2017 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010039

參展科別　數學

作品名稱　格子直線數與歐拉函數之探討與推廣

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　臺北市立成淵高級中學

指導教師　林鳳美

作者姓名　范谷瑜

關鍵字　格子直線、歐拉函數、法里序列

作者簡介

我是范谷瑜，目前就讀臺北市立成淵高中三年級。

國中時，就開始參與各項數學競賽與營隊活動，每一次的交流讓我獲益良多。到了高中與老師共開闢了三篇科展作品，過程中雖有無窮多次的困頓，但仍享受於創造數學的喜悅裡。這次很榮幸能參賽國際科展，有機會與各界好手交流，相信是一個知性之旅！最後感謝一路上指導我的老師、以及支持我的家人與朋友們。

摘要

本研究在探討過原點且通過特定格子區域格子點的直線數；先討論正方形的區域，發現這樣的直線數與法里序列及歐拉函數有關，並使用這些結果得到三角形區域中的直線數。

接下來，我們將上述問題從正方形區域推廣至高維度的(超)立方體區域，得到欲求的直線數，並介紹四個歐拉函數的推廣形式，其中一種是約當囿互質函數，使用這些函數不僅能簡化計算，更能拓寬歐拉函數的視野。

最後，我們也計算單體區域，即高維度中廣義三角形區域中的直線數，這些結果成為法里序列的推廣形式，而我們所獲得的公式可以藉由第一類斯特林數表示。

Abstract

This research discusses the number of lattice lines passing through the origin and some points of a specific region. We first discuss the square regions and see that those numbers are closely related to Farey sequences and the Euler phi-function. Further, our results can be used to derive the numbers of lattice lines for some triangular regions.

We then study this topic in higher dimensional regions, and squares are replaced by (hyper-)cubes. The desired formulas are obtained and four generalized forms, including the well-known Jordan's totient function, of the Euler phi-function are introduced. These generalizations can simplify the computations in higher dimensional cases as well as strengthen the counting ability of the Euler phi-function in a wider sense.

Finally, in connection with Farey sequences, we compute the numbers of lattice lines for simplex regions which are generalized triangular regions in higher dimensional spaces, and we express our sequences in terms of Stirling numbers and generalized Euler phi-functions.

壹、研究動機

在 d 維空間中，以 d 個整數為坐標的點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 稱為「**格子點**」。過原點與非原點的格子點之連線稱為「**格子直線**」，以格子點為頂點之圖形叫「**格子圖形**」，原以格子圖形為主軸參賽中華民國第56屆中小學科學展覽會，而後對於探討特定區域中格子點中的格子直線數深感興趣，著迷在它與歐拉函數和法里序列間的微妙關係，這使我決定更深入研究，以格子直線為主軸後有了這次的研究結果。

貳、研究目的

一、探討正方形區域中某些格子點對應法里序列的關係，以及導出法里序列項數的一般式。

二、探討正方形區域中的格子直線數，導出其一般式且應用於三角形區域。

三、探討歐拉函數的推廣式，以及建構出法里序列的推廣所適合的單體區域。

四、探討超立方體區域中的格子直線數，導出其一般式。

五、探討單體區域中的格子直線數，導出其一般式。

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦、Geogebra5.0 動態幾何繪圖板。

肆、研究方法或過程

一、定義與預備知識

【定義 1】 在 d 維空間中，以 d 個整數為坐標的點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 稱為**格子點**，而且每一個頂點均為格子點的圖形，稱為**格子圖形**。

注意，格子圖形為正方形，稱為**格子正方形**，如圖 1 為邊長 5 的格子正方形。若為(超)立方體，稱為**格子(超)立方體**，如圖 2 為邊長 2 的格子(超)立方體。

【**定義 2**】在 d 維空間中，滿足 $m \le x_i \le n\ (i=1,2,\ldots,d)$ 關係的所有格子點形成的集合記為 $[m,n]^d$，其中 m,n 為整數。當 $m<n$ 時，則 $[m,n]^d$ 是一個邊長為 $n-m$ 的**超立方體** (hyper-cube)，含有 $(n-m+1)^d$ 個格子點，例如：格子正方形 $[0,5]^2$ 如圖 1 與格子立方體 $[0,2]^3$ 如圖 2。當 $m=n$ 時，則 $[m,n]^d$ 恰含一個格子點，而 $[0,0]^d$ 中唯一的點就是原點 $(0,0,\ldots,0)$。

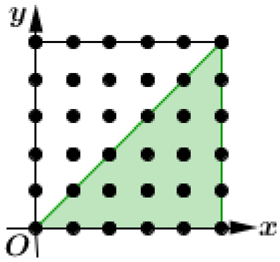

圖 1：格子正方形 $[0,5]^2$

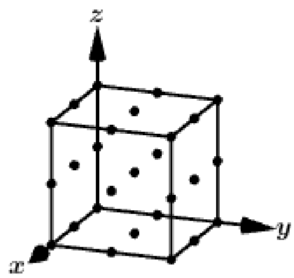

圖 2：格子立方體 $[0,2]^3$

【**定義 3**】在 d 維空間中，若格子點滿足 $m \le x_d \le \ldots \le x_2 \le x_1 \le n$ 的所有格子點所成的集合記為 $S^d_{[m,n]}$，其中 m,n 為整數。當 $m<n$ 時，則 $S^d_{[m,n]}$ 是一個邊長為 $n-m$ 的 $d-$**單體**(simplex)。當 $m=n$ 時，則 $S^d_{[m,n]}$ 恰含一個格子點 $(n,n,\ldots,n)$，如圖 1 中的綠色三角形即是 $S^2_{[0,5]}$。

【**定義 4**】在 d 維空間中，若格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 不是原點且 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=g$，則 $(\frac{x_1}{g},\frac{x_2}{g},\ldots,\frac{x_d}{g})$ 稱為 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 的**最小格子向量**，以 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 表示。從原點射出通過 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 的**格子射線** $R(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 可表為 $\{(tx_1,tx_2,\ldots,tx_d) \mid t\in R, t\ge 0\}$；過原點與 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 的**格子直線** $L(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 可表為 $\{(tx_1,tx_2,\ldots,tx_d) \mid t\in R, t\ne 0\}$ 上都通過無限多個格子點，但可以藉由最小格子向量 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 完全確定。$(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 也是在格子射線 $R(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 和格子直線 $L(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 中最靠近原點的非零格子點，因此顯然 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 的充要條件為 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$，也就是說，$(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 為最小格子向量的充要條件為 $x_1,x_2,\ldots,x_d$ 互質。

【**定義 5**】通過某個區域內所有點所需的格子直線數量稱為該區域的**格子直線數**，特別令 $a_d(n)$ (或 $a_d^*(n)$)表示過原點且通過超立方體 $[0,n]^d$ (或單體 $S_{[0,n]}^d$)中格子點的格子直線數，則 $a_d(n)$ (或 $a_d^*(n)$)也是過原點且通過超立方體 $[0,n]^d$ (或單體 $S_{[0,n]}^d$)中格子點的**格子射線數**以及**最小格子向量數**。

以下列出已知的預備知識：

【**歐拉函數**】設 $\varphi(n)$ 表示為不大於 n 且與 n 互質之正整數個數。若正整數 n 的標準分解式為 $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ，其中 $p_1, p_2, ..., p_k$ 為相異質數，且 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in N$ ，則

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

此函數稱為「**歐拉函數** (Euler function)」，可參考資料[4]與[6]。

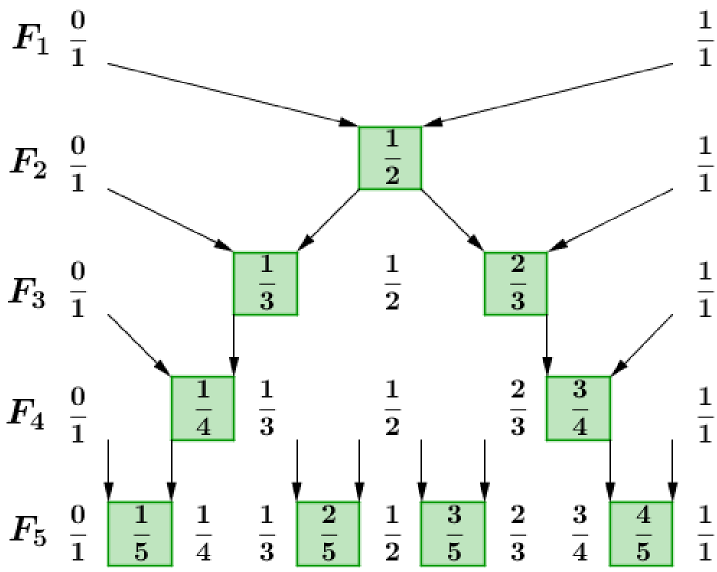

圖 3：法里序列中新產生的項的疊代方式

【**法里序列**】**法里序列** $\{F_n\}$ (Farey sequence) (可參考資料[3]與[5]) 是由一些最簡分數所成的集合 $\{F_1\},\{F_2\},\{F_3\},...$ ，其遞迴定義產生如下：

初始序列 $\{F_1\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$

當 $n=2$ 時，序列 $\{F_2\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$

當 $n=3$ 時，序列 $\{F_3\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$

如果$b+d\le n$，則在兩個相鄰分數$\frac{a}{b}$與$\frac{c}{d}$之間增加一個新的分數$\frac{a+c}{b+d}$，如圖 3 中的疊代方式而產生新的項，如此下去的序列。為了方便計算，將**法里序列**$\{F_n\}$的項數記為$|F_n|$。

二、探討二維格子直線數

(一)格子正方形與法里序列

【性質 1】若$\{F_n\}$為法里序列，則$|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n)$，其中$\varphi(n)$為歐拉函數。

【證明】因為法里序列$\{F_n\}$包含$\{F_{n-1}\}$的全部項以及與n互質的每個數的相對分數。

例如：$\{F_2\}$包含$\{F_1\}$的全部項以及相對分數$\frac{1}{2}$，即$|F_2|=|F_1|+\varphi(2)$；

$\{F_3\}$包含$\{F_2\}$的全部項以及相對分數$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$，即$|F_3|=|F_2|+\varphi(3)$；

$\{F_4\}$包含$\{F_3\}$的全部項以及相對分數$\frac{1}{4},\frac{3}{4}$，即$|F_4|=|F_3|+\varphi(4)$；

$\{F_5\}$包含$\{F_4\}$的全部項以及相對分數$\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$，即$|F_5|=|F_4|+\varphi(5)$

以此類推，可得$\{F_n\}$包含$\{F_{n-1}\}$的全部項以及$\varphi(n)$個相對分數，即$|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n)$

因此

$$|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n).$$

■

【性質 2】若$\frac{a}{b},\frac{c}{d}$為法里序列$\{F_n\}$中連續兩個分數，則$bc-ad=1$。

【證明】當$n=1$時，$bc-ad=1\times1-0\times1=1$成立。

由於$\{F_n\}$中的建構方式，得到兩分數$\frac{a}{b},\frac{c}{d}$中間的下一項為$\frac{a+c}{b+d}$。

設$bc-ad=1$成立，則

$$b(a+c)-a(b+d)=bc-ad=1$$

$$(b+d)c-(a+c)d=bc-ad=1$$

由數學歸納法得到$\forall n\ge 1$的正整數，$bc-ad=1$皆成立。

■

【**性質 3**】若$\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d},\dfrac{e}{f}$為法里序列$\{F_n\}$中連續三個分數，則$\dfrac{c}{d}$為$\dfrac{a+e}{b+f}$的約分後之值。

【**證明**】由**性質 2** 得到

$$dc-ad=1,\quad be-cf=1$$

推導

$$a=\frac{bc-1}{d},\quad e=\frac{cf+1}{d}$$

於是有

$$\frac{\dfrac{bc-1}{d}+\dfrac{cf+1}{d}}{b+f}=\frac{c}{d}$$

因此$\dfrac{c}{d}$為$\dfrac{a+e}{b+f}$的約分後之值。

■

我們將建構法里序列: F_1,F_2,F_3,F_4 分別對應 $S^2_{[0,n]}$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2)=1$ 之格子點 (x_1,x_2)，如圖 4。

