}^{6}a_{\alpha_i}+6+r$，

因為從數列$\langle\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出六個數之和可組成任意非負整數，

故若令$0\le r\le a-1$的話，

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$a+5$個數的和可組成所有大於等於6的非負整數，

又$0=0\times(a+5), 1=1+0\times(a+4), 2=1+1+0\times(a+3)$,

$3=1+1+1+0\times(a+2), 4=1\times 4\ +0\times(a+1), 5=1\times 5+0\times a$,

故$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)\le a+5$

又根據模型一的論證可知，$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+5$

（十）【探究過程十】

接下來，我們將繼續依據費馬多邊形數定理的證明方法，針對p做一般化的探討。

【探究基本例】

設我們所探討的泛費馬二次多項式數列

$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{a(p-2)}{2}n^2+\frac{a(4-p)}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$，

根據模型一，我們先行探討$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值。

令$p=\frac{\alpha}{\beta},\alpha\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N},(\alpha,\beta)=1$，且根據定義$p>2$

$$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n=\frac{\frac{\alpha}{\beta}-2}{2}n^2+\frac{4-\frac{\alpha}{\beta}}{2}n=\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2\beta}n$$

因為我們主要探討的是非負整數數列，因此我們將上式乘上β，

變為$\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n$，故我們探討的命題改為：

「$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=$

$\langle 0,0,\beta,\alpha,3\alpha-3\beta,6\alpha-8\beta,10\alpha-15\beta,15\alpha-24\beta,\ldots\rangle$

共需多少個數之和，方保證可以組成所有形如$\beta x,x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$的正整數」

(兩命題等價證明:

因為假設$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\gamma,x=\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}{\alpha_i}^2+\frac{4\beta-\alpha}{2\beta}\alpha_i,$

$\Leftrightarrow\beta x=\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{\alpha-2\beta}{2}{\alpha_i}^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}\alpha_i$,得證)

我們按照模型二，來求得$\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n$共需多少個數之和，

方保證可以組成所有形如$\beta x,x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$的正整數。

設共需γ個數，則我們欲求得γ值的上界，

故我們的目標為$\beta x=\frac{\alpha-2\beta}{2}a+\frac{4\beta-\alpha}{2}b+r\Rightarrow a=b+2(\frac{\beta x-\beta b-r}{\alpha-2\beta})$，

且$\begin{cases}a=s^2+t^2+u^2+v^2\\ b=s+t+u+v\end{cases},s,t,u,v\in\mathbb{N}\cup\{0\}$」，故我們設$b\in\{b_0\}$，其中$b_0$為某一隨著$x$改變的非負奇數，

又因我們須讓a為奇數，所以$\beta x\equiv\beta b+r(mod\ \alpha-2\beta)$，

因此我們令$r\in\{0,\beta,2\beta,\ldots,(\alpha-2\beta-1)\beta\}$

條件一：若當x大於某正整數m_0時，則對於任一個x都存在對應的a,b，

滿足$b^2<4a,b^2+2b+4>3a$

條件二：且當我們一一列舉後，若得知當x小於等於m_0時，

βx皆可表成數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中$\alpha-2\beta+3$個數之和，

若以上二條件皆成立， 則$\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n$之$\gamma$值小於等於$\alpha-2\beta+3$

又根據模型一，若$\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n$之$\gamma$值小於等於$\alpha-2\beta+3$，

則$\mathrm{A}\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)\le t+\alpha-2\beta+2$

(以上為提出猜想的過程，詳細推導請見下方證明)

(註：

若解$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\ge 2$

此不等式，解得當$x>m_0$時，此不等式恆成立，且對於任意一個小於等於m_0的非負整數m，從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$k$項之和可組成任意形如$\beta m,m\in\mathbb{N}$的數，且其中$k>\alpha-2\beta+3$，但至少存在一小於$m_0$的非負整數無法被表成$k-1$項之和，則$k$即為$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之$\gamma$值。故$\mathrm{A}\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)=t+k-1$)

