2017 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010040

參展科別　數學

作品名稱　故態復「蒙」,「日」新月異

-Monge's theorem 的性質探討與推廣

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　臺北市立麗山高級中學

指導教師　林永發、吳采玲

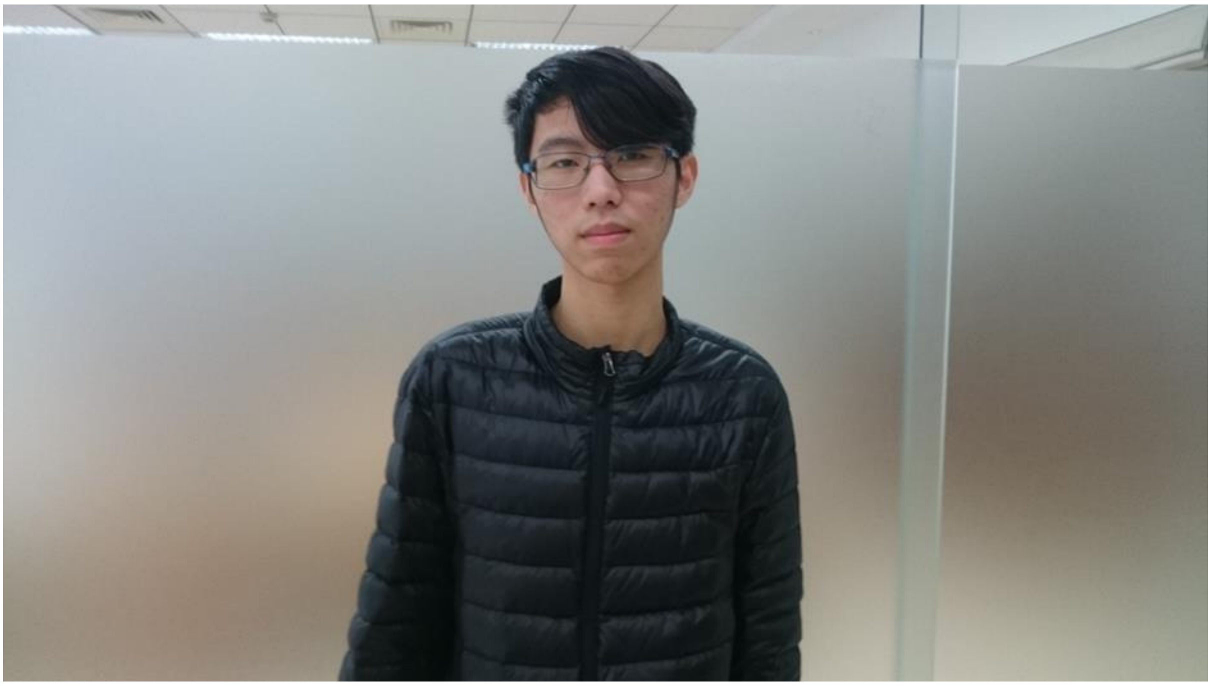
作者姓名　郭品辰、盧冠綸、陳祥恩

關鍵字　蒙日定理、射影幾何、共點共線

作者簡介

我是郭品辰，目前就讀臺北市立麗山高中二年級。我自幼就對數學很有興趣，經常向姊姊請教她正在學的課程，平時我也會找一些有趣的數學題目，並試著以不同角度去解題，使自己的數學能力更加精進。我的夢想是成為一名數學老師，並像我們現在做專題的一樣，帶領學生自己探索一些數學性質，因為我認為自己去探索能增加許多能力，或許也因此能有更好的成就。期待在這次盛會中，能與來自四面八方的學生有所交流，學習新知，並滿載而歸。

我是盧冠綸，從小，我總是充滿了好奇心，滿頭滿腦充滿著各種奇奇怪怪的鬼點子，對生活中觀察到的各種大大小小的科學現象都非常的好奇。進入了麗山高中就讀後，接觸到了學校頗具盛名的專題研究課程，我開始一心一意的投入研究，學習各種研究方法、報告表達方式和許許多多不同的幾何觀點。希望在這次的盛會之中，能夠看到更多不同的幾何推廣觀點、特別的證明方法，認識更多與我們一樣投入於數學科展的同儕，彼此互相交流。



我是陳祥恩，目前就讀麗山高中二年級，小學時身因為身邊沒有朋友，所以都自己在座位上讀書，日復一日，我逐漸發現自己對數學有興趣，中學時參加了數學資優班,數學課後班等課程後才讓我用數學教朋友，在老師的教導中亦從中學習到許多的數學技巧，我希望也能在這次的科展，除了參展外，也能遇到志同道合的朋友。

摘要

本研究以蒙日定理「平面上三圓彼此的外公切線交點共線」及其對偶定理「平面上三圓彼此的內公切線交點與另一圓的圓心的連線共點」出發，探討三圓更多由內、外公切線所產生的共點共線性質，進而探討四圓以上的情形，以及正多邊形、圓錐曲線等位似圖形，並推廣至空間中的球體。正如本研究作品名稱，我們將鮮少人研究的蒙日定理萌發出新枝，在日夜中茁壯，甚至最後有驚人的發現「在空間中n個外離的球，任意1個球的球心與另n-1個球的蒙日點連線會共交一點，此點稱之為**n球的蒙日點**」，此「點」發現，讓人不禁對宇宙中星體之間的關係產生更多無限的想像。

Abstract

This research is base on the Monge's theorem: “ any three circles on a plane, intersection points of the three pair external common tangent lines are collinear” and its dual theorem: “any three circles on a plane, the intersection points of the three pair internal common tangent lines, connect it to the third circle’s center, three lines concurrent”. We looked further into other special properties when the two theorem meet together. In addition, we degenerated circles into regular polygons, projective transform it to conic section and also extended it to three-dimensional. We found some incredible results: any N balls in the space, none of which is inside another, connect any one ball’s center to the monge’s point of the other balls, those lines will be concurrented.

壹、前言

一、研究動機

我們在「The Schiller Institute」網站上意外看到蒙日定理，「在平面上三個外離的圓，彼此兩圓的外公切線交點會在同一條直線上」的有趣結果。如果不是外公切線而是內公切線，結果會如何？會共點嗎？又如果是 4 個圓呢？甚至是空間中的球體，會不會有令人意想不到的結果呢？再者，蒙日定理在射影幾何上扮演重要的理論基礎，上述這些想像或推廣若成立，對近年來非常熱門的虛擬實境（Virtual Reality），或許能提供幾何光學應用的理論基礎，甚至可探究宇宙星球間的關係。這引起了我們想一探究竟的好奇心。

二、研究目的與問題

本研究目的試圖從平面上三圓的內、外公切線交點的性質探討，推廣至四圓以上、正多邊形、圓錐曲線等位似圖形及空間中的球體與多面體，問題如下：

（一）探討平面上三圓蒙日定理的性質與推廣。

（二）探討平面上四圓蒙日定理的性質與推廣。

（三）探討平面上無限個圓蒙日定理的性質與推廣。

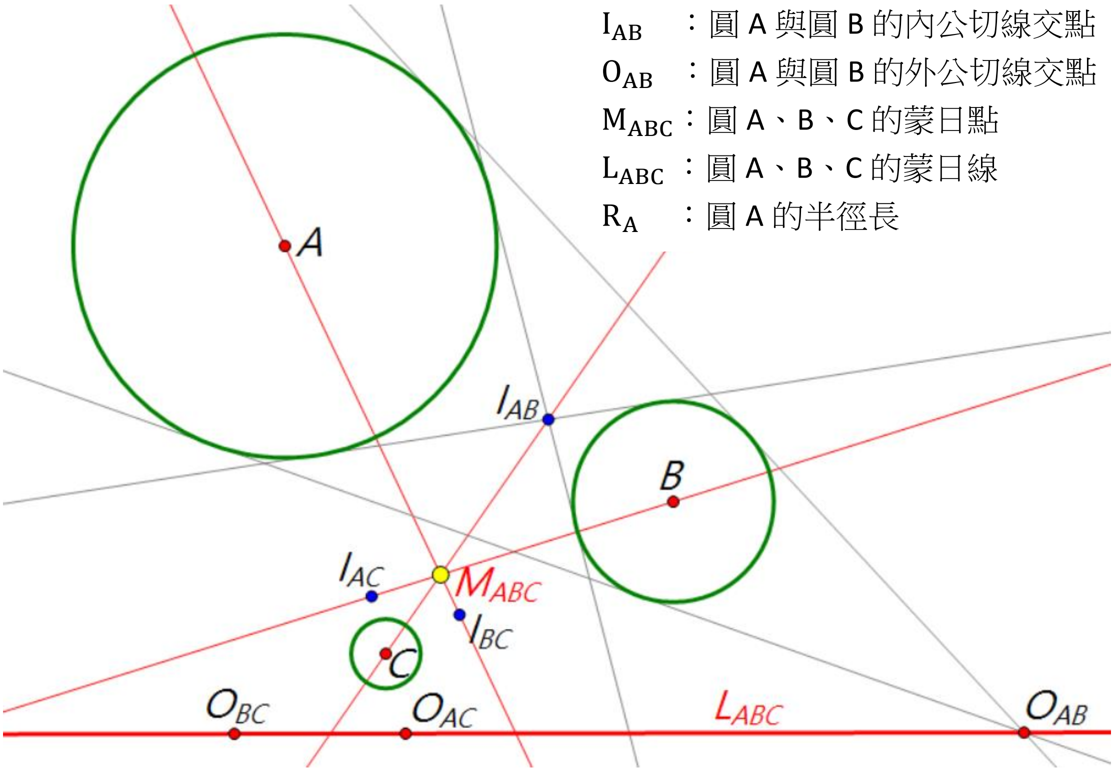
（四）根據上述問題，探討其在正多邊形、圓錐曲線等位似圖形及空間多面體與球體的性質與推廣。

貳、研究工具與方法

一、研究工具

（一）我們利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行問題的幾何實驗，透過實驗、觀察、猜測、驗證等，發掘研究結果並加以證明。

（二）為了讓符號能充分表達其所代表的幾何意義，做了以下符號命名：



I_{AB} ：圓 A 與圓 B 的內公切線交點

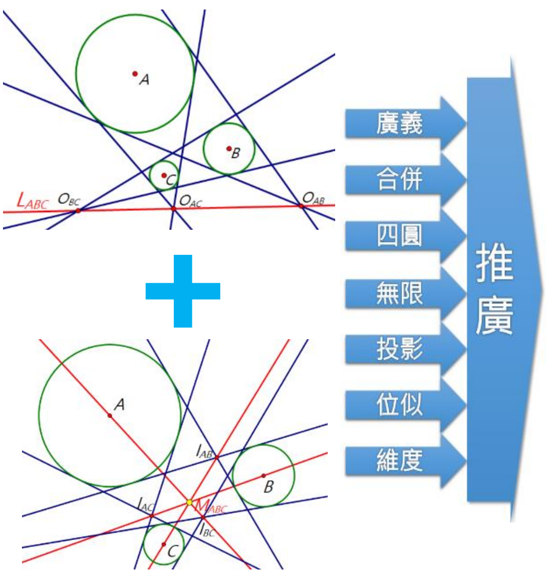
O_{AB} ：圓 A 與圓 B 的外公切線交點

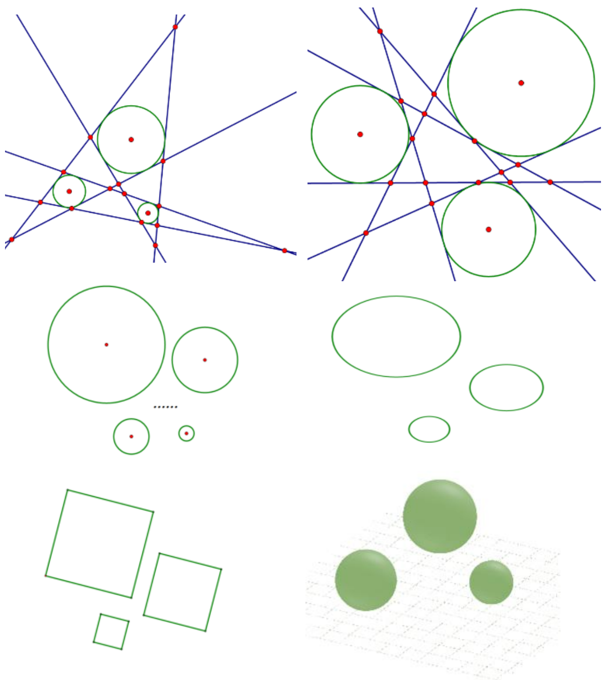
M_{ABC}：圓 A、B、C 的蒙日點

L_{ABC} ：圓 A、B、C 的蒙日線

R_A ：圓 A 的半徑長

二、研究架構與方法



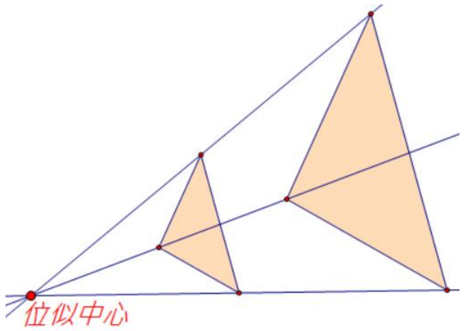


三、文獻探討

（一）位似圖形（Homothetic Graph）（參見文獻[1]）

若兩相似多邊形其對應頂點的連線交於一點則稱其互為**位似圖形**，交點稱為**位似中心**，其相似比又稱為**位似比**，如右下圖。性質如下：

【性質1-1】
位似圖形對應線段的比等於相似比。
【性質1-2】
位似圖形的對應角都相等。
【性質1-3】
位似圖形面積的比等於相似比的平方。
【性質1-4】
位似圖形高、周長的比都等於相似比。

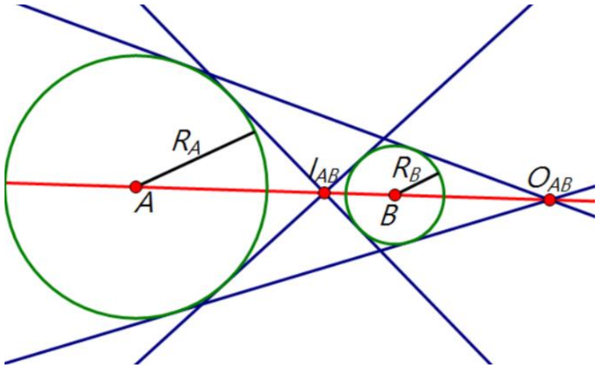


由於圓可視為無限邊形，故上述性質在兩圓上亦成立。

如右圖，將【性質1-1】在圓上的運用，即可寫出下式：

$$\frac{\overline{A\ I_{AB}}}{\overline{B\ I_{AB}}}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{\overline{A\ O_{AB}}}{\overline{B\ O_{AB}}}$$

此式在後續證明有很大的助益。



（二） Menelaus 定理、Ceva 定理與 Desargues 定理

【性質 2-1：Menelaus 定理】

若一直線與 $\triangle ABC$的 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$邊分別交於 L、M、N，

則 $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\times\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=1$，其逆敘述亦成立。

【性質 2-2：Ceva 定理】

若 D、E、F 分別在$\triangle ABC$ 的 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 邊上，且 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{BF}$ 共交一點，則 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$，其逆敘述亦成立。

【性質 2-3：Desargues 定理】

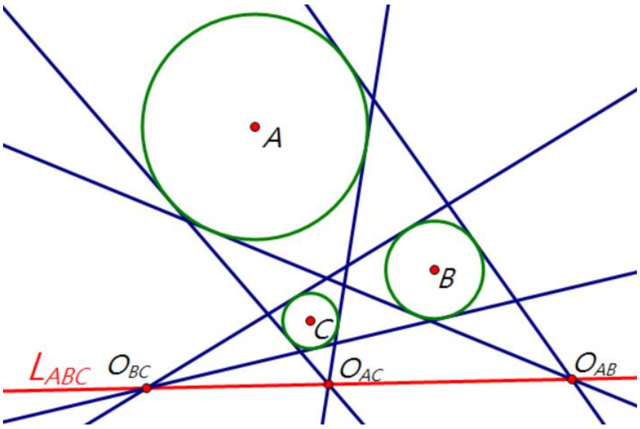
在射影空間中，有六點 A、B、C、a、b、c，若 $\overleftrightarrow{Aa}$、$\overleftrightarrow{Bb}$、$\overleftrightarrow{Cc}$ 共點，則 $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{ab}$、$\overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{bc}$、$\overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{ca}$ 共線，其逆敘述亦成立。

（三）蒙日定理及其相關定理（參見文獻[2]、[3]）

【性質3-1：蒙日定理】（以下亦以【蒙日線】稱之）

平面上外離的三個圓，任兩圓作外公切線交點會三點共線。如下圖，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線。此線稱之為三圓蒙日線，以L_{ABC}表示。

<證明>



1° 作△ABC，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}分別在三邊延長線上。

2° 根據【性質 1-1】知

$$\frac{\overline{A\,O_{AB}}}{\overline{O_{AB}\,B}} \times \frac{\overline{B\,O_{BC}}}{\overline{O_{BC}\,C}} \times \frac{\overline{C\,O_{AC}}}{\overline{O_{AC}\,A}}$$

$$= \frac{R_A}{R_B} \times \frac{R_B}{R_C} \times \frac{R_C}{R_A} = 1，$$

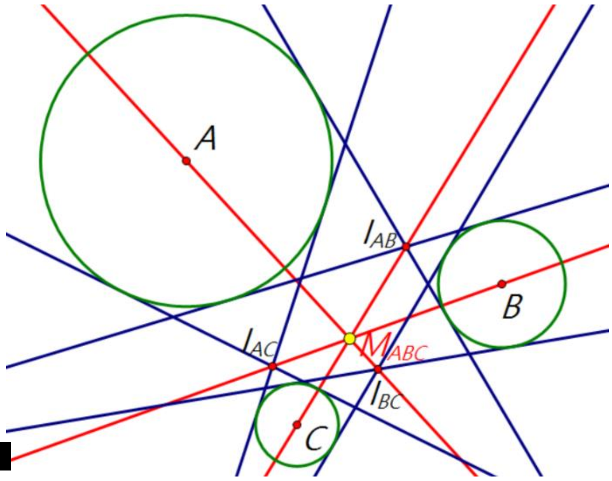
3° 根據【Menelaus 定理】知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。■

當兩圓大小相同時，其外公切線會平行，我們可將此兩線視為在無窮遠處交於一點，也就是此兩圓的外公切線交點在無窮遠處，此時蒙日線也會在無窮遠處過此兩圓的外公切線交點。因此即使在圓的大小相同時，本研究的所有性質仍能成立。

【性質 3-2：蒙日對偶定理】（以下亦以【蒙日點】稱之）

平面上外離的三個圓，任 1 圓的圓心與另 2 圓的內公切線交點連線會三線共點。如下圖， $\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。此點稱之為三圓蒙日點，以M_{ABC}表示。

<證明>



1° 作△ABC，I_{AB}、I_{AC}、I_{BC}分別在三邊延長線上，

2° 根據【性質 1-1】知

$$\frac{\overline{A\,I_{AB}}}{\overline{I_{AB}\,B}} \times \frac{\overline{B\,I_{BC}}}{\overline{I_{BC}\,C}} \times \frac{\overline{C\,I_{AC}}}{\overline{I_{AC}\,A}}$$

$$= \frac{R_A}{R_B} \times \frac{R_B}{R_C} \times \frac{R_C}{R_A} = 1，$$

3° 根據【Ceva 定理】知$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$三線共點。■

【性質 3-3：廣義蒙日線】

平面上外離的三個圓，任 2 圓的外公切線交點，與此兩圓分別跟另 1 圓的內公切線交點，三點共線。如下圖，$(O_{AB}$、I_{AC}、$I_{BC})$、$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$，均分別三點共線。

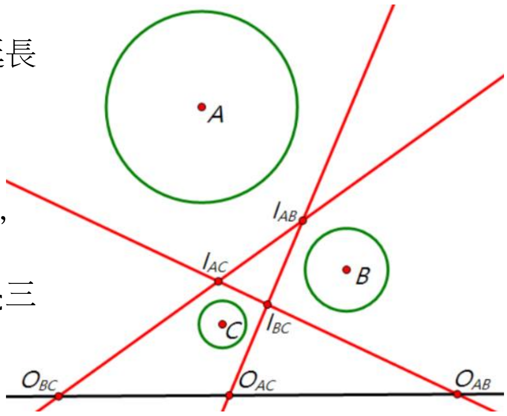
<證明>

1° 作$\triangle ABC$，I_{AC}、I_{BC}、O_{AB}分別在三邊延長線上，

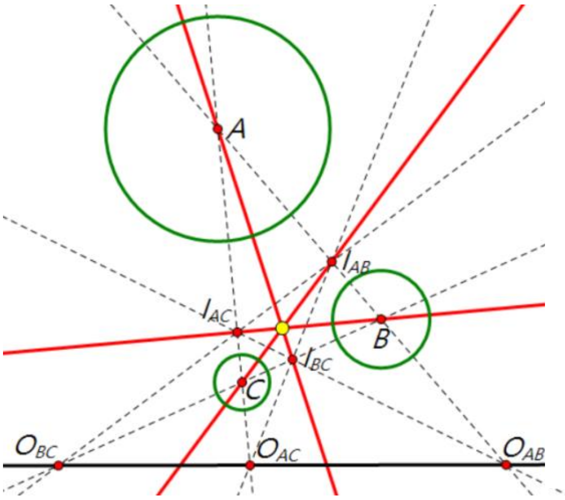
2° 根據【性質 1-1】知

$$\frac{\overline{A\ O_{AB}}}{\overline{O_{AB}\ B}}\times\frac{\overline{B\ I_{BC}}}{\overline{I_{BC}\ C}}\times\frac{\overline{C\ I_{AC}}}{\overline{I_{AC}\ A}}=\frac{R_A}{R_B}\times\frac{R_B}{R_C}\times\frac{R_C}{R_A}=1，$$