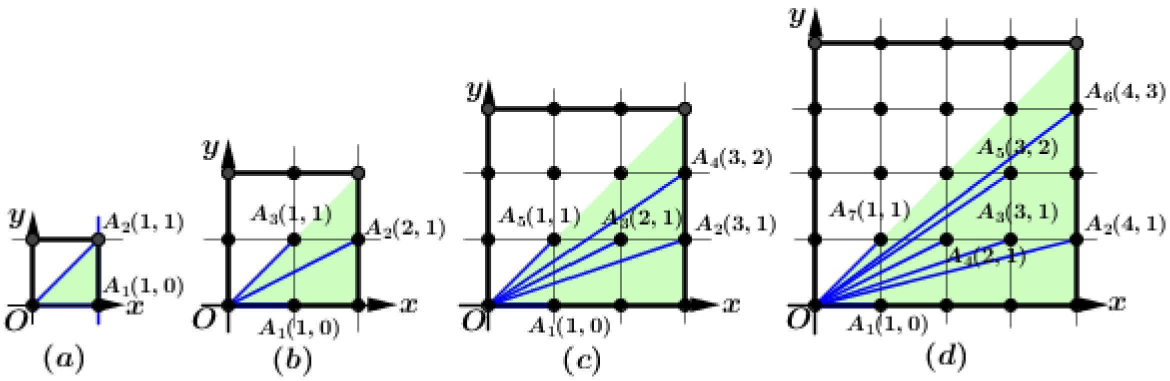

圖 4：有理數序列對應法里序列: F_1,F_2,F_3,F_4

建構方式如下：

圖 4 (a) 中，令$\{F_1\}=\left\{\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1}\right\}$，則對應於格子點 $A_1(1,0)$ 或 $A_2(1,1)$ 。

圖 4 (b) 中，令$\{F_2\}=\left\{\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1}\right\}$，則對應於格子點 $A_1(1,0), A_2(2,1), A_3(1,1)$ 。

以此類推

圖 4 (c) 中，對應於格子點 $A_1(1,0), A_2(3,1), A_3(2,1), A_4(3,2), A_5(1,1)$ 。

圖 $4(d)$ 中，對應於格子點 $A_1(1,0), A_2(4,1), A_3(3,1), A_4(2,1), A_5(3,2), A_6(4,3), A_7(1,1)$。

由上我們是根據如圖 4 的建構逐一對應至格子點 $A_i(x_i, y_i)$ 後，得到 $\dfrac{a+c}{b+d}$ 的建構是一一對應的，必對應於一個 0 到 1 之間的有理數，發現到將這些有理數由小到大排列所成的有理數序列，它即是**法里序列**。

上述建構方式產生一些有趣的結果：

【定理 1】 $a_2^*(n) = |F_n| = 1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi(i).$

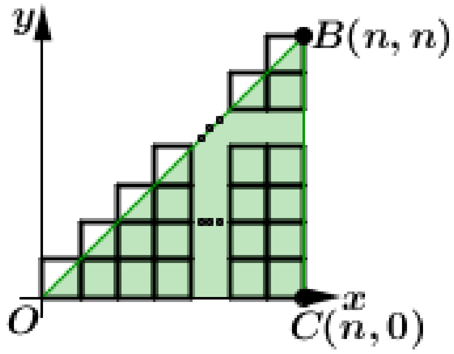

圖 5

【證明】 由如圖 4 的建構逐一對應至格子點 $A_i(x_i, y_i)$ 後，得到 $S_{[0,n]}^2$ 中滿足 $\gcd(x_1, x_2) = 1$ 的格子點個數為 $|F_n|$，最小格子向量數等於格子直線數，又透過**性質 1**，於是有

$$a_2^*(n) = |F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

因為

$$\begin{aligned}
|F_2| &= |F_1| + \varphi(2) \\
|F_3| &= |F_2| + \varphi(3) \\
&\vdots \\
|F_{n-1}| &= |F_{n-2}| + \varphi(n-1) \\
|F_n| &= |F_{n-1}| + \varphi(n) \quad (+ \\
\hline
|F_n| &= |F_1| + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)
\end{aligned}$$

又 $|F_1| = 2, \varphi(1) = 1$，所以

$$a_2^*(n) = |F_n| = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi(i).$$

■

【**定理 2**】$a_2(n)=1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$

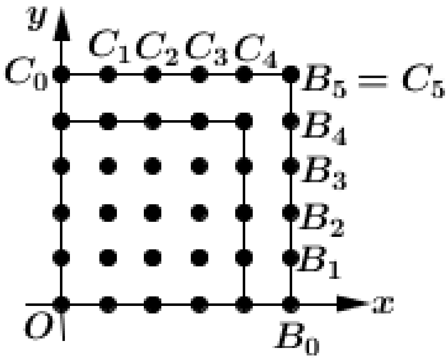

圖 6

【**分析**】如圖 6 中我們得到$[0,5]^2$中但不在$[0,4]^2$的格子點$B_0,B_1,\ldots,B_5$以及$C_0,C_1,\ldots,C_5$(點B_5與點C_5是同一點)。簡言之，增加的格子點在邊$\overline{B_0B_5}$與邊$\overline{C_0C_5}$上，觀察出增加 11 個的格子點(x_1,x_2)，同時新產生的格子直線數就是滿足$\gcd(x_1,x_2)=1$的格子點(x_1,x_2)的個數，由於邊$\overline{B_0B_5}$上$\gcd(x_1,x_2)=1$的格子點(x_1,x_2)的個數等於邊$\overline{C_0C_5}$上其個數都是$\varphi(5)$，得到$a_2(5)-a_2(4)=2\varphi(5)$，於是我們可推導出

$$a_2(n)-a_2(n-1)=2\varphi(n)=2\left(a_2^*(n)-a_2^*(n-1)\right)$$

與**定理 1** 相同。

【**證明**】由上述分析我們得到

$$\begin{aligned}a_2(n)-a_2(n-1)=2\varphi(n) &\Leftrightarrow a_2(n)=a_2(n-1)+2\varphi(n)\\ &\Leftrightarrow a_2(n)=a_2(1)+2\left(\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\right)\end{aligned}$$

又

$$\varphi(1)=1,\ a_2(1)=3$$

因此

$$a_2(n)=1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$$

■

(二)格子三角形

$S^2_{[0,n]}$ 的格子直線數為法里序列$\{F_n\}$的項數，其值為 $a_2^*(n)=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$，我們發現了三種類型如圖 7，決定它的關鍵是一直線，形式有 $x+y=k$ 的上三角形或下三角形與 $y=ax$ 的下三角形，其中 $k,a\in N$ 。

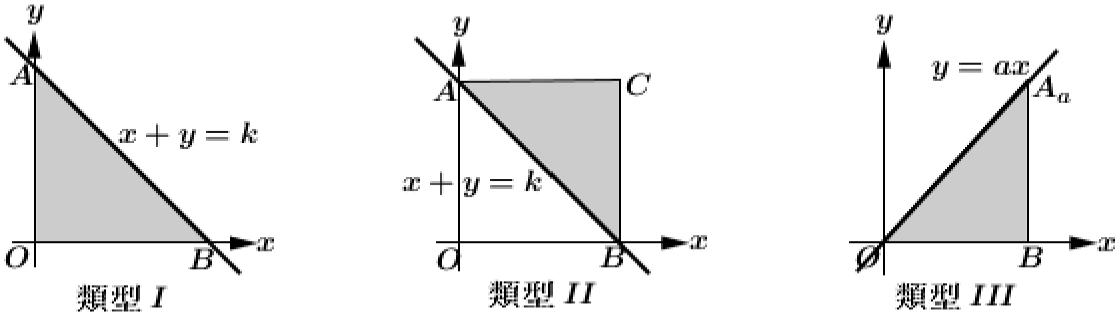

圖 7

【**定理 3**】在格子三角形如圖 7 中三種類型，格子直線數分別為

$$\textbf{類型 I}：1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)\text{、}\textbf{類型 II}：\varphi(n)+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)\text{、}\textbf{類型 III}：1+a\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$$

【**證明**】**類型 I**：此格子三角形 ΔOAB 的格子點如圖 8。

$$\begin{array}{l}
(0,0)\\
(1,0),(0,1)\\
(2,0),(1,1),(0,2)\\
(3,0),(2,1),(1,2)(0,3)\\
\quad\vdots\\
(n,0),(n-1,1),\ldots,(n-k,k),\ldots,(1,n-1),(0,n)
\end{array}$$

圖 8

發現到紅色的格子點為$(t,n-t)$，其中$1\le t<n$，因為$\gcd(t,n)=\gcd(t,n-t)$，所以紅色的格子點會一一對應點(t,n)，如圖 9，得到紅色的格子點有 $\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$ 個得以形成增加的直線，說明：

$$\begin{array}{lcl}
(1,1) & \to\ (1,2) & \Rightarrow\varphi(2)\text{ 個}\\
(2,1),(1,2) & \to\ (2,3),(1,3) & \Rightarrow\varphi(3)\text{ 個}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
(n-1,1),\ldots,(n-k,k),\ldots,(1,n-1) & \to\ (n-1,n),\ldots,(k,n),\ldots,(1,n) & \Rightarrow\varphi(n)\text{ 個}
\end{array}$$

圖 9

於是有格子直線數為 $\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$，又格子點 $(0,0),(0,1),\ldots,(0,n)$ 共線，且格子點 $(1,0),(2,0),\ldots,(n,0)$ 亦共線，因此格子直線數為

$$2+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)+1=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$$

類型 II：此格子三角形 ΔABC 的格子直線數相當於 $[0,n]^2$ 的格子直線數扣掉**類型 I** 的情形＋通過 $\overline{DE}$ 上所有點的情形，所以 ΔABC 的格子直線數為

$$\left(1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)\right)-\left(1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)\right)+\varphi(n)=\varphi(n)+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$$

類型 III：考慮格子三角形 ΔOA_aB 的格子直線數，我們先觀察當 $a=3$ 時，如圖 10。我們發現 ΔOA_1B 、ΔOA_2A_1 與 ΔOA_3A_2 扣掉直線 $\overline{OB},\overline{OA_1},\overline{OA_2},\overline{OA_3}$ 後，其中所有點皆是一一對應，簡言之，紅色格子點一一對應，且藍色格子點一一對應，於是此時 ΔOA_1B 、ΔOA_2A_1 與 ΔOA_3A_2 的格子直線數是相等，由**定理 1** 得到它們的格子直線數為 $|F_4|-2=\sum_{i=2}^{4}\varphi(i)$，就得到 ΔOA_3B 中格子直線有一直線 $\overline{OB}$、三條直線 $\overline{OA_1},\overline{OA_2},\overline{OA_3}$ 以及三倍的 $\sum_{i=2}^{4}\varphi(i)$ 條的直線，因此格子直線數為 $1+3+3\sum_{i=2}^{4}\varphi(i)=1+3\sum_{i=1}^{4}\varphi(i)$ 。

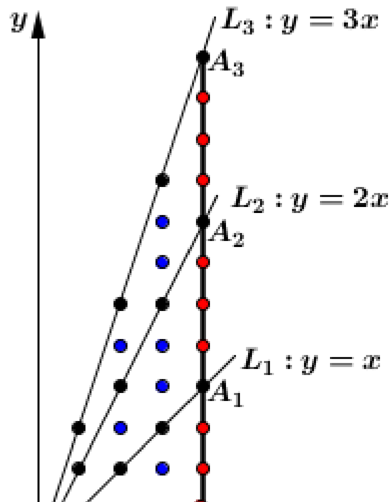

圖 10

考慮格子三角形ΔOA_aB的格子直線數時，先關注到$\Delta OA_1B, \Delta OA_2A_1, \dots, \Delta OA_aA_{a-1}$扣掉直線$OB, OA_1, OA_2, \dots, OA_a$後，其中所有點皆是一一對應，因為$\Delta OBA_1$中$\overline{BA_1}$的所有格子點為$(n,1),(n,2),\dots,(n,n)$對應$\Delta OA_1A_2$時的格子點為$(n,n+1),(n,n+2),\dots,(n,2n)$，同樣地，依序對應$\Delta OA_2A_3,\dots,\Delta OA_{a-1}A_a$時的格子點為

$$(n,2n+1),(n,2n+2),\dots,(n,3n) \quad ,\dots, \quad (n,(a-1)n+1),(n,(a-1)n+2),\dots,(n,an)$$

