

# 2017 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 平面圖的四元列表著色

得獎獎項 大會獎：一等獎

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 楊宗穎

作者姓名 林芮吟

關鍵字 平面圖、列表著色、放電論證法

## 作者簡介



我是林芮吟，目前就讀臺北市立第一女子高級中學二年級。

平時喜歡跳舞、到處旅行，看一些科普書籍，也因此從中得到研究的靈感，再加上有專研老師的指導，我很快地就找到適合自己又感興趣的研究主題，隨即展開我的研究之旅。

在投入研究的這一年當中，我不僅僅沉浸在圖論的世界裡，多采多姿的著色問題亦豐富了我的視野，更從中體會到數學研究的價值與必要性。未來，期盼我能將這些經驗化為助力，繼續投入數學的研究。

## 摘要

給定一個簡單圖  $G$  ( *simple graph* )，令  $V(G)$ 、 $E(G)$  分別為  $G$  的頂點與邊所形成的集合。對於兩個不同的頂點  $u, v \in V(G)$ ，若存在一條邊連結頂點  $u, v$ ，則將此邊記為  $uv$ ，以  $uv \in E(G)$  表示。給定函數  $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，若對任意的邊  $uv \in E(G)$ ，函數  $f$  皆滿足  $f(u) \neq f(v)$ ，則稱函數  $f$  為圖  $G$  的一個著色函數 ( *proper coloring* )。對於圖  $G$ ，任意給定每個頂點  $v \in V(G)$  一個可用的顏色清單  $L(v) \subset \mathbb{N}$ ，其中清單內各有四個可用顏色 ( $|L(v)| = 4$ ，每個頂點的顏色清單可以不相同)，若總是存在一個著色函數  $f$ ，滿足  $\forall v \in V(G)$ ， $f(v) \in L(v)$ ，則稱圖  $G$  為『可四元列表著色 ( *4-choosable* )』。對於平面圖 ( *plane graph* )，針對長度較小的圈 ( *cycle* ) 進行限制，我們設計充分條件，使得滿足條件的平面圖為可四元列表著色。

## Abstract

Appel and Haken (1977) proved that four colors suffice to color any map by using the discharging method. While the original problem required the same four colors, but what if each country has its own four colors to choose from. Can the map still be colored properly via this way of list coloring? This problem is NP-hard according to Gutner.

This challenging problem can be studied through vertex coloring. Previously, Thomassen proved that every planar graph is *5-list colorable*. Lam et al. later demonstrated that a planar graph without *4-cycles* is *4-list colorable*. These and other studies identified sufficient conditions for *4-list colorability* by constraining on the existence of *3-cycles*, *4-cycles* etc. and on the adjacency of short cycles. Their best results require a distance of at least one between short cycles. We asked if this condition can be improved to requiring just nonnegative distance.

We used the idea of nonnegative distance to construct various graphs, and eventually identified a sufficient condition for planar graphs to be *4-list colorable* if they contain no *adjacent 3-cycles*, *adjacent 4-cycles* and *sun*s. Then we used proof by contradiction to establish its validity. We first assumed that the claim was false and that there existed a minimal counterexample, say graph  $G$ , the properties of which could be identified. We then applied the discharging method to prove that this counterexample could not exist under our three conditions. Specifically, we designed several discharging rules and assigned suitable charges to the vertices and faces of  $G$  while requiring that the total charge should remain unchanged. Should the minimal counterexample exist, we proved that its subsequent total charge would be different from the initial one, thereby resulting in a contradiction.

# 壹、前言

## 一、研究動機

在專題研究課中，專研老師曾經介紹圖論中的『著色問題』，在一般科普書籍中，也曾經閱讀過『四色定理』等相關文章，覺得著色問題是一個有趣、具體、容易理解，但卻又很難解決的問題。尤其四色定理，竟然需要透過計算機的輔助才能成功的完成證明，這與我平常在學習數學中所接觸的證明有很大的不同，所以讓人難以體會其中的奧妙。在專研老師的介紹下，有幸於數學傳播期刊中，閱讀了台大數學系張鎮華教授的『Lovász 的雨傘』一文，從中初步瞭解了圖論的相關知識，在文中第一次看見了『放電論證法 (Discharging method)』一詞，因此我向專研老師詢問放電論證法的概念與精神為何？專研老師也指導我去閱讀一些平面圖著色問題的相關學術期刊文章，發覺著色問題在圖論上真的是一個受到研究學者熱愛，蓬勃發展的議題，相關的圖形著色研究豐富至極。

除了一般的著色問題之外，更有難度更高的『列表著色 (Choosability)』問題。相關的研究大多指出，對於平面圖，列表著色的充分條件，通常會在一些長度較小的圈上做限制。收集資料的過程中，得知倘若平面圖沒有三角形 (3-cycle) 的結構，則此平面圖必為『可四元列表著色 (4-choosable)』。接著我參考了學術期刊 Journal of Combinatorial Theory, Series B 中『The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles』一文，得知平面圖沒有四邊形 (4-cycle) 的結構，亦為平面圖為可四元列表著色的充分條件，證明的過程中，主要使用『反證法』、『數學歸納法』與『放電論證法』進行論證。數學歸納法，正是高一數學課程中所習得的證明方法，而放電論證法則是一個新穎且富有巧思的論證法，我非常好奇數學歸納法與放電論證法在著色問題中能夠激盪出什麼樣的火花，這引起我極高的興趣，究竟這樣容易理解卻又難以突破的著色問題，對於平面圖  $G$ ，是否能夠自行研究出平面圖  $G$  為可四元列表著色的充分條件。雖然相關的精闢研究都已發表在各種學術期刊中，儘管此問題有一定等級的難度，但那怕是一點點的進步，我想都值得盡我所能的嘗試看看，也讓自己能夠完全的浸淫在數學的世界，一覽數學之美。

事實上，圖形的著色問題是圖論 (Graph Theory) 中的一種標號問題 (Labeling problem)，為了方便進行數學研究，我大多沿用期刊中研究學者所使用的記號表示法，以高中生能力可及，利用函數、集合、分類討論、數學歸納法、反證法等高中數學概念進行研究分析。

## 二、研究目的

我所探討的圖形皆為連通的簡單圖。首先我將設計一些規模較小的平面圖與顏色列表函數，使其存在著色函數。接著進行研究對於三角形（*3-cycle*）與四邊形（*4-cycle*）而言，考量其個數、距離、與特殊結構的不同，進行限制，使得平面圖是可四元列表著色。首先要強調在我的研究計畫中，三角形與四邊形為必然要存在於平面圖的結構中（否則平面圖若沒有三角形或四邊形的結構，則必為可四元列表著色了）。

我的研究目的如下：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1) 任意兩個三角形最多共享一個點；
  - (2) 任意兩個四邊形最多共享一個點；
  - (3) 不存在一個圈，使得此圈的各邊皆與三角形相鄰；
- ，則平面圖  $G$  必為可四元列表著色（*4-choosable*）。