3° 由【Menelaus 定理】知 O_{AB}、I_{AC}、I_{BC}三點共線，同理可證得$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$亦分別三點共線。■



<蒙日線定理與蒙日點定理的互證>



1° 作$\triangle ABC$與$\triangle I_{AB}I_{BC}I_{AC}$，

2° 根據【廣義蒙日線】知

$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BC}}$交於$O_{AB}$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{BC}}$交於 O_{AC}，$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{AC}}$交於$O_{BC}$，

3° 根據【蒙日線】知O_{AB}、O_{BC}、O_{AC}三點共線，根據【Desargues 定理】，$\overleftrightarrow{A\ I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{B\ I_{AC}}$、$\overleftrightarrow{C\ I_{AB}}$三線共點，其逆敘述亦成立。■

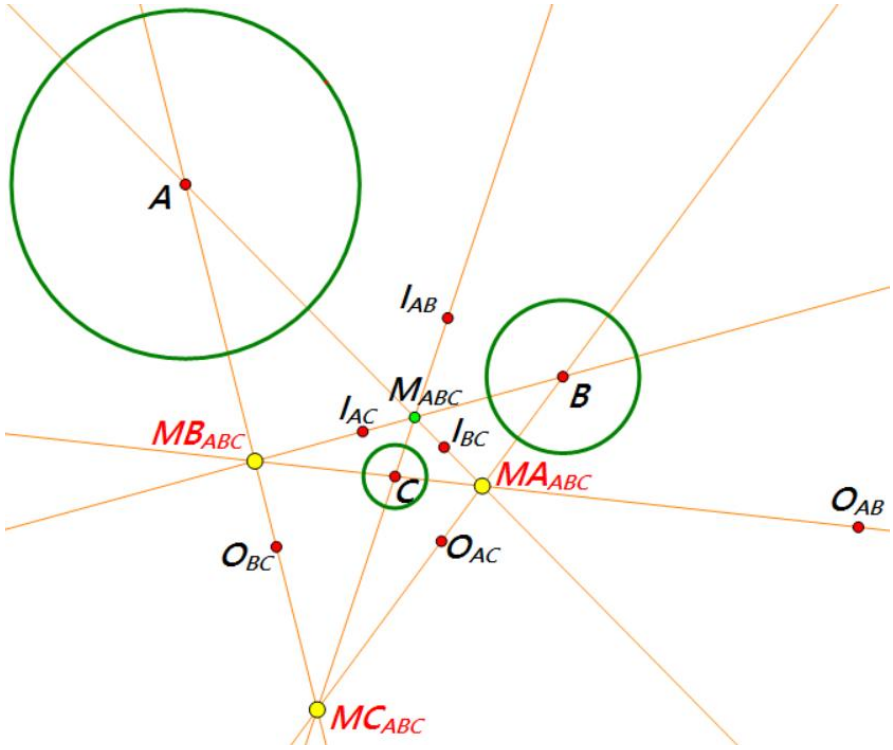
參、研究結果與討論

一、平面上三圓蒙日定理的性質與推廣

根據性質 3-3，文獻上已有針對廣義蒙日線的探討，相對的卻無廣義蒙日點，因此我們試圖從探討其存在性開始，並找出內、外公切線交點其他共點、共線情形。發現結果如下：

【定理 1-1】廣義蒙日點

平面上外離的三個圓，任 1 圓的圓心與另 2 圓的內公切線交點連線，以及另外 2 圓的圓心分別與另 2 圓外公切線交點的連線，三線共點。如圖 1-1，($\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$)、($\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$)、($\overleftrightarrow{CI_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$)，均分別三線共點，此交點稱之為「**廣義蒙日點**」，分別以MA_{ABC}、MB_{ABC}、MC_{ABC}表示。



▲圖 1-1

<證明>

1° 作 △ABC 並延伸各邊，O_{AC}、I_{BC}、O_{AB}分別在$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{AB}$上，

2° 由【性質 1－1】知 $\dfrac{\overline{AO_{AC}}}{\overline{CO_{AC}}}\times\dfrac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{BI_{BC}}}\times\dfrac{\overline{BO_{AB}}}{\overline{AO_{AB}}}=\dfrac{R_A}{R_C}\times\dfrac{R_C}{R_B}\times\dfrac{R_B}{R_A}=1$，

3° 由【Ceva逆定理】知 $\overleftrightarrow{A\ I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{B\ O_{AC}}$、$\overleftrightarrow{C\ O_{AB}}$三線共點。

同理可得($\overleftrightarrow{A\ O_{BC}}$、$\overleftrightarrow{B\ I_{AC}}$、$\overleftrightarrow{C\ O_{AB}}$)、($\overleftrightarrow{A\ O_{BC}}$、$\overleftrightarrow{B\ O_{AC}}$、$\overleftrightarrow{C\ I_{AB}}$)

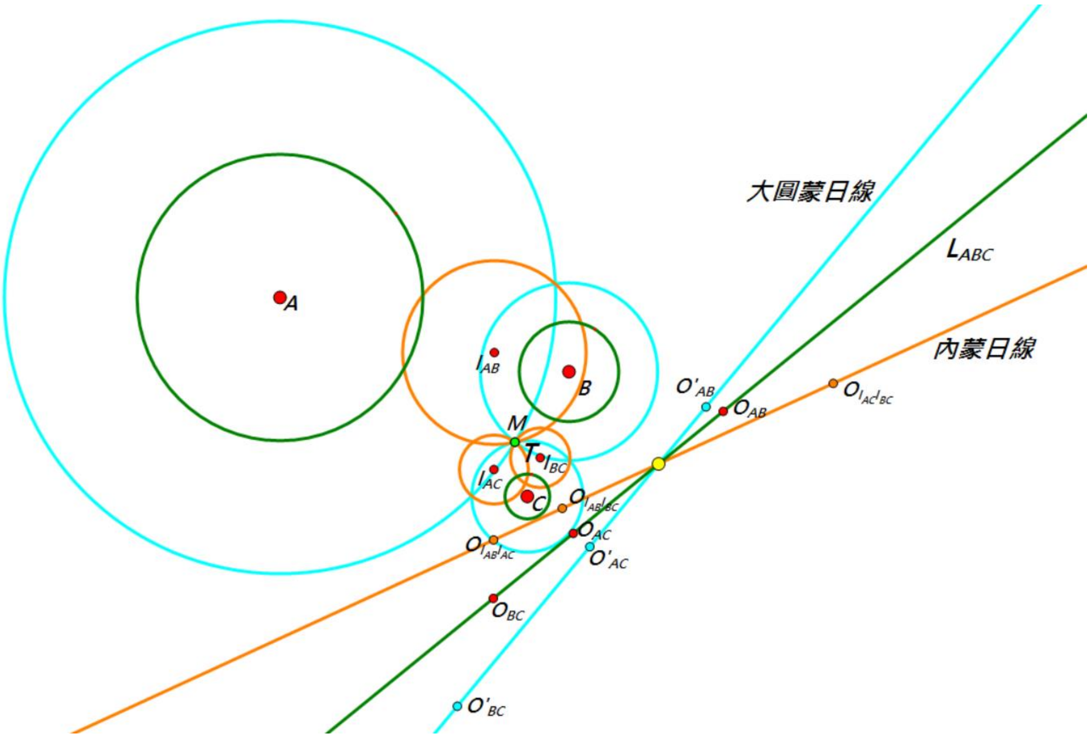
亦分別三線共點。■

接下來，我們嘗試找其特殊性質，經過許久皆未能發現，不過就在靈感一湧之間，我們做出了特殊三圓的蒙日線，並發現一個有趣的結果：

【定理 1-2】三圓的特殊蒙日線

平面上外離的三個圓，作出其蒙日點（如圖 1-2），並作出以下：
1. 作此三圓的蒙日線。(如圖中綠線L_{ABC})
2. 過蒙日點作以兩圓內公切線交點為中心的圓，並作出此三圓的蒙日線，稱之為**內蒙日線**。(如圖中橘線)
3. 過蒙日點作以 A、B、C 為中心的圓，並作出此三圓的蒙日線，稱之為**大圓蒙日線**。(如圖中藍線)

則 L_{ABC}、內蒙日線與大圓蒙日線共交於一點。



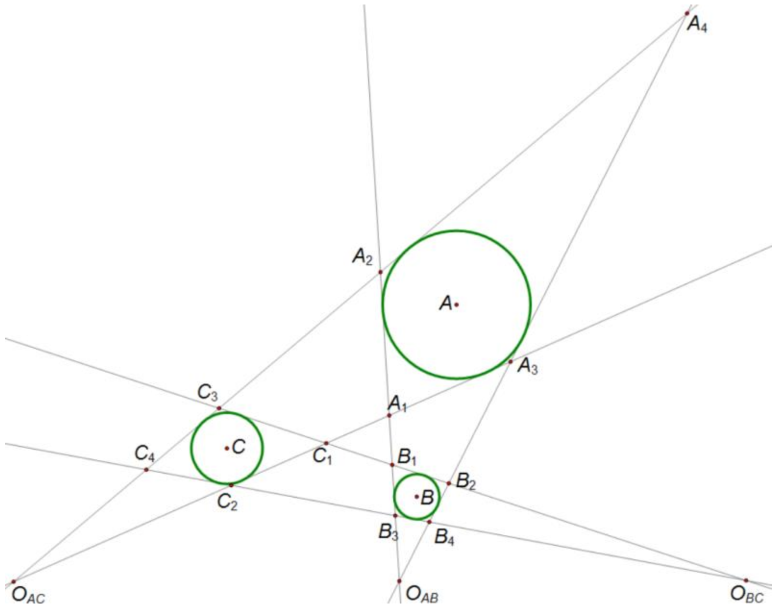
▲圖 1-2

<證明>

證明方式同【定理 1-1】，透過作$\Delta\ O_{BC}O'_{BC}O_{I_{AB}I_{AC}}$與$\Delta\ O_{AC}O'_{AC}O_{I_{AB}I_{BC}}$，分別由性質得出對應邊延長共交於C、M、$I_{AB}$，再經由【Desargues 定理】即可得證。

接著，我們作出三圓所有的外公切線的交點，共有C_2^6=15 個交點，除了三點滿足蒙日定理，是否有其它共點、共線或是共圓等性質？

如下圖，平面上外離的三個圓，任兩圓作外公切線，為方便描述，作以下約定：以圓 A 為例，「任 1 圓（A）與另 2 圓（B、C）的四條外公切線彼此有 6 個交點，除了兩點前述外公切線交點（O_{AB}、O_{AC}）外，另 4 個交點分別以**內交點**（A_1）、**外交點**（A_4）和兩**側點**（A_2、A_3）來表示」。對圓 B、C 外公切線彼此所產生的交點B_1~B_4、C_1~C_4表示方法亦相同。



我們發現一項驚人的結果「三圓外公切線彼此的 15 個交點中，有六點滿足 Pascal 逆定理，六點滿足 Brianchon 逆定理，三點滿足蒙日線定理(Monge's Line)」，涵蓋三大定理，我們將此發現結果簡稱為「PBL 定理」。為方便證明，請看以下引理：

【引理】

平面上外離的三個圓，任兩圓作外公切線，則任 1 個圓的**內交點**與**外交點**連線，必與另 2 圓的兩**側點**的分別連線，共交一點。如下圖，（$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{B_2B_3}$）、（$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_3}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$）、（$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{C_2C_3}$），均分別三線共點。

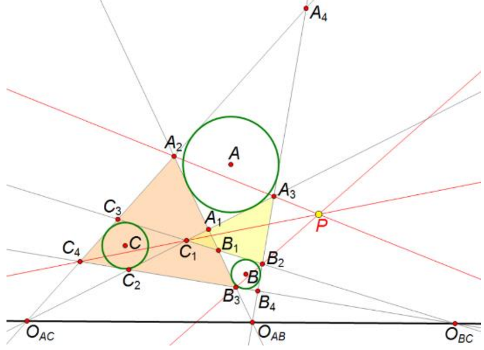
＜證明＞

1° 作$\triangle A_2B_3C_4$、 $\triangle A_3B_2C_1$。

2° 依定義知此兩三角形對應邊之三交點共線於L_{ABC}。

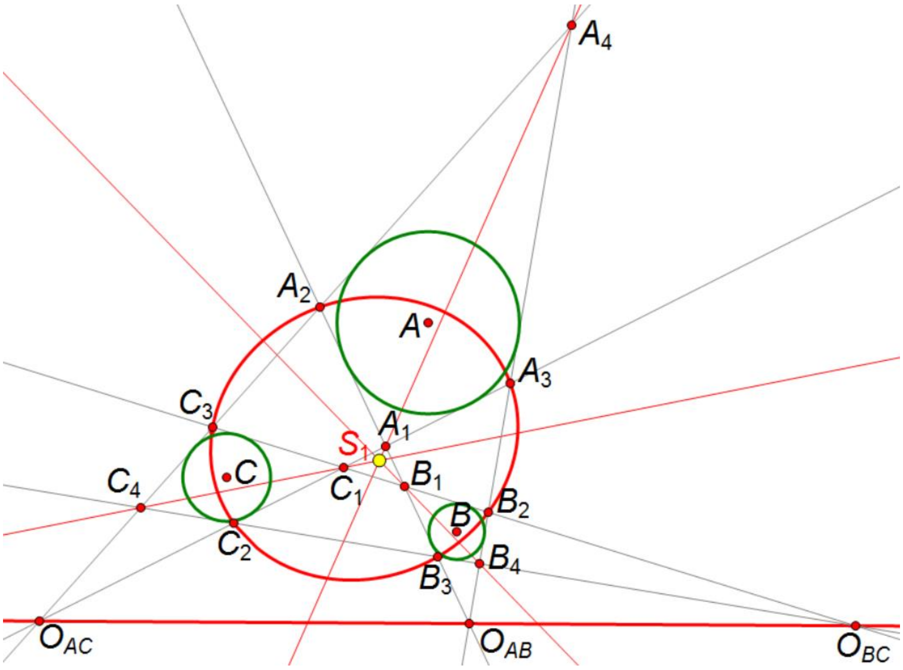
3° 由【Desargues 定理】得 $\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{B_2B_3}$ 交於一點 P。

4° 同理可證（$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_3}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$）、（$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{C_2C_3}$），分別三線共點。



【定理 1-3】PBL 定理

平面上外離的三個圓，任兩圓作外公切線，則三圓外公切線彼此的 15 個交點中有下列性質：如圖 1-3 (1) 三圓兩側點所構成的六邊形$A_2A_3B_2B_3C_2C_3$對應邊延長交點共線（Pascal Line） (2) 三圓分別內交點與外交點連線$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{C_1C_4}$必三線共點（以$S_1$表示） (3) O_{AB}、O_{BC}、O_{AC} 三點共線。



▲圖 1-3

<（1）證明>

1° 如圖 1-3，由【引理】與定義可推得 $\overleftrightarrow{A_3C_2}$、$\overleftrightarrow{B_2C_3}$、$\overleftrightarrow{PC_4}$ 三線共點於C_1，由【Desargues 定理】知ΔA_3B_3P及$\Delta C_2C_3C_4$對應邊交點共線。

2° 因 $\overleftrightarrow{A_2A_3} = \overleftrightarrow{A_3P}$、 $\overleftrightarrow{B_2B_3} = \overleftrightarrow{B_3P}$、 $\overleftrightarrow{A_2C_3} = \overleftrightarrow{C_3C_4}$、 $\overleftrightarrow{B_3C_2} = \overleftrightarrow{C_2C_4}$，故知六邊形$A_2A_3B_2B_3C_2C_3$之對應邊延長交點三點共線。

<（2）證明>

1° 如圖 1-3，作 $\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_4B_4C_4$，依定義知$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_4B_4}$交於點 O_{AB}，$\overleftrightarrow{A_1C_1}$、$\overleftrightarrow{A_4C_4}$交於點 O_{AC}， $\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{B_4C_4}$交於點 O_{BC}，

2° 由【蒙日線】知 O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，再由【Desargues 定理】，可得 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{C_1C_4}$三線共點於$S_1$。■

由上述（1)、(2)，根據 Pascal 逆定理可得知六邊形$A_2A_3B_2B_3C_2C_3$必有一個外接錐；根據 Brianchon 逆定理可得知六邊形$A_1B_1C_1A_4B_4C_4$必有一個內切錐。

除了上述發現，我們亦發現另有兩組交點跟圓心對應連線後會有三線共點的情形，並且此兩點又與 S_1 形成三點共線，請看以下說明：

【定理 1-4】PBL 定理中的共點共線性質

平面上外離的三個圓，任兩圓作外公切線，則三圓外公切線彼此的 15 個交點中有下列性質：如圖 1-4

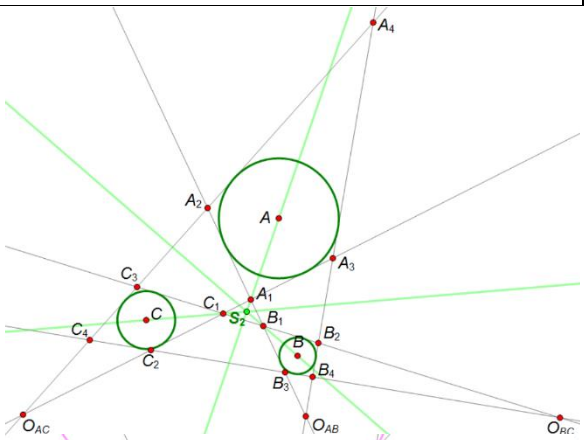
(1) 三圓分別內交點與外交點連線共點：$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{C_1C_4} = S_1$。

(2) 三圓的圓心分別與內交點連線共點：$\overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{BB_1} \cap \overleftrightarrow{CC_1} = S_2$。

(3) 三圓的圓心分別與外交點連線共點：$\overleftrightarrow{AA_4} \cap \overleftrightarrow{BB_4} \cap \overleftrightarrow{CC_4} = S_3$。

(4) S_1、S_2、S_3 三點共線，且此線與三圓蒙日線L_{ABC}垂直。

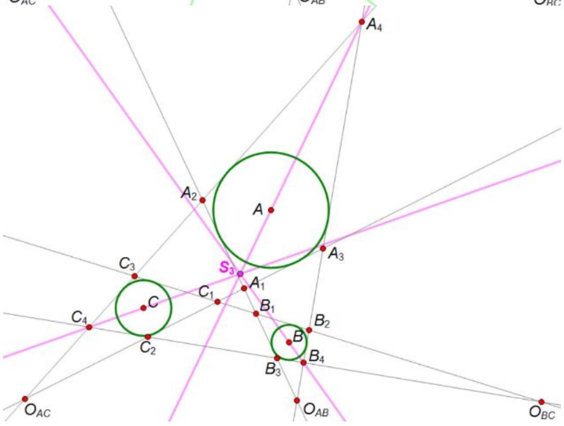
<（1）證明> 定理 1-3 已證。



<（2）、（3）證明>

1° $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$為圓 A之切線，可得知$\overleftrightarrow{AA_1}$為$\angle C_1A_1B_1$ 的角平分線。同理可推得$\overleftrightarrow{BB_1}$、$\overleftrightarrow{CC_1}$分別為$\angle A_1B_1C_1$、$\angle A_1C_1B_1$之角平分線。

2° 因 $\overleftrightarrow{AA_1}$、$\overleftrightarrow{BB_1}$、$\overleftrightarrow{CC_1}$皆為$\triangle A_1B_1C_1$的角平分線，可知此點為$\triangle A_1B_1C_1$的內心，因此三線必交於一點$S_2$。



3° 同理可推得$\overleftrightarrow{AA_4}$、$\overleftrightarrow{BB_4}$、$\overleftrightarrow{CC_4}$三線共點於$S_3$。■

<（4）證明>

1° 作$\triangle C_1C_4C$、$\triangle A_1A_4A$。

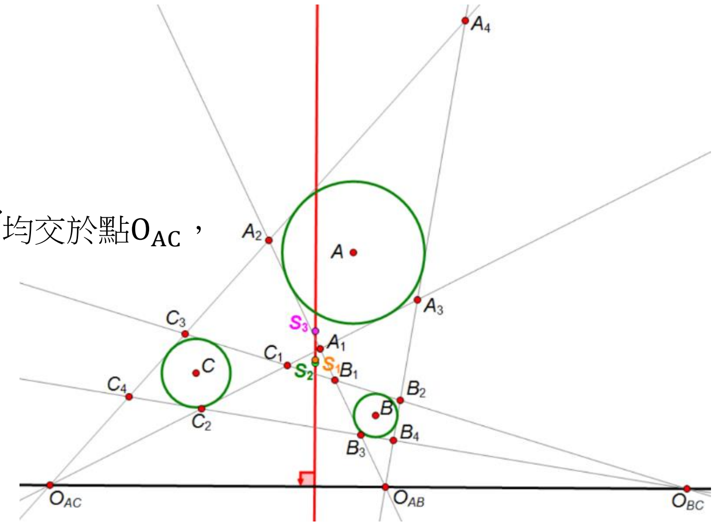
2° 依定義知$\overleftrightarrow{A_1C_1}$、$\overleftrightarrow{A_4C_4}$、$\overleftrightarrow{AC}$均交於點$O_{AC}$，