由**定理 1**得到$\Delta OA_1B, \Delta OA_2A_1, \dots, \Delta OA_aA_{a-1}$扣掉直線$\overline{OB}, \overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_a}$後的格子直線數為$|F_n|-2=\sum_{i=2}^{n}\varphi(i)$，因此格子直線數為

$$1+a+a\sum_{i=2}^{n}\varphi(i)=1+a\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$$

■

(三)格子矩形$[0,2n]\times[0,n]$

特別的，**類型 III** 在$a=\frac{1}{2}$是可以計算的，如此一來我們會計算$a=2$又會計算$a=\frac{1}{2}$，那麼我們可以將兩結果合併，得到格子矩形$[0,2n]\times[0,n]$。

【定理 4】在格子三角形**類型 III**，且$a=\frac{1}{2}$時，格子直線數為$1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$。

【證明】如圖 11，發現到紅色三角形中的格子點，與藍色三角形中的格子點是一一對應的，對應方式是把(n,k)對應到$(n,n-k)$。

$\because$ $\gcd(n,k)=1$會產生新的格子直線，且$\gcd(n,k)=\gcd(n,n-k)$

$\therefore$ 如果(n,k)會產生新的格子直線，那麼$(n,n-k)$亦會產生新的格子直線。

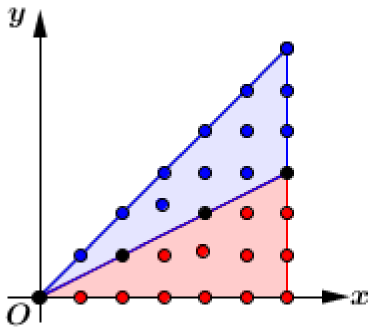

圖 11

由**定理 1** 得到紅色三角形加上藍色三角形的格子直線數會是$1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$ 再加 1，如此一來我們可以計算出在格子三角形**類型 III**，且 $a=\frac{1}{2}$ 時，格子直線數為

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)+1}{2}=1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$$

■

【**定理 5**】在格子矩形$[0,2n]\times[0,n]$的格子直線數為$1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varphi(i)$ 。

【**證明**】如圖 11，由**定理 4** 我們得到 $y=\frac{1}{2}x$ 的下三角形的格子直線數為$1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$ ，此時 $x=2n$ 所以在圖 12 中 $y=\frac{1}{2}x$ 的下三角形的格子直線數為$1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varphi(i)$ ，換個角度來看若是把直線視為 $x=2y$ ，那麼由**定理 3** 我們得到圖 12 中上三角形的格子直線數為$1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$ ，將兩結果合併可以得到格子矩形$[0,2n]\times[0,n]$的格子直線數為 $\left(1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)\right)+\left(1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varphi(i)\right)-1=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varphi(i)$ ，雖然分成兩部分來探討，但是因為 $y=\frac{1}{2}x$ 與 $x=2y$ 其實是同一條直線，所以多算了一次要減一。

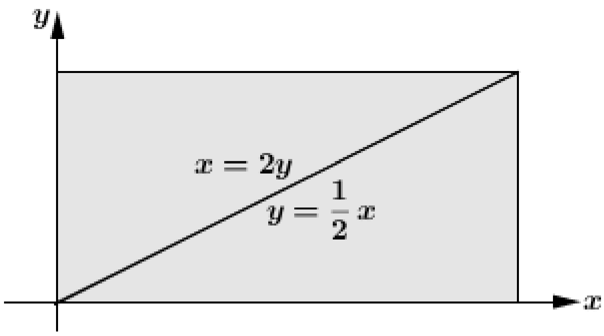

圖 12

三、探討歐拉函數與法里序列的推廣

我們為了計算在 d 維空間中格子直線數 $a_d(n)$ 與 $a_d^*(n)$ ，底下就先推導出歐拉函數與法里序列之推廣式子。

(一)歐拉函數的推廣

設 $\varphi_d(n), \varphi_d^-(n)$ 及 $\varphi_d^+(n)$ 分別表示在 $[1,n]^d, [1,n-1]^d$ 及 $[0,n]^d$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的個數。$\varphi_d(n)$ 可以視為歐拉函數 $\varphi(n)$ 的推廣(因為 $\varphi_1(n)=\varphi(n)$)，被稱為**約當囿互質函數**(可參考資料[2])，常記作 $J_d(n)$。由於 $[1,1]^d, [1,0]^d$ 及 $[0,1]^d$ 分別含 1 個，0 個及 2^d 個格子點，不難看出 $\varphi_d(1)=1, \varphi_d^-(1)=0$ 及 $\varphi_d^+(1)=2^d$，當 $n>1$，則有**定理 6**：

【**定理 6**】令 n 的標準分解式為 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots\cdot p_m^{\alpha_m}$，其中 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 為相異質數，則有

(a) $\varphi_d(n)=n^d(1-\frac{1}{p_1^d})(1-\frac{1}{p_2^d})\cdots(1-\frac{1}{p_m^d})$. (可參考資料[6])

(b) $\varphi_d^-(n)=C_d^d\varphi_d(n)-C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+(-1)^{d-1}C_1^d\varphi_1(n)$.

(c) $\varphi_d^+(n)=C_d^d\varphi_d(n)+C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+C_1^d\varphi_1(n)$.

【**證明**】若 k 為 n 的正因數，令 M_k, M_k^-, M_k^+ 分別是在 $[1,n]^d, [1,n-1]^d$ 及 $[0,n]^d$ 中滿足坐標 $x_1,x_2,\ldots,x_d$ 都是 k 的倍數的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 所成的集合。

因為每一個整數都是 1 的倍數，得到

$$M_1=[1,n]^d, M_1^-=[1,n-1]^d, M_1^+=[0,n]^d.$$

(a)由於 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in M_k$ 的充要條件為

$$x_i\in\left\{1k,2k,\ldots,\left(\frac{n}{k}\right)k\right\}$$

所以

$$|M_k|=\left(\frac{n}{k}\right)^d$$

因此由取捨原理可有

$$\varphi_d(n)=\left|[1,n]^d-M_{p_1}\cup M_{p_2}\cup\cdots\cup M_{p_m}\right|$$

$$=\left|[1,n]^d\right|-\sum_{1\le i\le m}\left|M_{p_i}\right|+\sum_{1\le i<j\le m}\left|M_{p_i}\cap M_{p_j}\right|-\cdots+(-1)^m\left|M_{p_1}\cap M_{p_2}\cap\cdots\cap M_{p_m}\right|$$

$$=\left|M_1\right|-\sum_{1\le i\le m}\left|M_{p_i}\right|+\sum_{1\le i<j\le m}\left|M_{p_ip_j}\right|-\cdots+(-1)^m\left|M_{p_1p_2\cdots p_m}\right|$$

$$=\left(\frac{n}{1}\right)^d-\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{n}{p_i}\right)^d+\sum_{1\le i<j\le m}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^d-\cdots+(-1)^m\left(\frac{n}{p_ip_j\cdots p_m}\right)^d$$

$$=n^d\left\{1-\sum_{1\le i\le m}\frac{1}{p_i^d}+\sum_{1\le i<j\le m}\frac{1}{p_i^d}\cdot\frac{1}{p_j^d}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{p_i^d}\cdot\frac{1}{p_j^d}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p_m^d}\right\}$$

$$=n^d(1-\frac{1}{p_1^d})(1-\frac{1}{p_2^d})\cdots(1-\frac{1}{p_m^d}).$$

(b)由於 $(x_1,x_2,\dots,x_d)\in M_k^-$ 的充要條件為

$$x_i\in\left\{1k,2k,\dots,\left(\frac{n}{k}-1\right)k\right\}\quad(i=1,2,\dots,d)$$

所以

$$\left|M_k^-\right|=\left(\frac{n}{k}-1\right)^d.$$

仿照前面的討論可得到

$$\varphi_d^-(n)=\left|[1,n-1]^d-M_{p_1}^-\cup M_{p_2}^-\cup\cdots\cup M_{p_m}^-\right|$$

$$=\left(n-1\right)^d-\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{n}{p_i}-1\right)^d+\sum_{1\le i<j\le m}\left(\frac{n}{p_ip_j}-1\right)^d-\cdots+(-1)^m\left(\frac{n}{p_ip_j\cdots p_m}-1\right)^d$$

$$=\left(C_d^dn^d-C_{d-1}^dn^{d-1}+\cdots+(-1)^dC_0^d\right)-\sum_{1\le i\le m}\left(C_d^d\left(\frac{n}{p_i}\right)^d-C_{d-1}^d\left(\frac{n}{p_i}\right)^{d-1}+\cdots+(-1)^dC_0^d\right)^d$$

$$+\sum_{1\le i<j\le m}\left(C_d^d\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^d-C_{d-1}^d\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^{d-1}+\cdots+(-1)^dC_0^d\right)^d-\cdots$$

$$+(-1)^m\left(C_d^d\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)^d-C_{d-1}^d\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)^{d-1}+\cdots+(-1)^dC_0^d\right)^d$$

$$
\begin{aligned}
&= C_d^d\left\{n^d-\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{n}{p_i}\right)^d+\sum_{1\le i<j\le m}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^d-\cdots+(-1)^m\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)^d\right\}\\
&\quad -C_{d-1}^d\left\{n^{d-1}-\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{d-1}+\sum_{1\le i<j\le m}\left(\frac{n}{p_ip_j}\right)^{d-1}-\cdots+(-1)^m\left(\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)^{d-1}\right\}\\
&\quad +\cdots+(-1)^d C_0^d\left\{1-C_1^m+C_2^m-\cdots+(-1)^m C_m^m\right\}\\
&= C_d^d\varphi_d(n)-C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+(-1)^{d-1}C_1^d\varphi_1(n)+0.
\end{aligned}
$$

(c)由於$(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in M_k^+$的充要條件為

$$x_i\in\left\{0,1k,2k,\ldots,\left(\frac{n}{k}\right)k\right\}\quad (i=1,2,\ldots,d)$$

所以

$$\left|M_k^-\right|=\left(\frac{n}{k}+1\right)^d$$

同(b)中之算法可得

$$
\begin{aligned}
\varphi_d^+(n)&=\left|[0,n]^d-M_{p_1}^+\cup M_{p_2}^+\cup\cdots\cup M_{p_m}^+\right|\\
&=\left(n+1\right)^d-\sum_{1\le i\le m}\left(\frac{n}{p_i}+1\right)^d+\sum_{1\le i<j\le m}\left(\frac{n}{p_ip_j}+1\right)^d-\cdots+(-1)^m\left(\frac{n}{p_ip_j\cdots p_m}+1\right)^d\\
&=C_d^d\varphi_d(n)+C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+C_1^d\varphi_1(n).
\end{aligned}
$$

■

在(b)與(c)中，分別將$\varphi_d^-(n)$及$\varphi_d^+(n)$以$\varphi_d(n)$表示，利用二項式定理可將這三個函數中的任意一個以另外兩個中的任一個表示，例如：

(d) $\varphi_d(n)=C_d^d\varphi_d^-(n)+C_{d-1}^d\varphi_{d-1}^-(n)+\cdots+C_1^d\varphi_1^-(n)=\sum_{i=1}^{d}C_i^d\varphi_i^-(n).$ (3−1)

(e) $\varphi_d(n)=C_d^d\varphi_d^+(n)-C_{d-1}^d\varphi_{d-1}^+(n)+\cdots+(-1)^{d-1}C_1^d\varphi_1^+(n)=\sum_{i=1}^{d}(-1)^{d-i}C_i^d\varphi_i^+(n).$ (3−2)