【定理 10】

欲求二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之泛費馬二次多項式函數值

$\mathrm{A}(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1)$時，必須先解此不等式

$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\ge 2$，

假設此不等式恆成立的解為$x>m_0$，$m_0\in\mathbb{R}$。

若對於同時滿足下列兩個條件之非負整數m：

1. 當$m>m_0$，則必可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和組成形如$\beta m$的非負整數。
2. 當對於任意小於等於m_0的m值，則可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和皆可組成形如$\beta m$的非負整數。

則泛費馬二次多項式函數$\mathrm{A}\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)$值之上限為

$t+\alpha-2\beta+2$，其中$p=\frac{\alpha}{\beta}>2$ 且$\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, 且$(\alpha,\beta)=1,\exists t\in\mathbb{N},\ni tp\in\mathbb{N}$。

【證明】

引理(預備性質)：

若a,b為正奇數，且$b^2<4a, b^2+2b+4>3a$

則$\exists s,t,u,v\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 使得$\begin{cases}a=s^2+t^2+u^2+v^2\\ b=s+t+u+v\end{cases}$

1. 設我們所探討的泛費馬二次式數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{a(p-2)}{2}n^2+\frac{a(4-p)}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$，

   根據模型一，我們先行探討$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值。

2. 設我們所探討的泛費馬二次多項式數列$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，

   令$p=\frac{\alpha}{\beta},\alpha\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N},(\alpha,\beta)=1$，且根據定義$p>2$

   故$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n=\frac{\frac{\alpha}{\beta}-2}{2}n^2+\frac{4-\frac{\alpha}{\beta}}{2}n=\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2\beta}n$,因此我們所探討的泛費馬二次式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2\beta}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$

   又因為$x=\sum_{i=1}^{\gamma}(\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2\beta}n)\Leftrightarrow\beta x=\sum_{i=1}^{\gamma}(\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n)$，

   對於任意非負整數γ皆成立。故我們所探討的命題可由

   「求$\langle\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$的$\gamma$值」等價於

   「試求共需從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取$\gamma$個數方可保證這些數之和，可表示任一形如$\beta x, x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$的數」

3. 設$b\in\{b_0\}, r\in\{0,\beta,2\beta,\dots,(\alpha-2\beta-1)\beta\}$，

   因此$\forall x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\exists b,r$, 使得$\beta x\equiv\beta b+r\ (mod\ \alpha-2\beta)$，

   接著，我們定義$a=2\left(\frac{\beta x-\beta b-r}{\alpha-2\beta}\right)+b=\left(1-\frac{2\beta}{\alpha-2\beta}\right)b+\frac{2\beta x-2r}{\alpha-2\beta}$，因此$a$為奇數

   且$\beta x=\frac{\alpha-2\beta}{2}(a-b)+\beta b+r=\frac{\alpha-2\beta}{2}a+\frac{4\beta-\alpha}{2}b+r$

   若$0<b_0<2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\Rightarrow b^2<4a$

$$b_0 > \frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x - \frac{8r}{\beta}}{p-2}} \Rightarrow b^2 + 2b + 4 > 3a$$

故當$b_0 \in \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}, 2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)$時，

我們所定義的a, b滿足引理

又因為$0 \le r \le (\alpha - 2\beta - 1)\beta$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x}{p-2}}, 2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right)$$

$$\subset \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}, 2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\left(2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-\frac{2r}{\beta}}{p-2}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x-\frac{8r}{\beta}}{p-2}}\right)\right|$$

$$\ge \left|\left(2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x}{p-2}}\right)\right|$$

$\Rightarrow$ 若

$$\left|\left(2 - \frac{4}{p-2} + 2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2 + \frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2} + \frac{8x}{p-2}}\right)\right| \ge 2$$

則此區間中必存在一非負奇數b_0，因此我們假設當$x > m_0$時，

此不等式成立⇒故至多從數列$\langle \frac{\alpha-2\beta}{2} n^2 + \frac{4\beta-\alpha}{2} n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取$a_s, a_t, a_u, a_v$與

$\alpha - 2\beta - 1$ 個a_0或a_1，這$\alpha - 2\beta + 3$個數之和，可表示出任一形如$\beta x, x \ge m_0, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$的數，且$x \le m_0$時，若一一列舉後，我們發現從數列$\langle \frac{\alpha-2\beta}{2} n^2 + \frac{4\beta-\alpha}{2} n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha - 2\beta + 3$項之和可組成任意形如$\beta x, x \in \mathbb{N}$的數