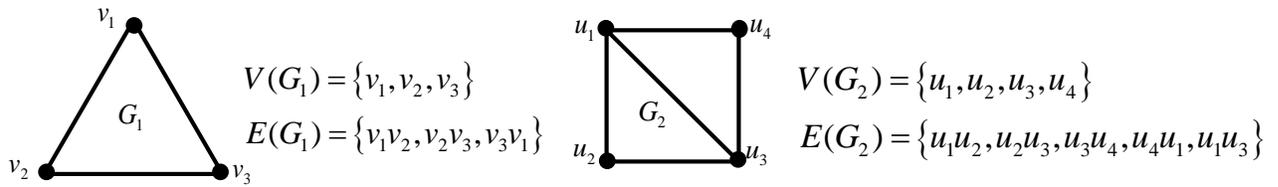
## 貳、研究方法與過程

### 一、基本概念、名詞解釋與先備知識

研究過程中，根據我研究目的所設定的條件，以及平面圖相關的先備知識，接下來我將解釋以下名詞：*k-cycle*、*k-vertex*、*k-face*、子圖(*subgraph*)、平面圖(*plane graph*)、歐拉定理、對偶圖(*dual graph*)、有向圖(*directed graph*)、圈與圈的距離、圖的著色數、四色定理、列表著色數。

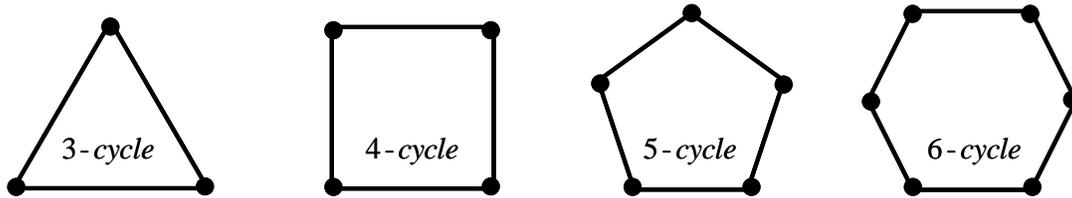
#### *k-cycle*

一個圖  $G$  是由一些點與邊所組合而成的結構，每一條邊都是建立在兩個不同的頂點上，我們將圖  $G$  所有的頂點視為一個集合  $V(G)$ ，將圖  $G$  所有的邊視為一個集合  $E(G)$ ，對於兩個不同的頂點  $u, v \in V(G)$ ，若存在一條邊連結頂點  $u, v$ ，則將此邊記為  $uv$ ，意即  $uv \in E(G)$ 。以左下圖  $G_1$  為例， $G_1$  的頂點集合為  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ ，邊集合為  $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ 。以右下圖  $G_2$  為例， $G_2$  的頂點集合為  $V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ，邊集合為  $E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_1u_3\}$ 。



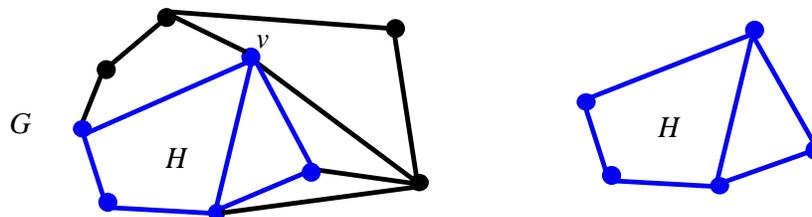
給定圖  $G$ ，若  $u \in V(G)$  且  $u$  與自己有邊相連 ( $uu \in E(G)$ )，則稱此邊為『迴圈 (loop)』；若  $u, v \in V(G)$  且  $u, v$  兩點之間有兩條以上邊，則稱  $u, v$  之間有『重邊 (multiple edges)』。若圖  $G$  的結構中沒有迴圈與重邊，則稱  $G$  為『簡單圖 (simple graph)』。以下我所討論的所有平面圖皆為連通的簡單圖。

若一個圖  $G$  的頂點與邊恰好形成一個環狀圖形，我們特別將此類型的圖稱為『圈 (cycle)』。上述的圖  $G_1$  即為一個圈，但圖  $G_2$  並不是一個圈。若一個圈的頂點數為  $k$ ，則稱此圈的长度為  $k$ 。上述的圖  $G_1$  即為长度為 3 的圈。對於长度為  $k$  的圈，我們稱之為『 $k$ -cycle』。下列圖形分別為 3-cycle、4-cycle、5-cycle、6-cycle 的圖形。



### 子圖 subgraph

給定圖  $G$ ，若刪除圖  $G$  中某些點或某些邊可得另一個結構較小的圖  $H$ ，則稱  $H$  為  $G$  的『子圖 (subgraph)』，意即  $H$  為  $G$  的內部子結構所形成的圖形。例如：參考左下圖  $G$ ，其中右下圖  $H$  即為  $G$  的一個子圖。



## 平面圖 *plane graph*

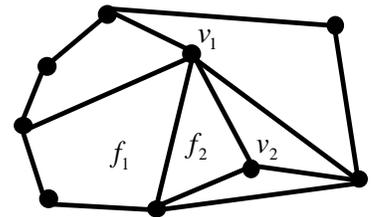
一個圖  $G$  若能存在一種畫法，能將其畫在平面上使其所有的邊都不相交，則我們稱圖  $G$  為『可平面化圖形 (*planar graph*)』。若  $G$  為平面上的圖，其中所有的邊都不相交，則稱此圖  $G$  為『平面圖 (*plane graph*)』。

一個平面圖  $G$  的結構包含了『點 *vertices*、邊 *edges*、面 *faces*』，我們分別用  $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $F(G)$  代表圖  $G$  的頂點集合、邊集合、面集合。在科普書籍常介紹有名的『歐拉定理』，描述了連通平面圖的定量特性，而歐拉定理即為放電論證法的基石，其定理敘述如下：

**歐拉定理：**對於任意連通的平面圖  $G$ ， $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$  恆成立。

## $k$ -vertex 與 $k$ -face

對於一般簡單圖  $G$ ，考慮頂點  $v \in V(G)$ ，若  $v$  恰與  $k$  個點有邊相連，則稱頂點  $v$  的『度數 (*degree*)』為  $k$ ，亦稱  $v$  為『 $k$ -vertex』，並記為『 $d_G(v) = k$ 』。此外，將  $G$  的頂點中最小的度數記為『 $\delta(G)$ 』，意即  $\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$ 。特別對於平面圖  $G$ ，考慮面  $f \in F(G)$ ，若  $f$  的周邊共有  $k$  條邊，則稱面  $f$  的度數為  $k$ ，亦稱  $f$  為『 $k$ -face』，並記為『 $d_G(f) = k$ 』。

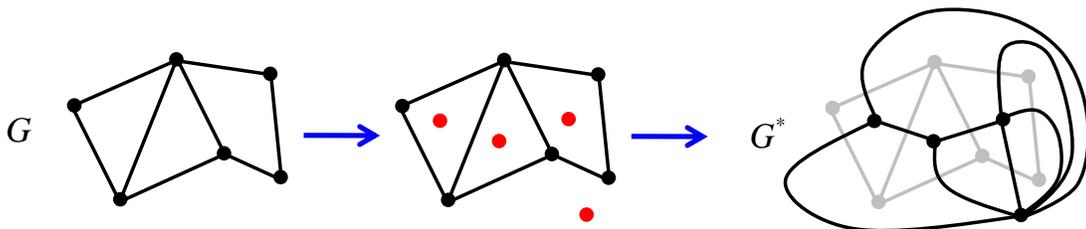


此外，考慮所有與  $v$  相鄰的頂點所形成的集合，記為『 $N_G(v)$ 』。換句話說  $|N_G(v)| = d_G(v)$ 。

例如：考慮右圖  $G$ ， $v_1$  為  $5$ -vertex， $v_2$  為  $3$ -vertex， $f_1$  為  $4$ -face， $f_2$  為  $3$ -face。

