

2017 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160008
參展科別 物理與天文學
作品名稱 圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討
得獎獎項 大會獎：一等獎

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 邱莉華、陳義裕

作者姓名 戴子宜、于紹尹

關鍵字 摩擦力、數值分析

作者簡介



我們是北一女的于紹尹和戴子宜。很開心可以一起完成這項作品，在實驗過程中遇到困難、崩潰，再慢找到解決方法，也很享受在不同咖啡廳之間流浪打報告的時光。雖然有時候會吵架、打架，或是因為一個笑話了整天導致進度延誤但是這也訓練了我們危機處理的能力，讓我們在期限內有效率的完成報告。同時也真心感謝一路上協助我們的大家～

摘要

本實驗主要是要透過實驗及程式模擬分析，探討變形之阿特午機在一般狀況下及過渡期的運動過程。透過實驗，我們找出不同的初始條件對於運動結果的影響，如質量比、繩長等。我們透過實驗和數值分析建構變形之阿特午機的模型。因為摩擦力和空氣阻力對於運動的影響皆不可忽略，因此我們也設計阿特午機和鉛直圓周運動的實驗以求出兩個影響因素的參數，並將其結果統整於理論分析中。這份研究有助於我們了解力學分析的過程，目前我們也正在進行更詳細的數值分析，我們也希望能在之後將變形之阿特午機的理论與實驗結果結合，預測不同變因的實驗結果。

Abstract

A swinging Atwood's machine (SAM) is consisted of a pendulum, a counterweight, and a massless string connecting the two. The pendulum is allowed to swing around the horizontal bar holding the system while the counterweight falls down. The counterweight might get hitched to the bar as the string winding around the bar tightens up and causes a large enough friction. What is interesting is that we discovered that the swinging Atwood's machine might even "hiccup" and show stick-and-slip motion several times if the system parameters are suitably chosen. Having experimentally investigated this phenomenon and constructed a phase diagram showing the various regimes exhibited by the system, we supplemented it with numerical simulations and proposed a theoretical explanation for what had been observed.

壹、前言

一、研究動機

曾在網路上看到電視節目—「街頭實驗室」，節目中以汽車為重物，在汽車下方站有一個人。當輕物釋放後，繩索會纏繞於車頂上，最後因為車頂與繩索之間的摩擦力而使輕物、重物平衡，汽車懸吊在半空中使人免於被砸中。此外，在研讀文獻的過程中，我們也意外發現中華民國第 49 屆中小學科展中有項作品—「自由的代價--創造出新式極限運動」，以人為重物，將此運動運用在高空彈跳上。這樣的實驗使我們驚奇之餘也希望能從物理角度探討其相關問題。在本研究報告中，我們透過實驗和程式模擬，深入探討此運動的運動過程。

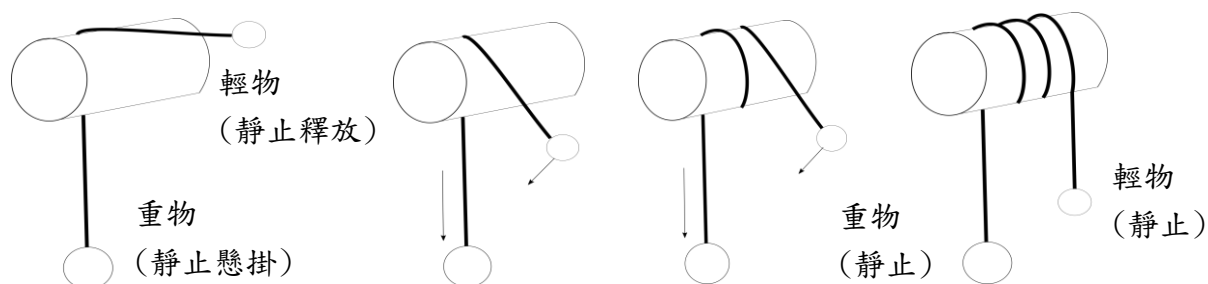


圖 1

釋放時，重物向下加速，輕物受繩張力和重力繞著橫桿轉動。最後兩者因為橫桿和繩之間的摩擦力靜止達到平衡。

二、研究目的

我們將研究動機中所描述的運動命名為「變形之阿特午機」，開始進行相關實驗。而在實驗與分析的過程中，我們發現這個運動過程會受到兩種因素的影響，分別為橫桿和繩之間的摩擦力以及空氣阻力。為了求出此影響因素的參數，我們先建立了兩個基礎的實驗，分別在研究方法第一點及第二點詳述。

另外，我們在進行變形之阿特午機的實驗時發現較為特殊的運動狀況，將之命名為「過渡期」，並在報告中的研究結果與討論第三點詳述。因此我們將研究目的分為以下四點：

- (一) 求出動摩擦係數：分析阿特午機中橫桿和繩之間的動摩擦力。
- (二) 求出空氣阻力參數：分析物體做鉛直圓周運動的運動狀況。
- (三) 分析變形之阿特午機的運動狀況及不同變因對於運動結果的影響。
- (四) 分析變形之阿特午機中「過渡期」的運動狀況。

貳、 研究方法

一、 求出動摩擦係數：分析阿特午機中橫桿和繩之間的動摩擦力

為了測得實驗時橫桿和繩之間的動摩擦力，我們設計了阿特午機的實驗。裝置如下：

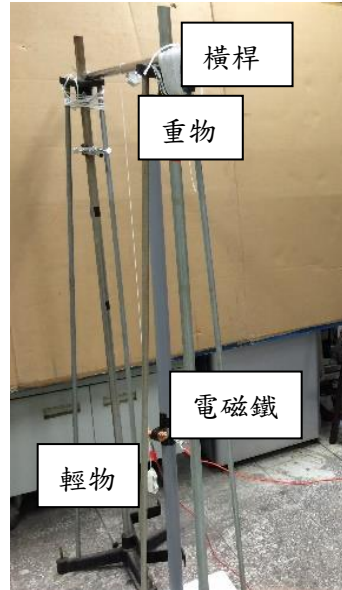


圖 2

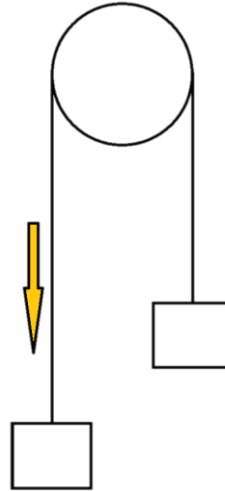


圖 3

如圖 2 及圖 3，使棉線纏繞過橫桿，棉線與橫桿接觸之部分張角度為 π 。棉線兩端分別連接不同質量的砝碼。為了確保輕物釋放的初速度為零，我們使用電磁鐵釋放輕物。釋放後，我們利用高速攝影機錄影，將得到的影片匯入程式 Tracker 中，以選取輕物、重物的軌跡，分析所得的數據。

另一方面，我們也利用軟體 Vpython，代入理論方程式，模擬運動的進行。方程式如下：

圖 4 為理想狀況下之阿特午機。使棉線纏繞過橫桿，棉線與橫桿接觸之部分張角度為 π 。棉線兩端分別連接質量為重物 M 和輕物 m 。令橫桿中心為直角坐標系的原點，水平方向向右為 x 軸正向。在假設橫桿和繩之間無摩擦力的影響下，我們列出以下方程式。