$\Rightarrow \langle \frac{(p-2)}{2} n^2 + \frac{(4-p)}{2} n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 的γ值 $\le \alpha - 2\beta + 3$

4. 設我們所探討的泛費馬二次式數列為$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle \frac{t(p-2)}{2} n^2 + \frac{t(4-p)}{2} n + 1 \rangle_{n=-1}^{\infty}$，

假設$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha-2\beta+3} \left(\frac{t(p-2)}{2} {n_i}^2 + \frac{t(4-p)}{2} n_i + 1\right) + r$

$$=t\sum_{i=1}^{\alpha-2\beta+3}\left(\frac{p-2}{2}{n_i}^2+\frac{4-p}{2}n_i\right)+(\alpha-2\beta+3)+r$$

故若設$r\in\{0,1,2,\dots,\alpha-1\}$，則由數列$\langle\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出

$(\alpha-1)+(\alpha-2\beta+3)$個數，即可組成所有大於等於$\alpha-2\beta+3$的非負整數，

且$0=0\times(t+\alpha-2\beta+2),1=1+0\times(t+\alpha-2\beta+1),\dots,$

$\alpha-2\beta+2=1\times(\alpha-2\beta+2)+0\times t$，

故$\mathrm{A}\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)\le t+\alpha-2\beta+2$，

因此得證

（十一）【探究過程十一】

在定理 10 中，我們定出了一個γ值的上界，接著，我們想要藉由電腦的運算能力，縮小這個上界或驗證此上界無法再更進一步的縮小，並嘗試求出γ值

【探究基本例】

承繼定理 10 中的探究基本例，在討論的泛費馬二次多項式數列為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle\frac{a(p-2)}{2}n^2+\frac{a(4-p)}{2}n+1\rangle_{n=-1}^{\infty}$的情況下，

同樣根據模型一，我們須先求得$\langle\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$的$\gamma$值，

因此我們運用模型二設計了一個程式，執行的步驟如下：

令$s=0$，解

1. $\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\ge 2+2s$，求得當$x\ge m$時，此式成立。
2. 求出數列$\langle\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中，小於$m$的項，

   設這些項為$a_{-1}\sim a_k$。
3. 定義：

$$\begin{cases}A_1=\{x|x=a_{i_1},-1\le i_1\le k\}\\A_2=\{x|x=a_{i_1}+a_{i_2},-1\le i_1\le i_2\le k\}\\\vdots\\A_m=\{x|x=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m},-1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_m\le k\}\end{cases}$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

4. 探討$\{0,1,\dots,m\}$是否為A的子集

5. 若是，則令$s=1$，再解$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\geq 2+2s$此不等式，解得$x\geq m_1$時，此不等式成立，即說明奇數$b_0$存在，接著重複步驟 2.到 4.，若步驟 4.仍成立，則令$s=2$，...直到步驟 4.的敘述不成立為止。

6. 設當$s=0,1,2,\dots,s_0$時，步驟 4. 皆成立，但$s=s_0+1$時，步驟 4.不成立，則輸出s_0之值。且根據模型二的論證可知，$\frac{(p-2)}{2}n^2+\frac{(4-p)}{2}n$的$\gamma$值$=\alpha-2\beta+3-2s_0$或$\alpha-2\beta+3-2s_0-1$

利用電腦程式，如附錄，執行並檢驗其正確性，結果是合理的！

根據附錄之程式的運算結果，得知當$p=\frac{\alpha}{\beta}>2,$且 $1\leq\alpha\leq 10000$ ，$1\leq\beta\leq 10$時，且$s=1$ 時，步驟 4. 皆不成立，故根據模型一的論證，

知當$p=\frac{\alpha}{\beta}>2,$且 $1\leq\alpha\leq 10000$ ，$1\leq\beta\leq 10$時，

若我們解$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\beta(p-2)-1-2s)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\geq 2$

此不等式，解得當$x\geq m$時，此不等式成立，且$x<m$時，

從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和可組成任意形如$\beta x, x\in\mathbb{N}$的數，則