## 對偶圖 *dual graph*

給定一個平面圖  $G$ ，令  $G^*$  是由  $G$  所建構的另一個平面圖，其中  $V(G^*) = \{f : f \in F(G)\}$ ；此外，對任意  $f_1, f_2 \in V(G^*)$ ，若在  $G$  中面  $f_1$  與面  $f_2$  恰有  $k$  條共同邊，等價於在  $G^*$  中點  $f_1$  與點  $f_2$  之間恰有  $k$  條邊，則稱平面圖  $G^*$  為  $G$  的『對偶圖 (*dual graph*)』。



由於平面圖  $G$  與其對偶圖  $G^*$  具備『面』與『點』的對應關係，若  $f$  為  $G$  中的面，則  $f$  即為  $G^*$  中的點，意即  $f \in F(G) \Leftrightarrow f \in V(G^*)$ 。因此同一個符號  $f$  在  $G$  與  $G^*$  中，將各自扮演不同的角色。為了不造成符號上的誤解，後續的證明過程中，對於符號  $f$ ，我們將區分是在  $G$  或  $G^*$  中。

### 有向圖 *directed graph*

給定一個圖  $G$ ，若將  $G$  所有的邊賦予方向性，則所得的圖形稱為『有向圖 (*directed graph*)』。將此有向圖記為  $D$ ，其中有向圖  $D$  的頂點  $V(D) = V(G)$ ，若  $u, v \in V(D)$ ，且在  $D$  中有向邊為  $u$  指向  $v$ ，則將此有向邊記為序對『 $(u, v) \in E(D)$ 』，而  $E(D)$  即為  $D$  中有向邊所形成的集合。此外，對於  $u \in V(D)$ ，在有向圖  $D$  中考慮所有  $u$  指出去的有向邊，其中將  $u$  指向的點所形成的點集合記為『 $N_D^+(u)$ 』，意即  $N_D^+(u) = \{v \in V(D) : (u, v) \in E(D)\}$ 。



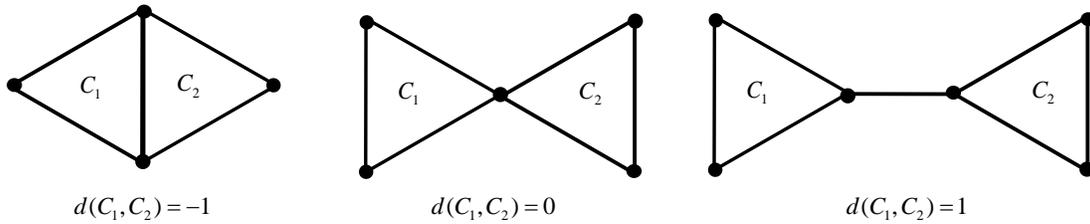
### 圈與圈的距離

給定一個圖  $G$ ，令  $u, v \in V(G)$ ，若在  $G$  中存在一條路徑連接  $u, v$  兩點，則稱此路徑為『 $uv$ -path』，並可記為『 $P_{uv}$ 』。給定一個圖  $G$ ，令圈  $C$  與圈  $C'$  皆為  $G$  的子圖。考慮  $u \in V(C)$ 、 $v \in V(C')$ ，若  $u, v$  之間所有連通路徑中所用到的邊數最少為  $k$ ，則稱  $u, v$  兩點間的距離為  $k$ ，並記為『 $d(u, v) = k$ 』。對於圈  $C$  與圈  $C'$  我們亦可定義兩個圈的距離  $d(C, C')$ ，定義方式為：

$$d(C, C') = \min \{k : d(u, v) = k, \forall u \in C, \forall v \in C'\}。$$

特殊情況，若圈  $C$  與圈  $C'$  有共同邊，則定義  $d(C, C') = -1$ 。

- 例如：(1) 若  $C_1, C_2$  皆為兩個 3-cycle，且  $C_1, C_2$  有共同邊，則  $d(C_1, C_2) = -1$ 。  
 (2) 若  $C_1, C_2$  皆為兩個 3-cycle，且  $C_1, C_2$  恰交於一點，則  $d(C_1, C_2) = 0$ 。  
 (3) 若  $C_1, C_2$  皆為兩個 3-cycle，且  $C_1, C_2$  如右下圖所示，則  $d(C_1, C_2) = 1$ 。



特別的，在一個圖  $G$  中，考量所有 3-cycle 之間的最短距離，將此最短距離記為『 $d_{\Delta}$ 』。考量所有 4-cycle 之間的最短距離，將此最短距離記為『 $d_{\square}$ 』。

給定平面圖  $G$ ，若  $f, f' \in F(G)$  且  $f$  與  $f'$  的邊界有共同的邊，則稱  $f$  與  $f'$  『相鄰』。考慮  $v \in V(G)$ ， $f \in F(G)$ ，若  $v$  為  $f$  的邊界上的點，則稱頂點  $v$  與面  $f$  『相鄰』。

### 圖的著色數

給定圖  $G$ ，其頂點集合為  $V(G)$ ，給定函數  $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，若對任意的邊  $uv \in E(G)$ ，函數  $f$  皆滿足  $f(u) \neq f(v)$ ，則稱函數  $f$  為圖  $G$  的一個『著色函數 (proper coloring)』。若存在函數  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  為圖  $G$  的著色函數，則稱  $G$  為『可  $k$  著色』或『 $k$ -colorable』，同時稱函數  $f$  為『 $k$  著色函數 ( $k$ -coloring)』。不難得知，若圖  $G$  是  $k$ -colorable，則  $G$  必然也為  $(k+1)$ -colorable。對任意的圖  $G$ ，可知  $G$  必然為  $|V(G)|$ -colorable。因此對於圖形的著色問題，我們好奇的是：能使得  $G$  是  $k$ -colorable 的最小自然數  $k$  為何？若  $k$  為最小自然數能使得圖  $G$  是  $k$ -colorable，則稱  $k$  為  $G$  的『著色數 (chromatic number)』，並以符號記為『 $\chi(G)$ 』。意即， $\chi(G) = \min \{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是 } k\text{-colorable}\}$ 。

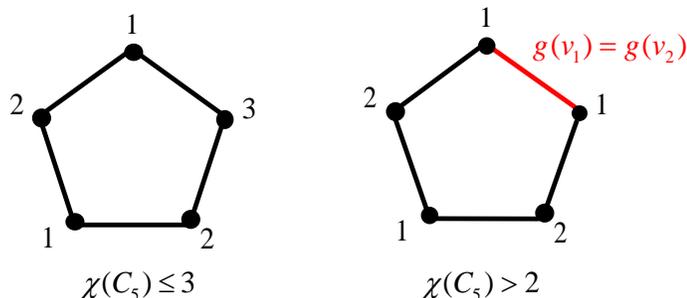
根據著色數的定義可知，若要證明  $\chi(G) = k$ ，首先要說明圖  $G$  是  $k$ -colorable ( $\chi(G) \leq k$ )，再進一步說明  $G$  不是  $(k-1)$ -colorable ( $\chi(G) > k-1$ )。