$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{M - m}{M + m} g$$

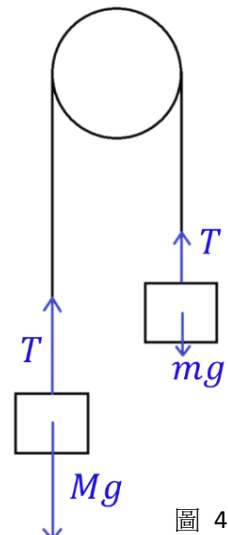


圖 4

將以上方程式匯入 Vpython，並以 Euler method 積分後得到物體每一時刻的位置。將模擬的數據匯出後和實驗數據疊合，如圖 5 及圖 6。

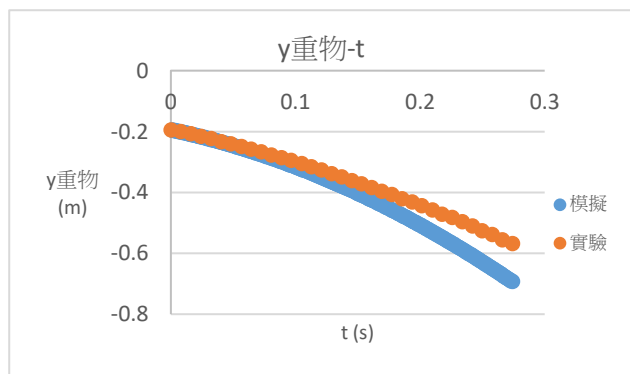


圖 5

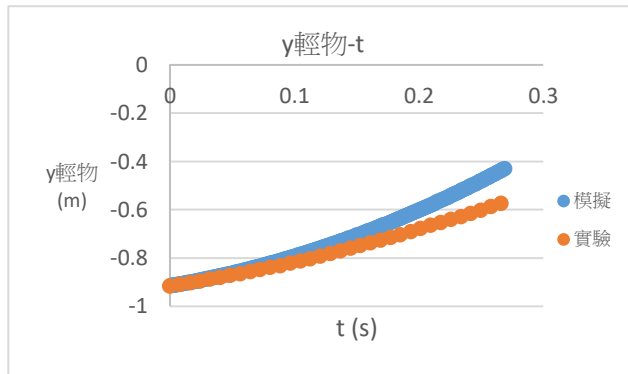


圖 6

定義原點為零位面處，求出系統力學能和摩擦力隨時間的變化，如圖 7 和圖 8。由圖 8 可發現摩擦力為定值，且大約為 0.3200N。

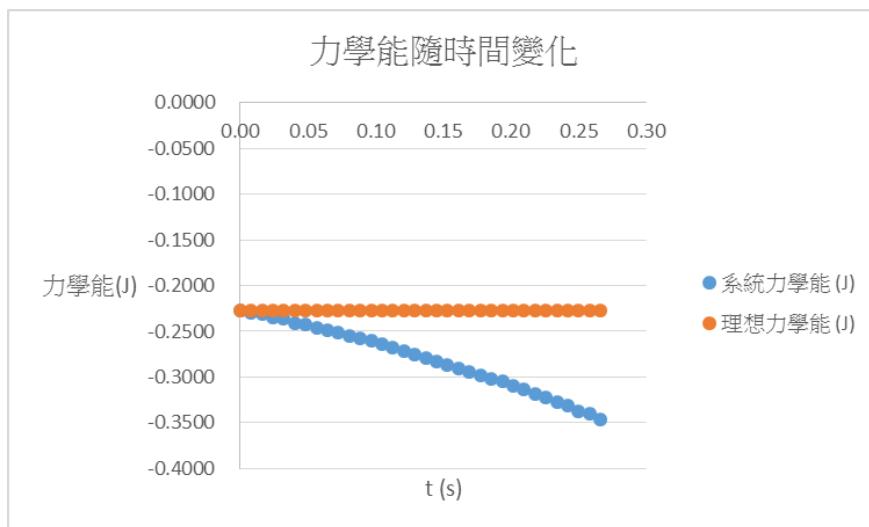


圖 7

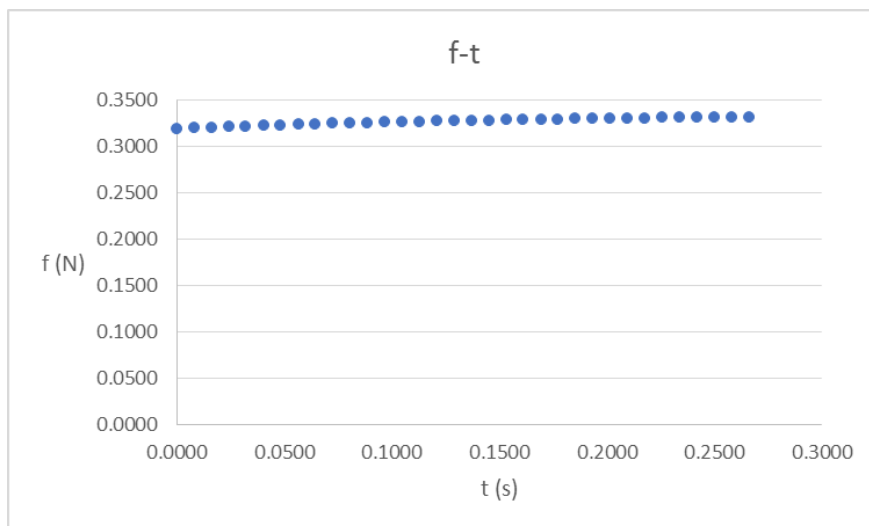


圖 8：摩擦力隨時間的變化。如圖，摩擦力約為一個定值。

分析以上的結果後，我們修正了帶入 Vpython 的方程式，加入了摩擦力的影響。假設橫桿和繩之間的動摩擦係數為 μ ，棉線連接輕物一端的張力為 T_2 ，連接重物一端為 T_1 。透過歐拉摩擦理論，可將兩者的關係式表示為

$$T_1 = T_2 e^{\mu\pi}$$

因此可將阿特午機的公式修正如下：

$$\begin{cases} Mg - T_1 = Ma \\ T_2 - mg = ma \\ T_1 = T_2 e^{\mu\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{M - me^{\mu\pi}}{M + me^{\mu\pi}} g$$

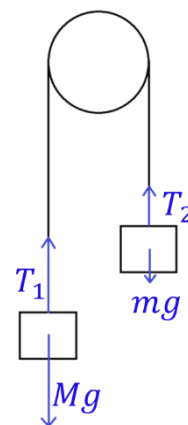


圖 9

透過上述公式求出動摩擦係數 μ 。將所有數據整理後為表格 1。由表中發現動摩擦係數約為定值，且平均 $\mu \approx 0.335$ 。

輕物質量m (g)	重物質量M (g)	T_2 (N)	T_1 (N)	動摩擦係數 μ
13.2	64.4	0.167	0.447	0.313
13.2	64.4	0.165	0.458	0.326
13.2	64.4	0.165	0.457	0.325
13.1	77.2	0.174	0.490	0.330
13.1	77.2	0.171	0.504	0.343
13.2	90.4	0.179	0.545	0.354
13.2	90.4	0.182	0.522	0.335
13.2	90.4	0.185	0.503	0.318
13.2	103.3	0.192	0.523	0.320
13.2	103.3	0.187	0.564	0.352
13.2	116.3	0.194	0.566	0.340
13.2	116.3	0.196	0.549	0.327
13.1	129.1	0.198	0.576	0.340
13.1	129.1	0.195	0.612	0.365