$A\left(\frac{\alpha(p-2)}{2}n^2+\frac{\alpha(4-p)}{2}n+1\right)=a+\alpha-2\beta+2$或$a+\alpha-2\beta+1$

(註：

若解$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\geq 2$

此不等式，解得當$x>m_0$時，此不等式恆成立，且對於任意一個小於等於m_0的非負整數m從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$k$項之和可組成任意形如$\beta m, m\in\mathbb{N}$的數，且其中$k>\alpha-2\beta+3$，但至少存在一小於$m_0$的非負整數無法被表成$k-1$項之和，

則k即為$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$之$\gamma$值。故$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)=t+k-1$)

【定理 11】

已知二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的泛費馬二次多項式函數為

$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)$，

當$p=\frac{\alpha}{\beta}>2$, 且 $1\le\alpha\le 10000$，$1\le\beta\le 10, \exists t\in\mathbb{N}, \ni tp\in\mathbb{N}$ 時，先解此不等式

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\ge 2$$

若此不等式恆成立的解為$x>m_0$，$m_0\in\mathbb{R}$。若對於同時滿足下列兩個條件之非負整數m：

1. 當$m>m_0$，則必可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和組成形如$\beta m$的非負整數。
2. 當對於任意小於等於m_0的m值，則可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和皆可組成形如$\beta m$的非負整數。

則$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)=t+\alpha-2\beta+2$或$t+\alpha-2\beta+1$

【證明】

因此結果為程式運算與模型二中的概念而得，故無證明

（十二）【探究過程十二】

在模型二中，我們對每一個型如$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的二次多項式皆賦予了一個非負整數$s_0$，此$s_0$正是求得$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之$\gamma$值的關鍵步驟，故我們想知道$p$與$s_0$之間的關係(由模型二中關於$s_0$的陳述可知，$t$與$s_0$之值無關)。

【基本例探究】

我們在定理十一中發現：當$p=\frac{\alpha}{\beta}>2$且$1\le\alpha\le 10000, 1\le\beta\le 10$時，

$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的$s_0$值皆不大於0，因此我們猜想

$\forall p\in\mathbb{Q}, p>2, \frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的$s_0$值皆不大於0，並嘗試證明此猜想。

【定理 12】

已知對於部分泛費馬二次多項式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$在模型二中定義了一個非負整數$s_0$，而且任意泛費馬二次多項式所對應的$s_0$之值僅有兩種可能：$s_0=0$或不存在一非負整數滿足$s_0$之條件(即$s_0$之值不存在)，也就是說：對於任一滿足狹義定義域的泛費馬二次多項式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，其泛費馬二次多項式函數值$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)\geq t+\alpha-2\beta+1, p=\frac{\alpha}{\beta}$，且等號成立的必要條件為$\beta=3$

(註：顯而易見地，β不可為0，且我們亦不討論$\beta=1$的情況，因為費馬多邊形數定理即是在探討$\beta=1$的情況)

【證明】

1. 透過模型一我們可知：「$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)\geq t+\alpha-2\beta+1$」等價於

   「$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$>\alpha-2\beta+1$」

2. 考慮數列$\langle\frac{\beta(p-2)}{2}n^2+\frac{\beta(4-p)}{2}n\rangle_{n=0}^{\infty}=\langle 0,\beta,\alpha,3\alpha-3\beta,6\alpha-8\beta,10\alpha-15\beta,\dots\rangle$

   令$k=\alpha-2\beta$，

   則此數列可改寫為：$\langle 0,\beta,k+2\beta,3k+3\beta,6k+4\beta,10k+15\beta,\dots\rangle\dots[1]$

3. 首先我們運用反證法證明「$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$>k+1$」

   假定：$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$\leq k+1$

   則考慮欲組成$(k+2)\beta$此正整數時：

   設：在組成$(k+2)\beta$時共用了x_1個k、x_2個β，計作$(k+2)\beta=x_1k+x_2\beta$

   (例如說：若$x_1=3,x_2=4$的話，則可能用了此數列中的一個a_3與一個a_1)