值得一提的是，若以$\left\{0,1k,2k,\ldots,\left(\frac{n}{k}-1\right)k\right\}$，取代在證明(a)中的$\left\{1k,2k,\ldots,\left(\frac{n}{k}\right)k\right\}$，並討論之，可以得到$\varphi_d(n)$也是在$[0,n-1]^d$中滿足條件$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點個數。

為了較方便幾何結構，所以在計數格子直線數時會採用在$[0,n-1]^d$中格子點，因此我們定義$\varphi_d^*(n)$為$[0,n-1]^d$中$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點個數，由於$0\equiv n\pmod n$所以有

(f) $\varphi_d^*(n)=\varphi_d(n).$ $\qquad(3-3)$

特別地，定義$\varphi_0^*(n)=\begin{cases}1, & 當\ n=1\\ 0, & 當\ n\neq 1\end{cases}$，可以想像成$\varphi_d^*(n)$在 0 為的情形。

(二)法里序列的推廣

在坐標平面上，對於$S_{[0,n]}^2$中，可以構造出格子點序列，是**法里序列**。我們發現它們皆是$0\le x_2\le x_1\le n$且$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點，類推至在$d$維空間中，則考慮滿足$0\le x_d\le\ldots\le x_2\le x_1\le n$且$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點，滿足$0\le x_d\le\ldots\le x_2\le x_1\le n$的格子點所成的集合我們記為$S_{[0,n]}^d$，即是一個邊長為$n$的$d-$**單體** (simplex)的幾何結構。

在$S_{[0,n]}^d$中格子點的點集合有個類推的性質，由**性質 3**類推，意即在$S_{[0,n]}^3$中構造出的點集合滿足

$$F_n^3=\left\{(x,y,z)\middle|\forall x\le n\ \exists(x^*,y^*,z^*),(x',y',z')\in F_{n-1}^3\ \ni x=\frac{x^*+x'}{g},y=\frac{y^*+y'}{g},z=\frac{z^*+z'}{g}\right\}$$

其中$g=\gcd(x^*+x',y^*+y',z^*+z')$。此圖形為格子四面體$O-A_1A_2A_3$，見圖 13。

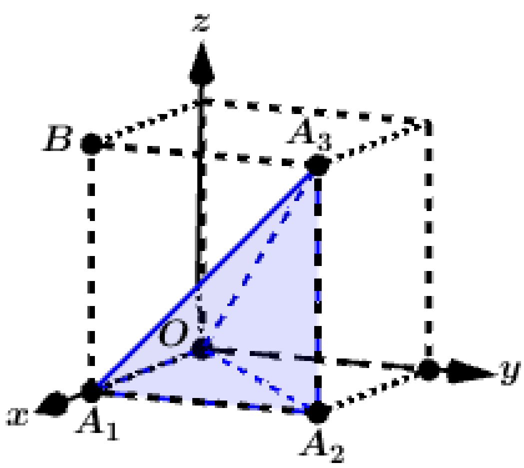

圖 13

類推至d維空間中除了滿足此性質外，建構出的點集合亦與$d-$**單體(simplex)**中滿足$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的點成的集合相同，代表$a_d^*(n)=\left|F_n^d\right|$如下述**定理 7**。

而 d -單體就是三角形的類推，**2-單體就是三角形**，維度下降時 0-單體就是點、**1-單體就是線段**，而三維度中 **3-單體就是四面體**，見圖 14。

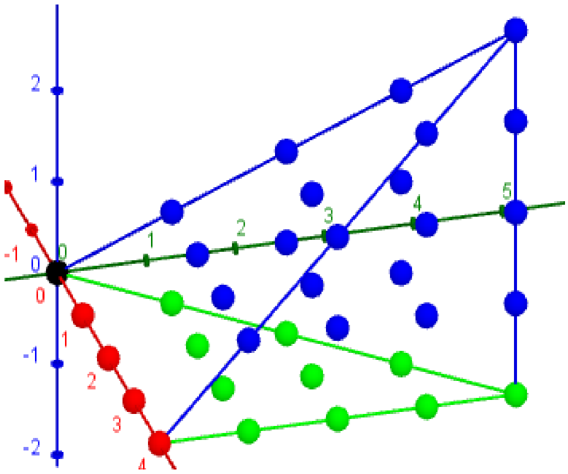

圖 14

【定理 7】 若 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 為 $S_{[0,n]}^d$ 上滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 之的格子點，則格子直線數 $a_d^*(n)$ 為 $\{F_n^d\}$ 的項數，即 $a_d^*(n)=\left|F_n^d\right|$。

【證明】 因為滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$，它們必在 $S_{[0,n]}^d$ 中，且會發現為 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的所有點，我們就有

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_d)=L(2x_1,2x_2,\ldots,2x_d)=\cdots=L(nx_1,nx_2,\ldots,nx_d)$$

除了滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 外，其餘的點均屬於 $\gcd(nx_1,nx_2,\ldots,nx_d)=n\neq 1$ 的點

因此，格子直線數 $a_d^*(n)$ 就是滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 的個數，即

$$a_d^*(n)=\left|F_n^d\right|.$$

■

四、探討超立方體與單體的格子直線數

(一)格子立方體

1.計算新增格子直線數

前面提到格子正方形中，格子直線個數有一般式，在坐標空間中，我們考慮格子正立方體$[0,n]^3$，根據平面至空間類推概念，只要能計算$a_3(n)-a_3(n-1)$，就可得到$a_3(n)$的一般式，若要一般式仍與歐拉函數有關，如何辦到呢？以下是我們的結果。

在空間中，直線是無法用斜率來描述，因此就無法使用法里序列的性質類推至空間中求格子直線數，我們將格子點分類成七種，因而得到計算出格子直線數。

當$n=1$時，我們只要考慮圖 13 中的七個格子點$(1,0,0),(0,1,0)$ $(0,0,1),(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(0,1,1),$ $(1,1,1)$的個數，表示格子直線數$a_3(1)=7$。

當$n=2$時，考慮格子點(x_1,x_2,x_3)在$[0,n]^3$而不在$[0,n-1]^3$，這些點稱為**新增格子點**，如圖 13 中藍色與紅色的格子點，特別地藍色的格子點會在$n=1$時的格子直線上，其點有$(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(2,2,0)$, $(2,0,2)$, $(0,2,2)$, $(2,2,2)$，共有 7 條格子直線如圖 13 中綠色直線。

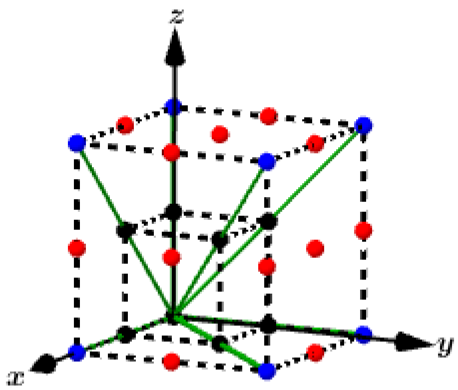

圖 15

其次，其餘的格子點如紅色的格子點為$(2,1,0)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$, $(1,0,2)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(2,1,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$必會產生新增的格子直線，共有 12 條格子直線，因此得到

$$a_3(2)=a_3(1)+12=7+12=19.$$

【**定理 8**】在$[0,n]^3$中，設n的標準分解式為$n=p_{n_1}^{\alpha_1}\cdot p_{n_2}^{\alpha_2}\cdots p_{n_m}^{\alpha_m}$，其中$p_{n_1},p_{n_2},\dots,p_{n_m}$ 為相異質數，$\varphi(n)$為歐拉函數，且令

$$N(n)=[(n+1)^3-n^3]-7-12[n-1-\varphi(n)]-6\sum_{j=1}^{m}\left[(-1)^{j+1}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_j\le m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_j}}-1}\right]\quad(n\ge 2)$$

則格子直線數$a_3(n)$滿足：$a_3(1)=7$，且當$n\ge 2$時，$a_3(n)=7+\sum_{i=2}^{n}N(i)$。

【**分析**】我們以計算出$n=1,2$時，格子直線數分別為$a_3(1)=7$且$a_3(2)=19$。再者，當$n>2$時，考慮的格子點就增加許多，我們考慮將新增格子點的排序分為七種，說明如下：

令格子點(x_1,x_2,x_3)在$[0,n]^3$而不在$[0,n-1]^3$，其中$n\ge 2$。將x_1,x_2,x_3排序成$x_{(3)}\le x_{(2)}\le x_{(1)}$，必有$x_{(1)}=n$，從而分下列三種情形：$x_{(3)}=0,\quad 0<x_{(3)}<n,\quad x_{(3)}=n$

現在就來討論$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})$的解。

情形 1：當$x_{(3)}=0$時，則

1.1. $x_{(2)}=0$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,0,0)$

1.2. $0<x_{(2)}<n$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,t,0),\quad 0<t<n$

1.3. $x_{(2)}=n$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,n,0)$

情形 2：當$0<x_{(3)}<n$時，則

2.1. $x_{(3)}=x_{(2)}$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,t,t),\quad 0<t<n$

2.2. $x_{(3)}<x_{(2)}<n$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,t,s),\quad 0<s<t<n$

2.3. $x_{(2)}=n$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,n,t),\quad 0<t<n$

情形 3：當$x_{(3)}=n$時，則

3.1. $x_{(3)}=x_{(2)}=n$：$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})=(n,n,n)$

所以當$n\ge 2$時，$(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)})$的解有 1.1.、1.2.、1.3.、2.1.、2.2.、2.3.以及 3.1. 等七種，但$n=2$時，有六種，因為 2.2. 不會發生。

由於(x_1,x_2,x_3)可由$x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)}$排列產生，得到

1.1. $0,0,n$有 3 種排法：$(0,0,n),(0,n,0),(n,0,0)$對應 3 組(x_1,x_2,x_3)的解。

1.2. $0,t,n$有 6 種排法：$(0,t,n),(0,n,t),(t,0,n),(t,n,0),(n,0,t),(n,t,0)$。

因為$0<t<n$，即$t\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$，對應$6(n-1)$組(x_1,x_2,x_3)的解。

同理

1.3. $0,n,n$ 對應 3 組(x_1,x_2,x_3)的解。

2.1. t,t,n 對應$3(n-1)$組(x_1,x_2,x_3)的解。

2.2. s,t,n 對應$6\times\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$組$(x_1,x_2,x_3)$的解，其中$s<t$。

2.3. t,n,n 對應$3(n-1)$組(x_1,x_2,x_3)的解。

3.1. n,n,n 對應 1 組(x_1,x_2,x_3)的解。

所以(x_1,x_2,x_3)共有

$$\begin{aligned}&3+6(n-1)+3+3(n-1)+3(n-1)(n-2)+3(n-1)+1\\&=3n^2+3n+1=(n+1)^3-n^3\end{aligned}$$

組解，與在$[0,n]^3$而不在$[0,n-1]^3$的格子點數是一致的。

上述推論得到對於當$n>2$時，新增格子點的情形有七種分類為$(0,0,n)$、$(0,n,n)$、(n,n,n)、$(0,t,n)$、(t,t,n)、(s,t,n)以及(t,n,n)，其中$0<s<t<n$，但要考慮排列後，才是所有新增格子點。

【證明】由上述分析得到新增格子點的情形有七種分類為$(0,0,n)$、$(0,n,n)$、(n,n,n)、$(0,t,n)$、(t,t,n)、(s,t,n)以及(t,n,n)，其中$0<s<t<n$，但要考慮排列。

事實上，並非新增格子點數就是我們要的新增格子直線數，主因是新增格子直線中會與$[0,n-1]^3$的格子直線重複，其格子點(x_1,x_2,x_3)型如：$(0,0,n)$、$(0,n,n)$以及(n,n,n)等等，共有 7 條的格子直線，因此這 7 條格子直線皆在$[0,n-1]^3$中產生，並非新增格子直線數。