$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{C_1C_4}$ 交於S_1，

$\overleftrightarrow{AA_1}$、$\overleftrightarrow{CC_1}$ 交於S_2，

$\overleftrightarrow{AA_4}$、$\overleftrightarrow{CC_4}$ 交於S_3。

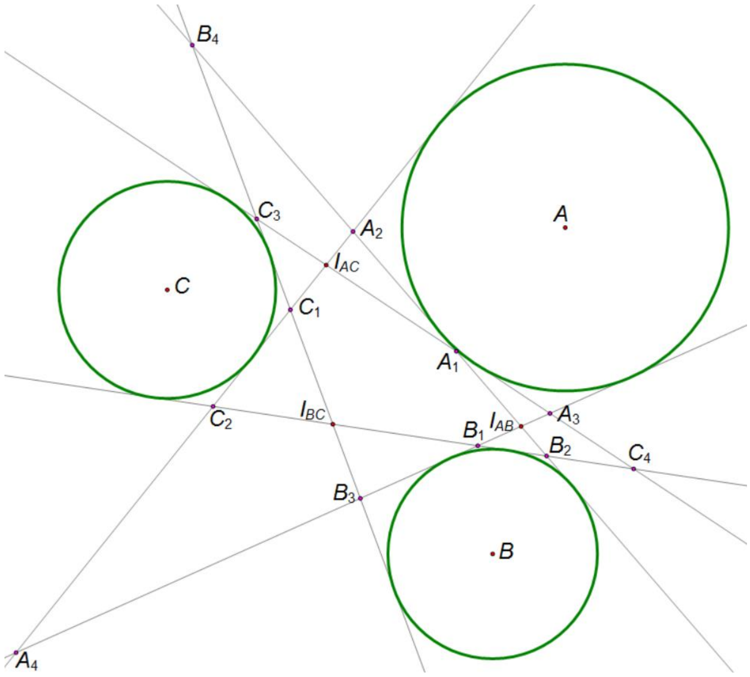
3° 根據【Desargues 定理】，知 S_1、S_2、S_3 三點共線。■



▲圖 1-4

在定理 1-3 與 1-4 驚人的發現後，我們大膽臆測在三圓內公切線彼此交點必有相對應的性質會成立。

如下圖，平面上外離的三個圓，任兩圓作內公切線，為方便描述，作以下約定：以圓 A 為例，「任 1 圓（A）與另 2 圓（B、C）的四條內公切線彼此有 6 個交點，除了兩點前述內公切線交點(I_{AB} 、I_{AC})外，另 4 個交點分別以**內交點**(A_1)、**外交點**（A_4）和兩**側點**（A_2、A_3）來表示」。對圓 B、C 內公切線彼此所產生的交點B_1~B_4、C_1~C_4表示方法亦相同。



我們會發現「三圓內公切線的 15 個交點，有六點滿足 Pascal 逆定理，六點滿足 Brianchon 逆定理，三點與對應圓心連線滿足蒙日點定理(Monge's Point)」，我們不妨以「PBM **定理**」稱之，與 PBL 定理相呼應。

【定理 1-5】PBM 定理

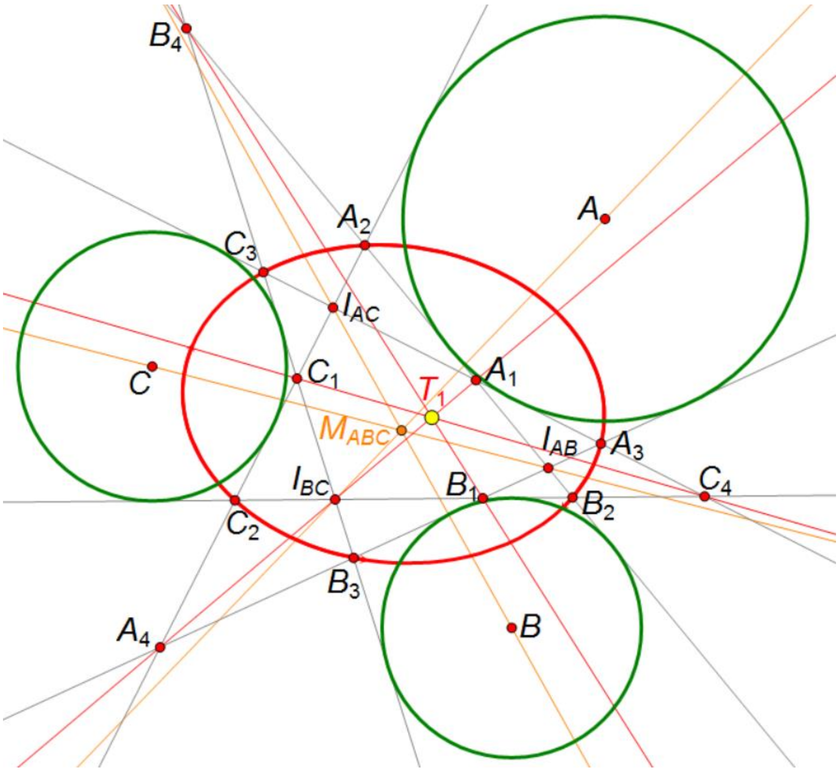
平面上外離的三個圓，任兩圓作內公切線，則三圓內公切線彼此的 15 個交點中有下列性質：如圖 1-5

(1) 三圓兩側點所構成的六邊形$A_2A_3B_2B_3C_2C_3$對應邊延長交點共線（Pascal Line）

(2) 三圓分別內交點與外交點連線$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{C_1C_4}$必三線共點（以$T_1$表示）

(3) $\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點 （蒙日點M_{ABC}）。

<證明> 略



▲圖 1-5

除此之外，定理 1-4 的結果在改為內公切線情況下亦成立，只是圓心要修正為對應的內公切線交點，結果說明如下：

【定理 1-6】PBM 定理中的共點共線性質

平面上外離的三個圓，任兩圓作內公切線，則三圓內公切線彼此的 15 個交點中有下列性質：如圖 1-6

(1) 三圓分別內交點與外交點連線共點：$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{C_1C_4} = T_1$。

(2) 任 1 圓的內交點分別與另 2 圓的內公切線交點連線共點：

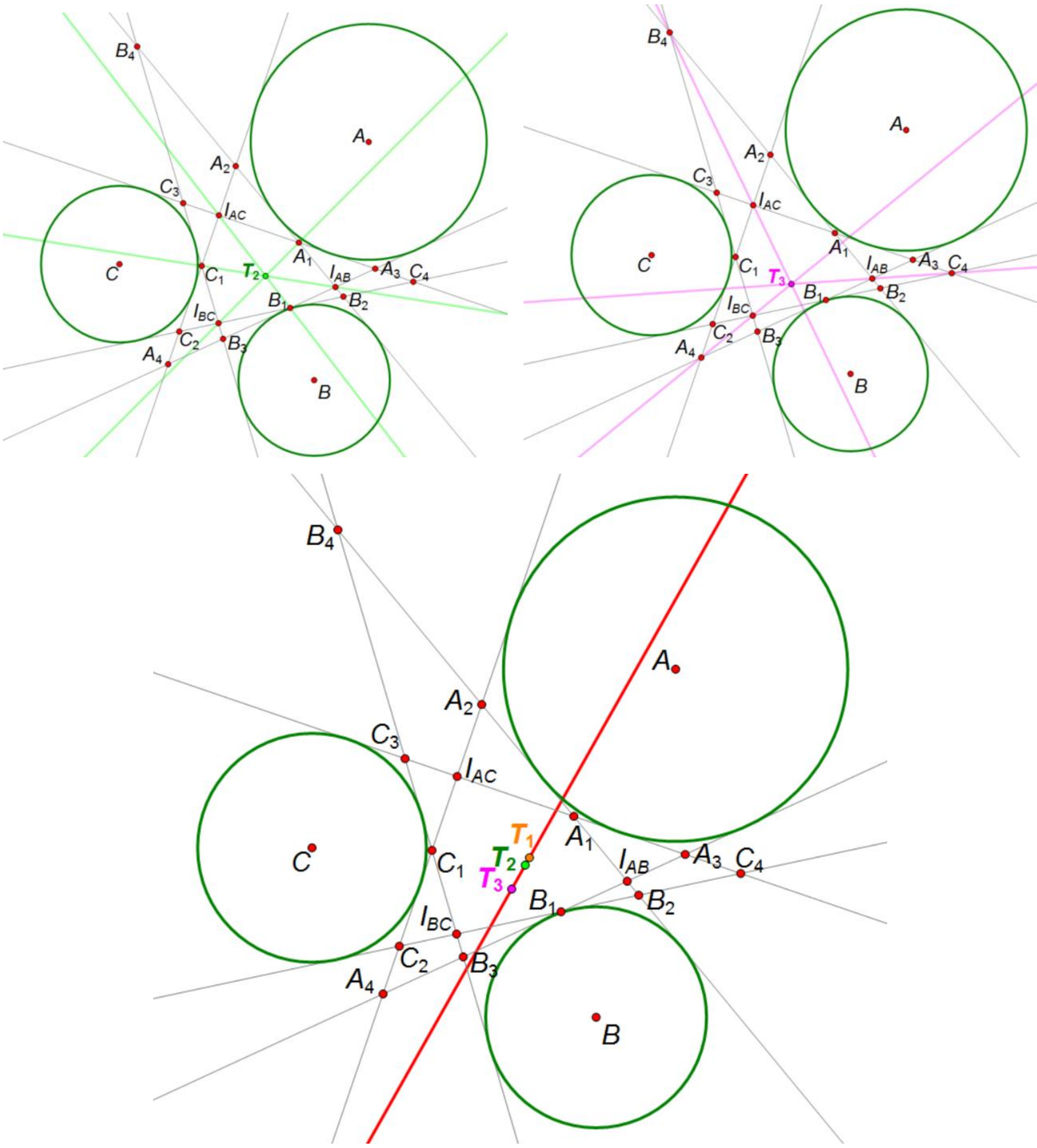
$$\overleftrightarrow{A_1I_{BC}} \cap \overleftrightarrow{B_1I_{AC}} \cap \overleftrightarrow{C_1I_{AB}} = T_2$$ 。

(3) 任 1 圓的外交點分別與另 2 圓的內公切線交點連線共點：

$$\overleftrightarrow{A_4I_{BC}} \cap \overleftrightarrow{B_4I_{AC}} \cap \overleftrightarrow{C_4I_{AB}} = T_3$$ 。

(4) T_1、T_2、T_3 三點共線。（並未通過蒙日點M_{ABC}）

<證明> 略



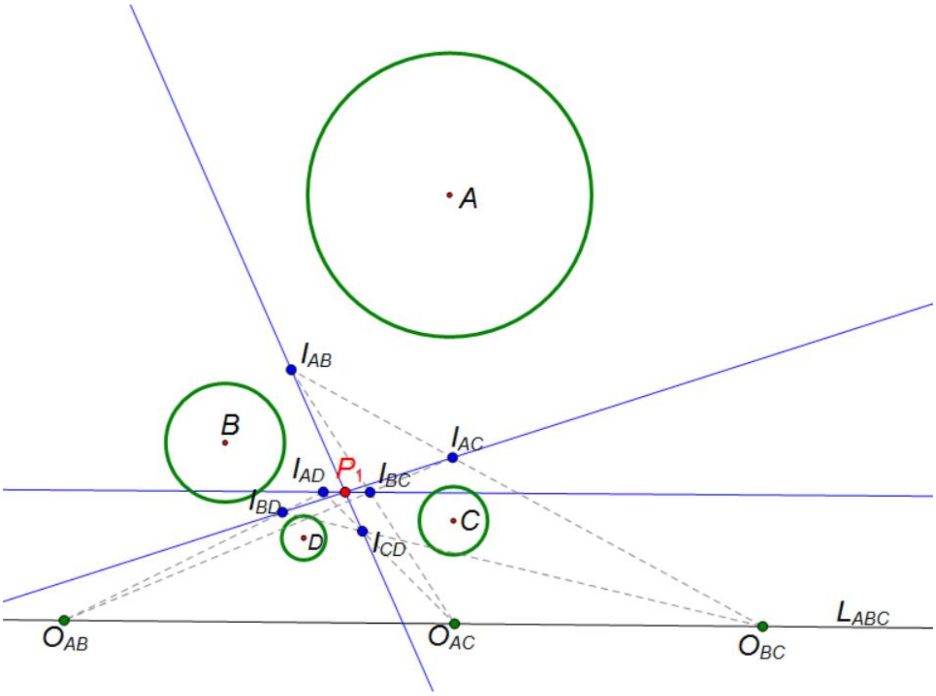
▲圖 1-6

二、平面上四圓蒙日定理的性質與推廣

接下來，我們作出第四個圓，試圖探討是否仍保有三圓時的特性或其它共點、共線的關係。首先作出四圓彼此的內公切線交點，發現結果如下：

【定理 2-1】四圓內公切線交點連線的共點關係

平面上外離的四個圓，任意 2 圓的內公切線交點與另 2 圓的內公切線交點連線，三線共交一點。如圖 2-1，以 $\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}} \cap \overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}} = P_1$ 表示。



▲圖 2-1

<證明>

1° 如圖 $2-1$，作 $\triangle I_{AB}I_{AC}I_{BC}$、 $\triangle I_{AD}I_{BD}I_{CD}$。

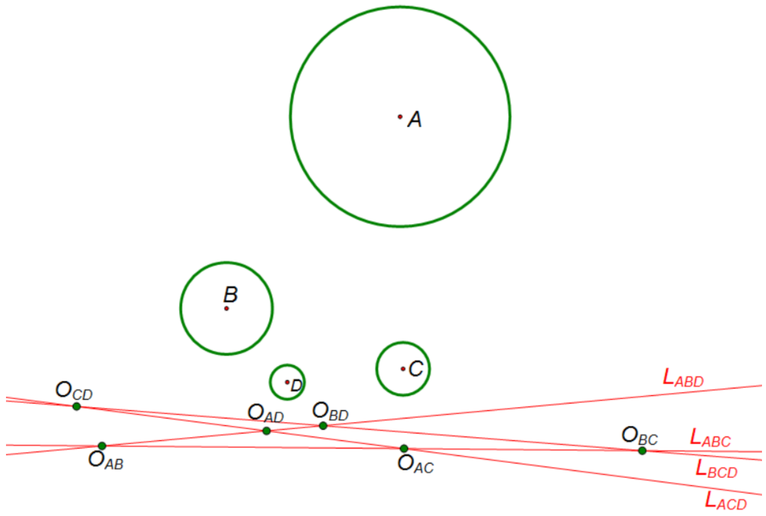
2° 根據【廣義蒙日線】得 $\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BD}}$交於 O_{AB}，

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{AC}}$、$\overleftrightarrow{I_{BD}I_{CD}}$交於 O_{BC}，$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{BC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{CD}}$交於 O_{AC}。

3° 由【蒙日線】知O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線，由【Desargues 定理】可得

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$ 三線共交於一點（以P_1表示）。■

同樣的，若考慮四圓彼此的外公切線交點，能確認任三圓必有一條蒙日線，如下圖，可見四組三點共線，但並無發現其餘特殊的關係。

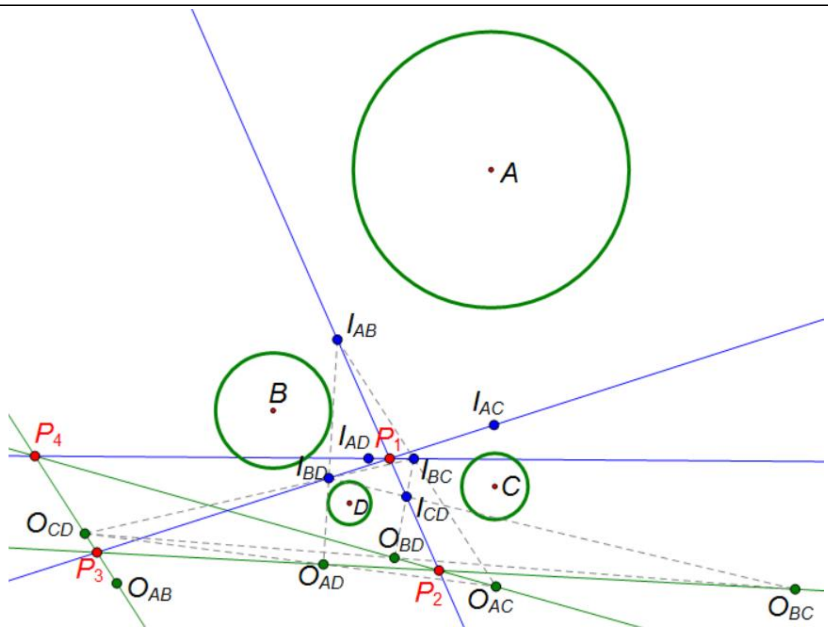


倘若我們同時做出四圓的內、外公切線交點，則可發現多組交點連線的共點關係，說明如下：

【定理 2-2】四圓內、外公切線交點連線的共點關係

平面上外離的四個圓 A、B、C、D，任兩圓的內（外）公切線交點與另兩圓的內（外）公切線交點連線，具有下列四組三線共點情形，如圖 2-2。

$$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}} \cap \overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}} = P_1 \quad \text{（定理 2-1）}$$
$$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AC}O_{BD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AD}O_{BC}} = P_2$$
$$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AB}O_{CD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AD}O_{BC}} = P_3$$
$$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}} \cap \overleftrightarrow{O_{AB}O_{CD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AC}O_{BD}} = P_4$$



▲圖 2-2

<證明>

1° 如圖 2-2，作 $\triangle I_{AB}O_{AC}O_{AD}$、 $\triangle I_{CD}O_{BD}O_{BC}$，

2° 由【蒙日線】與【廣義蒙日線】可得 $\overleftrightarrow{I_{AB}O_{AC}} \cap \overleftrightarrow{I_{CD}O_{BD}} = I_{BC}$，

$\overleftrightarrow{O_{AC}O_{AD}} \cap \overleftrightarrow{O_{BD}O_{BC}} = O_{CD}$， $\overleftrightarrow{I_{AB}O_{AD}} \cap \overleftrightarrow{I_{CD}O_{BC}} = I_{BD}$，

並知 I_{BC}、O_{CD}、I_{BD} 三線共點，

3° 由【Desargues 定理】得$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{O_{AC}O_{BD}}$、$\overleftrightarrow{O_{AD}O_{BC}}$三線共交於$P_2$。

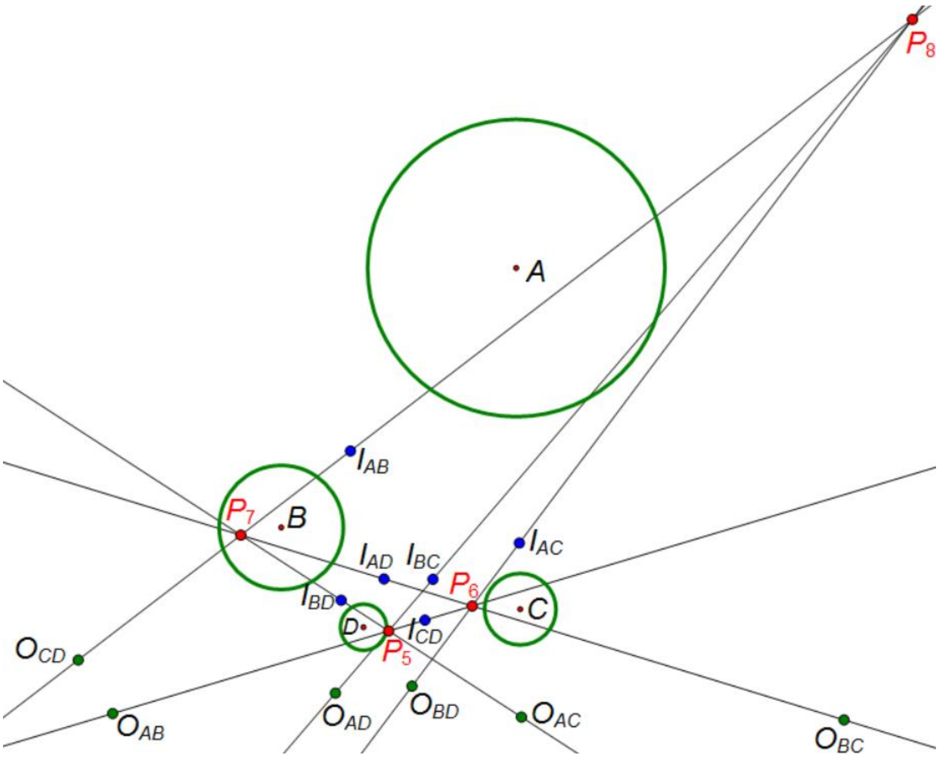
4° 同理可證出P_3、P_4的共點情形。■

仿照【定理 2-1】與【定理 2-2】的證法，亦可證明下面的發現。

【定理 2-3】四圓內、外公切線交點連線的共點關係

平面上外離的四個圓 A、B、C、D，以圓 A 為例，圓 A 分別與圓 B、C、D 做外公切線交點（O_{AB}、O_{AC}、O_{AD}），再分別與另 2 圓的內公切線交點（I_{CD}、I_{BD}、I_{BC}）連線，則三線會交於一點，以 P_5 表示，如下。同樣的，有另三組三線共點，分別交於P_6、P_7、P_8。（如圖 2-3）

$$\overleftrightarrow{O_{AB}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AC}I_{BD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AD}I_{BC}} = P_5$$
$$\overleftrightarrow{O_{BC}I_{AD}} \cap \overleftrightarrow{O_{BD}I_{AC}} \cap \overleftrightarrow{O_{BA}I_{CD}} = P_6$$
$$\overleftrightarrow{O_{CD}I_{AB}} \cap \overleftrightarrow{O_{CA}I_{BD}} \cap \overleftrightarrow{O_{CB}I_{AD}} = P_7$$
$$\overleftrightarrow{O_{DA}I_{BC}} \cap \overleftrightarrow{O_{DB}I_{AC}} \cap \overleftrightarrow{O_{DC}I_{AB}} = P_8$$