   又因為$(\alpha,\beta)=1\Rightarrow(k,\beta)=1$，所以$\beta$整除$x_1$

   而當$x_1=3\beta$時，$(k+2)\beta=3k\beta+x_2\beta\Rightarrow 2=2k+x_2$(不存在使得$k$與$x_2$同為正整數的解)，也就是說，$x_1$不可能為$3\beta$。藉由同樣的反證法我們易得知：$x_1$不可能大於等於$3\beta$，因此我們分成以下兩種情況來討論：

   (1) 設$x_1=2\beta\Rightarrow(k+2)\beta=2k\beta+x_2\beta\Rightarrow 2=k+x_2\Rightarrow k=x_2=1$，原式變成$3\beta=2\beta\times 1+1\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況中$(k+2)\beta$(註：在此情況中，此數即為$3\beta$)無法表成$k+1$個數(註：在此情況中，也就是「2」個數)之和。

   (2) 設$x_1=\beta\Rightarrow(k+2)\beta=k\beta+x_2\beta\Rightarrow x_2=2$，
   原式變成$(k+2)\beta=\beta\times k+2\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況中k必等於0或1，否則$(k+2)\beta$無法表成$k+1$個數之和，而$k=0,1$恰為我們不討論的兩種情況。

因此以上兩種情況皆不成立，也就是說，$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$>k+1$得證。

4. 接著同樣透過模型一，我們可知：

「$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)=t+\alpha-2\beta+1$」

等價於「$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$=\alpha-2\beta+2$」我們將運用類似的分析技巧來證明此敘述的必要條件為$\beta=3$

5. 設當$p=p_0$時，$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$=\alpha-2\beta+2=k+2$

則考慮欲組成$(k+3)\beta$此數時，
同樣假設此數是由x_1個k、x_2個β所組成，計作$(k+3)\beta=x_1k+x_2\beta$
同樣因為$(k,\beta)=1\Rightarrow\beta$整除$x_1$，而當$x_1=4\beta$時，
原式變成$(k+3)\beta=4k\beta+x_2\beta\Rightarrow 3=3k+x_2$(不存在使得$k$與$x_2$同為正整數的解)，也就是說$x_1$不可能為$4\beta$，運用同樣的反證法亦可得知：
x_1不可能大於等於4β，因此我們分成如下三種情況來討論：

(1) 設$x_1=3\beta\Rightarrow(k+3)\beta=3k\beta+x_2\beta\Rightarrow 3=2k+x_2\Rightarrow k=x_2=1$
原式變成$4\beta=3\beta\times1+1\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況下$(k+3)\beta$，無法用$k+2$個取自於數列[1]的數之和表達。

(2) 設$x_1=2\beta\Rightarrow(k+3)\beta=2k\beta+x_2\beta\Rightarrow 3=k+x_2$
  I. 若$k=1,x_2=2$，則原式變成$4\beta=2\beta\times1+2\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況下$(k+3)\beta$，無法用$k+2$個取自於數列[1]的數之和表達。
  II. 若$k=2,x_2=1$，則原式變成$5\beta=2\beta\times2+1\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況下$(k+3)\beta$，無法用$k+2$個取自於數列[1]的數之和表達。

(3) 設$x_1=\beta\Rightarrow(k+3)\beta=k\beta+x_2\beta\Rightarrow x_2=3$，則將其代回原式，
變成$(k+3)\beta=\beta\times k+3\times\beta$，藉由觀察數列[1]的各項表達式，可知在此情況下，又可分為兩種不同的情況討論之：
  I. 當$\beta\neq3$時，$(k+3)\beta$此數無法用$k+2$個取自於數列[1]的數之和表達。
  II. 當$\beta=3$時，$(k+3)\beta$此數可用$k+2$個取自於數列[1]的數之和表達。
  (例如說：$(k+3)\beta=(k+1)\times0+1\times(3k+3\beta)=(k+1)a_0+a_3$)

6. 根據以上的討論結果可知：

若$\beta\neq3$，則$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$>\alpha-2\beta+2$

若$\beta=3$，則$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$的$\gamma$值$>\alpha-2\beta+1$