表格 1

二、 求出空氣阻力參數：分析物體做鉛直圓周運動的運動狀況

為了測得實驗時空氣阻力的參數，我們設計了鉛直圓周運動的實驗。實驗裝置如圖 10，繩的一端纏繞在橫桿上，另一端則連接物體。在給予物體初速度後，以高速攝影機錄下，將得到的影片匯入程式 Tracker 中，分析所得到的數據。



圖 10

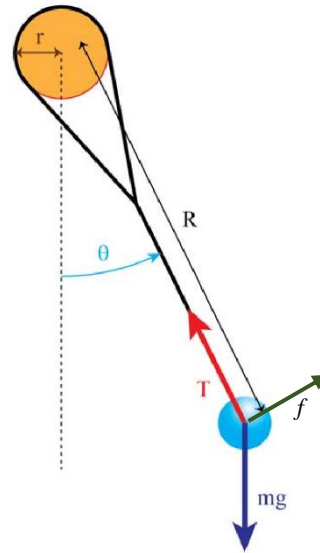


圖 11

在實驗中，我們假設繩子無質量。而在運動過程中，物體對於橫桿中心的力矩會受到橫桿和繩之間的動摩擦力、空氣阻力和重力的影響，如圖 11 所示。分別將空氣阻力、繩張力、摩擦力表示如下。其中假設 γ 為空氣阻力的參數， μ 為橫桿和繩之間的動摩擦係數。

$$f_{\text{空氣阻力}} = \gamma \pi a^2 \rho \left(R \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$T = mg \cos \theta + mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$f_{\text{摩擦力}} = \mu T$$

因此合力矩可以表示如下：

$$mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -f_{\text{摩擦力}} \cdot r \cdot \text{sgn}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) - f_{\text{空氣阻力}} \cdot R \cdot \text{sgn}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) - mgR \sin \theta$$

令橫桿中心為直角坐標系的原點，水平方向向右為 x 軸正向。將以上微分方程式帶入 Vpython，以 Euler method 方式積分，可得下列結果：

圖 12 和 13 分別為不計空氣阻力($\mu = 0.335; \gamma = 0$)時，物體位置隨時間的變化。我們在模擬程式中加入空氣阻力的影響，調整程式中空氣阻力係數 γ ，使模擬結果和實驗結果相符合，如圖 14 和 15，此時 $\mu = 0.335; \gamma = 0.5$ 。因此我們取空氣阻力係數 $\gamma = 0.5$ 。

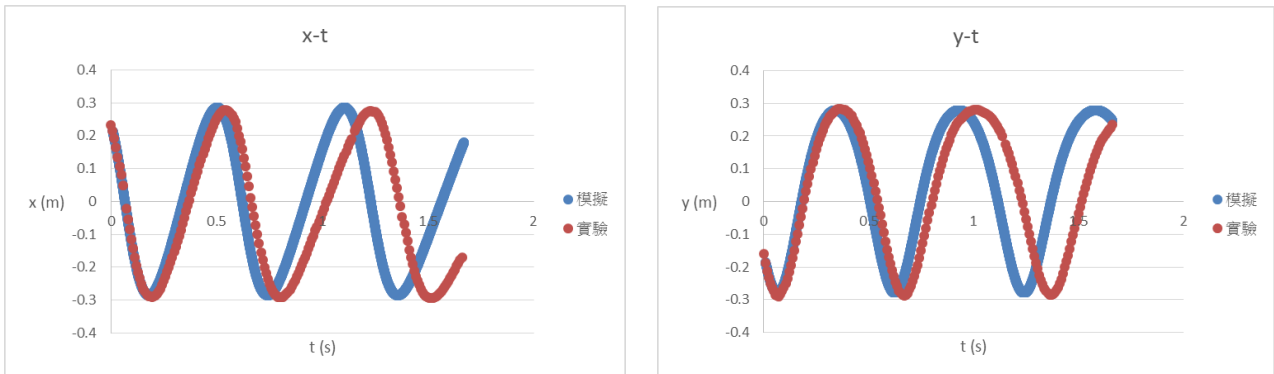


圖 12、圖 13：不計空氣阻力，物體位置隨時間的變化 ($\mu = 0.335; \gamma = 0$)。

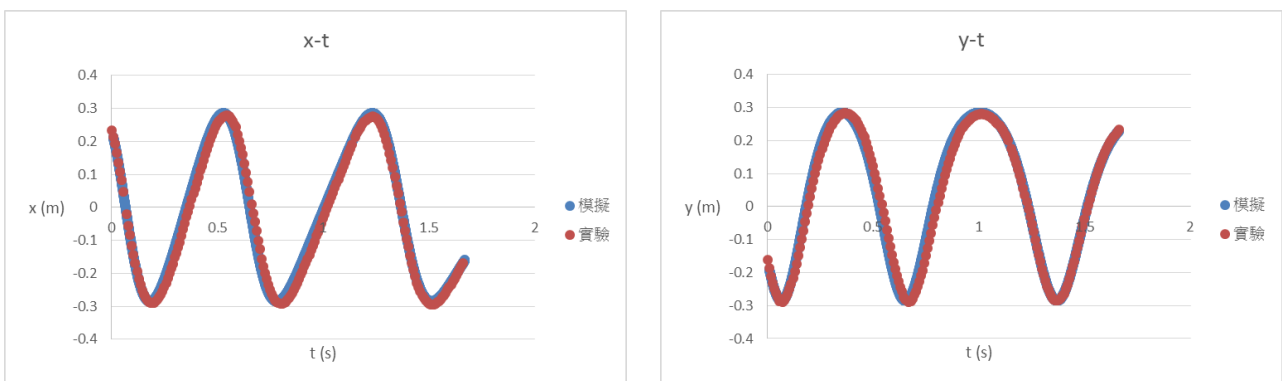


圖 14、圖 15：加入空氣阻力的影響，物體位置隨時間的變化 ($\mu = 0.335; \gamma = 0.5$)。



圖 16：Vpython 模擬介面

三、 變形之阿特午機

(一) 運動概述及實驗裝置

如圖 17，釋放前，連接輕物和重物的繩子垂直，且輕物和重物初速度皆為零。釋放後，重物向下加速，輕物則受繩張力和重力而繞著橫桿轉動，使繩纏繞在橫桿上。最後兩者因為橫桿和繩之間的摩擦力靜止而達到平衡。