其次，就是分析新增格子點數但不通過$[0,n-1]^3$中新增格子直線，先從討論當$2\le n\le 17$的情形：

(1)當新增格子點型如：$(0,t,n)$、(t,t,n)以及(t,n,n)等等，分別各有$6,3,3$組的格子點，共有 12 組格子點，特別地，當$\gcd(n,t)=1$時，每組的格子點可形成$\varphi(n)$條格子直線，因此有$12[n-1-\varphi(n)]$條的格子直線在$[0,n-1]^3$中產生，並非新增格子直線數。

(2)當新增格子點型如：(s,t,n)，有 6 組的格子點，形成格子直線數較複雜，討論如下：

過格子點(s,t,n)的格子直線也必過點$(\frac{n}{p_{n_1}},\frac{t}{p_{n_1}},\frac{s}{p_{n_1}})$或$(\frac{n}{p_{n_2}},\frac{t}{p_{n_2}},\frac{s}{p_{n_2}})$或$\cdots$或$(\frac{n}{p_{n_m}},\frac{t}{p_{n_m}},\frac{s}{p_{n_m}})$，已在$[0,n-1]^3$中產生重複的格子直線數有$C_2^{\frac{n}{p_{n_1}}-1}$或$C_2^{\frac{n}{p_{n_2}}-1}$或$\cdots$或$C_2^{\frac{n}{p_{n_m}}-1}$，共有總數為$6(C_2^{\frac{n}{p_{n_1}}-1}+C_2^{\frac{n}{p_{n_2}}-1}+C_2^{\frac{n}{p_{n_3}}-1}+\cdots+C_2^{\frac{n}{p_{n_m}}-1})$，並非新增格子直線數。

因此，當$2\le n\le 17$時，格子點直線數$a_3(n)$滿足遞迴關係：

$$a_3(n)=a_3(n-1)+[(n+1)^3-n^3]-7-12[n-1-\varphi(n)]-6(C_2^{\frac{n}{p_{n_1}}-1}+C_2^{\frac{n}{p_{n_2}}-1}+\cdots+C_2^{\frac{n}{p_{n_m}}-1})\quad(4-1)$$

可得$a_3(1)=7,a_3(2)=19,a_3(3)=49,\ldots,a_3(17)=4813$，當$n\ge 18$時，透過取捨原理導出遞迴式：

$$a_3(n)=a_3(n-1)+[(n+1)^3-n^3]-7-12[n-1-\varphi(n)]-6\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_j\le m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}\cdots p_{n_j}}-1}\quad(4-2)$$

因此由$(4-2)$式當$2\le n\le 17$時與$(4-1)$式一致，由此可得到一般式

$$a_3(n)=a_3(1)+\sum_{i=2}^{n}\left\{[(i+1)^3-i^3]-7-12[i-1-\varphi(i)]-6\sum_{j=1}^{m}\left[(-1)^{j+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le m}C_2^{\frac{i}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}}-1}\right]\right\}.$$

■

【**定理 9**】在$[0,n]^d$中，設n的標準分解式為$n=p_{n_1}^{\alpha_1}\cdot p_{n_2}^{\alpha_2}\cdots p_{n_m}^{\alpha_m}$，其中$p_{n_1},p_{n_2},\ldots,p_{n_m}$為相異質數，則格子直線數$a_d(n)$滿足：$a_d(1)=2^d-1$，且當$n\ge 2$時，則

$$a_d(n)-a_d(n-1)=[(n+1)^d-n^d]-(2^d-1)-\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=0}^{d-i-1}\sum_{k=1}^{d-i-j}\sum_{\substack{t_1+t_2+\ldots+t_k=d-i-j\\ t_1>0,\ldots,t_k>0}}\frac{d!}{i!\,j!\,t_1!\,t_2!\cdots t_k!}\alpha_k(n)$$

其中 $\alpha_k(n)=\sum_i C_k^{\frac{n}{p_{n_i}}-1}-\sum_{i<j} C_k^{\frac{n}{p_{n_i}p_{n_j}}-1}+\cdots+(-1)^n C_k^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_m}}-1}$。

【證明】 現在要推導 $a_d(n)$ 的公式，由於 $[0,1]^d$ 中恰有 2^d-1 個非零的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$，其坐標均為 0 或 1(且不全為零)，所以 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$，因此 $a_d(1)=2^d-1.$

當 $n>1$，令 $N_d(n)=a_d(n)-a_d(n-1)$，則 $N_d(n)$ 為 $[0,n]^d$ 中且不在 $[0,n-1]^d$ 中最小格子向量的個數。這些格子點的 d 個坐標 $x_1,x_2,\ldots,x_d$ 中至少有一個為 n，將它們分成恰有 1 個坐標為 n，恰有 2 個坐標為 n，…，恰有 n 個坐標為 n 共有 n 種互斥的情形。

令 $a_d(n)=\left|\left\{L(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,|\,(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in[0,n]^d-[0,0]^d\right\}\right|$，其中 $d,n\in N$。

則有 $a_d(1)=2^d-1$，且當 $n\geq 2$ 時，在 n 種情形中先扣掉皆為零或 n 的有 $a_d(1)$ 個，將剩下的分組，至多可設 n 有 i 個以及 0 有 j 個，但至多有 $d-1$ 個 n 且至少一個。在有 i 個 n 的條件下，能有 $d-i-1$ 個 0 且至少 0 個 0，再考慮有 $t_1,t_2,\ldots,t_k$ 個相同坐標但不為 $0,n$，故 $t_1>0,t_2>0,\ldots,t_k>0$ 且 $t_1+t_2+\ldots+t_k=d-i-j$，而 k 個不互質的數之組合有 $\alpha_k(n)$ 種，而其同一條件下排列數有 $\dfrac{d!}{i!\,j!\,t_1!\,t_2!\cdots t_k!}$。

於是得到

$$a_d(n)-a_d(n-1)=[(n+1)^d-n^d]-(2^d-1)-\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=0}^{d-i-1}\sum_{k=1}^{d-i-j}\sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k=d-i-j\\ t_1>0,\ldots,t_k>0}}\frac{d!}{i!\,j!\,t_1!\,t_2!\cdots t_k!}\cdot\alpha_k(n)$$

其中 $\alpha_k(n)=\sum_i C_k^{\frac{n}{p_{n_i}}-1}-\sum_{i<j} C_k^{\frac{n}{p_{n_i}p_{n_j}}-1}+\cdots+(-1)^n C_k^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_m}}-1}$。

■

2.應用歐拉函數推廣式

定理 8 的確給了在 $[0,n]^3$ 中格子直線數計數方法，但事實上 $N_d(n)$ 的值不容易計算的。在 $[0,n]^2$ 中因由**歐拉函數** $\varphi(n)$ 得到格子直線數的一般式，所以我們同樣地考慮由**歐拉函數**推廣式出發與類推。

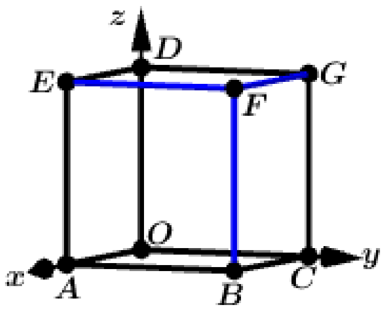

圖 16

我們克服方式是由幾何結構來計算格子直線數，得到二種結果，皆是先考慮格子點在 $[0,n]^3$ 中但不在 $[0,n-1]^3$ ，$n\geq 2$ 時的格子點，它們即是落在圖 14 的平面 $DEFG$ 、 $ABFE$ 與 $BCGF$ 上的格子點，並可將這些格子點型如：

$(0,t,n)$ 、 (t,n,n) 與 (s,t,n) 等三種情形，其中 $s,t=0,1,2,\ldots,n-1$ 。

我們採用歐拉函數推廣式 $\varphi_d^*(n)$ 來計數格子直線數：

(1) $\varphi_d^*(n)$ 的計數方式

(a)當格子點 (t,n,n) 時，含排列的情形的點數為 $C_1^3\varphi_1^*(n)$ ，它們是在 $\overline{BF},\overline{EF},\overline{FG}$ 上的格子點，$0\leq t<n$ 。

(b)當格子點 (s,t,n) 時，含排列的情形的點數為 $C_2^3\varphi_2^*(n)$ ，它們是在正方形 $DEFG$ 、 $ABFE$ 與 $BCGF$ (不含 $\overline{BF},\overline{EF},\overline{FG}$)上的格子點，$0\leq s\leq t<n$ 。

由(a), (b)可將**格子直線數 $a_3(n)$ 寫為**

$$a_3(n)=a_3(n-1)+C_1^3\varphi_1^*(n)+C_2^3\varphi_2^*(n)$$

【定理 10】在 $[0,n]^3$ 中，格子直線數 $a_3(n)$ 滿足

$$\begin{cases} a_3(1)=2^3-1 \\ a_3(n)=a_3(n-1)+C_1^3\varphi_1^*(n)+C_2^3\varphi_2^*(n) \end{cases}. \qquad (4-4)$$

【證明】在 $[0,n]^3$ 中有 n^3-1 非 $(0,0,0)$ 的格子點 (x_1,x_2,x_3) ，其中

$x_i\in\{0,1\}, i=1,2,3, x_1+x_2+x_3>0$ ，故 $a_3(1)=2^3-1$ 。

欲求 $a_3(n)-a_3(n-1)\quad(n\ge 2)$，考慮新增格子直線 $L(x_1,x_2,x_3)$。

將 x_1,x_2,x_3 排序 $x_{(3)}\le x_{(2)}\le x_{(1)}=n$ 分成互斥 4 類：

(1) $0\le x_{(3)}\le x_{(2)}<x_{(1)}=n \quad\leftrightarrow\quad (s,t,n)$

(2) $0\le x_{(3)}<x_{(2)}=x_{(1)}=n \quad\leftrightarrow\quad (t,n,n)$

(3) $x_{(3)}=0<x_{(2)}=x_{(1)}=n \quad\leftrightarrow\quad (0,n,n)$

(4) $0<x_{(3)}=x_{(2)}=x_{(1)}=n \quad\leftrightarrow\quad (n,n,n)$

而後得到

(1)新增 $C_2^3\varphi_2^*(n)$ 條

(2)新增 $C_1^3\varphi_1^*(n)$ 條

(3) (4)皆沒有新增，因此 $a_3(n)=a_3(n-1)+C_1^3\varphi_1^*(n)+C_2^3\varphi_2^*(n)$。

■

就由 $(4-4)$ 式，我們得到格子直線數的一般公式：

【**定理 11**】在 $[0,n]^3$ 中，格子直線數

$$a_3(n)=7+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n}C_j^3\varphi_j^*(i)\ 。$$

【**證明**】由上面推導得到格子直線數 $a_3(n)$ 滿足 $a_3(n)=a_3(n-1)+C_1^3\varphi_1^*(n)+C_2^3\varphi_2^*(n)$ 也可寫成

$$a_3(n)=a_3(n-1)+\sum_{j=1}^{2}C_j^3\varphi_j^*(n).$$

又 $a_3(1)=2^3-1=7$，得到

$$a_3(n)=7+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n}C_j^3\varphi_j^*(i).$$

■

仿照將**定理 11** 推廣至 d 維，考慮格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_{d-1},n)$ 滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_{d-1},n)=1$，且 $0\le x_i\le n-1$，則這些格子點點數為 $\varphi_{d-1}^*(n)$，格子直線數 $a_d(n)$ 可得到**定理 10** 如下：

【定理 12】在$[0,n]^d$中，格子直線數$a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=2}^{n}C_j^d\varphi_j^*(i)$。

特別的，考慮 0 維的情形，可將式子再改寫成$a_d(n)=\sum_{j=0}^{d-1}\sum_{i=1}^{n}C_j^d\varphi_j^*(i).$