因此根據先前所述之等價關係，可得證此定理。

參、研究結果與討論

在本研究中，共建構了一個函數、兩個模型，並論證了十二個定理，陳列如下：

一、函數

泛費馬二次式函數A：

若對於每一個泛費馬二次式$f(n)$，都存在一個泛費馬二次式$f\ (n\ )$的「指標值」，使得泛費馬二次式數列存在，我們稱如此泛費馬二次式$f(n)$與γ值的對應關係為泛費馬二次式函數，用符號「$\gamma = A(f(n))$」表示。

二、模型

（一）當已知$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n$的$\gamma$值時，用以求取型如$t\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n\right) + c, t \in \mathbb{N}$之二次式所應用的泛費馬二次式$\gamma$值之上下界模型：

已知泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n$的$\gamma$值為$\gamma_0$，若從數列$\langle t\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n\right) + c\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\gamma_0 + t - 1$項之和可表示出任一小於$c\gamma_0$的非負整數，

則$\mathrm{A}\left(t\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n\right) + c\right) = \gamma_0 + t - 1$。

且當$c = 1$時，可推知：

若泛費馬二次式$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n$的$\gamma$值為$\gamma_0$，則$\mathrm{A}\left(t\left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n\right) + 1\right) = \gamma_0 + t - 1$

(詳見模型一)

（二）用以求取型如$\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n$之二次式所對應的泛費馬二次式$\gamma$值之上下界模型：

當數列$\langle \frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$滿足某些條件時(詳見模型二中的說明)

$\mathrm{A}\left(\frac{p-2}{2}n^2 + \frac{4-p}{2}n\right) = \alpha - 2\beta + 3 - 2s$或$\alpha - 2\beta + 2 - 2s$，

其中$p = \frac{\alpha}{\beta} > 2, s$為滿足某條件之非負整數(詳見模型二中的說明)

三、　定理

【定理 1】

若兩個相異泛費馬二次式數列，分別為$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, f(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$、$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, g(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$，

且$g(n)=f(n-k),\ k\in\mathbb{N}$，則此兩個泛費馬二次式數列之$\gamma$值存在$\langle a_n\rangle$的$\gamma$值大於或等於$\langle b_n\rangle$的$\gamma$值之關係。

【定理 2】

若$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)=\gamma$，且$\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}$可組成1 至$\gamma(c-1)-1$ 等正整數,

其中$a_{\alpha_i}\in\left\{a_n \middle| a_n=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c\right\}$,則$A(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c)=\gamma$。

【定理 3】

已知二次式$\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)$，

若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$。

【定理 4】

已知二次式an^2+1之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}(an^2+1)$，
若$a\in\mathbb{N}$，則 $\mathrm{A}(an^2+1)=a+3$。

【定理 5】

已知二次式$\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)$，

若$a\in\mathbb{N}$，則$A\left(\frac{3a}{2}n^2-\frac{a}{2}n+1\right)=a+4$。

【定理 6】

已知二次式$\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1$之泛費馬二次式函數為：

$\mathrm{A}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}n+1\right)$，若$a,m\in\mathbb{N}$ 且$m\geq 3$，

則 $\mathrm{A}\left(\dfrac{a(m-2)}{2}n^2+\dfrac{a(4-m)}{2}n+1\right)=a+m-1$

【定理 7】

若a為正整數，b為整數，則對於一組數對(a,b)，必存在一個大於 2 之有理數p，及一正整數t，使得tp為正整數，且滿足$t(p-2)=a$，$t(4-p)=b$，即型如$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$之二次式恆可表示為$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，對於所有正整數$n$。

【定理 8】

已知二次式$\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1$之泛費馬二次式函數為$\mathrm{A}\left(\frac{a}{4}n^2+\frac{3a}{4}n+1\right)$，

若$\dfrac{a}{2}\in\mathbb{N}$，則$A\left(\dfrac{a}{4}n^2+\dfrac{3a}{4}n+1\right)=a+3$

【定理 9】

已知二次式$\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1$之泛費馬二次式函數為$A\left(\frac{3a}{4}n^2+\frac{a}{4}n+1\right)$，

若$\dfrac{a}{2}\in\mathbb{N}$，則$A\left(\dfrac{3a}{4}n^2+\dfrac{a}{4}n+1\right)=a+5$