例如：考慮長度為 5 的圈  $C_5$ ，令頂點集合為  $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ，邊集合為

$$E(C_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}。考慮函數  $f: V(C_5) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ，其中$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{當 } i = 1, 3 \\ 2 & \text{當 } i = 2, 4, \text{ 則不難檢驗 } f \text{ 確實為圈 } C_5 \text{ 的著色函數, 故 } C_5 \text{ 是 } 3\text{-colorable}。 \\ 3 & \text{當 } i = 5 \end{cases}$$

進一步考慮函數  $g: V(C_5) \rightarrow \{1, 2\}$ ，不失一般性可假設  $g(v_1) = 1$ ，根據著色規則必須滿足相鄰頂點不同色，依序可知  $g(v_2) = 2$ 、 $g(v_3) = 1$ 、 $g(v_4) = 2$ ，則  $g(v_5) = 1 = g(v_1)$ ，此與  $v_1v_5 \in E(C_5)$  矛盾，可知  $C_5$  不是  $2$ -colorable，故  $\chi(C_5) = 3$ 。



對於一些特殊類型的圖形，如：完全圖、二部圖、圈等類型的著色數皆已被完整的刻畫。特別對於平面圖的著色數，有名的四色猜想在 1976 年由 Appel 與 Haken 將其提升為『四色定理』，更是近代數學的重大數學定理之一，其定理敘述如下：

**四色定理：**對於任意平面圖  $G$ ， $G$  必為  $4$ -colorable，意即  $\chi(G) \leq 4$ 。

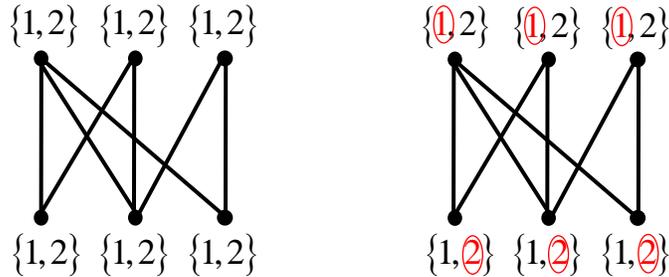
### 列表著色數

令  $2^{\mathbb{N}}$  為所有自然數的子集合所形成的集合，對於圖  $G$ ，考慮函數  $L: V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，我們稱函數  $L$  為圖  $G$  的『顏色列表函數 (list assignment)』。對於  $v \in V(G)$ ， $L(v)$  稱為頂點  $v$  的『顏色列表 (color list)』。給定顏色列表函數  $L$ ，若圖  $G$  存在著色函數  $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $f(v) \in L(v)$ ，則稱此著色函數  $f$  為圖  $G$  的一個『 $L$  列表著色 ( $L$ -coloring)』。

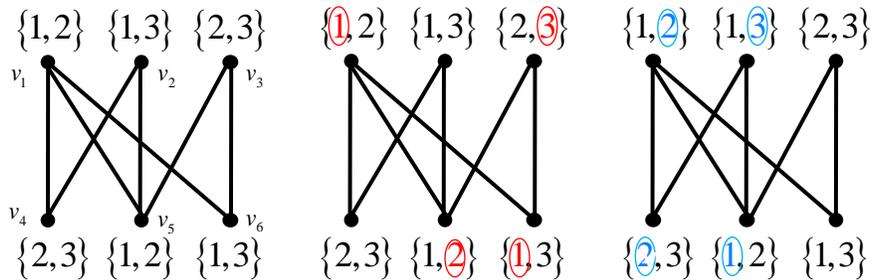
給定圖  $G$ ，任意給定顏色列表函數  $L$ ，其中對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $|L(v)| = k$ ，則稱此顏色列表函數為『 $k$  元列表函數 ( $k$ -list)』。若對於任意  $k$  元列表函數  $L$ ，圖  $G$  皆可存在  $L$ -coloring，則稱圖  $G$  為『可  $k$  元列表著色 ( $k$ -choosable)』。若  $k$  為最小的自然數，使得圖  $G$  為  $k$ -choosable，則稱圖  $G$  的『列表著色數 (choosability)』為  $k$ ，並記為『 $\chi_\ell(G) = k$ 』。意即  $\chi_\ell(G) = \min \{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是 } k\text{-choosable}\}$ 。列表著色的概念是由俄羅斯數學家 Vizing 首度提出，同時

Erdős, Rubin 與 Taylor 等學者亦將此概念獨立發表於期刊論文中。

例如：考慮左下圖，其中顏色列表為  $L(v) = \{1, 2\}$ ， $\forall v \in V(G)$ 。若將上排的頂點都標記為顏色 1，下排顏色都標記為顏色 2，則對於這個顏色列表函數  $L$ ，我們很容易找到相對應的  $L$ -coloring（如右下圖所示）。



例如：考慮左下圖，其中顏色列表函數  $L$  即為頂點旁的集合所示。考慮列表著色函數  $f$ ，若  $f(v_1) = 1$ ，則依序使得  $f(v_5) = 2$ 、 $f(v_3) = 3$ 、 $f(v_6) = 1$ ，此與  $v_1v_6 \in E(G)$  矛盾。此外，若  $f(v_1) = 2$ ，則依序使得  $f(v_5) = 1$ 、 $f(v_2) = 3$ 、 $f(v_4) = 2$ ，此與  $v_1v_4 \in E(G)$  矛盾。由此可知，在這個顏色列表函數  $L$  中，不存在  $L$ -coloring。



對於上述二部圖  $G$ ，不難得知其著色數  $\chi(G) = 2$ ，但由上述討論可知，因為存在一個 2 元列表函數  $L$ （2-list），使得  $G$  不存在  $L$ -coloring，所以上述二部圖  $G$  的列表著色數  $\chi_\ell(G) > 2$ ，因此  $\chi_\ell(G) \geq 3 > \chi(G)$ 。事實上從定義即可知，列表著色數  $\chi_\ell(G)$  的要求比起一般著色數  $\chi(G)$  嚴格許多，因此對於一般圖形而言，列表著色數總是不小於一般著色數。

對於任意圖  $G$ ， $\chi(G) \leq \chi_\ell(G)$ 。

事實上，Paul Erdős 等人的研究指出，對於任意自然數  $k \in \mathbb{N}$ ，皆存在一個二部圖  $G$  使得  $\chi_\ell(G) - \chi(G) \geq k$ 。這表示列表著色數與一般著色數可以有相當大的差距。

完全二部圖的列表著色：對任意自然數  $k$ ，若  $m = \binom{2k-1}{k}$ ，則完全二部圖  $K_{m,m}$ ， $\chi_\ell(K_{m,m}) > k$ 。