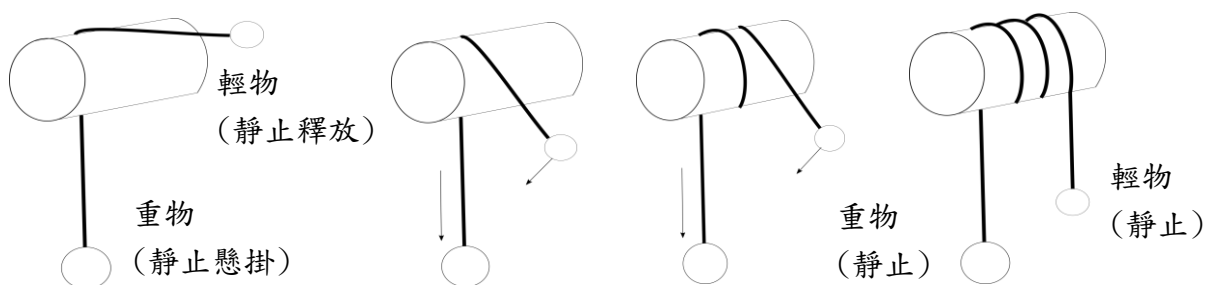


圖 17

本實驗之實驗裝置是以鐵架為主體，支撐所繞行之橫桿。橫桿採用實心金屬管。為確保輕物釋放的初速度為零，採用電磁鐵釋放，一端連接電源供應器，中間串聯可變電阻，使得在實驗過程中可以調整磁力的大小。將物體釋放後，以高速攝影機錄下，並將影片匯入程式 Tracker 中，分析所得到的數據。

圖 18 和圖 19 分別為釋放前後的裝置簡圖。黃色圓球表示重物，黑色圓球則表示輕物。圖 20 及圖 21 則為實際裝置圖。

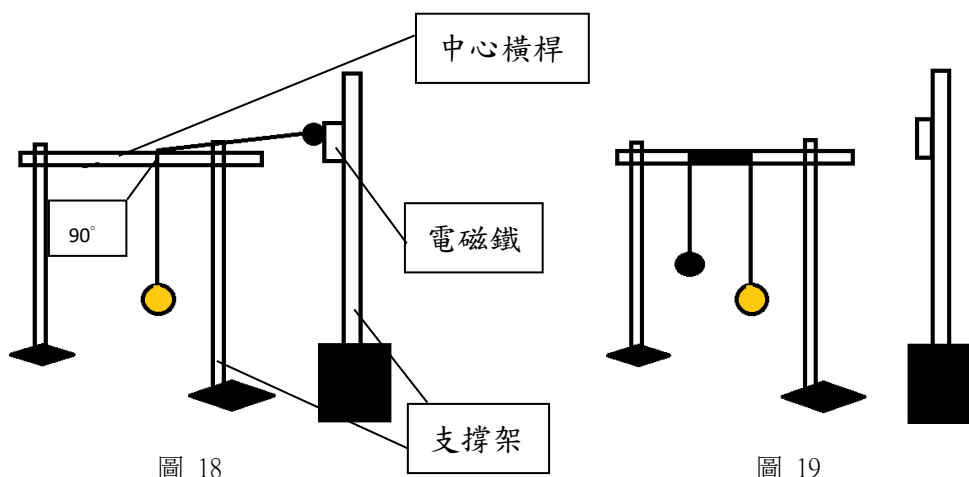


圖 18

圖 19



圖 20

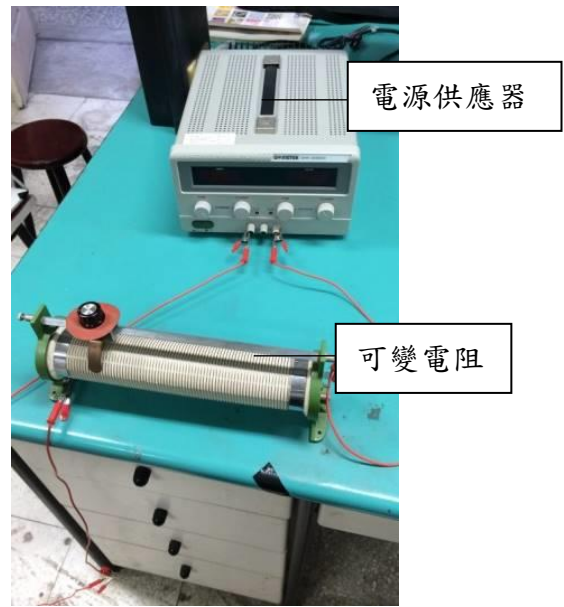


圖 21

(二) 透過理論列出方程式

如圖 22， $\theta + \frac{\pi}{2}$ 為不計質量的繩子繞過橫桿的夾角， μ 為橫桿和繩之間的動摩擦係數， γ 為空氣阻力係數， ρ 為空氣密度， a_1 為輕物的半徑， a_2 為重物的半徑。 T_2 為連接重物 m_2 一端的繩張力， T_1 為連接輕物 m_1 一端的繩張力， f_2 為重物受到的空氣阻力，方向向上， f_1 為輕物受到的空氣阻力。 y 為重物以橫桿中心為原點，向下為正的鉛直位置。

由於摩擦力的方向會因為重物的速度方向而改變，因此，由歐拉摩擦理論和重物所受的合力，我們可得到下列方程式：

$$\frac{dy}{dt} > 0, \quad T_2 = T_1 e^{\mu(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{dy}{dt} < 0, \quad T_1 = T_2 e^{\mu(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - \frac{T_2}{m_2} - \frac{f_2}{m_2}$$

$$f_2 = \gamma \pi a_2^2 \rho \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

如圖 23， l 為輕物 m_1 到繩與橫桿切點的距離， r 為橫桿半徑， L 為繩的總長，則可以得到下式。

$$l + r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + y = L$$

我們也將輕物 m_1 的位置和加速度表示如下，其中 X, Y 座標標示如圖 23：

$$\begin{cases} X = r \sin \theta + l \cos \theta \\ Y = r(1 - \cos \theta) + l \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{T_1}{m_1} \cos \theta + \frac{f_1}{m_1} \sin \theta \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = g - \frac{T_1}{m_1} \sin \theta - \frac{f_1}{m_1} \cos \theta \end{cases}$$

$$f_1 = \gamma \pi a_1^2 \rho \left(\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right)$$