(2) $\varphi_d^-(n),\varphi_d^+(n),\varphi_d(n)$的計數方式

【定理 13】在$[0,n]^d$中，設n的標準分解式為$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$，其中$p_1,p_2,...,p_m$為相異質數，$\varphi_d(n),\varphi_d^-(n)$及$\varphi_d^+(n)$為歐拉函數的推廣式，則有

(1) $a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\varphi_i(l)$

(2) $a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\sum_{j=1}^{i}C_j^i\varphi_j^-(l)$

(3) $a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}C_j^i\varphi_j^+(l)$

【證明】由**定理 12** 與**(3-3)**得到

$$a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\varphi_i(l)$$

再由**(3-1), (3-2)**得到

$$a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\sum_{j=1}^{i}C_j^i\varphi_j^-(l)$$
$$a_d(n)=\left(2^d-1\right)+\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{d-1}C_i^d\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}C_j^i\varphi_j^+(l)$$

■

(二) d-單體

1.計算新增格子直線數

同樣地，在$S_{[0,n]}^3$中，也有如**定理 8** 對計算格子直線數的結果，見**定理 14。**

【定理 14】在$S_{[0,n]}^3$中，設n的標準分解式為$n=p_{n_1}^{\alpha_1}\cdot p_{n_2}^{\alpha_2}\cdots p_{n_m}^{\alpha_m}$，其中$p_{n_1},p_{n_2},...,p_{n_m}$為相異質數，$\varphi(n)$為歐拉函數，則格子直線數$a_3^*(n)$滿足：$a_3^*(1)=3$，且當$n\geq 2$時，

$$a_3^*(n)=a_3^*(n-1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3-3[n-1-\varphi(n)]-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq n_1<\cdots<n_j\leq m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_j}}-1}$$。

【證明】 從幾何觀點知：滿足 $0 \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le n$ 的所有格子點所成的圖形即是圖 15 中的四面體 $O-A_1A_2A_3$。

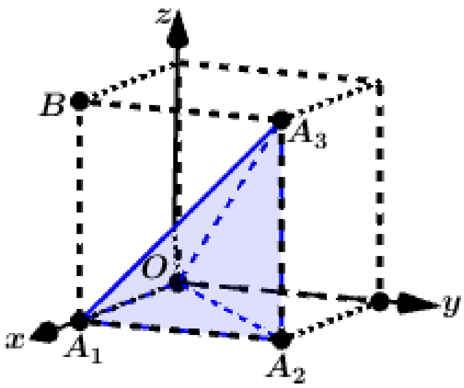

圖 17

顯然當 $n=1$ 時，$a_3^*(1)=3$，再者，當 $n \ge 2$ 時，我們考慮在 $S_{[0,n]}^3$ 中但不在 $S_{[0,n-1]}^3$ 將新增格子點 (x_1,x_2,x_3) 仍分為七種，說明如下：

1.1 $0,0,n$ 有 1 種排法：$(n,0,0)$ 對應 1 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

1.2 $0,t,n$ 有 1 種排法：$(n,t,0)$ 對應 $(n-1)$ 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

因為 $0<t<n$，即 $t \in \{1,2,3,\ldots,n-1\}$，對應 $(n-1)$ 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

同理

1.3 $0,n,n$ 對應 1 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

1.4 t,t,n 對應 $(n-1)$ 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

1.5 s,t,n 對應 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 組 (x_1,x_2,x_3) 的解，其中 $s<t$。

1.6 t,n,n 對應 $(n-1)$ 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

1.7 n,n,n 對應 1 組 (x_1,x_2,x_3) 的解。

所以 (x_1,x_2,x_3) 共有

$$1+(n-1)+1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

事實上，並非新增格子點數就是我們要的新增格子直線數，主因是新增格子直線中會與 $S_{[0,n-1]}^3$ 的格子直線重複，其格子點 (x_1,x_2,x_3) 型如：$(0,0,n)$、$(0,n,n)$ 以及

(n,n,n)，共有 3 條的格子直線，因此這 3 條格子直線皆在 $S^3_{[0,n-1]}$ 中產生，並非新增格子直線數。其次，就是分析新增格子點數但不通過 $S^3_{[0,n-1]}$ 中新增格子直線：

當新增格子點型如：$(n,t,0)$、(n,t,t) 以及 (n,n,t) 等等。特別地，當 $\gcd(n,t)=1$ 時，每組的格子點可形成 $\varphi(n)$ 條格子直線，因此有 $3[n-1-\varphi(n)]$ 條的格子直線在 $S^3_{[0,n-1]}$ 中產生，並非新增格子直線數。當新增格子點型如：(s,t,n)，如同**定理 6** 的討論，因此透過取捨原理導出遞迴式

$$a_3^*(n)=a_3^*(n-1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3-3[n-1-\varphi(n)]-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_j\le m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_j}}-1}$$

■

2. 應用歐拉函數推廣式

在 $S^d_{[0,n]}$ 中考慮滿足 $0\le x_d\le\ldots\le x_2\le x_1=n$ 的格子點，我們就來討論其格子直線數 $a_d^*(n)$。

在 $S^1_{[0,n]}$ 中為滿足 $0\le x_1=n$ 的格子點，因為 $\varphi_0^*(1)=0$，且當 $n\ne1$ 時，$\varphi_0^*(n)=0$，所以

$$a_1^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_0^*(n)\quad\text{可改寫成}\quad a_1^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1\cdot\varphi_0^*(n)}{0!}$$

在 $S^2_{[0,n]}$ 中為滿足 $0\le x_2\le x_1=n$ 的格子點，可分為三種情形：

(1) 當 $0<x_2<x_1=n$ 時，則這些格子點形成的格子直線數為 $\varphi_1^*(n)-\varphi_0^*(n)$。

(2) 當 $0<x_2=x_1=n$ 時，則這些格子點形成的格子直線數為 $\varphi_0^*(n)$。

(3) 當 $0=x_2<x_1=n$ 時，則這些格子點形成的格子直線數為 $\varphi_0^*(n)$。

因此格子直線數為

$$a_2^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[(\varphi_1^*(i)-\varphi_0^*(i))+\varphi_0^*(i)+\varphi_0^*(i)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_1^*(i)+\varphi_0^*(i)\right).$$

可改寫成

$$a_2^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1\cdot\varphi_1^*(i)+1\cdot\varphi_0^*(i)}{1!}\right).$$

同樣地，在 $S^3_{[0,n]}$ 中為滿足 $0 \le x_3 \le x_2 \le x_1 = n$ 的格子點，可分為七種情形：

(1)當 $0 < x_3 < x_2 < x_1 = n$ 時，其格子點就是在 $S^3_{[0,n]}$ 中但不在 $S^3_{[0,n-1]}$ 中，如圖 16 中 $\Delta A_1A_2A_3$ 的格子點。

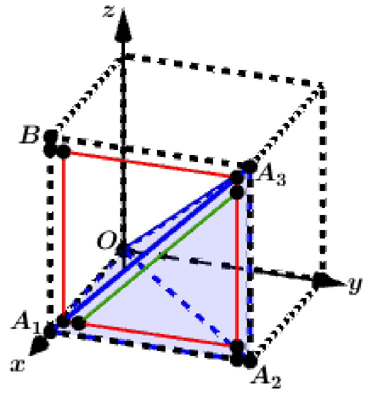

圖 18

因為紅色正方形 $[0,n-1]^2$ 的格子直線數為 $\varphi_2^*(n)$，又 $\overline{A_1B}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{BA_3}, \overline{A_2A_3}$ 之格子直線數為 $\varphi_1^*(n)$，所以 $\Delta A_1A_2A_3$ 的格子直線數為

$$\frac{\varphi_2^*(n) - 3\varphi_1^*(n)}{2}.$$

而後加入 $\varphi_0^*(n)$ 做 $n=1$ 時的修正，因為 $\varphi_0^*(n) = \begin{cases} 1, & 當\ n=1 \\ 0, & 當\ n \ne 1 \end{cases}$，因此格子直線數為

$$\frac{1\varphi_2^*(n) - 3\varphi_1^*(n) + 2\varphi_0^*(n)}{2!}.$$

(2)當 $0 < x_3 < x_2 = x_1 = n$ 或 $0 < x_3 = x_2 < x_1 = n$ 或 $0 = x_3 < x_2 < x_1 = n$ 時，則三種的這些格子點形成的格子直線數皆為 $\varphi_1^*(n) - \varphi_0^*(n)$，共有格子直線數為 $C_2^3[\varphi_1^*(n) - \varphi_0^*(n)]$。

(3)當 $0 < x_3 = x_2 = x_1 = n$ 或 $0 = x_3 < x_2 < x_1 = n$ 或 $0 = x_3 = x_2 < x_1 = n$ 時，則三種的這些格子點形成的格子直線數為 $\varphi_0^*(n)$，共有格子直線數為 $C_1^3\varphi_0^*(n)$。

因此格子直線數為

$$a_3^*(n) = \sum_{i=1}^{n}\left[C_3^3\left(\frac{1\varphi_2^*(i) - 3\varphi_1^*(i) + 2\varphi_0^*(i)}{2!}\right) + C_2^3\left(\frac{1\varphi_1^*(i) - 1\varphi_0^*(i)}{1!}\right) + C_1^3\left(\frac{\varphi_0^*(i)}{0!}\right)\right].$$

仿照 $S^3_{[0,n]}$ 的計數方式，在 $S^d_{[0,n]}\ (d \ge 4)$ 中為滿足 $0 \le x_d \le \ldots \le x_2 \le x_1 = n$ 的格子點，可分

為$C_d^d+C_{d-1}^d+\cdots+C_2^d+C_1^d=2^d-1$種情形。

特別地當$0<x_d<\ldots<x_2<x_1=n$時形成的格子直線討論如下：

當$d=2$時，$\dfrac{(-1)\varphi_0^*(n)+1\varphi_1^*(n)}{1!}$.

當$d=3$時，$\dfrac{2\varphi_0^*(n)+(-3)\varphi_1^*(n)+1\varphi_2^*(n)}{2!}$.

當$d=4$時，$\dfrac{(-6)\varphi_0^*(n)+11\varphi_1^*(n)+(-6)\varphi_2^*(n)+1\varphi_3^*(n)}{3!}$.

當$d=5$時，$\dfrac{24\varphi_0^*(n)+(-50)\varphi_1^*(n)+35\varphi_2^*(n)+(-10)\varphi_3^*(n)+1\varphi_4^*(n)}{4!}$.

當$d=6$時，$\dfrac{(-120)\varphi_0^*(n)+274\varphi_1^*(n)+(-225)\varphi_2^*(n)+85\varphi_3^*(n)+(-15)\varphi_4^*(n)+1\varphi_5^*(n)}{5!}$.