對於一般圖  $G$ ，若考慮  $G$  的子圖  $H$ ，則一般著色數與列表著色數皆有著必然的大小關係。

著色數子圖關係：對於任意圖  $G$ ，若  $H$  為  $G$  的子圖，則  $\chi(H) \leq \chi(G)$ 。

列表著色數子圖關係：對於任意圖  $G$ ，若  $H$  為  $G$  的子圖，則  $\chi_\ell(H) \leq \chi_\ell(G)$ 。

相對於平面圖的四色定理，列表著色數在平面圖的範疇中亦有相對應的研究結果：

列表著色的五色定理：對於任意平面圖  $G$ ， $G$  必為  $5$ -choosable，意即  $\chi_\ell(G) \leq 5$ 。

### Choosability 已知文獻

Paul Erdős 等人已將所有  $2$ -choosable 的圖形完全的刻畫了。Thomassen 證明了所有平面圖皆為  $5$ -choosable。Voigt 設計了一個非  $4$ -choosable 的平面圖。因此如何判斷一個平面圖是否為  $3$ -choosable 或  $4$ -choosable 自然成為眾多學者們研究的課題。Gutner 證明了判斷一個平面圖是否為  $4$ -choosable 是 NP-hard 問題，這意謂著滿足  $4$ -choosable 的平面圖類型難以刻畫。

NP-hard：判斷平面圖  $G$  是否為  $4$ -choosable 是 NP-hard 問題。

在眾多的參考文獻中可知，若平面圖的結構中不存在某些特定長度較小的圈，則平面圖即可為  $4$ -choosable。對於平面圖為  $4$ -choosable 的充分條件已有下列的結果：

已知定理：若平面圖  $G$  不存在  $3$ -cycle，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  不存在  $4$ -cycle，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  不存在  $5$ -cycle，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  不存在  $6$ -cycle，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  不存在  $7$ -cycle，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  滿足  $d_\Delta \geq 1$ ，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

若平面圖  $G$  中任意  $3$ -cycle 與  $4$ -cycle 皆不相鄰，則  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

由上述文獻結果可知，探討平面圖為 4-choosable 的充分條件大多著墨在『圈的存在性』、『圈與圈的距離』以及『圈與圈的相鄰關係』，整體而言就是探討『長度較小圈的分布狀況』。以下我們的研究將針對上述定理進行推廣，在允許平面圖存在  $k$ -cycle，其中  $3 \leq k \leq 7$  的情況下，綜合分析平面圖中圈的分布狀況，對於平面圖是否為 4-choosable，探討更廣泛的充分條件。

## 二、特殊子圖結構

在說明本文主要的研究結果之前，對於平面圖，首先我們先探討下列四個重要的結構。

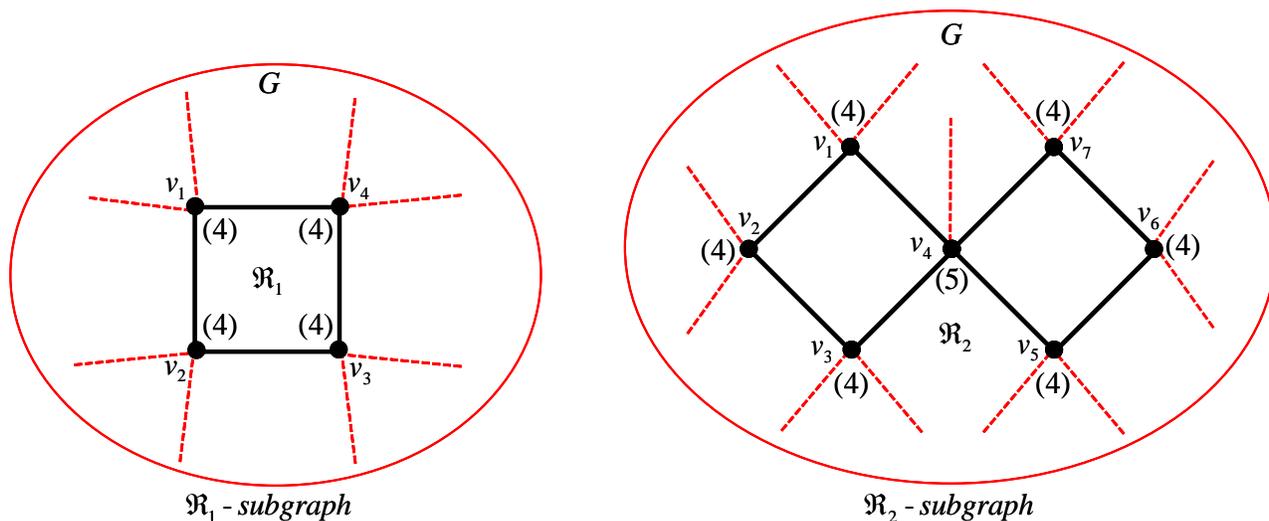
### $\mathcal{R}_1$ -subgraph、 $\mathcal{R}_2$ -subgraph、 $H_G$ 與 $D_G$

給定平面圖  $G$ 。令  $\mathcal{R}_1$  的頂點為  $V(\mathcal{R}_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊為  $E(\mathcal{R}_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ 。若  $G$  包含  $\mathcal{R}_1$  為子圖且  $d_G(v_i) = 4$ ，其中  $i = 1, 2, 3, 4$ ，則稱  $\mathcal{R}_1$  為  $G$  的『 $\mathcal{R}_1$ -subgraph』，如左下圖所示。

令  $\mathcal{R}_2$  的頂點為  $V(\mathcal{R}_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ，邊為  $E(\mathcal{R}_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_1v_4, v_4v_7\}$ 。

若  $G$  包含  $\mathcal{R}_2$  為子圖且  $d_G(v_i) = \begin{cases} 4 & \text{當 } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7 \\ 5 & \text{當 } i = 4 \end{cases}$ ，則稱  $\mathcal{R}_2$  為  $G$  的『 $\mathcal{R}_2$ -subgraph』，如右下圖

所示。



上述特殊子結構  $\mathcal{R}_1$ -subgraph 與  $\mathcal{R}_2$ -subgraph 在主要定理的證明中將扮演重要的角色。以下我們探討在特殊的顏色列表函數中， $\mathcal{R}_1$  與  $\mathcal{R}_2$  的列表著色引理。

**Lemma 1 :** 令圖  $\mathfrak{R}_1$  的頂點集合為  $V(\mathfrak{R}_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊集合為  $E(\mathfrak{R}_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$

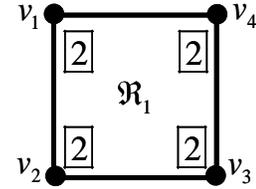
(如右下圖所示)。令  $L: V(\mathfrak{R}_1) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  為顏色列表函數， $|L(v_i)| \geq 2$ ，其中  $i=1, 2, 3, 4$ ，則  $\mathfrak{R}_1$  必定存在  $L$ -coloring。

**【證明】:**

假設  $L(v_2) \cap L(v_4) \neq \emptyset$ ，則存在  $a \in L(v_2) \cap L(v_4)$ 。

令  $f(v_2) = f(v_4) = a$ 、 $f(v_1) \in L(v_1) \setminus \{a\}$  且  $f(v_3) \in L(v_3) \setminus \{a\}$ 。