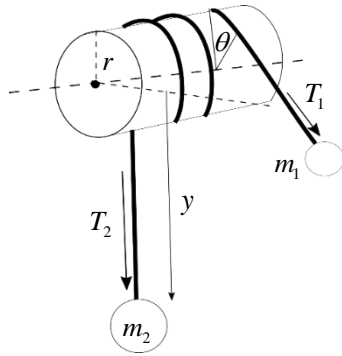


圖 22

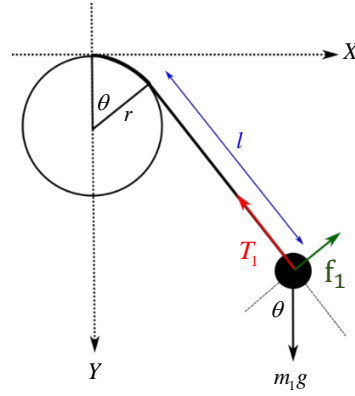


圖 23

經由整理後，最終得到以下方程式：

$$\frac{dy}{dt} > 0, \begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dt} \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta - \frac{\gamma \pi a_1^2 \rho}{m_1} \left((L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)}{L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-(L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g \left(\frac{m_2}{m_1} e^{-\mu(\theta + \frac{\pi}{2})} - \sin \theta \right) - \frac{\gamma \pi a_2^2 \rho}{m_1} \left(\frac{dy}{dt} \right) e^{-\mu(\theta + \frac{\pi}{2})}}{\frac{m_2}{m_1} e^{-\mu(\theta + \frac{\pi}{2})} + 1} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} < 0, \begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dt} \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta - \frac{\gamma \pi a_1^2 \rho}{m_1} \left((L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)}{L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-(L - r(\theta + \frac{\pi}{2}) - y) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g \left(\frac{m_2}{m_1} e^{\mu(\theta + \frac{\pi}{2})} - \sin \theta \right) - \frac{\gamma \pi a_2^2 \rho}{m_1} \left(\frac{dy}{dt} \right) e^{\mu(\theta + \frac{\pi}{2})}}{\frac{m_2}{m_1} e^{\mu(\theta + \frac{\pi}{2})} + 1} \end{cases}$$

我們將最終所得的聯立微分方程組，帶入程式 Vpython 中，以時間間隔 0.0005 (s) 利用 Euler method 的數值積分方法模擬運動的進行。

參、 研究結果與討論

一、 變形之阿特午機的運動狀況

在經過多次實驗後，我們發現此運動可以分為兩段，而兩段的分界點則為重物下落至最低點的靜止瞬間。我們以此分界點，將此運動分為旋轉前後兩個階段，如圖 25 所示。旋轉前段，重物向下落下，輕物則繞著橫桿運動。到了旋轉後段，重物已經靜止，輕物則繼續纏繞於橫桿上。我們在報告中的模擬主要以旋轉前段為主。

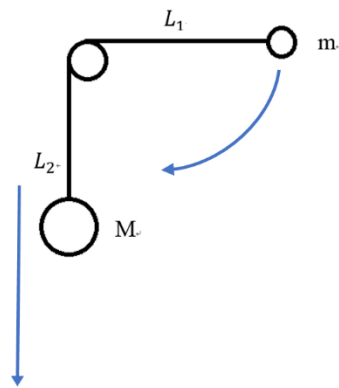


圖 24

另外，我們選定表格 2 中的實驗條件，作為參考模型，為其他情況下的運動之對照組。令橫桿中心為直角坐標系的原點，水平方向向右為 x 軸正向。以下為參考模型的運動結果：

參考模型之條件：

M(重物質量)	m(輕物質量)	水平繩長 L_1	鉛直繩長 L_2	總長
60.9(g)	8.5(g)	107.5(cm)	20.5(cm)	127.5(cm)