我們發現上述的式子中紅色的係數即為著名的**第一類斯特林數**（Stirling numbers of the first kind) (可參考資料[2]) ，它是指設$n\in N$ ，則有

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k$$

其中$(x)_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ ，且$s(n,k)$為**第一類斯特林數**滿足

$$s(n+1,k)=-ns(n,k)+s(n,k-1).$$

例如：

$$s(5,3)=-4\cdot s(4,3)+s(4,2)=-4\cdot(-6)+11=35.$$

【定理 15】設n,d為正整數，若$b_d(n)$為滿足$0<x_d<x_{d-1}<\cdots<x_1<n$ ，且$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點$(x_1,x_2,\ldots,x_d)$之個數，則有

$$b_d(n)=\sum_{k=1}^{d}\frac{s(d,k)\varphi_{k-1}^*(n)}{(d-1)!}.$$

【證明】令$\varphi_d^*(n)$滿足$0\le x_1\le n-1,\ 0\le x_2\le n-1,\ldots,0\le x_{d-1}\le n-1,$且$\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$的格子點$(x_1,x_2,\ldots,x_d)$之個數，則將這些條件中格子點的坐標$x_1,x_2,\ldots,x_d$排序成

$$0\le x_{(d)}\le x_{(d-1)}\le\ldots\le x_{(1)}<n$$

因為$x_{(i)}\le x_{(i-1)}$表示$x_{(i)}<x_{(i-1)}$或$x_{(i)}=x_{(i-1)}$，若令$x_{(d+1)}=0$，所以可以將連續不等式

$0 = x_{(d+1)} \le x_{(d)} \le x_{(d-1)} \le \ldots \le x_{(1)}$ 依等於出現的次數分成為

(1)全部都是，即 $0 = x_{(d)} = x_{(d-1)} = \cdots = x_{(1)}$，故 $(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (0,0,\ldots,0)$ 恰有 1 種情形。

因為 $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_d, n) = 1 \Leftrightarrow \gcd(0,0,\ldots,0,n) = 1$，所以滿足這些條件的格子點數為

$$\varphi_0^*(n) = \begin{cases} 1, & \text{當 } n = 1 \\ 0, & \text{當 } n \ne 1 \end{cases}。$$

(2)恰有 1 次不是時，有

$$\begin{gathered} 0 < x_{(d)} = x_{(d-1)} = \cdots = x_{(1)} \\ 0 = x_{(d)} < x_{(d-1)} = \cdots = x_{(1)} \\ \vdots \\ 0 = x_{(d)} = \cdots = x_{(2)} < x_{(1)} \end{gathered}$$

共計 d 類。若嚴格小於出現在第 j 個位置時，即

$$0 = x_{(d)} = \cdots = x_{(j-1)} < x_{(j)} = \cdots = x_{(1)}$$

表示 $x_1, x_2, \ldots, x_d$ 中有 $d-j$ 個坐標為 0，而剩下 j 個坐標都是相同的正數，其中 $1 \le j \le d$。因此上述 d 類分別有 $C_d^d, C_{d-1}^d, \ldots, C_1^d$ 種情形，共有

$C_d^d + C_{d-1}^d + \cdots + C_1^d = 2^d - 1$ 種情形，而 $2^d - 1$ 正是將 $d+1$ 個物品分成兩堆的方法數。此意味我們可以將 $d+1$ 個符號 $0, x_1, x_2, \ldots, x_d$。

先分成兩堆，在將同一堆中的符號以等號相結合，而不同堆代表不同的數值，且含 0 的那一堆小於不含 0 的那一堆，此時

$$\begin{aligned} &\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_d, n) = \gcd(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(d)}, n) \\ &= \begin{cases} \gcd(0, x_{(d)}, n), & \text{若 } x_{(1)} = 0 \\ \gcd(x_{(d)}, n), & \text{若 } x_{(1)} > 0 \end{cases} \\ &= \gcd(x_{(d)}, n) \end{aligned}$$

因此滿足條件的 $x_{(d)}$ 有 $\varphi_1^*(n)$ 個。

綜合以上討論，由乘法原理可知，滿足條件下的 d 個 $\le$ 關係，恰有一個為 $<$ 且其他 $d-1$ 個為 $=$ 的所有格子點共有 $(2^d - 1)\varphi_1^*(n)$ 個，其中 $2^d - 1$ 是將 $d+1$ 個相異物品任意分成 2 推，每堆至少有一件的方法數。

設 $S(n,k)$ 表示將 n 個相異物分成 k 堆，每堆至少有一件的方法數，其中 $k=0,1,\ldots,n$ ，則 $S(n,0)=0,\quad n=1,2,3,\ldots$ ，欲求 $S(n,k),\quad 1\le k\le n$ 。先考慮將 n 個相異物置入 k 個有編號的抽屜，每個抽屜至少至入一物有 $C_0^k k^n - C_1^k (k-1)^n + \cdots + (-1)^k C_k^k (k-k)^n$ 種。

若抽屜沒有編號表示只是分堆，故除以排列數 $k!$ 後得到

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_j^n (k-j)^n.$$

且 $S(n,k)$ 滿足下列遞迴關係

$$S(n,0)=0,\quad S(n,n)=1,\quad S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

其中 $1\le k\le n-1$ 。令 $S(0,0)=0$ ，則依照遞迴關係知下列數形：

$$\begin{array}{lllll} S(0,0) & & & & \\ S(1,0) & S(1,1) & & & \\ S(2,0) & S(2,1) & S(2,2) & & \\ S(3,0) & S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & \\ S(4,0) & S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) \\ & & \vdots & & \end{array} \text{為} \begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

現在要求 $b_d(n)$ ，當將連續不等式 $0\le x_{(d)}\le x_{(d-1)}\le\ldots\le x_{(1)}<n$ 恰有 j 個嚴格小於關係， $d-j$ 個等於關係時，仿照前面討論，可以先分成 $S(d+1,j+1)$ 類，即將 $d+1$ 個符號 $0,x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(d)}$ ，分成 $j+1$ 堆，每堆至少有一個符號的方法數。

若此時

$$x_{(i_1-1)}<x_{(i_1)},\ldots,x_{(i_j-1)}<x_{(i_j)} \text{，其中} 1\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le d.$$

則

$$\begin{aligned} &\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=\gcd(x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(d)},n)\\ &=\begin{cases}\gcd(0,x_{(i_1)},\ldots,x_{(i_j)},n) & \text{若 } x_{(1)}=0\\ \gcd(x_{(i_1)},\ldots,x_{(i_j)},n), & \text{若 } x_{(1)}>0\end{cases}\\ &=\gcd(x_{(i_1)},\ldots,x_{(i_j)},n)\end{aligned}$$

故滿足這樣條件的格子點共有 $S(d+1,j+1)\cdot j!\cdot b_j(n)$ 個。

由加法原理得到

$$\varphi_d^*(n)=\sum_{j=0}^{d} S(d+1,j+1)\cdot j!\cdot b_j(n). \tag{4-5}$$

接著考慮

第二類斯特林數： $x^n=S(n,1)(x)_1+S(n,2)(x)_2+\cdots+S(n,n)(x)_n$

第一類斯特林數： $(x)_n=s(n,1)x+s(n,2)x^2+\cdots+s(n,n)x^n$

則

$$\begin{aligned}
0!b_0(n)&=s(1,1)\varphi_0^*(n)\\
1!b_1(n)&=s(2,1)\varphi_0^*(n)+s(2,2)\varphi_1^*(n)\\
2!b_2(n)&=s(3,1)\varphi_0^*(n)+s(3,2)\varphi_1^*(n)+s(3,3)\varphi_2^*(n)\\
&\vdots\\
b_d(n)&=\sum_{k=1}^{d}\frac{s(d,k)\varphi_{k-1}^*(n)}{(d-1)!}
\end{aligned}$$

■

由**定理 15** 我們得到當 $0<x_d<\ldots<x_2<x_1=n$ 時形成的格子直線為

$$\frac{s(d,1)\varphi_0^*(n)+s(d,2)\varphi_1^*(n)+s(d,3)\varphi_2^*(n)+\cdots+s(d,d-1)\varphi_{d-2}^*(n)+s(d,d)\varphi_{d-1}^*(n)}{(d-1)!}.$$

可改寫成

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{s(d,k)\varphi_{k-1}^*(n)}{(d-1)!}.$$

其他的情形討論如下：

(1)當 $0<x_d<\ldots<x_2=x_1=n$ 或 $0<x_d<\ldots<x_3=x_2<x_1=n$ 或 $\cdots$ (增加一個等號，此情形共有 C_{d-1}^{d} 種) 時，其格子點所形成的格子直線為

$$\sum_{k=1}^{d-1}\frac{s(d-1,k)\varphi_{k-1}^*(n)}{(d-2)!}.$$

(2)當 $0<x_d<\ldots<x_3=x_2=x_1=n$ 或 $0<x_d<\ldots<x_4=x_3=x_2<x_1=n$ 或 $\cdots$ (增加二個等號，此情形共有 C_{d-2}^{d} 種) 時，其格子點所形成的格子直線為

$$\sum_{k=1}^{d-2}\frac{s(d-2,k)\varphi_{k-1}^*(n)}{(d-3)!}.$$

以此類推至增加 $n-1$ 個等號，此情形共有 C_1^d 種，其格子點所形成的格子直線為

$$s(1,1)\varphi_0^*(n).$$

所以

$$a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[C_d^d\sum_{k=1}^{d}\frac{s(d,k)\varphi_{k-1}^*(i)}{(d-1)!}+C_{d-1}^d\sum_{k=1}^{d-1}\frac{s(d-1,k)\varphi_{k-1}^*(i)}{(d-2)!}+\cdots+C_1^d\frac{s(1,1)}{0!}\varphi_0^*(i)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{j}C_j^d\frac{s(j,k)}{(j-1)!}\varphi_{k-1}^*(i)$$

於是我們有**定理 16**：

【**定理 16**】在 $S_{[0,n]}^d$ 中，格子直線數 $a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{j}C_j^d\frac{s(j,k)}{(j-1)!}\varphi_{k-1}^*(i)$。

我們也發現**定理 16** 可以用 $|s(n,k)|$ 來表示，如在 $S_{[0,n]}^2$ 中，格子直線數

$$a_2^*(n)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi_0^*(i)+\varphi_1^*(i))$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(|s(2,1)|\varphi_0^*(i)+|s(2,2)|\varphi_1^*(i)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{|s(2,j)|}{1!}\varphi_{j-1}^*(i)\right)$$

又在 $S_{[0,n]}^3$ 中有

$$a_3^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(C_3^3\cdot\frac{|s(3,3)|\varphi_2^*(i)+(-1)|s(3,2)|\varphi_1^*(i)+|s(3,1)|\varphi_0^*(i)}{2!}\right)+\left(C_2^3\cdot\frac{|s(2,2)|\varphi_1^*(i)+(-1)|s(2,1)|\varphi_0^*(i)}{1!}\right)+\left(C_1^3\cdot\frac{|s(1,1)|\varphi_0^*(i)}{0!}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{C_3^3|s(3,3)|\varphi_2^*(i)+[(-1)C_3^3|s(3,2)|+2C_2^3|s(2,2)|]\varphi_1^*(i)+[C_3^3|s(3,1)|-2C_2^3|s(2,1)|+2C_1^3|s(1,1)|]\varphi_0^*(i)}{2!}\right]$$

於是

$$a_3^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|s(3,3)|\varphi_2^*(i)+|s(3,2)|\varphi_1^*(i)+|s(3,1)|\varphi_3^*(i)}{2!}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\frac{|s(3,j)|\varphi_{j-1}^*(i)}{2!}.$$

仿照上述式子可類推，於是我們就猜測**定理 17**，並予以證明。

【**定理 17**】在 $S^d_{[0,n]}$ 中，格子直線數

$$a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\frac{|s(d,j)|\varphi_{j-1}^*(i)}{(d-1)!}$$

【**證明**】由**定理 16** 知格子直線數 $a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{j}C_j^d\frac{s(j,k)}{(j-1)!}\varphi_{k-1}^*(i)$，比較 $\varphi_{j-1}^*(n)$ 係數可得

$$\sum_{j=1}^{d}\frac{|s(d,j)|\varphi_{j-1}^*(n)}{(d-1)!}=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{i}C_i^d\frac{s(i,j)}{(i-1)!}\varphi_{j-1}^*(n)$$

將 $\varphi_{j-1}^*(n)$ 轉換成 x^j

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{i}C_i^d\frac{s(i,j)}{(i-1)!}x^j=\sum_{j=1}^{d}\frac{|s(d,j)|}{(d-1)!}x^j$$

我們就有

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{C_i^d}{(i-1)!}x\cdot(x-1)\cdots(x-i+1)=\frac{x\cdot(x+1)\cdots(x+d-1)}{(d-1)!}$$

要證明上式相等，我們考慮 $\sum_{i=1}^{d}\frac{C_i^d}{(i-1)!}x\cdot(x-1)\cdots(x-i+1)=0$ 的根為 $x=0,-1,-2,\ldots,-d+1$ 即可，因為兩式的首項係數相同。