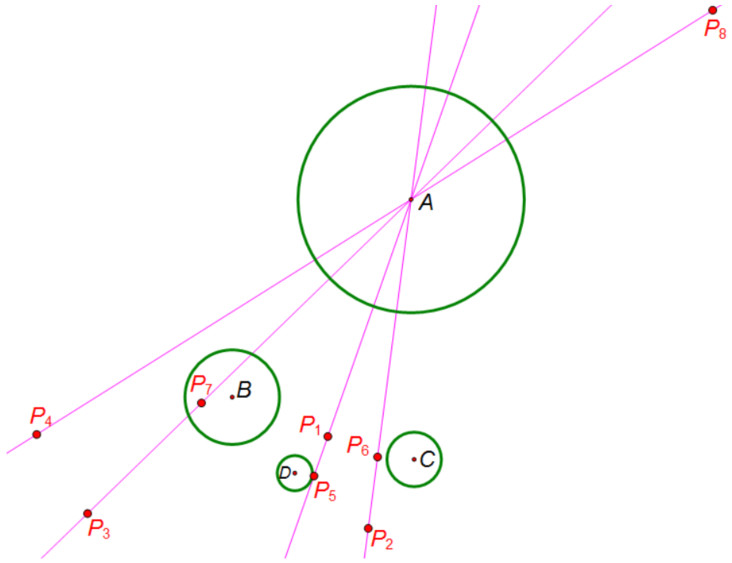
▲圖 2-3

有趣的是由前述定理 2-2 與 2-3 所產生的點$P_1 \sim P_8$，在有序的對應連線下，竟分別共交於所對應圓的圓心，結果如下：

【定理 2-4】四圓內、外切交點連線的共點與圓心的關係

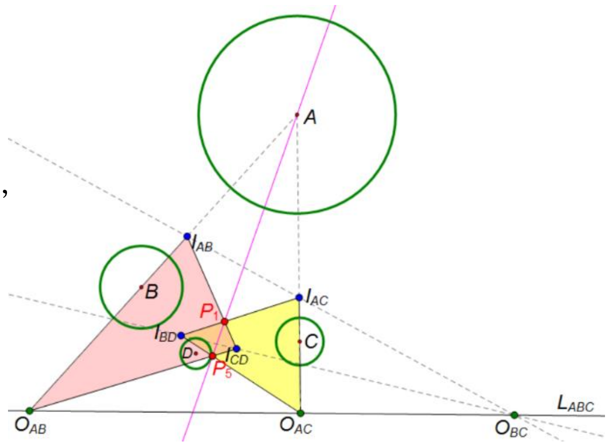
由【定理 2-2】、【定理 2-3】作出點$P_1 \sim P_8$，則：

$$\overleftrightarrow{P_1P_5} \cap \overleftrightarrow{P_2P_6} \cap \overleftrightarrow{P_3P_7} \cap \overleftrightarrow{P_4P_8} = A$$
$$\overleftrightarrow{P_1P_6} \cap \overleftrightarrow{P_2P_5} \cap \overleftrightarrow{P_3P_8} \cap \overleftrightarrow{P_4P_7} = B$$
$$\overleftrightarrow{P_1P_7} \cap \overleftrightarrow{P_2P_8} \cap \overleftrightarrow{P_3P_5} \cap \overleftrightarrow{P_4P_6} = C$$
$$\overleftrightarrow{P_1P_8} \cap \overleftrightarrow{P_2P_7} \cap \overleftrightarrow{P_3P_6} \cap \overleftrightarrow{P_4P_5} = D$$
（如圖 2-4）



▲圖 2-4（以交於圓 A 的圓心為例）

<證明>



1° 如右圖，作$\triangle I_{AB}I_{CD}O_{AB}$、$\triangle I_{AC}I_{BD}O_{AC}$，

2° 由定義得 $\overleftrightarrow{I_{AB}O_{AB}} \cap \overleftrightarrow{O_{AC}I_{AC}} = A$，

由【定理 2－1】得

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}} = P_1$，

由【定理 2－3】得

$\overleftrightarrow{I_{CD}O_{AB}} \cap \overleftrightarrow{I_{BD}O_{AC}} = P_5$，

3° 由【廣義蒙日線】與【蒙日線】知

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{AC}} \cap \overleftrightarrow{I_{BD}I_{CD}} \cap \overleftrightarrow{O_{AB}O_{AC}} = O_{BC}$，

由【Desargues 定理】得 A、P_1、P_5三點共線。

4° 同理可證出P_2與P_6、P_3與P_7、P_4與P_8三組亦皆與圓 A 圓心共線，

由此可證 $\overleftrightarrow{P_1P_5}$、$\overleftrightarrow{P_2P_6}$、$\overleftrightarrow{P_3P_7}$、$\overleftrightarrow{P_4P_8}$ 共交於 A 點。

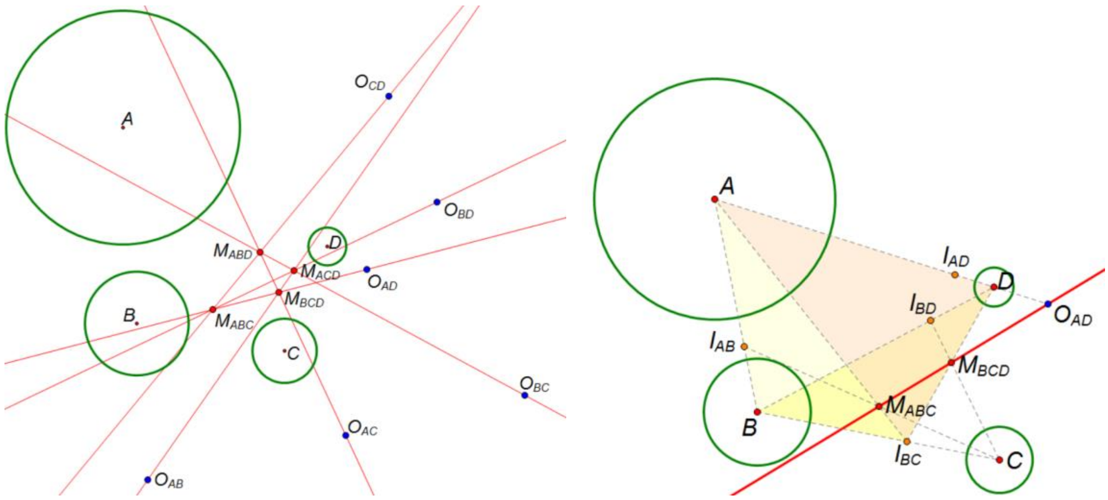
5° 同理可證出其它在有序的對應連線下，分別共交於 B、C、D 點之情形。■

截至目前，我們探討了四圓中任意兩圓內、外公切線交點共線或交點連線共點的關係。接著，我們作出任意三圓的蒙日點，想要探討其與四圓內、外切交點之間的關係，並發現了兩個特殊性質：

【定理 2-5】四圓的廣義蒙日線

平面上外離的四個圓 A、B、C、D，任意兩圓的外公切線交點，必與分別和另兩圓所構成的兩個三圓蒙日點形成三點共線。如圖 2-5 左圖，下列六組均分別三點共線：

$(O_{AB}、M_{ACD}、M_{BCD})$、$(O_{AC}、M_{ABD}、M_{BCD})$、$(O_{AD}、M_{ABC}、M_{BCD})$
$(O_{BC}、M_{ABD}、M_{ACD})$、$(O_{BD}、M_{ABC}、M_{ACD})$、$(O_{CD}、M_{ABC}、M_{ABD})$



▲圖 2-5

<證明>

1° 如圖 $2-5$ 右圖，在 $\triangle ABI_{BC}$ 中，I_{AB}、C、M_{ABC} 分別在三邊延長線上，且依定義知此三點共線，由【Menelaus 定理】知 $\dfrac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{I_{AB}B}}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CI_{BC}}}\times\dfrac{\overline{I_{BC}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}A}}=1$，

並由【性質 1-1】可得 $\dfrac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}=\dfrac{R_A}{R_B}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CI_{BC}}}$，

同理可在 $\triangle BDI_{BC}$，以 I_{BD}、C、M_{BCD} 為截線得 $\dfrac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}=\dfrac{R_B}{R_D}\times\dfrac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{BC}}$，

2° $\triangle AI_{BC}D$ 中，M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD} 分別在三邊延長線上，由1°、【性質 1-1】可得出 $\dfrac{\overline{AM_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}I_{BC}}}\times\dfrac{\overline{I_{BC}M_{BCD}}}{\overline{M_{BCD}D}}\times\dfrac{\overline{DO_{AD}}}{\overline{O_{AD}A}}=\dfrac{R_A}{R_B}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CI_{BC}}}\times\dfrac{R_B}{R_D}\times\dfrac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{BC}}\times\dfrac{R_D}{R_A}=1$，

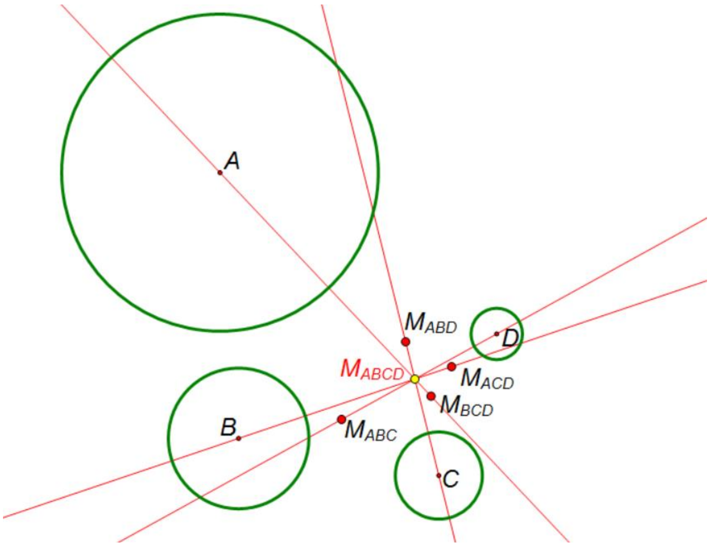
由【Menelaus 逆定理】可證得 M_{ABC}、M_{BCD}、O_{AD} 三點共線。

3° 同理可證得另五組均分別三點共線。■

【定理 2-6】四圓蒙日點

平面上外離的四個圓 A、B、C、D，任一圓的圓心與另三圓的蒙日點連線的四條直線必共交一點，並稱此點為**四圓蒙日點**。如圖 2-6，

即 $\overleftrightarrow{A\ M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{D\ M_{ABC}}$ 四線共點。此點以 M_{ABCD}表示。



▲圖 2-6

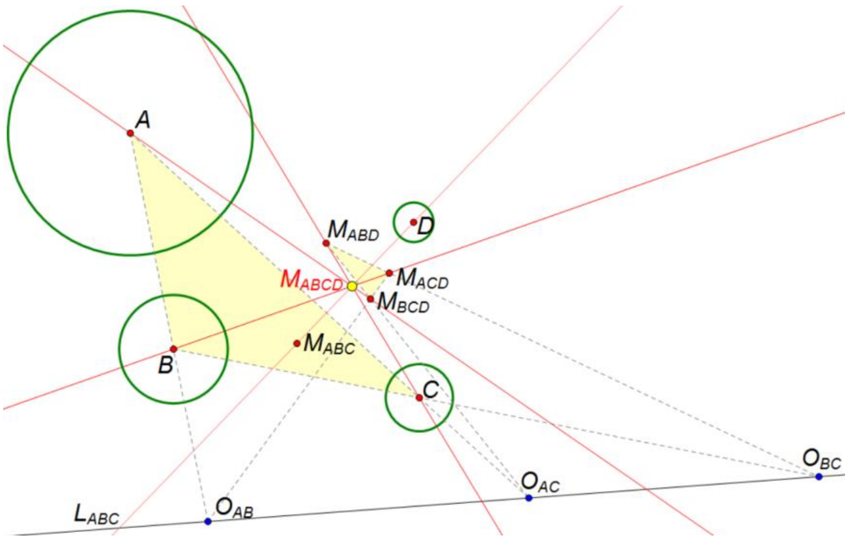
<證明>

1° 如下圖，作△ABC、△$M_{ABD}M_{ACD}M_{BCD}$，

2° 根據【定理 2-5】可得$\overleftrightarrow{M_{ABD}M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，$\overleftrightarrow{M_{ABD}M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{AC}$交於$O_{AC}$，$\overleftrightarrow{M_{ACD}M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{AB}$交於$O_{AB}$，

3° 根據【蒙日線】，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，並由【Desargues定理】可得 $\overleftrightarrow{A\ M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABD}}$三線交於一點，

4° 同理可證另三組三線交於一點，故可得$\overleftrightarrow{A\ M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{D\ M_{ABC}}$ 四線共交一點。■



至此，我們可以有三個圓的「三圓蒙日點」，也可以有四個圓的「四圓蒙日點」，那麼**兩個圓 A 與 B 時，不妨定義其內公切線交點 I_{AB}為「二圓蒙日點」，記作$M_{AB} = I_{AB}$，而一個圓 A 時「一圓蒙日點」即為該圓圓心 A，記作$M_A = A$。**

依上述定義，我們進一步探討一圓蒙日點至四圓蒙日點的關係。

平面上的外離的四個圓，作出所有一、二、三、四圓蒙日點，發現有下列四種共線現象：

(1) 一圓蒙日點、另一圓蒙日點與此二圓蒙日點共線（即二圓蒙日點定義）

例如：M_A、M_B、M_{AB}共線

(2) 一圓蒙日點、另二圓蒙日點與此三圓蒙日點共線（即三圓蒙日點定義）

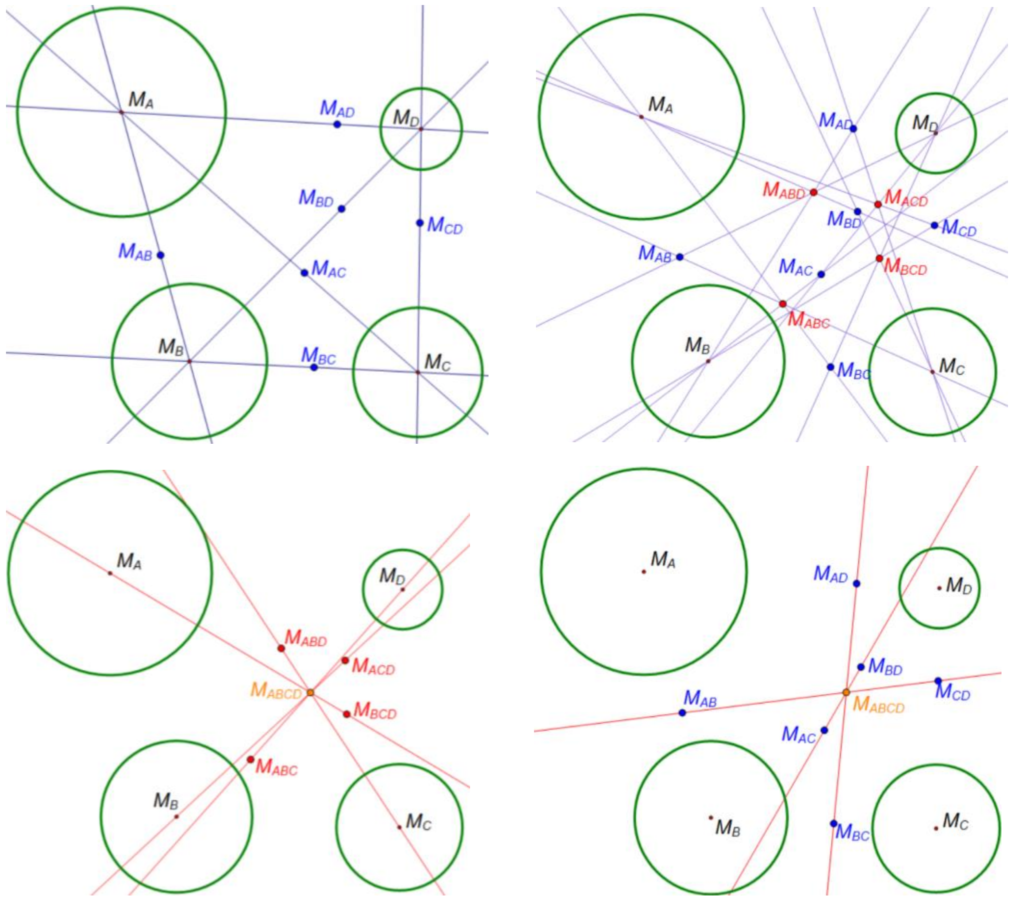
例如：M_A、M_{BC}、M_{ABC}共線

(3) 一圓蒙日點、另三圓蒙日點與此四圓蒙日點共線（即四圓蒙日點定義）

例如：M_A、M_{BCD}、M_{ABCD}共線

(4) 二圓蒙日點、另二圓蒙日點與此四圓蒙日點共線

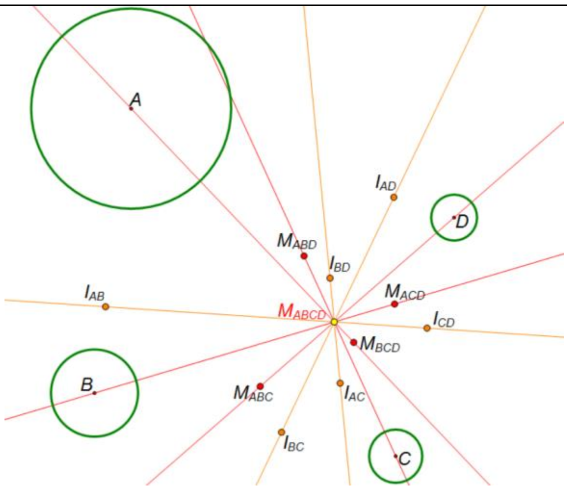
例如：M_{AB}、M_{CD}、M_{ABCD}共線



我們在處理【定理 2-1】時便有發現四圓時，任意兩圓的蒙日點與另二圓的蒙日點連線的三條直線共交一點，但殊不知此點其實就是這四個圓的蒙日點！換句話說，對應的兩圓的蒙日點連線必會通過四圓蒙日點，如下敘述：

【定理 2-7】四圓時，任意 2 圓的蒙日點與另 2 圓的蒙日點連線關係

平面上外離的四個圓，則任意 2 圓的蒙日點（內公切線交點）與另 2 圓的蒙日點（內公切線交點）連線必通過此四圓蒙日點。如圖 2-7 左圖，$\overleftrightarrow{M_{AB}M_{CD}}$、$\overleftrightarrow{M_{AC}M_{BD}}$、$\overleftrightarrow{M_{AD}M_{BC}}$皆通過點$M_{ABCD}$。



▲圖 2-7

<證明>

1° 在△BDI_{AB}中，I_{BD}、M_{ABD}、A分別在三邊延長線上，且依定義知此三點共線，由【Menelaus 定理】知

$$\frac{\overline{BI_{BD}}}{\overline{I_{BD}D}}\times\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}A}}{\overline{AB}}=1$$

，由【性質 1-1】可改寫為

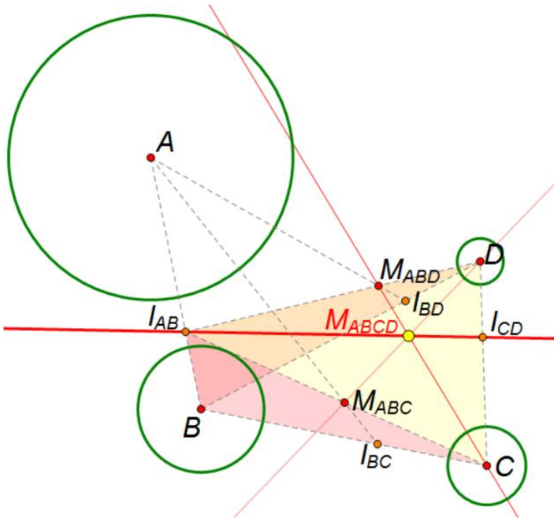
$$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}=\frac{R_D}{R_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{BC}}}。$$