表格 2

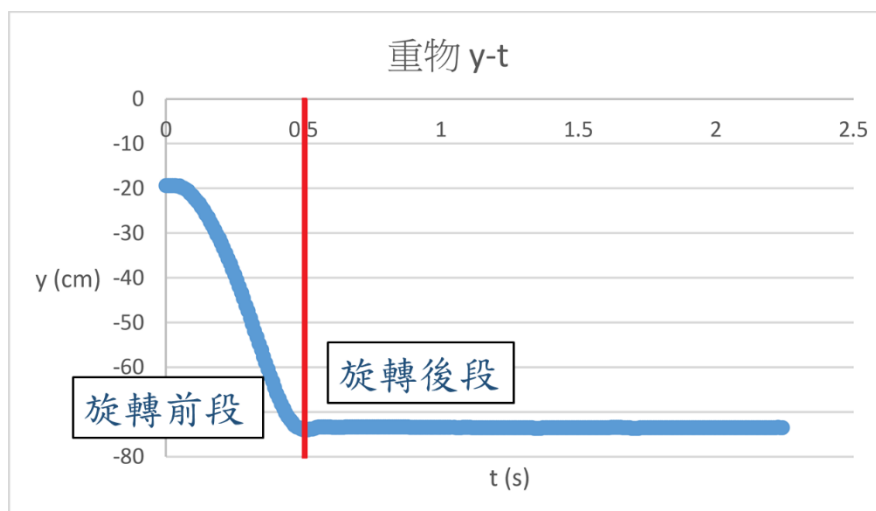


圖 25

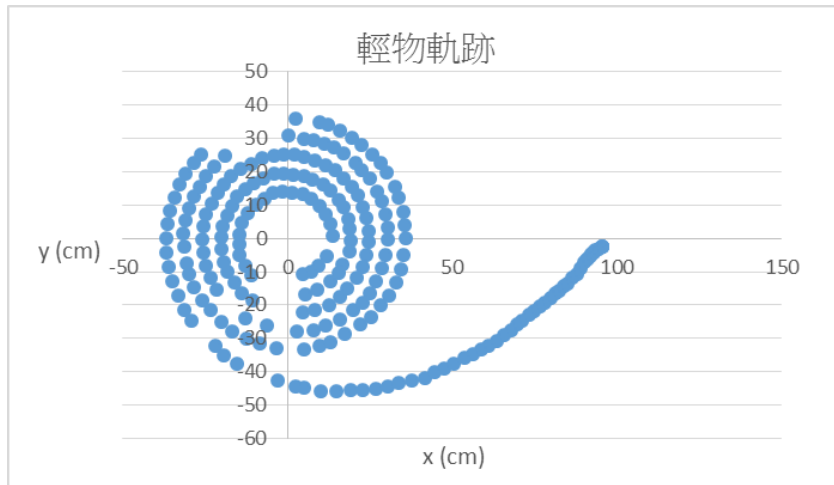


圖 26：輕物軌跡

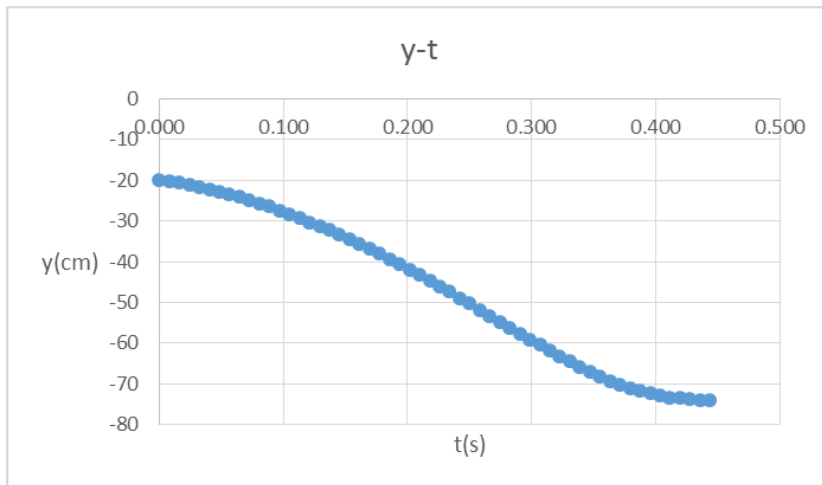


圖 27：旋轉前段重物位置隨時間的變化

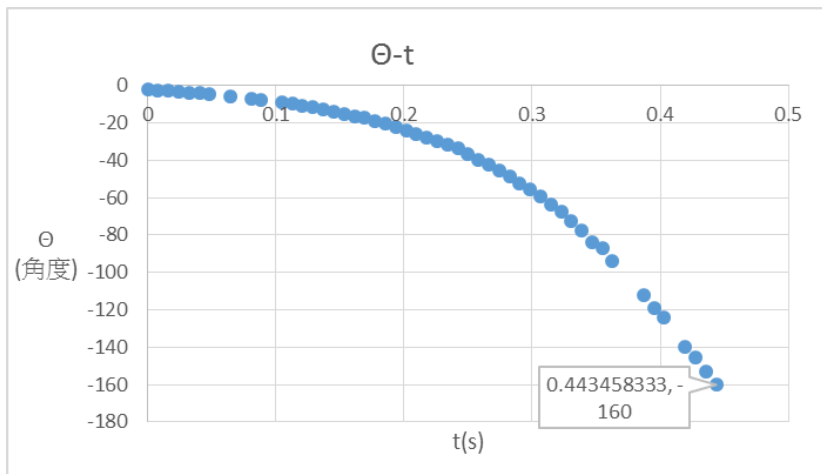


圖 28：旋轉前段，輕物旋轉角度隨時間變化。我們定義角度 x 軸為零度，逆時針方向為正。

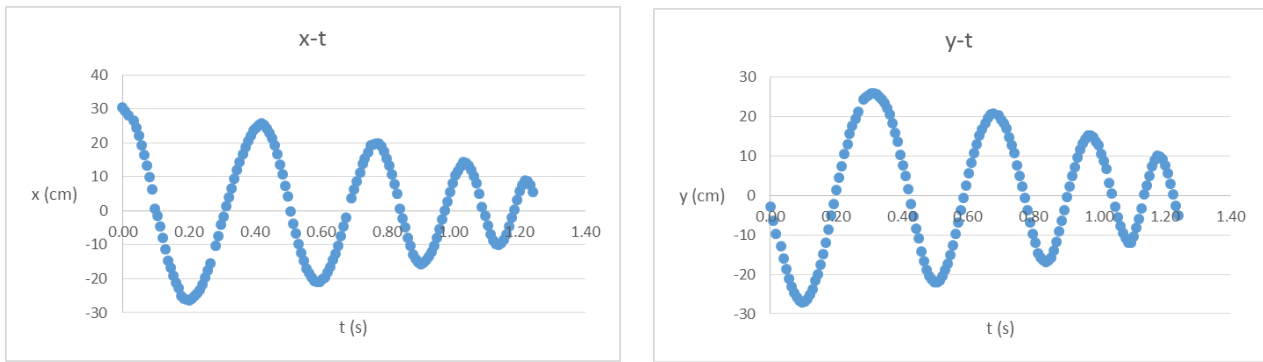


圖 29、圖 30：旋轉後段輕物位置隨時間的變化

二、 變形之阿特午機程式模擬結果

我們將 Vpython 帶入參考模型的初始條件，並將先前實驗求得的動摩擦係數 μ 和空氣阻力參數 γ 數值帶入方程式中，模擬變形之阿特午機在旋轉前段的運動過程，發現模擬結果和實驗結果相當吻合，如圖 31 及 32。

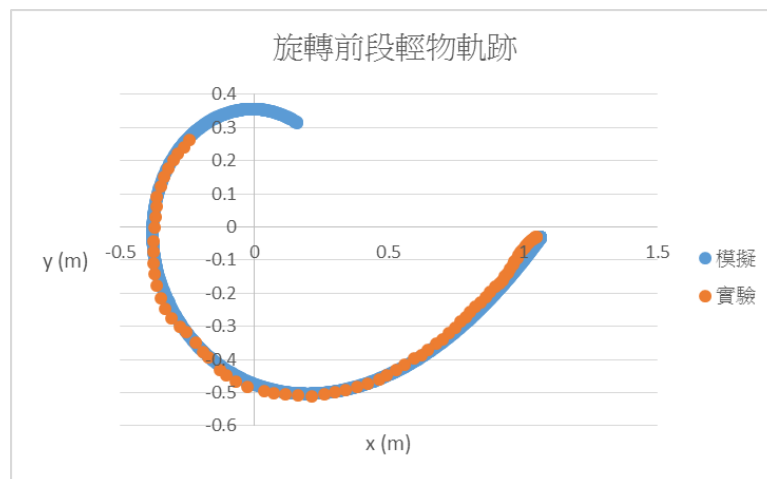


圖 31：旋轉前段輕物軌跡

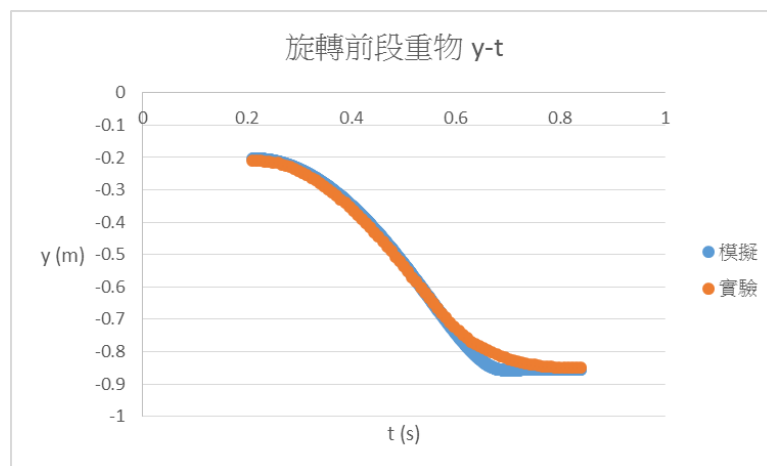


圖 32：旋轉前段重物 y-t

三、 實驗中不同變因對於運動結果的影響

在實驗中，我們改變不同的初始條件，觀察其對運動結果的影響。

(一) 質量比對重物落下距離的影響：

圖 33 為質量比對重物落下距離的關係。重物平均落下距離為重物從初始位置落至最低點靜止時所移動的距離，也就是重物在旋轉前段所經歷的位移，而質量比則為重物和輕物的質量差距比例。