【定理 10】

欲求二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$之泛費馬二次多項式函數值

$A(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1)$時，必須先解此不等式

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\geq 2$$

，若此不等式恆成立的解為$x>m_0$，$m_0\in\mathbb{R}$。

若對於同時滿足下列兩個條件之非負整數m：

1. 當$m>m_0$，則必可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和組成形如$\beta m$的非負整數。
2. 當對於任意小於等於m_0的m值，則可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和皆可組成形如$\beta m$的非負整數。

則泛費馬二次多項式函數$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)$值之上限為

$t+\alpha-2\beta+2$，其中$p=\frac{\alpha}{\beta}>2,\alpha,\beta\in\mathbb{N},$ 且$(\alpha,\beta)=1,\exists t\in\mathbb{N},\ \ni tp\in\mathbb{N}$。

【定理 11】

已知二次式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$的泛費馬二次多項式函數為

$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)$，當$p=\frac{\alpha}{\beta}>2,$ 且 $1\leq\alpha\leq10000$，$1\leq\beta\leq10,\exists t\in\mathbb{N},$

$\ni tp\in\mathbb{N}$ 時，先解此不等式

$$\left|\left(2-\frac{4}{p-2}+2\sqrt{\left(1-\frac{2}{p-2}\right)^2+\frac{2x-2(\alpha-2\beta-1)}{p-2}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{p-2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{16p-5p^2}{(p-2)^2}+\frac{8x}{p-2}}\right)\right|\geq 2$$

若此不等式恆成立的解為$x>m_0$，$m_0\in\mathbb{R}$。若對於同時滿足下列兩個條件之非負整數m：

1. 當$m>m_0$，則必可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和組成形如$\beta m$的非負整數。
2. 當對於任意小於等於m_0的m值，則可從數列$\langle\frac{\alpha-2\beta}{2}n^2+\frac{4\beta-\alpha}{2}n\rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出$\alpha-2\beta+3$項之和皆可組成形如$\beta m$的非負整數。

則$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)=t+\alpha-2\beta+2$或$t+\alpha-2\beta+1$

【定理 12】

已知對於部分泛費馬二次多項式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$在模型二中定義了一個非負整數$s_0$，而且任意泛費馬二次多項式所對應的$s_0$之值僅有兩種可能：$s_0=0$或不存在一非負整數滿足$s_0$之條件(即$s_0$之值不存在)。也就是說：對於任一滿足狹義定義域的泛費馬二次多項式$\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1$，其泛費馬二次多項式函數值$A\left(\frac{t(p-2)}{2}n^2+\frac{t(4-p)}{2}n+1\right)\geq t+\alpha-2\beta+1, p=\frac{\alpha}{\beta}$，且等號成立的必要條件為$\beta=3$

(註：顯而易見地，β不可為0，且我們亦不討論$\beta=1$的情況，因為費馬多邊形數定理即是在探討$\beta=1$的情況)

肆、結論與應用

一、結論

本研究承襲了前人證明費馬多邊形數定理所用之方法(模型二)，並創造出模型一，用以拓展前人的結果，大致達成了先前所設定之研究目的，並藉著電腦的運算能力，算出了在a,b的數值較小時，$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$ 的γ值的上下界，除被我們選出的特例外，將γ值的可能值縮為兩種可能：$t+\alpha-2\beta+2$ 或$t+\alpha-2\beta+1$，距離寫出 A 函數在狹義定義域的一般式可說是僅剩下一步之遙。

未來展望：

（一）寫出 A 函數在狹義定義域的一般式

(猜想：$A\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)\geq t+\alpha-2\beta+1$ 且除少數特例外，等號成立)

（二）寫出 A 函數在廣義定義域的一般式

（三）將 A 函數的定義域拓展至三次多項式，並找出其一般式

（四）將 A 函數的定義域中多項式的次數持續提高，以求對解決華林問題做出貢獻

二、應用

數學上的未解問題：華林問題

1770 年，愛德華·華林發表了《**代數沉思錄**》（Meditationes Algebraicae），其中說，每一個正整數至多是 9 個立方數之和；至多是 19 個四次方之和。並猜想，對於每個非 1 的正整數k，皆存在正整數$g(k)$，使得每個正整數都可以表示為至多$g(k)$個k次方數（即正整數的k次方）之和。(節錄自維基百科)