同理在△BCI_{AB}中，

以I_{BC}、M_{ABC}、A 為截線得

$$\frac{\overline{CI_{BC}}}{\overline{I_{BC}B}}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=1$$

，由【性質 1-1】可改寫為 $\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}=\frac{R_B}{R_C}\times\frac{\overline{I_{BC}A}}{\overline{AB}}$。



2° △CDI_{AB}中，I_{CD}、M_{ABD}、M_{ABC} 分別在三邊延長線上，由1°、【性質 1-1】得

$$\frac{\overline{DM_{ABD}}}{\overline{M_{ABD}I_{AB}}}\times\frac{\overline{I_{AB}M_{ABC}}}{\overline{M_{ABC}C}}\times\frac{\overline{CI_{CD}}}{\overline{I_{CD}D}}=\frac{R_D}{R_B}\times\frac{\overline{BA}}{\overline{AI_{BC}}}\times\frac{R_B}{R_C}\times\frac{\overline{I_{BC}A}}{\overline{AB}}\times\frac{R_C}{R_D}=1,$$

3° 由【Ceva 逆定理】知 $\overleftrightarrow{DM_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABD}}$三線共點，

4° 同理可寫出另三式，再結合【定理 2-6】便可證明

$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$交於點$M_{ABCD}$，

意即 $\overleftrightarrow{M_{AB}M_{CD}}$、$\overleftrightarrow{M_{AC}M_{BD}}$、$\overleftrightarrow{M_{AD}M_{BC}}$皆通過$M_{ABCD}$。■

當我們以「**一圓蒙日點即該圓圓心、二圓蒙日點即此二圓的內公切線交點**」的想法重新整理上述結果，我們不妨將定理2-5、2-6、2-7再做個小結論，如下：

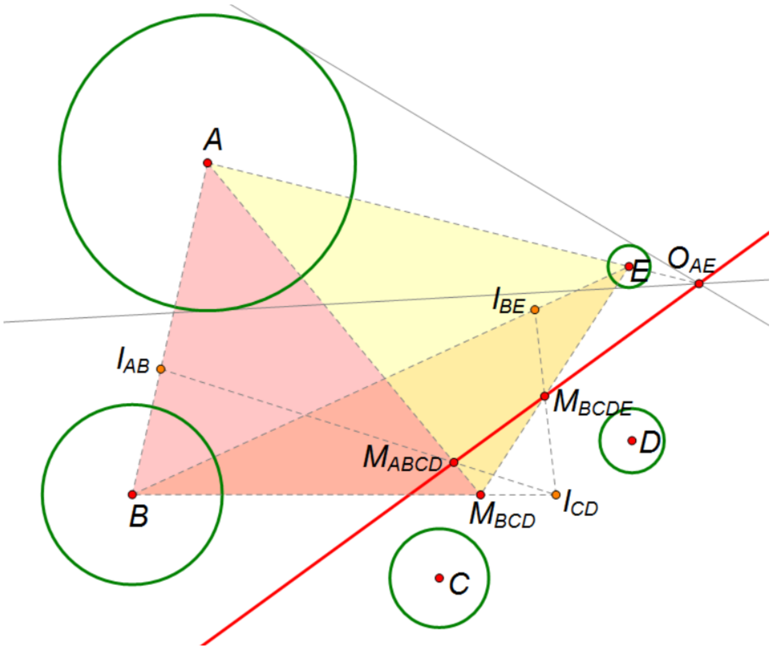
平面上外離的四個圓必有一個**四圓蒙日點**，且具有下列性質：
(1) 任意2圓的外公切線交點，必與此兩圓分別和另2圓所構成的兩個3圓蒙日點形成三點共線。（**四圓廣義蒙日線**）
(2) 任意1圓的蒙日點（圓心）與另3圓的蒙日點連線必共交一點。（此點即為**四圓蒙日點**）
(3) 任意2圓的蒙日點與另2圓的蒙日點連線必通過四圓蒙日點。

三、平面上無限多圓蒙日定理的性質與推廣

在【定理 2-5】與【定理 2-6】的發現後，接下來，我們大膽地將四圓蒙日點與四圓廣義蒙日線性質，推廣到五個圓，甚至 n 個圓中，結果有如我們的研究題目般，故態復「蒙」,「日」新月異，有著令人驚奇的發現：

【定理 3-1】五圓的廣義蒙日線

平面上外離的五個圓 A、B、C、D、E，任意 2 圓的外公切線交點，必與此 2 圓分別與另 3 個圓所構成的兩個四圓蒙日點形成三點共線。如下圖 O_{AE}、M_{ABCD}、M_{BCDE}三點共線，此線稱為「五圓的廣義蒙日線」，同理共有 10 組三點共線。



▲圖 3-1（以O_{AE}、M_{ABCD}、M_{BCDE}三點共線為例）

<證明>

1° 如圖 $3-1$，在 $\triangle ABM_{BCD}$ 中，I_{AB}、I_{CD}、M_{ABCD} 分別在三邊延長線上，
且依【定理 2-7】知此三點共線，

由【Menelaus 定理】知 $\dfrac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{I_{AB}B}} \times \dfrac{\overline{BI_{CD}}}{\overline{I_{CD}M_{BCD}}} \times \dfrac{\overline{M_{BCD}M_{ABCD}}}{\overline{M_{ABCD}A}} = 1$，

並由【性質 1-1】可改寫為 $\dfrac{\overline{AM_{ABCD}}}{\overline{M_{ABCD}M_{BCD}}} = \dfrac{R_A}{R_B} \times \dfrac{\overline{BI_{CD}}}{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}$，

同理在 $\triangle BEM_{BCD}$，以 I_{BE}、I_{CD}、M_{ABCD} 為截線得

$\dfrac{\overline{M_{BCD}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}E}} = \dfrac{R_B}{R_E} \times \dfrac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{BI_{CD}}}$。

2° 在 $\triangle AEM_{BCD}$ 中，M_{ABCD}、M_{BCDE}、O_{AE} 分別在三邊延長線上，
由1°、【性質 1-1】可得出

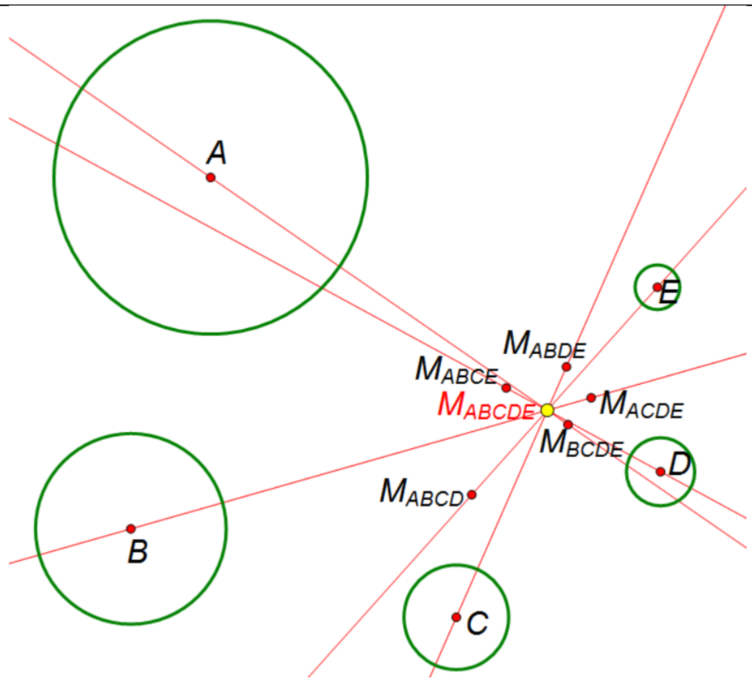
$$\frac{\overline{AM_{ABCD}}}{\overline{M_{ABCD}M_{BCD}}} \times \frac{\overline{M_{BCD}M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}E}} \times \frac{\overline{EO_{AE}}}{\overline{O_{AE}A}} = \frac{R_A}{R_B} \times \frac{\overline{BI_{CD}}}{\overline{I_{CD}M_{BCD}}} \times \frac{R_B}{R_E} \times \frac{\overline{I_{CD}M_{BCD}}}{\overline{BI_{CD}}} \times \frac{R_E}{R_A} = 1，$$

由【Menelaus 逆定理】可證得 M_{ABCD}、M_{BCDE}、O_{AE} 三點共線。

3° 同理可證得另九組亦分別三點共線。■

【定理 3-2】五圓蒙日點 （五圓時，圓心與四圓蒙日點的五條連線共點關係）

平面上外離的五個圓 A、B、C、D、E，任 1 圓的蒙日點（圓心）與另 4 圓的蒙日點連線必共交一點。 如圖 3-2，$\overleftrightarrow{AM_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{BM_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{CM_{ABDE}}$、$\overleftrightarrow{DM_{ABCE}}$、$\overleftrightarrow{EM_{ABCD}}$ 共交一點，稱之為五圓蒙日點，以 M_{ABCDE} 表示。



▲圖 3-2

<證明>

1° 作$\triangle ABC$、$\triangle M_{ABDE}M_{ACDE}M_{BCDE}$，

2° 根據【定理 3-1】可得$\overleftrightarrow{M_{ABDE}M_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於$O_{BC}$，

$\overleftrightarrow{M_{ABDE}M_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{AC}$交於$O_{AC}$，$\overleftrightarrow{M_{ACDE}M_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{AB}$交於$O_{AB}$，

3° 根據【蒙日線】，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC}三點共線，並由【Desargues定理】可得

$\overleftrightarrow{A\ M_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABDE}}$三線交於一點，

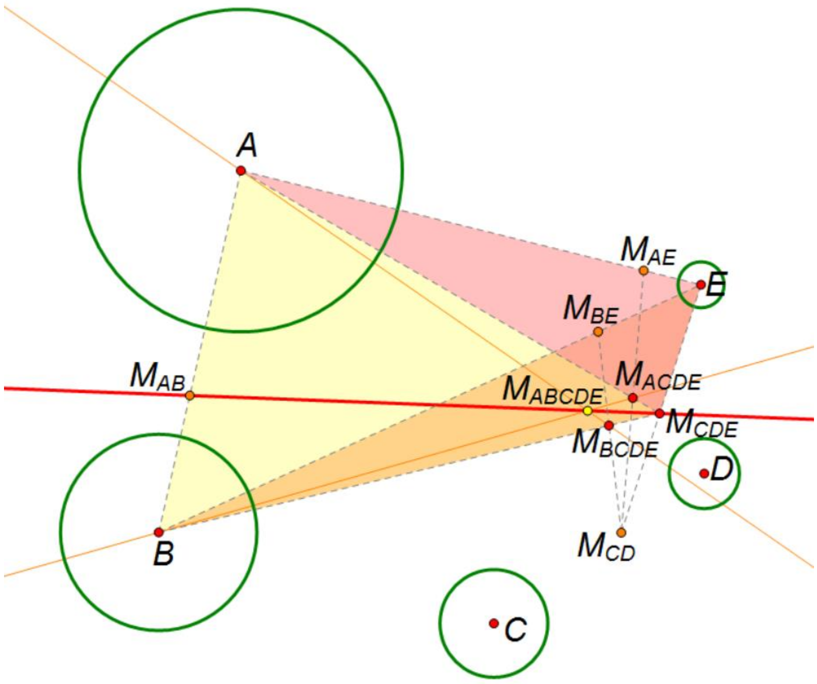
4° 同理可寫出另四式，故可得

$\overleftrightarrow{A\ M_{BCDE}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACDE}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABDE}}$、$\overleftrightarrow{D\ M_{ABCE}}$、$\overleftrightarrow{E\ M_{ABCD}}$ 五線共交一點。■

此外，我們也發現【定理2-7】的結果也可以推廣到五個圓情形，如下：

【定理 3-3】五圓時，任意兩圓的蒙日點與另三圓的蒙日點連線關係

平面上外離的五個圓，則任意 2 圓的蒙日點與另 3 圓的蒙日點連線必通過五圓蒙日點。如圖 3-3，$\overleftrightarrow{M_{AB}M_{CDE}}$等共10 條線皆通過點$M_{ABCDE}$。



▲圖 3-3

<證明>

1° 如圖 3-3，在$\triangle AEM_{CDE}$中，M_{AE}、M_{ACDE}、M_{CD}分別在三邊延長線上，且依定義知此三點共線，由【Menelaus 定理】知

$\frac{\overline{A\ M_{AE}}}{\overline{M_{AE}\ E}}\times\frac{\overline{E\ M_{CD}}}{\overline{M_{CD}\ M_{CDE}}}\times\frac{\overline{M_{CDE}\ M_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}\ A}}=1$，並由【性質 1-1】可改寫為

$\frac{\overline{A\ M_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}\ M_{CDE}}}=\frac{R_A}{R_E}\times\frac{\overline{E\ M_{CD}}}{\overline{M_{CD}\ M_{CDE}}}$。同理在$\triangle BEM_{CDE}$中，以$M_{BE}$、$M_{BCDE}$、$M_{CD}$

為截線可得 $\frac{\overline{M_{CDE}\ M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}\ B}}=\frac{R_E}{R_B}\times\frac{\overline{M_{CDE}\ M_{CD}}}{\overline{M_{CD}\ E}}$。

2° 在$\triangle ABM_{CDE}$中，M_{AB}、M_{ACDE}、M_{BCDE}分別在三邊延長線上，

由1°、【性質 1-1】可得$\frac{\overline{A\ M_{ACDE}}}{\overline{M_{ACDE}\ M_{CDE}}}\times\frac{\overline{M_{CDE}\ M_{BCDE}}}{\overline{M_{BCDE}\ B}}\times\frac{\overline{B\ M_{AB}}}{\overline{M_{AB}\ A}}$

$$=\frac{R_A}{R_E}\times\frac{\overline{E\ M_{CD}}}{\overline{M_{CD}\ M_{CDE}}}\times\frac{R_E}{R_B}\times\frac{\overline{M_{CDE}\ M_{CD}}}{\overline{M_{CD}\ E}}\times\frac{R_B}{R_A}=1$$

3° 由【Ceva 逆定理】知 $\overleftrightarrow{D\ M_{ABC}}$、$\overleftrightarrow{M_{AB}\ M_{CD}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABD}}$三線共點，

4° 同理可寫出其他式，再結合【定理 3-2】便可證明任意兩圓的蒙日點與另三圓的蒙日點連線必通過五圓蒙日點。

在繼續向六圓、七圓等擴展之後，我們認為【定理2-5至2-7】至【定理3-1至3-3】所發現之性質是可以繼續延伸，因此我們大膽地提出下列三大假設：

【定理 3-4】n 圓廣義蒙日線

平面上外離的 n 個圓a_1、a_2、a_3、⋯⋯、a_n（其中$n\in N$，$n\geq 5$），任意 2 圓的外公切線交點，必與此 2 圓分別與另 n-2 個圓所構成的兩個 n-1 圓蒙日點形成三點共線，例如 $O_{a_1a_2}$、$M_{a_1a_3a_4\cdots a_n}$、$M_{a_2a_3a_4\cdots a_n}$三點共線，同理共有C_2^n組三點共線。

【定理 3-5】n 圓蒙日點 （圓心與 n-1 圓蒙日點的 n 條連線的共點關係）

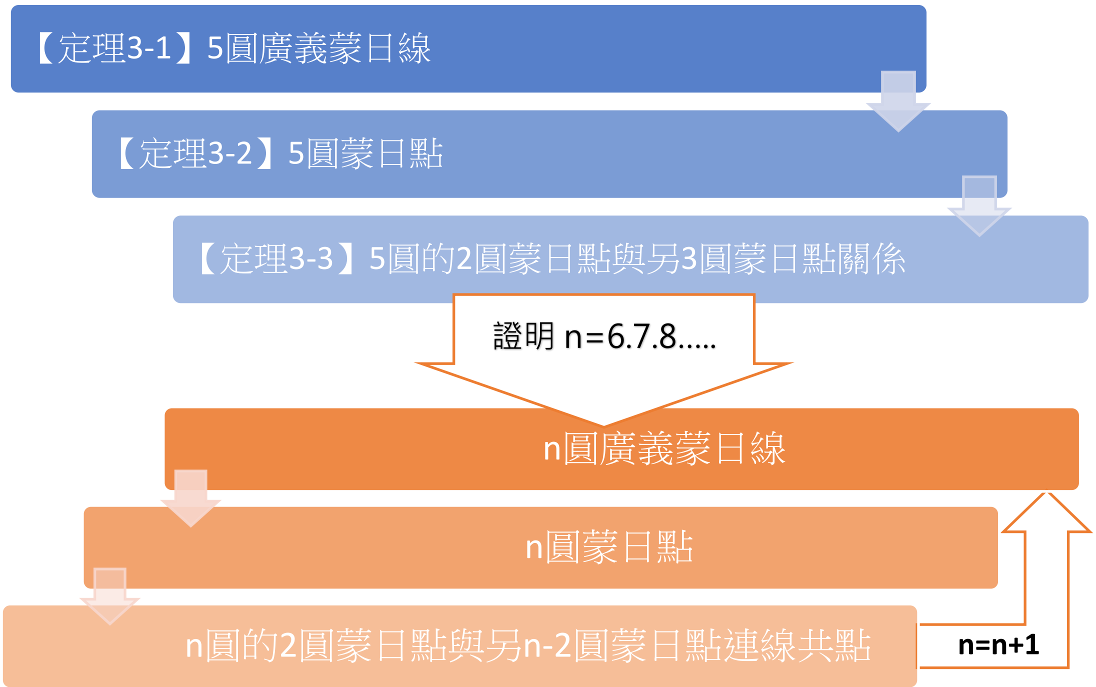
平面上外離的 n 個圓a_1、a_2、a_3、⋯⋯、a_n（其中$n\in N$，$n\geq 5$），任意 1 圓的蒙日點（圓心）與另 n-1 圓的蒙日點連線必共交一點，也就是 $\overleftrightarrow{a_1\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_n}}$、$\overleftrightarrow{a_2\ M_{a_1a_3a_4\cdots a_n}}$、⋯⋯、$\overleftrightarrow{a_{n-1}\ M_{a_1a_2\cdots a_{n-3}a_{n-2}a_n}}$、$\overleftrightarrow{a_n\ M_{a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}}}$，此 n 條直線共交於一點，稱此點為 **n 圓蒙日點**，並以$M_{a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n}$表示。

【定理 3-6】n 圓時，2 圓蒙日點與另 n-2 圓蒙日點連線的共點關係

平面上外離的 n 個圓a_1a_1、a_2、a_3、⋯⋯、a_n（其中$n\in N$，$n\geq 5$），任 2 圓的蒙日點與另 n-2 圓的蒙日點連線必皆通過$M_{a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n}$。 也就是說 $\overleftrightarrow{M_{a_1a_2}M_{a_3a_4\cdots a_n}}$、$\overleftrightarrow{M_{a_1a_3}M_{a_2a_4\cdots a_n}}$、$\overleftrightarrow{M_{a_1a_4}M_{a_2a_3a_5\cdots a_n}}$、⋯⋯、$\overleftrightarrow{M_{a_{n-1}a_n}M_{a_1a_2a_3\cdots a_{n-2}}}$，共 C_2^n 條直線必皆通過$M_{a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n}$。

在這三個定理中，我們先規定$n \geq 5$的原因是在n=4時，在【定理3-6】中，敘述會變成「任兩圓的內公切線交點與另兩圓的蒙日點連線」，其中兩圓蒙日點在我們之前的定義就是內公切線交點，因此直線的數量會被重複算，便須把定理修正為「此 $\frac{C_2^4}{2} = 3$ 條直線必皆通過 $M_{a_1a_2a_3a_4}$」才會成立。因此為不失一般性，我們暫時將此三個定理規定$n \geq 5$。

由於要證明任意正整數n成立，我們想要採以數學歸納法的證明方式，將之一一擊退，但在嘗試證明的過程中，我們遲遲無法想出如何證明，因為我們在【定理2-5】至【定理3-3】中證明都是一環接著一環，每項定理的證明皆需用到前一個定理中的性質或是定義。我們所提的三大假設亦是如此，要以數學歸納法來個別證明，實在有很大的困難。所幸我們想到，可以將三個定理視為一整個大定理，使之一次證明，因此我們提出一套以數學歸納法的證明順序如下：



▲證明流程圖

<證明>

1° 當$n = 5$時：

(1) 代入【定理3-4】敘述，根據【定理3-1】，此敘述成立。

(2) 代入【定理3-5】敘述，根據【定理3-2】，此敘述成立。

(3) 代入【定理3-6】敘述，根據【定理3-3】，此敘述成立。

(4) 由（1）~（3） 知 $n = 5$ 時成立。

2° 假設 $n = k$ 時成立（其中$k\epsilon N$，$k \geq 5$），即：

(1) 平面上k個外離圓a_1、a_2、a_3、 …… 、a_k，任意2圓的外公切線交點，必與此2圓分別與另k-2圓所構成的兩個k-1圓蒙日點形成三點共線。

(2) 平面上k個外離圓a_1、a_2、a_3、 …… 、a_k，任意1圓與另k-1個圓的蒙日點連線，共k條直線必共交一點，稱此點為**k圓蒙日點**，並以$M_{a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}$表示之。

(3) 平面上k個外離圓a_1、a_2、a_3、 …… 、a_k，任2圓的蒙日點與另k-2圓的蒙日點連線，共 C_2^k 條直線必皆通過$M_{a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}$。