從表中我們可以看到，當質量比越大，重物落下距離也會增加，且隨著質量比增加，重物落下距離的增加會漸緩，如圖 33。

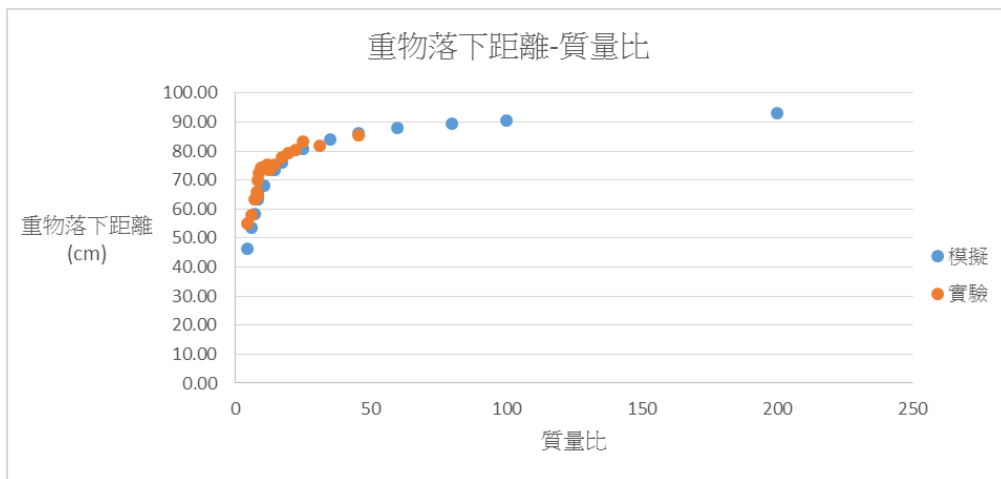


圖 33

(二) 質量比對旋轉前、後分期角度的影響：

旋轉前後分期角度為輕物在旋轉前段劃過的角度。從圖 34 中，我們發現兩者有正相關的趨勢。

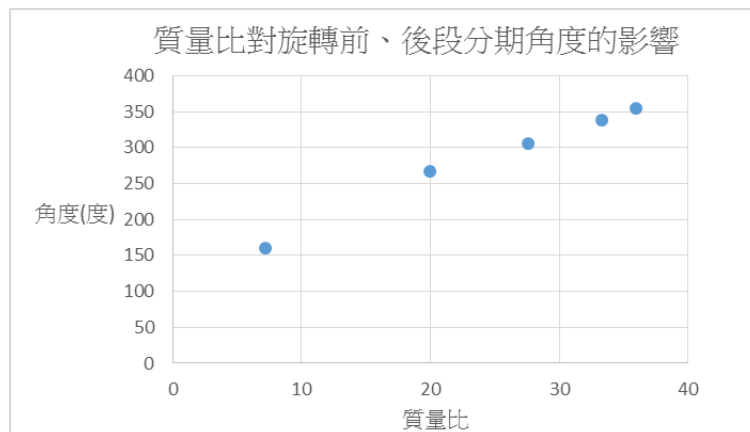


圖 34

(三) 平均落下距離對水平繩長的影響：

經過實驗測試，我們發現鉛直繩長(圖 21 中的 L_2 長度)對實驗結果無顯著影響，因此我們主要探討水平繩長(圖 21 中的 L_1 長度)所造成的影響。當水平繩長越長，重物落下距離也會增加。從實驗與模擬結果中，我們可以發現兩者約呈現線型關係。

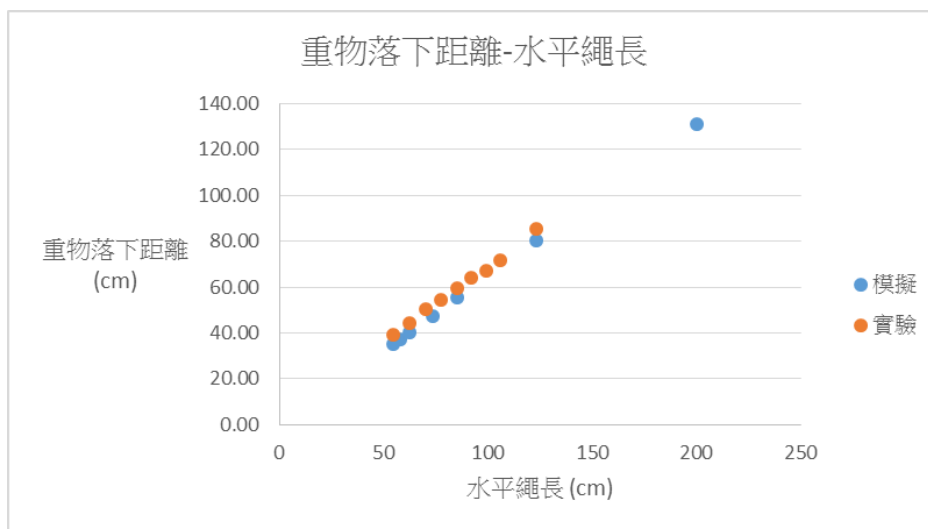


圖 35

(四) 質量比對最短水平繩長的影響：

在探討上述變因時，我們發現水平繩長對運動的結果有明顯的影響。當質量比相同時，若水平繩長過長或是過短，輕物和重物最後都無法在橫桿上達成平衡(將在結果第四點的過渡期中詳述)，唯有當水平繩長介在一定的範圍內，運動才能成功，即重物和輕物最後能在橫桿上達成平衡。因此我們以質量比對最短水平繩長為探討目標來進行實驗。從圖 36 實驗結果中，我們發現當重物和輕物質量相差越大時，需要較長的水平繩長才能使運動成功。

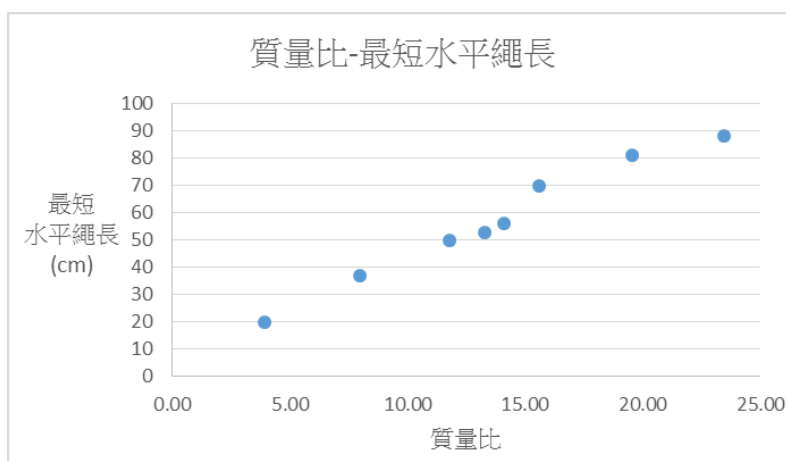


圖 36

四、「過渡期」

在上述改變不同變因的實驗中，我們曾探討過質量比對最短水平繩長的影響，當質量比相同時，若水平繩長過長或是過短，輕物和重物最後都無法在橫桿上達成平衡，唯有當水平繩長介在一定的範圍內，運動才能成功，即重物和輕物最後能在橫桿上達成平衡。在發現成功情況有特定邊界條件之後，我們進一步實驗以逼近邊界條件。圖 37 為固定質量比下，改變水平繩長長度的實驗結果。然而，我們卻發現運動成功和失敗之間存在一個過渡區域，我們便定義水平繩長在過渡區域內所形成的運動狀況為過渡期。