在此問題中，萊昂哈德·歐拉之子 J.A.歐拉猜想：$g(k)=2^k+\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\rfloor-2$，但至今仍未獲證明，故在遙遠的將來，此研究持續深入探討的話，可能可為華林問題做出貢獻。

伍、參考文獻與連結

一、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E5%B9%B3%E6%96%B9%E5%92%8C%E5%AE%9A%E7%90%86

二、A SHORT PROOF OF CAUCHY'S POLYGONAL NUMBER THEOREM PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 99, Number 1. January 1987

【附錄】

程式碼如下：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define maxalpha 1000
#define maxbeta 100
std::vector<float> An;
std::vector<float> a;
int get_m(int alpha,int beta)//求m
{
    int x=0,temp=0;
    double p2=(double)alpha/beta-2;//p2=p-2
    for(;temp<2;x++)
    {
        if((7/2-3/p2)*(7/2-3/p2)+(x*6-3*(alpha-beta*2-1))/p2-4<0)
            continue;

temp=3/2+(p2-1)/p2+sqrt((6-4/p2)*(6-4/p2)+8*x/p2)-sqrt((7/2-3/p2)*(7/2-3/p2)+(x*
6-3*(alpha-beta*2-1))/p2-4);
    }
    return x-1;
}
int again(float item)//避免資料庫重複
{
    int i;
    for(i=0;i<An.size();i++)
    {
        if(An[i]==item)
            return 0;
    }
    return 1;
}
int hypothesis(int m,int alpha,int beta)
{
    int items,i,if_there_is=0,j=0;
    float item,k;
    vector<float>::iterator it;
    for(items=0;items<alpha-beta*2+3;items++)//建立資料庫
```

```
{
   if(items==0)
    {
        for(i=0;i<a.size();i++)
        {
            An.push_back(a[i]);
        }An.push_back(-1);
    }else
    {
        for(j=0;An[j]!=-1;j++)
        {
            for(i=0;i<a.size();i++)
            {
                item=a.at(i)+An[j];
                if(m>=item&&again(item))
                {
                    An.push_back(item);
                }
            }
        }
        An.erase(An.begin()+j);
        An.push_back(-1);
    }
}
for(k=1.0;(int)k<=m;k++)//測試~m*beta是否包含於資料庫
{
    if_content=0;
    for(it=An.begin();it!=An.end();it++)
    {
        if(*it==k)
        {
            if_content=1;
            break;
        }
    }
    if(if_content==0)
        return 0;
}
return 1;
```

```
}
int main()
{
    int alpha,beta,if_hypothesis_is_true,m,j;//alpha,beta
    float p,i,an;
    for(beta=2;beta<maxbeta;beta++)
    {
        for(alpha=beta*2+2;alpha<maxalpha;alpha++)
        {
            if(alpha%beta!=0)//若p不為整數
            {
                m=get_m(alpha,beta);
                an=0;
                a.clear();
                An.clear();
                for(i=0.0;an<=m;i=i+1.0)//將小於m*beta的a放入a<n>
                {
                    a.push_back(an);
                    p=(alpha/1.0)/beta;
                    an=(p-2.0)/2.0*i*i+(4.0-p)/2.0*i;
                }
                if_hypothesis_is_true=hypothesis(m,alpha,beta);
                if(if_hypothesis_is_true==0)
                cout<<endl<<"alpha:"<<alpha<<" "<<"beta:"<<beta<<"
"<<"pass:"<<if_hypothesis_is_true<<endl;
            }
        }
        cout<<"--------------------"<<endl;
    }
    return 0;
}
```

全文完

【評語】010004

華林問題是數論中有趣而且不容易的問題。該作品利用已知$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$的$\gamma$值 去求$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$的$\gamma$值。

並利用程式得出某些範圍內$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$ γ值。結果雖然沒有解出所有$\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$的$\gamma$值，但是相關的訓練對作者有很大的幫助。