3° 當n=k+1，代入【定理3-4】中時：

(1) 欲證：「平面上的k+1個外離圓a_1、a_2、a_3、 …… 、a_{k+1}，任意兩圓的外公切線交點，必與此兩圓分別與另k-1個圓所構成的兩個k圓蒙日點形成三點共線。」

(2) $\Delta\, a_1a_2M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}$中，$M_{a_1a_2}$、$M_{a_3a_4\cdots a_k}$、$M_{a_1a_2\cdots a_k}$分別在三邊延長線上，且依2°（3）知此三點共線，由【Menelaus定理】知

$$\frac{\overline{a_1\ M_{a_1a_2}}}{\overline{M_{a_1a_2}\ a_2}}\times\frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}\times\frac{\overline{M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}M_{a_1a_2\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_k}\ a_1}}=1，$$

並由【性質1-1】可改寫為

$$\frac{\overline{a_1\ M_{a_1a_2\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}=\frac{R_{a_1}}{R_{a_2}}\times\frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}$$ 。同理在

$\Delta\, a_{k+1}a_2M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}$中，以$M_{a_2a_{k+1}}$、$M_{a_3a_4\cdots a_k}$、$M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}$為截線得

$$\frac{\overline{a_{k+1}\ M_{a_2a_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_{k+1}}\ a_2}}\times\frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}\times\frac{\overline{M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}\ a_{k+1}}}=1\quad，$$

並由【性質1-1】可改寫為

$$\frac{\overline{M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}\ a_{k+1}}}=\frac{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}}\times\frac{R_{a_2}}{R_{a_{k+1}}}。$$

(3) $\Delta\, a_1a_{k+1}M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}$中，$M_{a_1a_2\cdots a_k}$、$M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}$、$O_{a_1a_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由 3°(2)、【性質1-1】可得出

$$\frac{\overline{a_1\ M_{a_1a_2\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}\times\frac{\overline{M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}\ a_{k+1}}}\times\frac{\overline{a_{k+1}\ O_{a_1a_{k+1}}}}{\overline{O_{a_1a_{k+1}}\ a_1}}$$

$$= \frac{R_{a_1}}{R_{a_2}} \times \frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}} \times \frac{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_k}\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_k}}}{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_k}}} \times \frac{R_{a_2}}{R_{a_{k+1}}} \times \frac{R_{k+1}}{R_1}$$

$= 1$，

(4) 由【Menelaus逆定理】可證得$M_{a_1a_2\cdots a_k}$、$M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}$、$O_{a_1a_{k+1}}$三點共線，同理可證得共C_2^{k+1}組三點共線。結果成立。

4° 當 n=k+1，代入【定理 3-5】中時：

(1) 欲證：「平面上k+1個外離圓a_1、a_2、a_3、……、a_{k+1}，任意1圓與另k個圓的蒙日點連線，共k+1條直線必共交一點，稱此點為k+1圓蒙日點，並以$M_{a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$表示之。」

(2) 作$\triangle\, a_1a_2a_3$、$\triangle\, M_{a_2a_3\cdots a_{k+1}}M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}M_{a_1a_2a_4\cdots a_{k+1}}$。

(3) 根據定義及3°可知$\overleftrightarrow{M_{a_2a_3a_4\cdots a_{k+1}}M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_1a_2}$交於$O_{a_1a_2}$，$\overleftrightarrow{M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}M_{a_1a_2a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_1a_3}$交於$O_{a_1a_3}$，$\overleftrightarrow{M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}M_{a_1a_2a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_2a_3}$交於$O_{a_2a_3}$。

(4) 根據【蒙日線】知，$O_{a_1a_2}$、$O_{a_1a_3}$、$O_{a_2a_3}$三點共線，並由【Desargues定理】可得$\overleftrightarrow{a_1\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_2\ M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_3\ M_{a_1a_2a_4\cdots a_{k+1}}}$三線交於一點。

(5) 同理可寫出其他式，結合即可得 $\overleftrightarrow{a_1\ M_{a_2a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_2\ M_{a_1a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、……、$\overleftrightarrow{a_k\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_{k+1}\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}}$
此k+1線共交一點$M_{a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$。結果成立。

5° 當n=k+1，代入【定理3-6】中時：

(1) 欲證：「平面上的k+1個外離圓a_1、a_2、a_3、……、a_{k+1}，任2圓的蒙日點與另k-1圓的蒙日點連線，共C_2^{k+1}條直線必皆通過 $M_{a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$。」

(2) $\triangle\, a_1a_2M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}$中，$M_{a_1a_2}$、$M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}$、$M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}$分別在三邊延長線上，且依4°知此三點共線，由【Menelaus定理】知

$$\frac{\overline{a_1\ M_{a_1a_2}}}{\overline{M_{a_1a_2}\ a_2}} \times \frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}} \times \frac{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}\ a_1}} = 1，$$

並由【性質1-1】可改寫為

$$\frac{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}\ a_1}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}}} = \frac{R_{a_1}}{R_{a_2}} \times \frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}}$$。同理在

$\triangle\, a_{k+1}a_2M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}$中，以$M_{a_{k+1}a_2}$、$M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}$、$M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$為截線，可得

$$\frac{\overline{a_{k+1}\ M_{a_{k+1}a_2}}}{\overline{M_{a_{k+1}a_2}\ a_2}} \times \frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}} \times \frac{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}\ a_{k+1}}} = 1$$，並由【性質1-1】可改寫為

$$\frac{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}\ a_{k+1}}} = \frac{R_{a_2}}{R_{a_{k+1}}} \times \frac{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}$$。

(3) $\triangle a_1a_{k+1}M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}$中，$M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$、$M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}$、$M_{a_1a_{k+1}}$分別在三邊延長線上，由5°（2）、【性質1-1】可知

$$\frac{\overline{a_1\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}}\times\frac{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}}}{\overline{M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}\ a_{k+1}}}\times\frac{\overline{a_{k+1}\ M_{a_1a_{k+1}}}}{\overline{M_{a_1a_{k+1}}\ a_1}}$$

$$=\frac{R_{a_1}}{R_{a_2}}\times\frac{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}}\times\frac{R_{a_2}}{R_{a_{k+1}}}$$

$$\times\frac{\overline{M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}}}{\overline{a_2\ M_{a_3a_4\cdots a_{k-1}a_k}}}\times\frac{R_{a_{k+1}}}{R_{a_1}}$$

$$=1$$。

(4) 由【Ceva逆定理】知 $\overleftrightarrow{a_1\ M_{a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{a_{k+1}\ M_{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}}$、$\overleftrightarrow{M_{a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k}\ M_{a_1a_{k+1}}}$三線共點，同理可寫出其他式，並結合4°便可證明$\overleftrightarrow{M_{a_1a_2}M_{a_3a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{M_{a_1a_3}M_{a_2a_4\cdots a_{k+1}}}$、$\overleftrightarrow{M_{a_1a_4}M_{a_2a_3a_5\cdots a_{k+1}}}$……、$\overleftrightarrow{M_{a_ka_{k+1}}M_{a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}}}$，此$C_2^{k+1}$條直線，皆通過 $M_{a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}}$。結果成立。

6° 由1°~5°，並由數學歸納法知，$\forall n\epsilon N$，$n\geq 5$，
【定理3-4】、【定理3-5】、【定理3-6】均成立。■

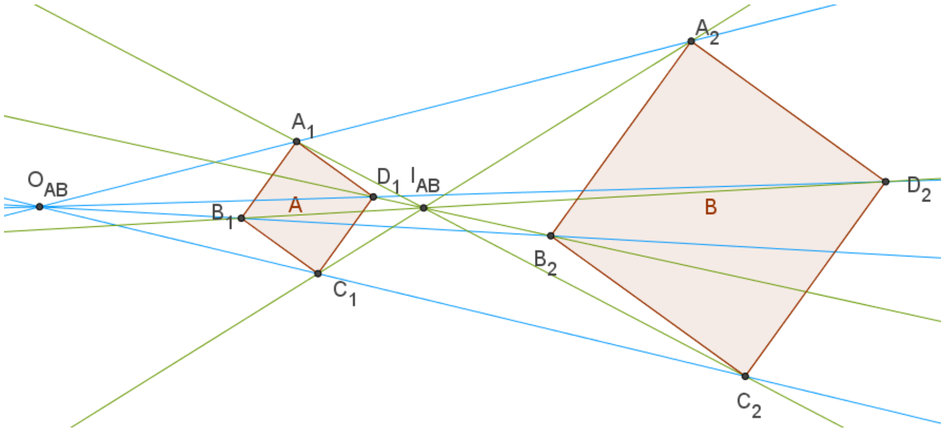
若將 1 圓蒙日點、2 圓蒙日點的定義帶入，並且不計算有幾組共點共線，我們便能將蒙日點、廣義蒙日線以及 2 圓蒙日點與 n-2 圓蒙日點關係的性質，成功的推廣至任意 n 個圓。總結上述的發現如下：

平面上外離的n個圓必有一個**n圓蒙日點**，且具有下列性質：

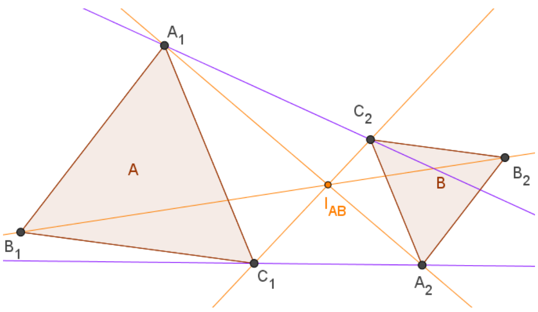
(1) 任意2圓的外公切線交點，必與此兩圓分別和另n-2圓所構成的兩個n-1圓蒙日點形成三點共線。（**n圓廣義蒙日線**）
(2) 任意1圓的蒙日點（圓心）與另n-1圓的蒙日點連線必共交一點。
（即為n圓蒙日點）
(3) 任意2圓的蒙日點與另n-2圓的蒙日點連線必通過n圓蒙日點。

四、平面上正多邊形蒙日定理的性質

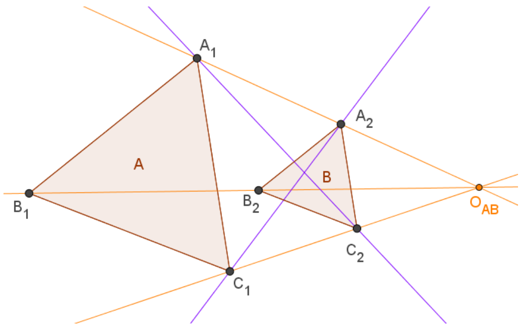
為將圓的內、外公切線交點性質，推廣到正多邊形，我們重述位似圖形概念：「當兩個相似多邊形且其對應邊互相平行，則其對應頂點的連線會共交於一點，並稱此點為**位似中心**，此兩多邊形為**位似圖形**」。由於含有對邊平行之圖形會有兩種對應點連線方式能使得所有線交於一點，故其有兩個位似中心，如圖 4-1，兩個互為位似圖形之正方形 A、B，有內、外兩種連線方式能使對應點連線交於一點，我們分別以I_{AB}表示其**內位似中心**，以O_{AB}表示**外位似中心**。



▲圖 4-1 位似的正偶數邊形能同時作出內、外位似中心



▲圖 4-2 反向位似圖形只作出內位似中心



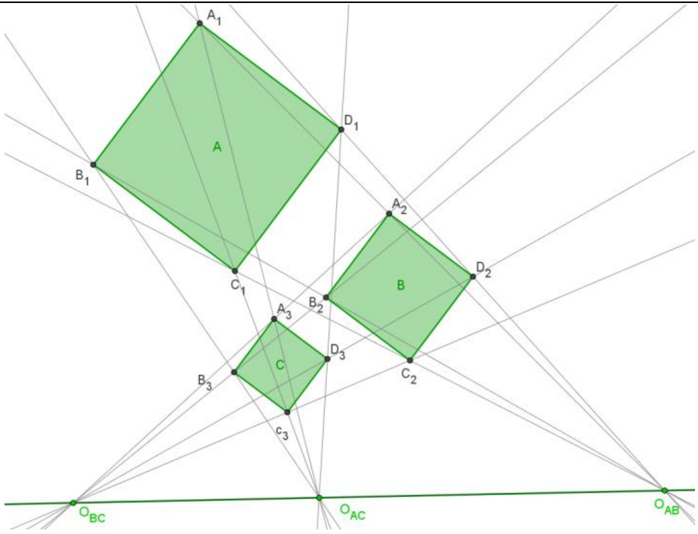
▲圖 4-3 同向的位似圖形只作出外位似中心

然而，如上圖 4-2 及 4-3 所示，在兩個正奇數邊形，同向的狀況只能作出外位似中心，而反向只能作出內位似中心；因此我們將正偶數邊形與正奇數邊形分開討論。

（一）正偶數邊形中的蒙日定理

【定理 4-1】正方形的蒙日線

任意外離的三個位似正方形，作任兩個正方形的外位似中心，此三點共線。如圖 4-4，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。



▲圖 4-4

<證明>

1° 設三個正方形 A、B、C，其邊長分別為 a、b、c。

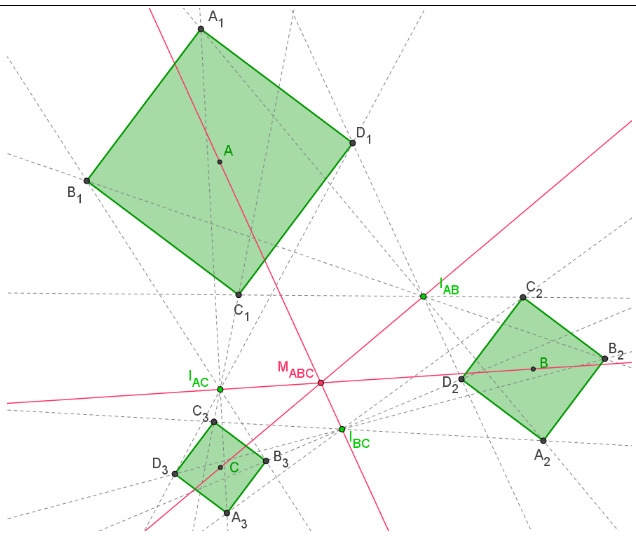
2° 由【性質 1-1】得知 $\frac{AO_{AB}}{BO_{AB}}=\frac{a}{b}$、$\frac{BO_{BC}}{CO_{BC}}=\frac{b}{c}$、$\frac{CO_{CA}}{AO_{CA}}=\frac{c}{a}$。

3° 在△ABC 中，因為$\frac{AO_{AB}}{BO_{AB}}\times\frac{BO_{BC}}{CO_{BC}}\times\frac{CO_{CA}}{AO_{CA}}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}=1$，

根據 【Menelaus 定理】，得知O_{AB}、O_{BC}、O_{CA}三點共線。

【定理 4-2】正方形的蒙日點

任意外離的三個位似正方形，任一個正方形的中心與另兩個正方形內位似中心的連線，必三線共點。如圖 4-5，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



▲圖 4-5

<證明>

1° 設三個正方形 A、B、C，其邊長分別為 a、b、c。

2° 由【性質 1-1】得知 $\frac{\overline{AI_{ab}}}{\overline{BI_{ab}}}=\frac{a}{b}$、$\frac{\overline{BI_{bc}}}{\overline{CI_{bc}}}=\frac{b}{c}$、$\frac{\overline{CI_{ac}}}{\overline{AI_{ac}}}=\frac{c}{a}$。

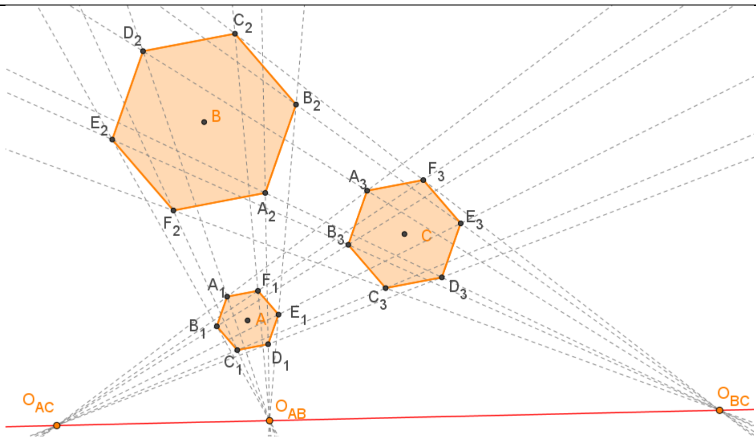
3° 在△ABC 中，因為$\frac{\overline{AI_{ab}}}{\overline{BI_{ab}}}\times\frac{\overline{BI_{bc}}}{\overline{CI_{bc}}}\times\frac{\overline{CI_{ac}}}{\overline{AI_{ac}}}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}=1$，

根據【Ceva 定理】得知$\overline{AI_{bc}}$、$\overline{BI_{ac}}$、$\overline{CI_{ab}}$三線共點。

同樣地，對三個正六邊形的蒙日線、蒙日點一樣成立，證明同前定理 4-1 和 4-2，不另外贅述。

【定理 4-3】正六邊形的蒙日線

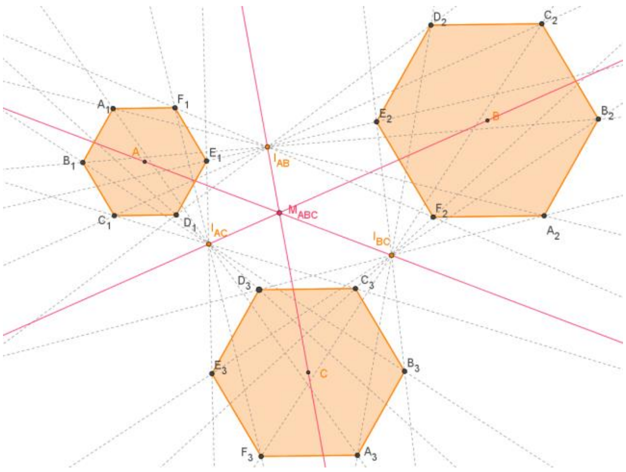
任意外離的三個位似正六邊形，任兩個正六邊形的外位似中心三點共線。如圖 4-6，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。



▲圖 4-6

【定理 4-4】正六邊形的蒙日點

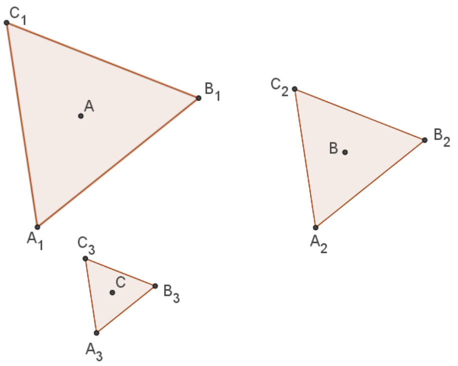
任意外離的三個位似正六邊形，任一正六邊形的中心與另兩個正六邊形內位似中心的連線，必三線共點。如圖 4-7，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



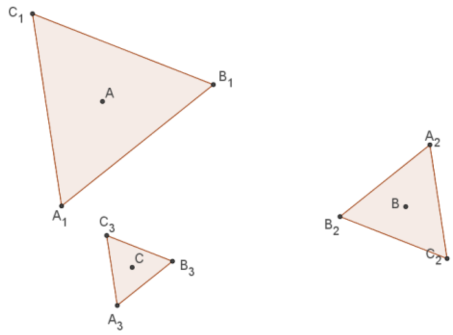
▲圖 4-7

（二）正奇數邊形的蒙日定理

以正三角形為例，因為奇數邊形會有同向與反向情形，如圖 4-8、圖 4-9。因此，在探討正三角形的蒙日定理時，我們將兩種狀況分開討論。



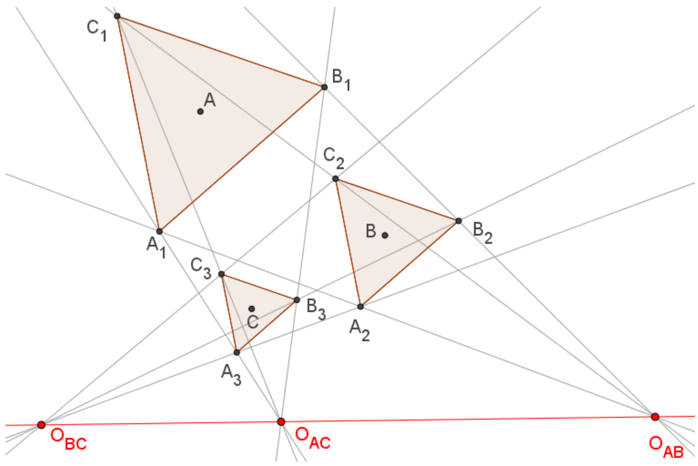
▲圖 4-8 同向位似正三角形



▲圖 4-9 反向位似正三角形

【定理 4-5】同向位似正三角形的蒙日線

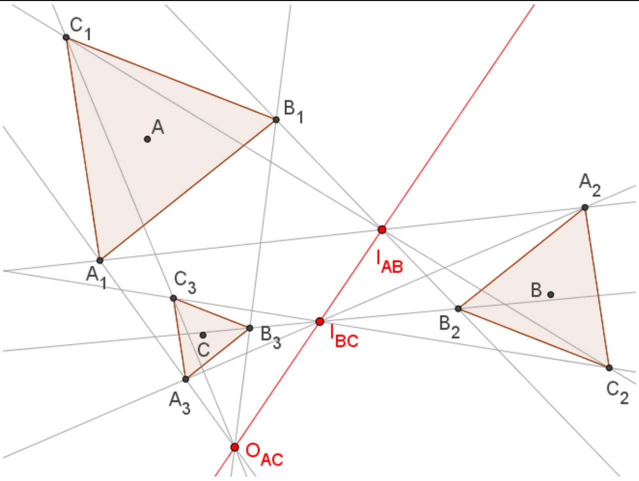
任意外離的三個同向位似正三角形，任兩個正三角形外位似中心的連線，必三線共點，如下圖 4-10。