可知  $f$  即為  $\mathfrak{R}_1$  的  $L$ -coloring。



假設  $L(v_2) \cap L(v_4) = \emptyset$ 。

若  $L(v_1) \cap L(v_4) = \emptyset$ ，則可依序著色  $f(v_1) \in L(v_1)$ 、 $f(v_2) \in L(v_2) \setminus \{f(v_1)\}$ 、 $f(v_3) \in L(v_3) \setminus \{f(v_2)\}$ 、 $f(v_4) \in L(v_4) \setminus \{f(v_3)\}$ 。因為  $f(v_1) \notin L(v_4)$ ，所以可確認  $f(v_1) \neq f(v_4)$ 。故  $f$  即為  $\mathfrak{R}_1$  的  $L$ -coloring。

若  $L(v_1) \cap L(v_4) \neq \emptyset$ ，則存在  $a \in L(v_1) \cap L(v_4)$ ，可知  $a \notin L(v_2)$ 。

可依序著色  $f(v_1) = a$ 、 $f(v_4) \in L(v_4) \setminus \{a\}$ 、 $f(v_3) \in L(v_3) \setminus \{f(v_4)\}$ 、 $f(v_2) \in L(v_2) \setminus \{f(v_3)\}$ 。

因為  $f(v_1) = a \notin L(v_2)$ ，所以可確認  $f(v_1) \neq f(v_2)$ 。故  $f$  即為  $\mathfrak{R}_1$  的  $L$ -coloring。

綜合上述討論可知， $\mathfrak{R}_1$  必定存在  $L$ -coloring。 ■

**Lemma 2 :** 令圖  $\mathfrak{R}_2$  的頂點集合為  $V(\mathfrak{R}_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ，邊集合為

$E(\mathfrak{R}_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_1v_4, v_4v_7\}$  (如右下圖所示)。令  $L: V(\mathfrak{R}_2) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$

為顏色列表函數，其中  $\begin{cases} |L(v_i)| \geq 2 & \text{當 } i=1, 2, 3, 5, 6, 7 \\ |L(v_i)| \geq 3 & \text{當 } i=4 \end{cases}$ ，則  $\mathfrak{R}_2$  必定存在  $L$ -coloring。

**【證明】:**

令頂點  $v_1, v_2, v_3, v_4$  所形成的子圖為  $\mathfrak{R}_2'$ 。

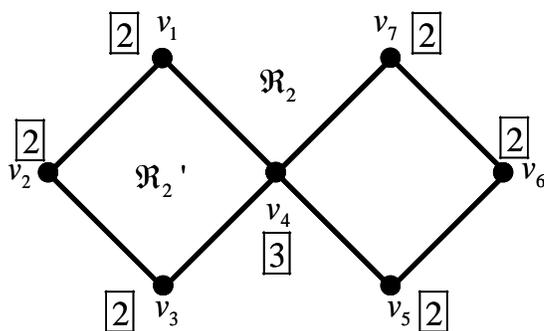
假設  $L(v_3) \cap L(v_7) \neq \emptyset$ ，則存在  $a \in L(v_3) \cap L(v_7)$ 。

考慮  $L': V(\mathfrak{R}_2) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，

$$\text{其中 } L'(v_i) = \begin{cases} L(v_i) & \text{當 } i=1,2,3 \\ L(v_i) \setminus \{a\} & \text{當 } i=4 \end{cases}。$$

根據 Lemma1 可知，存在函數  $f'$  為  $\mathfrak{R}_2'$  的  $L'$ -coloring。

$$\text{令 } b \in L(v_6) \setminus \{a\}，\text{ 定義函數 } f(v_i) = \begin{cases} a & \text{當 } i=5,7 \\ b & \text{當 } i=6 \\ f'(v_i) & \text{當 } i=1,2,3,4 \end{cases}。 \text{ 可知 } f \text{ 即為 } \mathfrak{R}_2 \text{ 的 } L\text{-coloring}。$$



假設  $L(v_3) \cap L(v_7) = \emptyset$ 。

根據 Lemma1 可知，存在函數  $f'$  為  $\mathfrak{R}_2'$  的  $L$ -coloring。不失一般性，假設  $f'(v_4) \notin L(v_7)$ 。

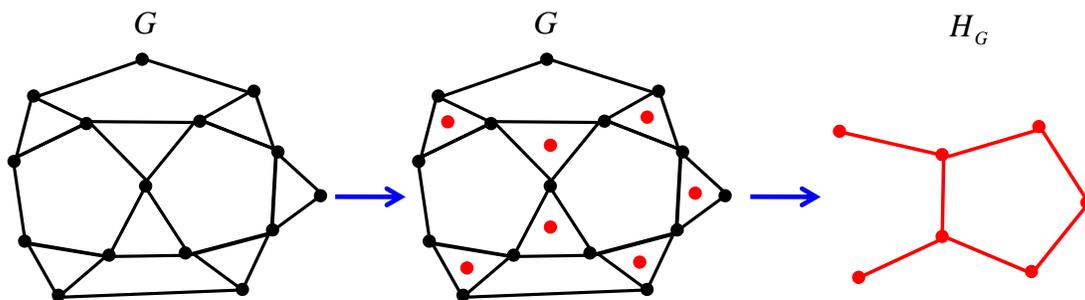
$$\text{令 } a \in L(v_5) \setminus \{f'(v_4)\}、b \in L(v_6) \setminus \{a\}、c \in L(v_7) \setminus \{b\}，\text{ 定義函數 } f(v_i) = \begin{cases} a & \text{當 } i=5 \\ b & \text{當 } i=6 \\ c & \text{當 } i=7 \\ f'(v_i) & \text{當 } i=1,2,3,4 \end{cases}。$$

因為  $f(v_4) = f'(v_4) \notin L(v_7)$ ，所以  $f(v_4) \neq f(v_7)$ 。可知  $f$  即為  $\mathfrak{R}_2$  的  $L$ -coloring。

綜合上述討論可知， $\mathfrak{R}_2$  必定存在  $L$ -coloring。 ■

### 3-cycle 生成特殊子圖 $H_G$

為了描述 3-cycle 在平面圖中的分布狀況，根據平面圖  $G$  的結構，我們設計另一個圖  $H_G$ ，其中  $H_G$  的頂點為  $V(H_G) = \{C : C \text{ 是 } G \text{ 中的 } 3\text{-cycle}\}$ ， $E(H_G) = \{C_i C_j : C_i \text{ 與 } C_j \text{ 為 } G \text{ 的 } 3\text{-cycle 且 } C_i \text{ 與 } C_j \text{ 有共同頂點}\}$ 。意即  $H_G$  是由  $G$  中所有 3-cycle 所衍生而成的特殊圖形。



### 對偶圖中的有向子圖 $D_G$

在後續的放電論證法中，為了記錄面與面之間的放電過程，給定平面圖  $G$ ，令  $G^*$  為  $G$  的對偶圖，我們根據下列步驟，在  $G^*$  上逐步建構一個有向子圖，其建構的步驟如下：