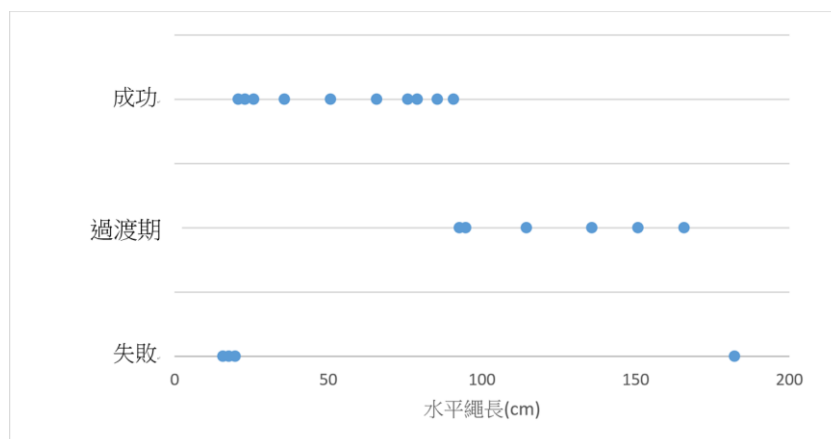


圖 37

我們重複先前實驗方法分析過渡期的運動軌跡，如圖 39。從圖中我們可以發現重物下落時經過短暫靜止。由圖 40 中，我們可以發現過渡期運動和正常運動的差異主要發生在輕物繞行第一圈時。由於重物短暫靜止時輕物正繞行橫桿第一圈，因此輕物正常繞行時(圖 26)，輕物軌跡呈現較正的螺旋型，而在過渡期時則稍有偏移。在第二圈之後因為重物已達最低點靜止(達旋轉後段)，因此兩種運動情況的輕物的運動軌跡差別不大。

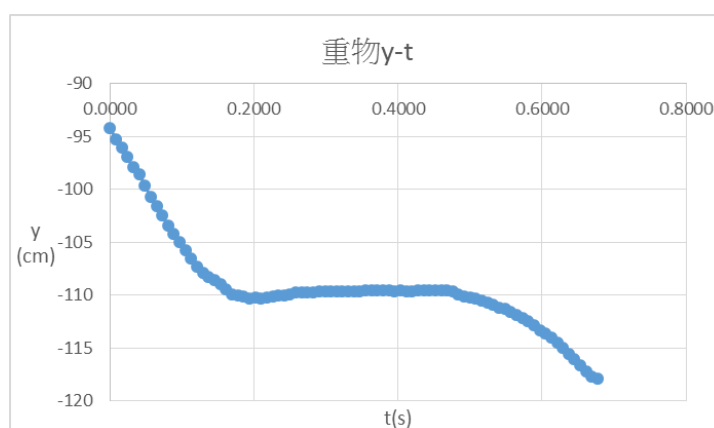


圖 24：過渡期的重物 y-t 圖

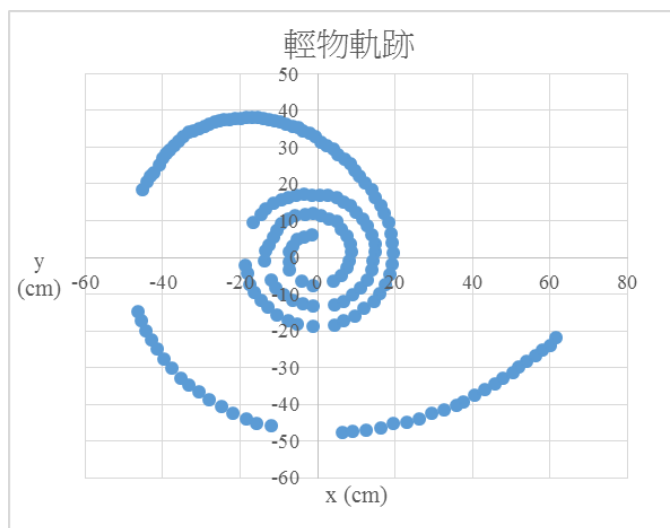


圖 250：過渡期的輕物軌跡圖

過渡期是因為摩擦力方向改變而形成的特殊情況。摩擦力方向的改變使細繩兩端張力有互相消長的情況發生。在運動初期，重物端張力較輕物端張力大，因此摩擦力方向和輕物端張力同向，最終造成重物的短暫靜止。而當重物短暫靜止時，摩擦力會改變方向進而使輕物速率和輕物端張力減小，最後使重物脫離束縛再次下落。

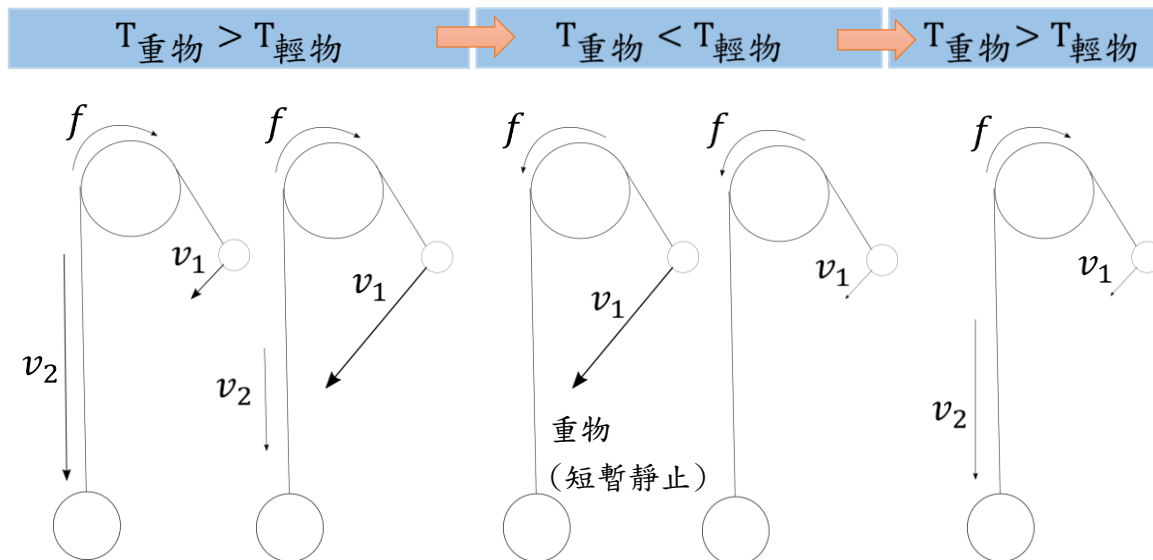


圖 38

肆、 結論與應用

- 一、透過阿特午機實驗求出摩擦係數及摩擦力隨時間的變化。
- 二、在鉛直圓周運動中，找出空氣阻力對於運動的影響，並求出係數 γ 。
- 三、在變形之阿特午機的實驗中，找出不同變因間的相關性。在理論分析的過程中，模擬結果和實驗結果大致相符。
- 四、發現並定義過渡期，探討其發生的原因。

伍、 參考文獻

- 一、許亭均、陳映彤、柯明君(中華民國第 49 屆中小學科學展覽會國中組)。自由的代價--創造出新式極限運動。
- 二、陳澤君、程敏熙(2015)。基於 Tracker 和 Vpython 的物理建模方法。

【評語】 160008

作品以實驗之討論分析雙質點圓周運動的物理現象。作品定型，也呈現有超物理現象，或許再對原點質量比、繩長、摩擦力等之物理參數，作圓周運動的行為作相同分析，可再精進結果。