改寫成

$$\sum_{i=1}^{d}(-1)^i\frac{C_i^d}{(i-1)!}(-x)\cdot(-x+1)\cdots(-x+i-1)=0$$

等價於證明

$$\sum_{i=1}^{d}(-1)^i\frac{C_i^d}{(i-1)!}(-x)\cdot(-x+1)\cdots(-x+i-1)\cdot\frac{(-x)!}{(-x)!}=0 \text{ 的根為 } x=0,-1,-2,\ldots,-d+1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{d}(-1)^iC_i^dC_{i-1}^{-x+i-1}(-x)=0 \text{ 的根為 } x=0,-1,-2,\ldots,-d+1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{d}(-1)^iC_i^dC_{i-1}^{x+i-1}=0 \text{ 的根為 } x=1,2,\ldots,d-1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{d}(-1)^iC_i^d\left(C_i^{i+x}-C_i^{i+x-1}\right)=0 \text{ 的根為 } x=1,2,\ldots,d-1$$

$$\Leftarrow\sum_{i=0}^{d}(-1)^iC_i^dC_i^{i+x}=0 \text{ 的根為 } x=0,1,2,\ldots,d-1$$

我是用數學歸納法證明如下：

當 $d=1$ 時， $x=0$ 且 $\sum_{i=0}^{1}(-1)^i C_i^1 C_i^i = 1-1=0.$

設 $\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_i^{i+x}=0$ 在 $x=0,1,2,\ldots,d-1$ 成立

則可有

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{x=0}^{k}(-1)^i C_i^d C_i^{i+x}=0 \text{ 在 } k=0,1,2,\ldots,d-1 \text{ 成立}$$

又

$$0=\sum_{i=0}^{d}\sum_{x=0}^{k}(-1)^i C_i^d C_i^{x+i}=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_{i+1}^{i+1+k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[C_i^d C_i^{i+k+1}-C_i^d C_i^{i+k+1}\right]$$

移項得到

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_i^d C_i^{i+k+1}-\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d\left(C_i^{i+k+1}+C_{i+1}^{i+k+1}\right)\\
&=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_i^{i+k+1}-\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_{i+1}^{i+k+2}\\
&=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_i^{i+k+1}+\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^i C_{i-1}^d C_i^{i+k+1}\\
&=\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i C_i^d C_i^{i+k+1}+\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i C_{i-1}^d C_i^{i+k+1}\\
&=\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i\left(C_i^d+C_{i-1}^d\right)C_i^{i+k+1}\\
&=\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i C_i^{d+1} C_i^{i+k+1} \qquad \forall\, k+1=1,2,\ldots,d
\end{aligned}$$

在 $k+1=0$ 時，由二項式定理得到

$$\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i C_i^{d+1} C_i^{i+0}=\sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i C_i^{d+1}=(1-1)^{d-1}=0$$

故由數學歸納法得證 $\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_i^d C_i^{i+x}=0$ 的根為 $x=0,1,2,\ldots,d-1$ ，因此

$$a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\frac{|s(d,j)|\varphi_{j-1}^*(i)}{(d-1)!}.$$

■

伍、研究結果

我們深入探討 d 維空間中特定格子圖形的格子直線數，主要是選定超立方體與單體等等兩種格子圖形來研究，得到結果如下：

在格子正方形部分，發現右下三角形的格子直線數即是法里序列的項數，又因為 $|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n)$，其中 $\varphi(n)$ 為歐拉函數，於是就可推導出格子直線數為 $1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$，這結果開啟了格子直線數與歐拉函數重要的表現形式。

透過幾何結構延伸至 d 維中來探討格子直線數，期盼仍用歐拉函數的形式來表示，但只用 $\varphi(n)$ 是無法辦到的，因此就推導歐拉函數的推廣式來計數格子直線數，推導出多種推廣式，其中數論中的約當囿互質函數(Jordan's totient function)，這裡記為 $\varphi_d(n)$，在計算上仍是最簡潔，本研究推導的推廣式有：

設 $\varphi_d(n), \varphi_d^-(n),\ \varphi_d^+(n)$ 以及 $\varphi_d^*(n)$ 分別表示在 $[1,n]^d, [1,n-1]^d,\ [0,n]^d$ 及 $[0,n-1]^d$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_d,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_d)=1$ 的個數。

特別是 $\varphi_d(1)=1, \varphi_d^-(1)=0$ 及 $\varphi_d^+(1)=2^d$，$\varphi_0^*(n)=\begin{cases}1, & \text{當 } n=1\\ 0, & \text{當 } n\neq 1\end{cases}$，則有

(a) $\varphi_d(n)=n^d(1-\frac{1}{p_1^d})(1-\frac{1}{p_2^d})\cdots(1-\frac{1}{p_m^d})$

它等於在 $[0,n-1]^d$ 中的格子點個數，即 $\varphi_d(n)=\varphi_d^*(n).$

(b) $\varphi_d^-(n)=C_d^d\varphi_d(n)-C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+(-1)^{d-1}C_1^d\varphi_1(n).$

(c) $\varphi_d^+(n)=C_d^d\varphi_d(n)+C_{d-1}^d\varphi_{d-1}(n)+\cdots+C_1^d\varphi_1(n).$

(d) $\varphi_d(n)=C_d^d\varphi_d^-(n)+C_{d-1}^d\varphi_{d-1}^-(n)+\cdots+C_1^d\varphi_1^-(n)=\sum_{i=1}^{d}C_i^d\varphi_i^-(n).$

(e) $\varphi_d(n)=C_d^d\varphi_d^+(n)-C_{d-1}^d\varphi_{d-1}^+(n)+\cdots+(-1)^{d-1}C_1^d\varphi_1^+(n)=\sum_{i=1}^{d}(-1)^{d-i}C_i^d\varphi_i^+(n).$

(f) $\varphi_d^*(n)=\varphi_d(n).$

歐拉函數推廣式的計數結果：

<table>
<tr><th>格子圖形</th><th>類型</th><th>格子直線數</th></tr>
<tr><td rowspan="3">格子三角形</td><td>類型 I</td><td>$1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$</td></tr>
<tr><td>類型 II</td><td>$\varphi(n)+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$</td></tr>
<tr><td>類型 III</td><td>$1+a\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$</td></tr>
<tr><td>格子矩形</td><td>$[0,2n]\times[0,n]$</td><td>$1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varphi(i)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">格子超立方體

$[0,n]^d$</td><td>$[0,n]^2$</td><td>$a_2(n)=1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$</td></tr>
<tr><td>$[0,n]^3$</td><td>$a_3(1)=7$ ，，當 $n\geq 2$ 時，則有 $a_3(n)=7+\sum_{i=2}^{n}N(i)$ 註 1

或者 $a_3(n)=7+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n}C_j^3\varphi_j^*(i)$</td></tr>
<tr><td>$[0,n]^d$</td><td>$a_d(1)=2^d-1$ ，當 $n\geq 2$ 時，則有

$a_d(n)-a_d(n-1)=[(n+1)^d-n^d]-(2^d-1)$
$-\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=0}^{d-i-1}\sum_{k=1}^{d-i-j}\sum_{\substack{t_1+t_2+\ldots+t_k=d-i-j\\ t_1>0,\ldots,t_k>0}}\frac{d!}{i!\,j!\,t_1!\,t_2!\cdots t_k!}\cdot\alpha_k(n)$ 註 2

$a_d(n)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}C_j^m\varphi_j^*(i)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$d-$單體 $S_{[0,n]}^d$</td><td>$S_{[0,n]}^2$</td><td>$a_2^*(n)=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i).$</td></tr>
<tr><td>$S_{[0,n]}^3$</td><td>$a_3^*(1)=3$ ，當 $n\geq 2$ 時，則有

$a_3^*(n)=a_3^*(n-1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3$
$-3[n-1-\varphi(n)]-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{1\leq n_1<\cdots<n_j\leq m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_j}}-1}$</td></tr>
<tr><td>$S_{[0,n]}^d$</td><td>$a_d^*(n)=\left|F_n^m\right|$

$a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{j}C_j^d\,\frac{s(n,k)}{(j-1)!}\cdot\varphi_{k-1}^*(i)$ $a_d^*(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\frac{\left|s(d,j)\right|\cdot\varphi_{j-1}^*(i)}{(d-1)!}$</td></tr>
</table>

【註 1】$N(n)=[(n+1)^3-n^3]-7-12[n-1-\varphi(n)]-6\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_j\le m}C_2^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_j}}-1}$.

【註 2】$\alpha_k(n)=\sum_i C_k^{\frac{n}{p_{n_i}}-1}-\sum_{i<j}C_k^{\frac{n}{p_{n_i}p_{n_j}}-1}+\cdots+(-1)^n C_k^{\frac{n}{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_m}}-1}$.

【註 3】可由(d)(e)(f)將$\varphi_j^*(i)$換成$\varphi_j^+(i),\varphi_j^-(i),\varphi_j(i)$得到以$\varphi_j^+(i),\varphi_j^-(i),\varphi_j(i)$計數的公式。

但是要注意一點，像$a_d(n)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}C_j^m\varphi_j^*(i)$須採用$a_d(n)=\left(2^m-1\right)+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=2}^{n}C_j^m\varphi_j^*(i)$，

也就是要將有$\varphi_0^*(i)$的項先算出，因為$\varphi_j^+(i),\varphi_j^-(i),\varphi_j(i)$在$j=0$時沒有定義。

陸、結論與應用

關於這次科展的主題，專研於特定區域中過原點的格子點之直線數，其個數用歐拉函數的推廣式來表示，展現了格子圖形具有代數性質，是解析幾何中一環。

在探討格子正方形中的格子直線數，是用歐拉函數$\varphi(n)$來呈現，接下來探討格子立方體，單單靠$\varphi(n)$來計數是無法辦到的，推導歐拉函數推廣式來克服這個問題，因此先推導出歐拉函數四個推廣式。首先發現$\varphi_d^-(n)$，但使用它計數時相當困難的，於是為了克服計算部分，只是在數量上做些改變，驚喜地得到了其他三個推廣式，其中 $\varphi_d(n)$與數論上約當囿互質函數(Jordan's totient function)相同，更妙地$\varphi_d(n)=\varphi_d^*(n)$，且$\varphi_d^*(n)$在談幾何結構更容易些，因此後面格子直線數都由$\varphi_d^*(n)$來呈現，在此微妙互換推論過程中，得到了無比的樂趣。

此外，也推廣法里序列的格子圖形，這幾何結構是d-單體，這條件下得到的格子直線數是$\varphi_d^*(n)$的線性組合，巧妙的線性組合之係數為$s(n,k)$(第一類斯特林數)，又仔細去合併後，簡化出為$|s(n,k)|$之線性組合，使得一般式更佳簡捷，這是令人高興的發現。本研究致力於探討格子直線數用歐拉函數推廣式來表示，總有些意想不到的結果，仍期盼繼續研發更多格子圖形，更是不停地擴充歐拉函數推廣式的應用。

柒、參考文獻

[1]吳佳靜、張信萱、陳郁瑾 (2012)。**點點相連是向量**。全國高級中等學校小論文作品。

[2]博羅夫斯基、博溫 (2004)。**數學辭典**。香港以及馬新：貓頭鷹出版。

[3] B. Basu-Mallick,& Tangaya Bhattacharyya, & Diptiman Sen (2003). *Construction of some special subsequences within a Farey sequence*. Indian Institute of Science：India.

[4] Dickson, L. (1966). *History of the theory of numbers*. I, Chelsea Publishing Co.：New York.

[5] Julane Amen (2006). *Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem*. University of Nebraska - Lincoln.

[6] M. Ram Murty (2001). *Problems in Analytic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematices. 206. Springer-Verlag. P.11.

【評語】010039

探討對於給定平面上以原點為一頂點的正方形，過原點的直線中，通過正方形內部（含邊界）的格子點的直線的個數問題。並將結果進一步推廣到 n 維的立方體。透過與歐拉函數的巧妙連結，作者們成功的對於原始問題給出了解答。對於更為一般化的，在 n 維立方體上，通過格子點的直線數的問題，也藉由 generalized Euler φ-function 的表示形式給出了解答。結果很有趣，值得嘉許。部分說明過於繁瑣，而有些論述又稍嫌簡略。如果能再稍加整理，把論述的過程說的更清楚而且精簡會更好。