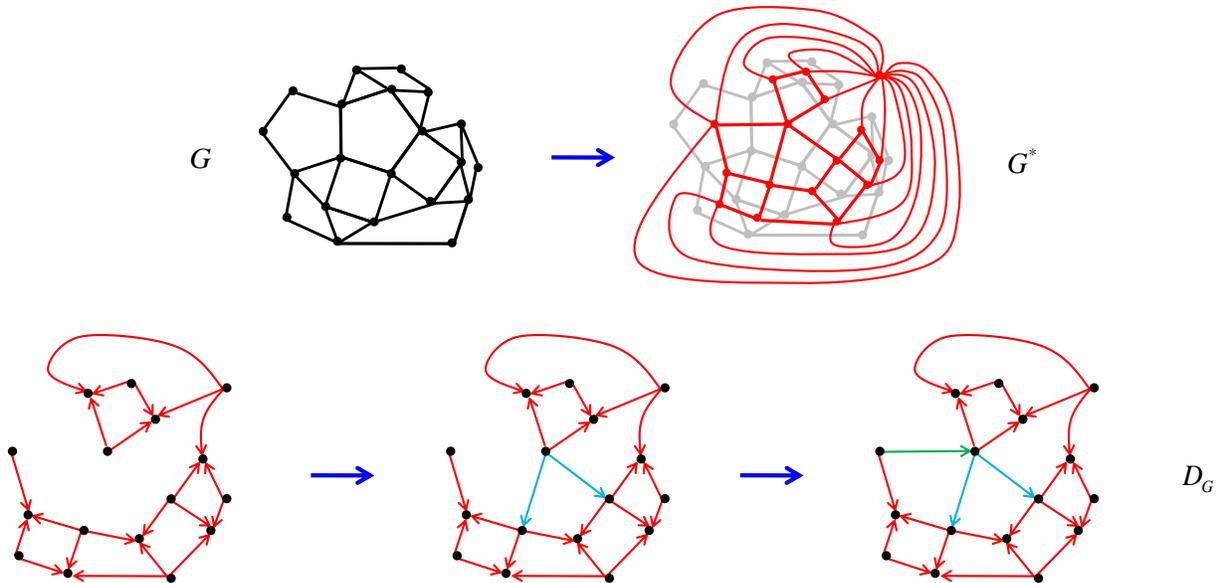
( Step-1 )：若  $f \in V(G^*)$ ，且  $d_{G^*}(f) = 3$ ，則對所有  $f' \in N_{G^*}(f)$ ，建立  $f'$  指向  $f$  的有向邊。

( Step-2 )：若  $f \in V(G^*)$ ， $d_{G^*}(f) = 4$ ， $N_{G^*}(f) = \{f_1, f_2, f_3, f'\}$  且有向邊中  $f$  已指向  $f_1, f_2, f_3$ ，則建立  $f'$  指向  $f$  的有向邊。

( Step-3 )：若  $f \in V(G^*)$ ， $d_{G^*}(f) = 5$ ， $N_{G^*}(f) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f'\}$  且有向邊中  $f$  已指向  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ，則建立  $f'$  指向  $f$  的有向邊。

( Step-4 )：若 Step-2 與 Step-3 中皆無新增有向邊，則停止建立有向邊。若 Step-2 或 Step-3 中有新增有向邊，則重複依序執行 Step-2、Step-3 與 Step-4。

根據上述四個步驟，我們可以獲得  $G^*$  中的一個有向子圖，將其記為 『  $D_G$  』。



### 三、最小反例的性質

對於平面圖為  $4$ -choosable 的研究，以下即為本文的主要定理，我們設計了充分條件，欲利用反證法證明下列定理：

**Theorem**：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1)  $d_{\Delta} \geq 0$ ；
- (2)  $d_{\square} \geq 0$ ；
- (3)  $H_G$  不包含 cycle；

則平面圖  $G$  必為  $4$ -choosable。

假設上述定理有誤，將存在眾多的反例，在這些反例當中，必存在頂點數最少的反例  $G$ ，我們將頂點數最少的反例  $G$  稱為『最小反例』。由於  $G$  是最小反例，所以  $G$  是滿足條件 (1)~(3) 的平面圖，但  $G$  不是  $4$ -choosable。換句話說，存在一個顏色列表函數  $L:V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，滿足  $\forall v \in V(G), |L(v)|=4$ ，但  $G$  不存在  $L$ -coloring。我們進行分析最小反例  $G$  的特性，以下先說明下列引理：

**Lemma 3**：若  $G$  是最小反例，則  $G$  必包含  $k$ -cycle，其中  $3 \leq k \leq 7$ 。

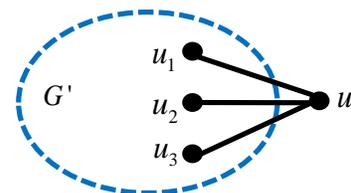
**【證明】**：

根據參考文獻中已知的定理，可知若存在自然數  $k \in \{3,4,5,6,7\}$  使得平面圖不包含  $k$ -cycle，則此平面圖必為  $4$ -choosable。故最小反例  $G$  必包含  $k$ -cycle， $\forall k \in \{3,4,5,6,7\}$ 。 ■

**Lemma 4**：若  $G$  是最小反例，則對任意  $u \in V(G)$ ， $d_G(u) \geq 4$  恆成立，意即  $\delta(G) \geq 4$ 。

**【證明】**：

假設  $\delta(G) \leq 3$ ，則存在  $u \in V(G)$  使得  $d_G(u) \leq 3$ 。



若  $d_G(u) = 3$ ，其中  $u$  相連的點為  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 。

令  $G'$  為  $G$  刪除  $u$  後所得的子圖，則  $G'$  不再是反例，因此存在函數  $f'$  為  $G'$  的  $L$ -coloring。

因為  $|L(u)|=4$ ，所以存在  $a \in L(u) \setminus \{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}$ 。

進一步定義  $f(v) = \begin{cases} a & \text{當 } v = u \\ f'(v) & \text{當 } v \in V(G') \end{cases}$ ，則  $f$  即為  $G$  的  $L$ -coloring，此與  $G$  是最小反例矛盾。

同理，若  $d_G(u) = 1, 2$  時，皆與  $G$  是最小反例矛盾。

因此  $\delta(G) \geq 4$ 。

**Lemma 5**：若  $G$  是最小反例，則  $G$  必不包含  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph 與  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph。

**【證明】**：

令  $G$  為最小反例，則存在一個 4 元列表函數  $L:V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，使得  $G$  不存在  $L$ -coloring。

假設  $G$  包含  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph，令  $\mathfrak{R}_1$  的頂點為  $V(\mathfrak{R}_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊為  $E(\mathfrak{R}_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ 。

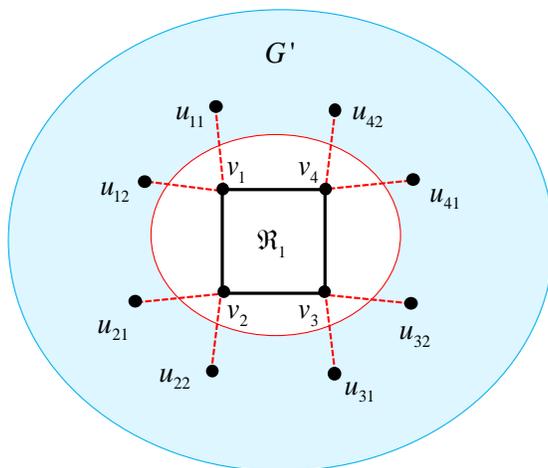
令  $G'$  為  $G$  刪除  $V(\mathfrak{R}_1)$  後所得的子圖 ( $G' = G - V(\mathfrak{R}_1)$ )，因為  $|V(G')| < |V(G)|$ ，且  $G'$  亦滿足主要定理中的條件 (1)~(3)，所以  $G'$  不為反例，因此存在函數  $f'$  為  $G'$  的  $L$ -coloring。對於  $i = 1, 2, 3, 4$ ，