▲圖 4-10

【定理 4-6】反向位似正三角形的廣義蒙日線

任意外離的三個反向位似正三角形，任二個正三角形的外位似中心，以及分別與另一個正三角形的內位似中心，形成三點共線。如圖 4-11，O_{AC}、I_{AB}、I_{BC} 三點共線。

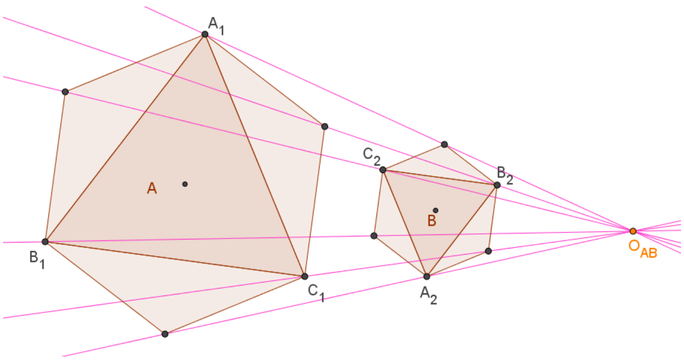


▲圖 4-11

在三個正奇數邊形情況下，為了推廣蒙日點、廣義蒙日點等定理，我們嘗試在正向或反向的狀況下，完整作出六個內、外位似中心。舉正三角形為例，如下圖 4-12，以原本兩正三角形作與之同外接圓的正六邊形，以此兩正六邊形的外位似中心作為原互為反向正三角形的外位似中心，證明如下：由【性質 1-1】知，

$$\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}=\frac{\text{正六邊形 A 邊長}}{\text{正六邊形 B 邊長}}=\frac{\text{正六邊形 A 外接圓半徑}}{\text{正六邊形 B 外接圓半徑}}=\frac{\text{正三角形 A 邊長}}{\text{正三角形 B 邊長}}$$

$\Rightarrow O_{AB}$為正三角形 A、B 的外位似中心

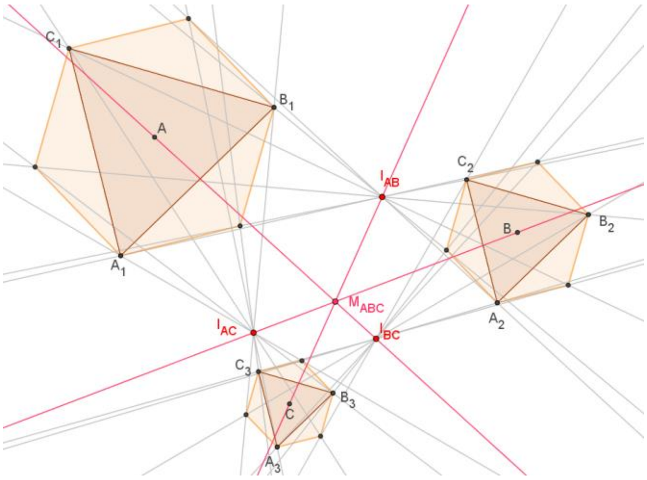


▲圖 4-12

在兩同向正奇數邊形作內位似中心也能由同方法簡單作出，證明就不再贅述。

【定理 4-7】三個同向位似正三角形的蒙日點

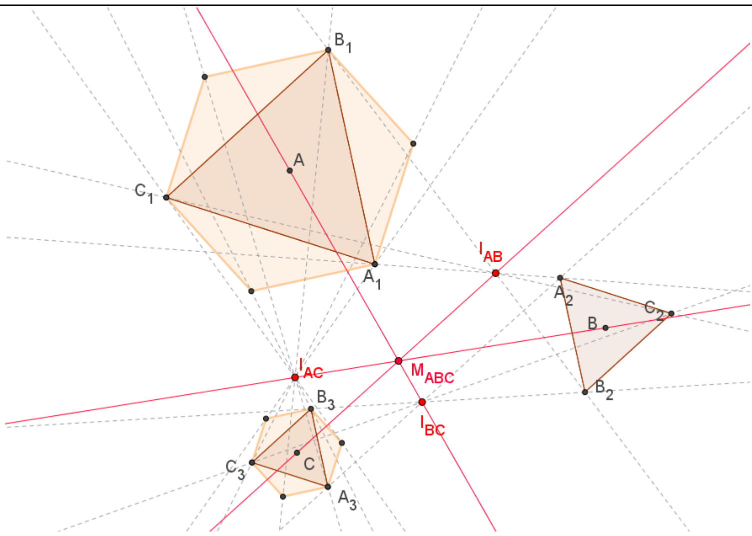
任意三個外離且互位似的相異正三角形，任一個正三角形的中心與另兩個正三角形內位似中心的連線，必三線共點。如圖 4-13，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



▲圖 4-13

【定理 4-8】三個反向位似正三角形的蒙日點

任意三個外離且互位似的相異正三角形，任一個正三角形的中心與另兩個正三角形內位似中心的連線，必三線共點。如圖 4-14，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。

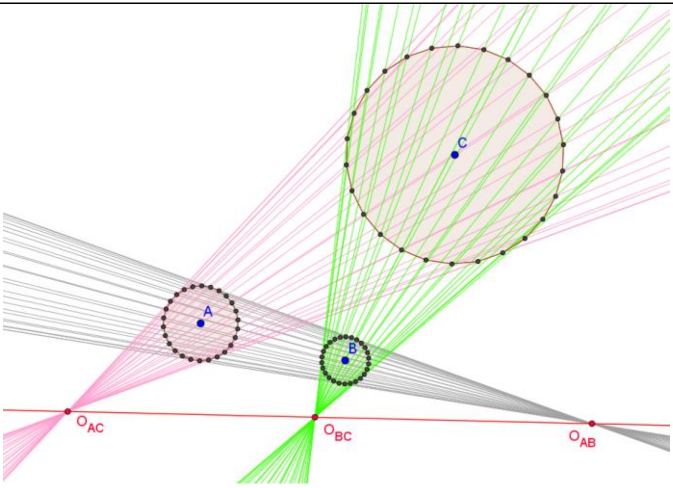


▲圖 4-14

接下來，我們以此概念來建構無論是奇或偶數邊的正 n 邊形，結論如下：

【定理 4-9】正 n 邊形的蒙日線

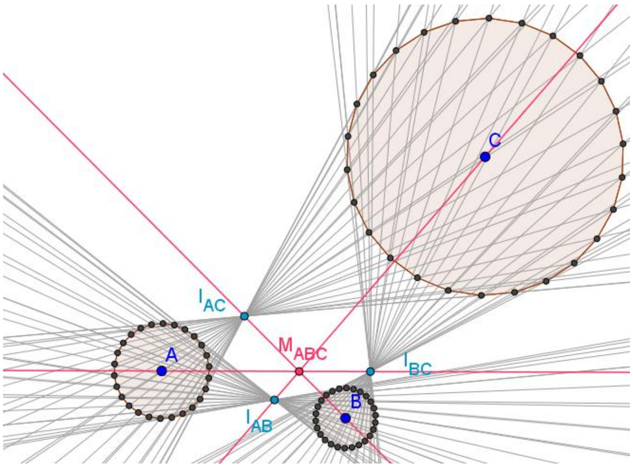
任意外離的三個位似正 n 邊形，任兩個正 n 邊形的外位似中心共線。如圖 4-15，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。



▲圖 4-15

【定理 4-10】正 n 邊形的蒙日點

任意外離的三個位似正 n 邊形，任一個正 n 邊形的中心與另兩個正 n 邊形內位似中心的連線，必三線共點。如圖 4-16，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



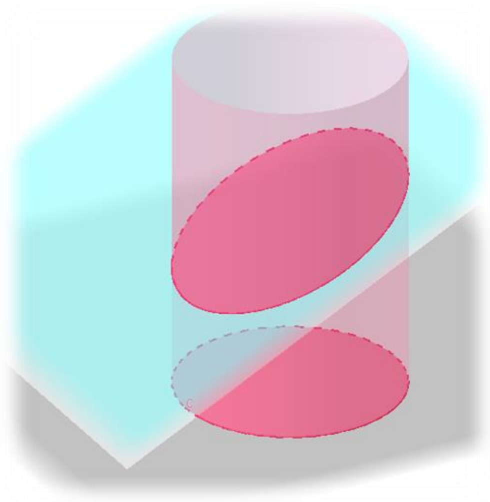
▲圖 4-16

上述定理我們均可仿造定理 4-1、4-2 的證法得證。我們可以得知兩個位似正多邊形其內、外位似中心為其外接圓內、外公切線交點，因此，便可將前述探討圓的蒙日定理所得的性質可推廣到正多邊形。

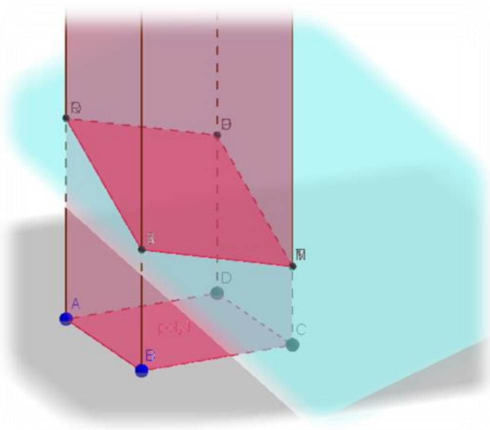
五、平面上圓錐曲線與平行多邊形的性質與推廣

如果不是圓而是橢圓呢？如果不正方形而是平行四邊形呢？接下來，我們試圖透過投影的方式來說明蒙日定理在橢圓和平行多邊形上的推廣。

利用投影變換，將前述在圓中發現的蒙日定理性質，投影到一個另外一個平面上，此時圓會變為橢圓，正多邊形會變為平行多邊形，如下圖 5-1，但原本共點或共線的性質並未改變，因此在前述在圓或正多面邊形中蒙日定理的性質在橢圓或是平行多邊形中，仍然會成立。結論分別陳述如下，證明不再贅述。



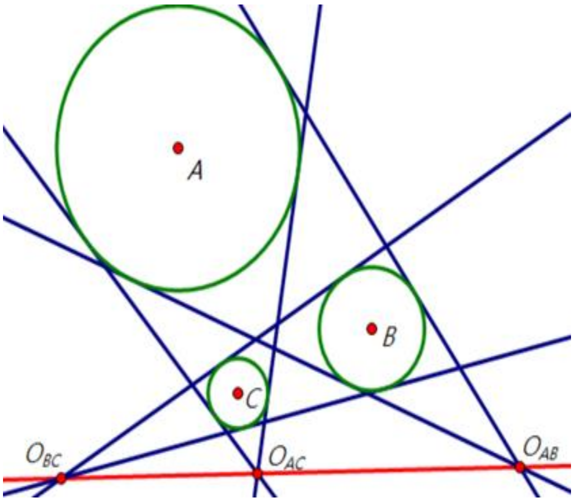
▲圖 5-1（a） 圓投影作圖



▲圖 5-1（b） 正多邊形投影作圖

【定理 5-1】三個橢圓的蒙日線

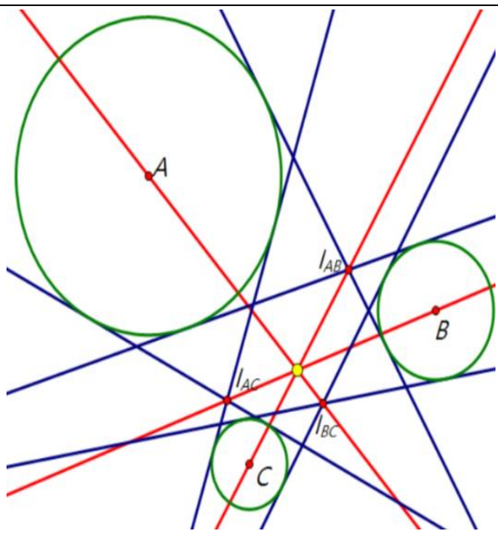
平面上外離的三個位似橢圓 A、B、C，任二橢圓作外公切線交點，三交點共線。如圖 5-2，O_{AB}、O_{BC}、O_{AC}三點共線，稱為三個橢圓蒙日線。



▲圖 5-2

【定理 5-2】三個橢圓的蒙日點

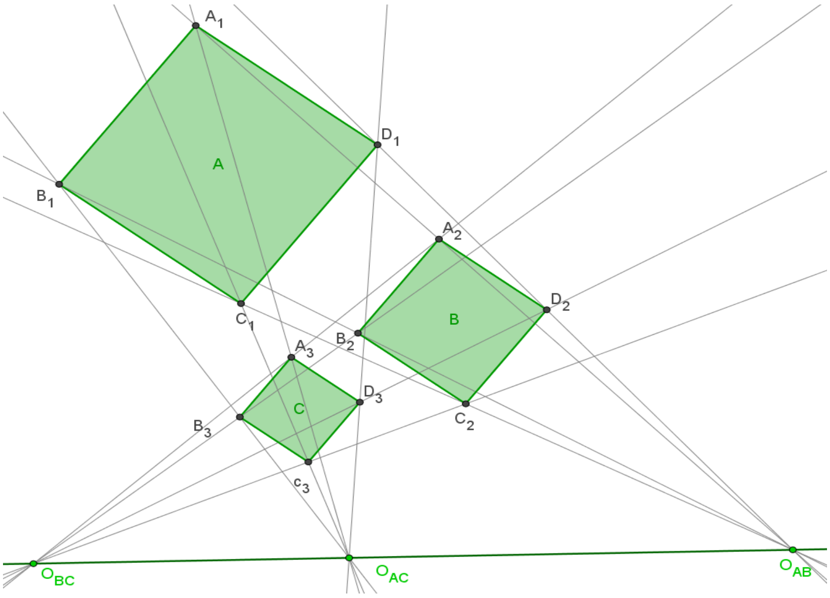
平面上外離的三個位似橢圓，任一橢圓中心與另二橢圓的內公切線交點連線，三線共點，如圖 5-3，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



▲圖 5-3

【定理 5-3】平行四邊形的蒙日線

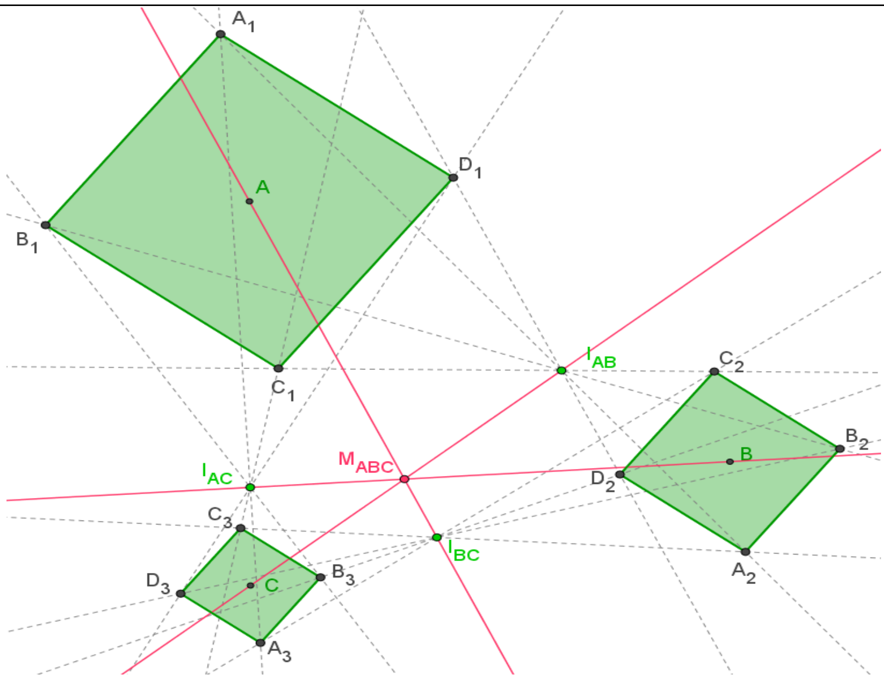
平面上外離的三個位似平行四邊形，任二個平行四邊形的外位似中心共線，如圖 5-4，O_{AB}、O_{AC}、O_{BC} 三點共線。



▲圖 5-4

【定理 5-4】平行四邊形的蒙日點

平面上外離的三個位似平行四邊形，任一個平行四邊形中心與另二個平行四邊形內位似中心連線，三線共點，如圖 5-5，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。



▲圖 5-5

至此，無論橢圓、平行多邊形，事實上，我們可以大膽臆測：任意外離的三個位似圖形必有一個蒙日線與蒙日點，甚至推廣至 n 個時仍會成立。

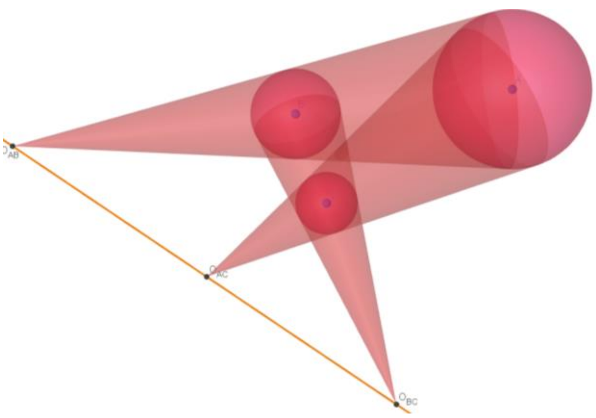
六、空間中圓球的蒙日定理的性質與推廣

最後，本研究試圖從平面，推廣到空間中，大膽挑戰球體與正多面體的蒙日定理是否存在？

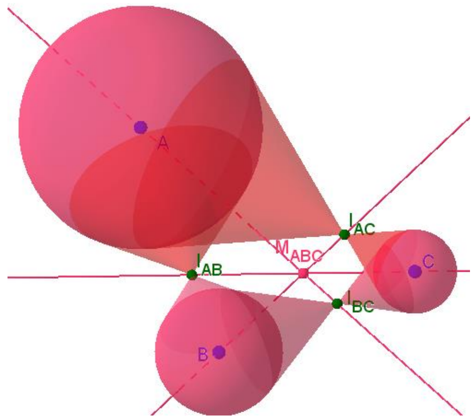
首先，我們仍以I_{AB}和O_{AB}分別表示兩個外離的相異球的內公切錐頂點與外公切錐頂點。從文獻上可知平面上三圓的蒙日定理（蒙日線）可以推廣到空間中的三球蒙日定理（蒙日線），不另外證明，如下：

【定理 6-1】三球蒙日線

空間中外離的三個球，任意兩球的外公切錐頂點必三點共線。如圖 6-1。



▲圖 6-1



▲圖 6-2

【定理 6-2】三球蒙日點

空間中外離的三個球A、B、C，任意一球的球心與另兩球的內公切錐頂點連線，則三連線必共交一點。如圖 6-2，$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$三線共點，並稱此點為**三球蒙日點**。

<證明>

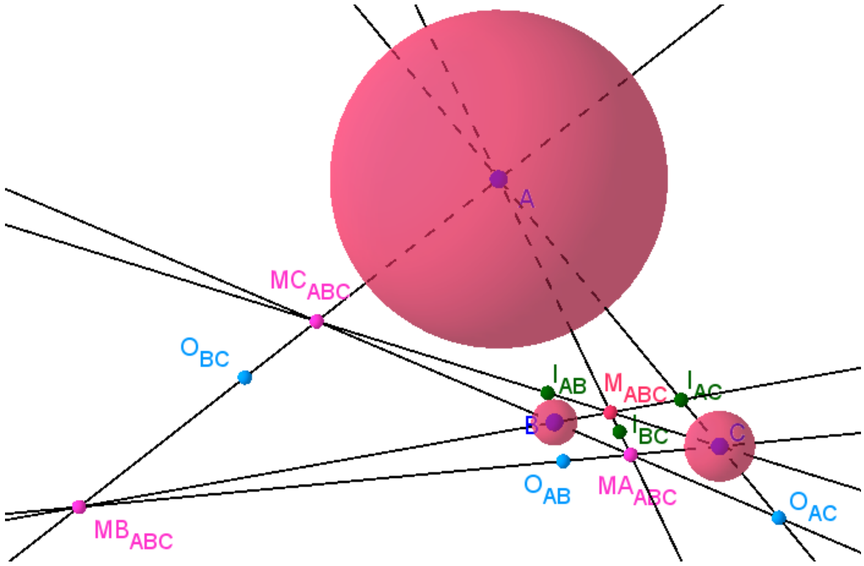
1° 因為內公切錐頂點皆在任兩球連心線上，可知 A、I_{AB}、B、I_{BC}、C、I_{AC}皆在同一平面 ABC 上。

2° 作過 A、B、C 三點之平面，分別將各球截出一圓。

3° 根據平面上的【蒙日點】知 $\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$三點共線。■

【定理 6-3】三球的廣義蒙日點

空間中外離的三個球A、B、C，任一球的球心與另二球的內公切錐頂點連線，以及另外二球的球心分別與另二球外公切錐頂點的連線，則此三線共點。
如圖 6-3，($\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$)、($\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$)、($\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$)，分別三線共點，並稱這些交點為空間中三球的**廣義蒙日點**。



▲圖 6-3

<證明>

1° 因為內、外公切錐頂點皆在任兩球連心線上，可知A、I_{AB}、B、I_{BC}、C、I_{AC}

O_{AC}、O_{AB}、O_{BC}皆在同一平面 ABC 上，

2° 作過 A、B、C 三點之平面，分別將各球截出一圓。

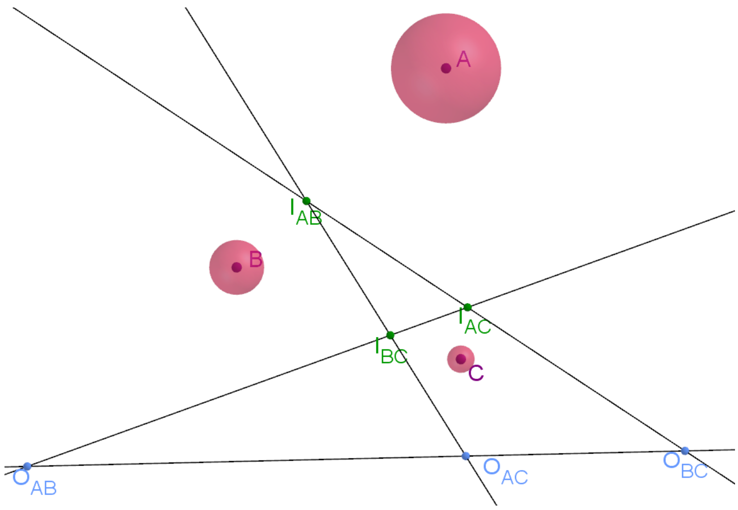
3° 根據【定理 1－1】平面上的三圓廣義蒙日點得知

($\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$)、($\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$)、

($\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$)，分別三線共點。■

【定理 6-4】三球的廣義蒙日線

空間中外離的三個球A、B、C，任二球的外公切錐頂點，必與此兩球分別與另一球內公切錐頂點，形成三點共線。
如圖 6-4，$(O_{AB}$、I_{AC}、$I_{BC})$、$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$，均分別三點共線，並稱這些線為空間中三球的**廣義蒙日線**。



▲圖 6-4

<證明>

1° 因為內、外公切錐頂點皆在任兩球連心線上，可知A、I_{AB}、B、I_{BC}、C、I_{AC}

O_{AC}、O_{AB}、O_{BC}皆在同一平面 ABC 上，

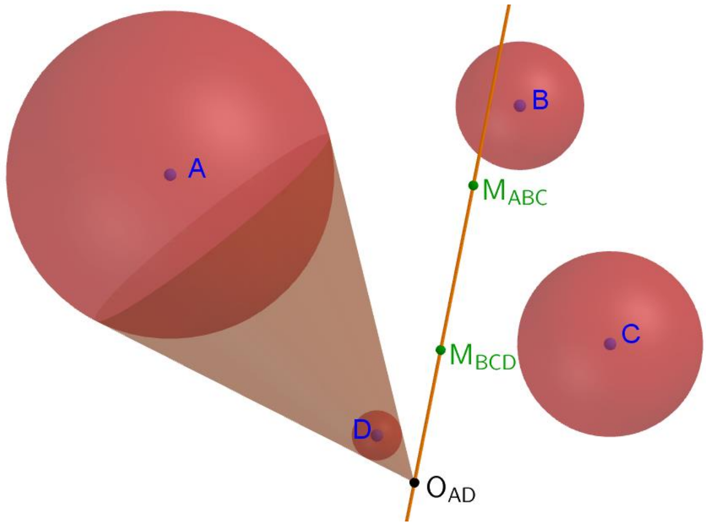
2° 作過 A、B、C 三點之平面，分別將各球截出一圓。

3° 根據平面上的【廣義蒙日線】得知$(O_{AB}$、I_{AC}、$I_{BC})$、

$(O_{AC}$、I_{AB}、$I_{BC})$、$(O_{BC}$、I_{AB}、$I_{AC})$，均分別三點共線。■

【定理 6-5】四球的廣義蒙日線

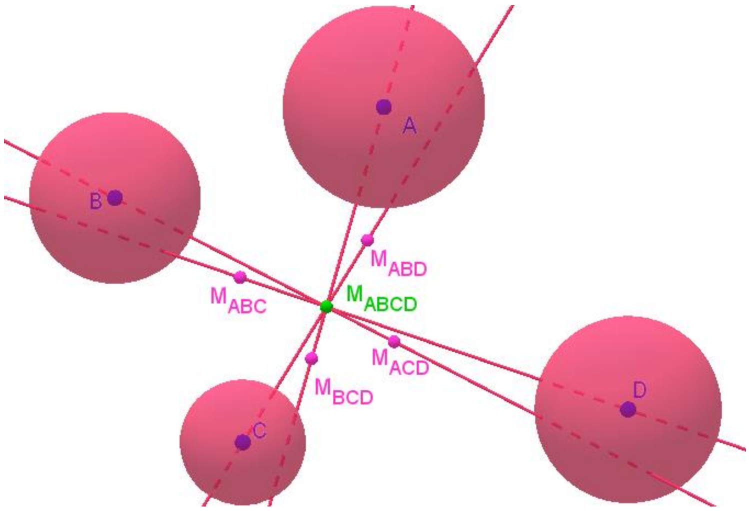
空間中外離的四個球A、B、C、D，任二球的外公切錐頂點，必與此兩球分別與另兩球的三圓蒙日點，形成三點共線。
如圖 6-5，O_{AD}、M_{ABC}、M_{BCD}三點共線，同理共有 6 組三點共線，並稱這些線為空間中**四球廣義蒙日線**。



▲圖 6-5

【定理 6-6】四球蒙日點

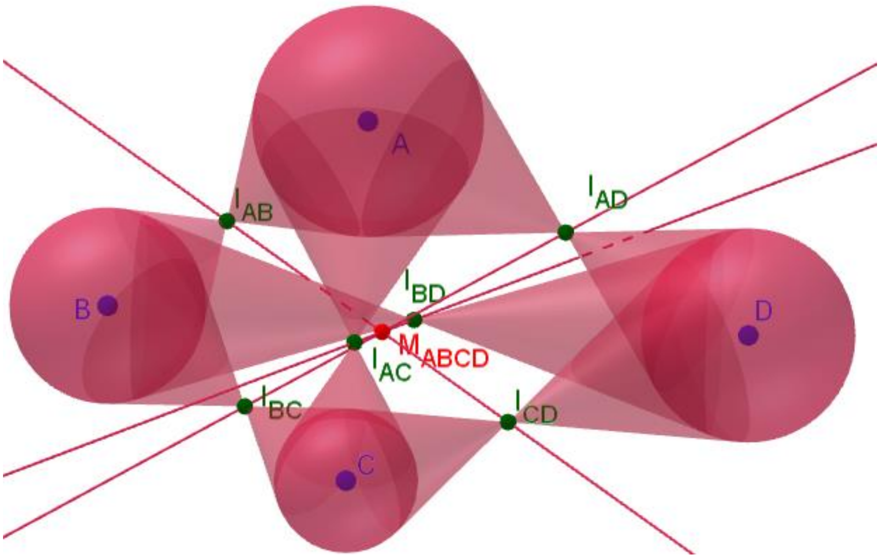
空間中外離的四個球，任意一球的球心與另三球的蒙日點連線，則此四條連線共交一點。如圖 6-6，$\overleftrightarrow{A\ M_{BCD}}$、$\overleftrightarrow{B\ M_{ACD}}$、$\overleftrightarrow{C\ M_{ABD}}$、$\overleftrightarrow{D\ M_{ABC}}$ 四線共交一點，此點稱之為**四球蒙日點**，以M_{ABCD}表示。



▲圖 6-6

【定理 6-7】四球內公切錐頂點連線的共點關係

空間中外離的四個球，任意兩球的內公切錐頂點與另兩球的內公切錐頂點連線，此三連線共交一點。如圖 6-7，$\overleftrightarrow{I_{AB}I_{CD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AC}I_{BD}}$、$\overleftrightarrow{I_{AD}I_{BC}}$ 三線共交點。



▲圖 6-7

上述三個定理皆可透過如【定理 6-2】之證明方式，作出各平面，並以平面上的對應定理得證，故不再贅述。

同平面上四圓的定理 2-5 至 2-7 以及定理 3-1 至 3-6，我們可以將上述定理 6-5 至 6-7 推廣到五球、六球，甚至無限多個球的蒙日點，結果整理如下，證明亦不再贅述。

【定理 6-8】n 球蒙日點

空間中外離的 n 個球，必有一個 **n 球蒙日點，且具有下列性質：**

(1) 任意 2 球的外公切錐頂點，必與此 2 球分別與另 n-2 球所構成的 n-1 球的蒙日點形成三點共線。(**n 球廣義蒙日線**)

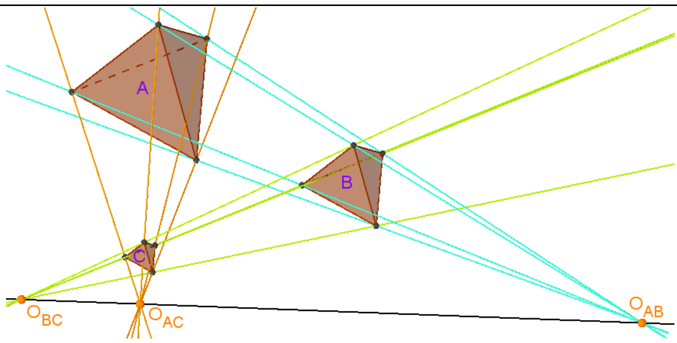
(2) 任意 1 球的蒙日點（球心）與另 n-1 球的蒙日點連線必共交一點。（即 **n 球蒙日點**）

(3) 任意 2 球的蒙日點與另 n-2 球的蒙日點連線必皆通過 **n 球蒙日點**。

在發現球體在空間中的蒙日定理之後，我們一樣可以將的正多邊形推廣到空間中的正多面體，以下以三個正四面體與正六面體為例，結果整理如下。

【定理 6-9】正四面體之蒙日定理

空間中三個外離的位似正四面體，任兩正四面體的外位似中心，三點共線。（如圖 6-8）



▲圖 6-8

<證明>

1° 設三正四面體 A,B,C，其邊長分別為 a,b,c。

2° 因為外位似中心皆在任兩正六面體連心線上，可知 A、B、C、O_{AC}、O_{AB}、O_{BC} 皆在同一平面 ABC 上。

3° 做過 A、B、C 三點之平面。

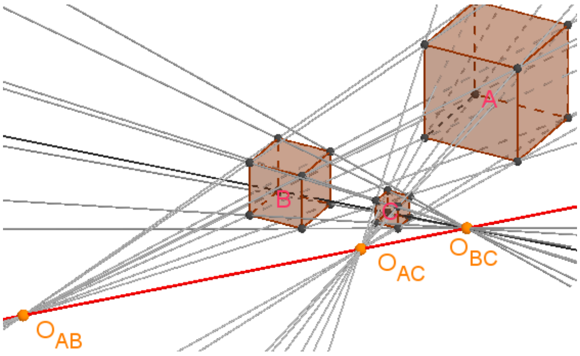
4° 由【性質 1-1】得知 $\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}=\frac{a}{b}$、$\frac{\overline{BO_{BC}}}{\overline{CO_{BC}}}=\frac{b}{c}$、$\frac{\overline{CO_{AC}}}{\overline{AO_{AC}}}=\frac{c}{a}$。

5° 由【Menelaus 定理】得到，因為$\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}\times\frac{\overline{BO_{BC}}}{\overline{CO_{BC}}}\times\frac{\overline{CO_{AC}}}{\overline{AO_{AC}}}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}=1$，

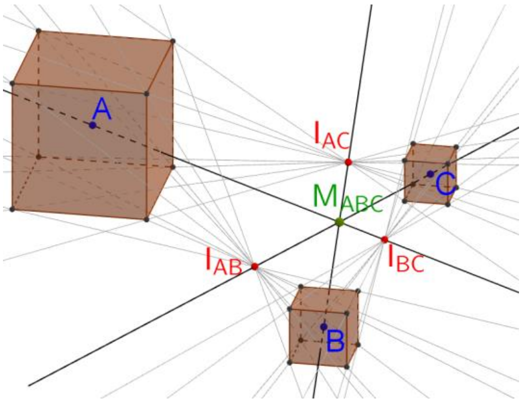
所以得 O_{AC}、O_{AB}、O_{BC}三點共線。■

【定理 6-10】正六面體之蒙日定理

空間中三個外離的位似正六面體，
(1) 任兩正六面體的外位似中心，三點共線。（如圖 6-9（a）））
(2) 任取一個的中心與另兩個內位似中心連線，三線共點。（如圖 6-9（b）））



▲圖 6-9（a）



▲圖 6-9（b）

<證明>

(1)三點共線

1° 設三個正六面體 A,B,C，其邊長分別為 a,b,c。

2° 因為外位似中心皆在任兩正六面體連心線上，可知A、B、C、O_{AC}、O_{AB}、O_{BC}皆在同一平面 ABC 上。

3° 作過 A、B、C 三點之平面，分別將各正六面體截出一平行四邊形。

4° 根據平面上的【定理 5-3】可得知 O_{AC}、O_{AB}、O_{BC}三點共線。■

(2)三線共點

1° 設三個正六面體 A、B、C，其邊長分別為 a、b、c。

2° 因為內位似中心皆在任兩正六面體連心線上，可知A、B、C、I_{AC}、I_{AB}、I_{BC}皆在同一平面 ABC 上。

3° 作過 A、B、C 三點之平面，分別將各正六面體截出一平行四邊形。

4° 根據平面上的【定理 5-4】可得知$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CI_{AB}}$ 三線共點。■

本研究發展至此，透過投影、推移等變換仍會保有共點共線性質，我們似乎可以大膽地將前述的結果推廣至空間中的任意位似圖形。

肆、結論與應用

正如本研究作品名稱「故態復『蒙』,『日』新月異」，我們將鮮少人研究的蒙日定理萌發出新枝，並日夜茁壯。我們發現三圓、四圓情形時的許多共點、共線性質，並以位似、投影等概念，將所發現的結果成功推廣到正多邊形、圓錐曲線及平行多邊形甚至空間中的球體與多面體中。茲將結論分述如下：

一、 在平面上外離的三個圓，其內、外公切線交點除了具有蒙日線與蒙日點性質之外，具有下列性質：

（一）任2圓的外公切線交點，必與此兩圓分別與另1圓的內公切線交點，三點共線，此線稱為**廣義蒙日線**。

（二）任1圓的圓心與另2圓的內公切線交點連線，以及另外2圓的圓心分別與另2圓外公切線交點的連線，三線共點，此點稱為**廣義蒙日點**。

（三）三圓外公切線彼此的15個交點中具有下列性質：

1. **PBL定理：**分別有六點滿足Pascal逆定理，六點滿足Brianchon逆定理，另三點滿足蒙日線定理（Monge’s Line）。
2. 除了任兩圓外公切線交點外，其它交點具有下列性質：
   (1) 三圓分別內交點與外交點連線共點S_1。
   (2) 圓心分別與內交點連線共點S_2。
   (3) 圓心分別與外交點連線共點S_3。
   (4) S_1、 S_2、S_3共線，且與三圓蒙日線垂直。

（四）三圓內公切線彼此的 15 個交點中也具有下列性質：

1. **PBM 定理：**分別有六點滿足 Pascal 逆定理，六點滿足 Brianchon 逆定理，另三點與所對應圓心連線滿足蒙日點定理（Monge’s Point）。
2. 除了任兩圓內公切線交點外，其它交點具有下列性質：
   (1) 三圓分別內交點與外交點連線共點 T_1。
   (2) 任 1 圓的內交點分別與另 2 圓的內公切線交點連線共點 T_2。
   (3) 任 1 圓的外交點分別與另 2 圓的內公切線交點連線共點 T_3。
   (4) T_1、T_2、T_3 三點共線。

二、 平面上外離的四個圓，具有下列性質：

（一）四圓彼此內、外公切線交點對應連線後，可發現有八組三線共點的情形，將此八點對應連線又會分別通過四圓心。

（二）平面上外離的四個圓必有一個**四圓蒙日點**，且具有下列性質：

1. 任意2圓的外公切線交點，必與分別和另2圓所構成的兩個3圓蒙日點形成三點共線。（**四圓廣義蒙日線**）

2. 任意1圓的蒙日點（圓心）與另3圓的蒙日點連線必共交一點。（此點即為**四圓蒙日點**）

3. 任意2圓的蒙日點與另2圓的蒙日點連線必通過此四圓蒙日點。

三、 平面上外離的N個圓必有一個**N圓蒙日點**，且具有下列性質：

（一） 任意2圓的外公切線交點，必與分別和另N-2圓所構成的兩個N-1圓蒙日點形成三點共線，此線稱為**N圓廣義蒙日線。**

（二） 任意1圓的蒙日點（圓心）與另N-1圓的蒙日點連線必共交一點，即為**N圓蒙日點**。

（三） 任意2圓的蒙日點與另N-2圓的蒙日點連線必通過此N圓蒙日點。

（四） 在一圓時，若視其**圓心**為**一圓蒙日點**；二圓時，若視二圓的**內公切線交點**為**二圓蒙日點**，則上述性質對所有的正整數N均成立。

四、 平面上正多邊形、橢圓、平行多邊形的蒙日定理性質與推廣

（一）任意外離的三個位似圖形，例如正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形……等正N邊形，以及可以視為正無限多邊形的圓，都必具有一個**三個位似圖形的蒙日線與蒙日點**；其中甚至推廣至N個位似圖形時，仍會具有**N個位似圖形的蒙日點**。

（二）任何圖形性質透過投影變換，仍會保有平行、共點、共線的關係，所以原屬互為位似的圖形，雖然圖形會改變，如圓變成橢圓、正方形變成平行四邊形等，但仍會保持互為位似圖形的關係。因此、任意外離的三個位似圖形，經過投影之後所形成新的三個位似圖形仍具有一個**三個位似圖形的蒙日線與蒙日點**；甚至推廣至n個位似圖形時，仍會具有**N個位似圖形的蒙日點**。

五、 空間中外離的N個球，必有一個**N球蒙日點，**且具有下列性質：

（一）任意 2 球的外公切錐頂點，必與此 2 球分別與另 N-2 球所構成的 N-1 球的蒙日點形成三點共線。（**N 球廣義蒙日線**）

（二）任意 1 球的蒙日點（球心）與另 N-1 球的蒙日點連線必共交一點。（即 **N 球蒙日點**）

（三）任意 2 球的蒙日點與另 N-2 球的蒙日點連線必皆通過 **N 球蒙日點**。

伍、未來展望

本研究以蒙日定理及蒙日對偶定理為基礎，從平面中三圓蒙日線與蒙日點，推廣到n圓蒙日點，甚至是空間中n球蒙日點，也包含對正多邊形與橢圓等情形的推廣。期能為蒙日定理在射影幾何上扮演更多重要的理論基礎，或許對近來熱門的虛擬實境（Virtual Reality）的幾何光學應用，以及進一步探究宇宙星體間的關係有所幫助。另外，本研究仍有一些值得進一步探索問題，如下：

一、在平面上是否存在N圓的蒙日線，甚至是空間中N球的蒙日線？或在甚麼條件下才存在？

二、蒙日點、蒙日線與圓（球）心位置、半徑大小的關係為何？是否能以幾何量的關係來描述？

陸、參考文獻

1. 位似圖形（2013）。2016年6月13日，網址：http://www.twword.com/wiki/%E4%BD%8D%E4%BC%BC%E5%9C%96%E5%BD%A2
2. 蒙日定理和一个对偶定理（2007）。2016年6月13日，網址：https://matrix19.wordpress.com/2011/07/30/%E8%92%99%E6%97%A5%E5%AE%9A%E7%90%86%E5%92%8C%E4%B8%80%E4%B8%AA%E5%AF%B9%E5%81%B6%E5%AE%9A%E7%90%86/
3. Pierre Beaudry（1995）. The Geometry of the One and the Many. Retrieved May 30, 2016, from https://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/952_met_of_persp.html
4. David Graham Searby （2009）. Forum Geometricorum.（Volume 9 P.181–193）. Retrieved December 8, 2016, from http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200918.pdf

【評語】010040

蒙日定理是一個漂亮的定理，內容是關於三個外離的圓的某些性質，文獻中少有關於蒙日定理的延伸研究，本作品將該定理延伸到四個圓、五個圓等情況，進而推廣到正 2n 邊形以及空間中的圓球等情況，成果頗為豐富，但由於所發現的結果性質相像，似乎尚可以作進一步的整合。射影幾何是數學的一個重要分支，雖然曾經沉寂了一段時間，近年來有重新受注意的跡象，本作品在這方面有一定程度的貢獻。