已知  $d_G(v_i) = 4$ ，令  $V(G')$  中與  $v_i$  相連的點為  $u_{i1}, u_{i2}$ ，且  $L^*(v_i) = L(v_i) \setminus \{f'(u_{i1}), f'(u_{i2})\}$

。因為  $|L(v_i)|=4$ ，所以  $|L^*(v_i)| \geq 2$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ 。根據 Lemma 1，可知存在函數  $f^*$  為  $\mathfrak{R}_1$  的

$L^*$ -coloring。定義函數  $f(v) = \begin{cases} f'(v) & \text{當 } v \in V(G') \\ f^*(v) & \text{當 } v \in V(\mathfrak{R}_1) \end{cases}$ ，因為  $f^*(v_i) \notin \{f'(u_{i1}), f'(u_{i2})\}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ ，

故函數  $f$  即為  $G$  的  $L$ -coloring。



假設  $G$  包含  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph，令  $\mathfrak{R}_2$  的頂點為  $V(\mathfrak{R}_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ，邊集合為

$$E(\mathfrak{R}_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_1v_4, v_4v_7\} \circ$$

令  $G'$  為  $G$  刪除  $V(\mathfrak{R}_2)$  後所得的子圖 ( $G' = G - V(\mathfrak{R}_2)$ )，因為  $|V(G')| < |V(G)|$ ，且  $G'$  亦滿足主要定理中的條件 (1) ~ (3)，所以  $G'$  不為反例，因此存在函數  $f'$  為  $G'$  的  $L$ -coloring。

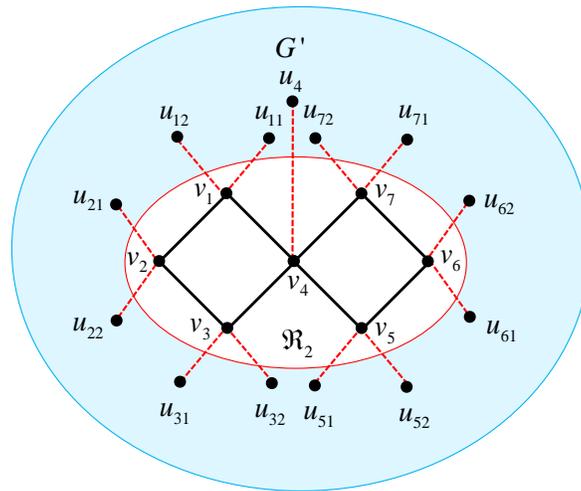
因為  $d_G(v_i) = \begin{cases} 4 & \text{當 } i=1,2,3,5,6,7 \\ 5 & \text{當 } i=4 \end{cases}$ ，對於  $i=1,2,3,5,6,7$ ，令  $V(G')$  中與  $v_i$  相連的點為  $u_{i1}$ 、 $u_{i2}$ ，且

$$L^*(v_i) = L(v_i) \setminus \{f'(u_{i1}), f'(u_{i2})\}；此外，令  $V(G')$  中與  $v_4$  相連的點為  $u_4$ ，且  $L^*(v_4) = L(v_4) \setminus \{f'(u_4)\}$$$

。因為  $|L(v_i)| = 4$ ，所以  $\begin{cases} |L^*(v_i)| \geq 2 & \text{當 } i=1,2,3,5,6,7 \\ |L^*(v_i)| \geq 3 & \text{當 } i=4 \end{cases}$ 。根據 Lemma 2，可知存在函數  $f^*$  為  $\mathfrak{R}_2$  的

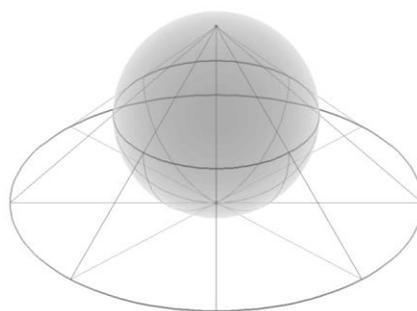
$L^*$ -coloring。定義函數  $f(v) = \begin{cases} f'(v) & \text{當 } v \in V(G') \\ f^*(v) & \text{當 } v \in V(\mathfrak{R}_2) \end{cases}$ ，因為  $f^*(v_i) \notin \{f'(u_{i1}), f'(u_{i2})\}$ ，

$i=1,2,3,5,6,7$ ，且  $f^*(v_4) \neq f'(u_4)$ ，故函數  $f$  即為  $G$  的  $L$ -coloring。

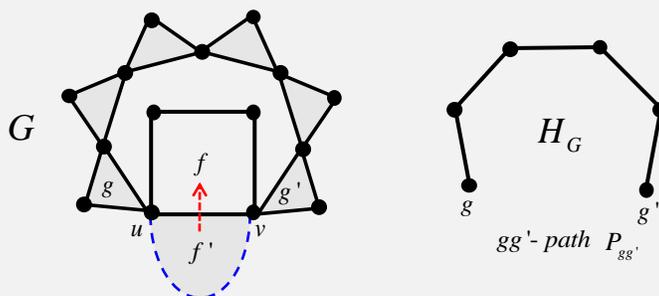


以上討論可知，不論  $G$  包含  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph 或  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph，將皆與  $G$  為最小反例矛盾。因此最小反例  $G$  必不包含  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph 或  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph。 ■

每一個平面圖皆可以將圖形鑲嵌在一個球面上，使其沒有相交的邊。此外，給定球面上的平面圖，若選定一個面將其撐開，亦可將球面上的平面圖鑲嵌在一個無限延伸的平面上（球極平面投影）。為了更精確描述最小反例的結構性質，我們從最小反例  $G$  中選定一個面，將其撐開後鑲嵌在無限延伸的平面上。下列 **Lemma 6** 的敘述即是建立在此環境下。



**Lemma 6**：令  $G$  是最小反例，在  $D_G$  中，若  $f, f' \in V(D_G)$ ， $(f', f) \in E(D_G)$ ，且在  $G$  中面  $f$  與面  $f'$  相鄰的邊為  $uv \in E(G)$ ，則在  $H_G$  中必存在一條  $gg'$ -path  $P_{gg'}$ ，其中  $P_{gg'}$  在  $G$  中對應的 3-*face* 與面  $f'$  將包圍面  $f$ ，且在  $G$  中點  $u$  與面  $g$  相鄰，點  $v$  與面  $g'$  相鄰。

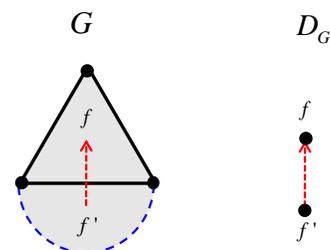


**【證明】：**

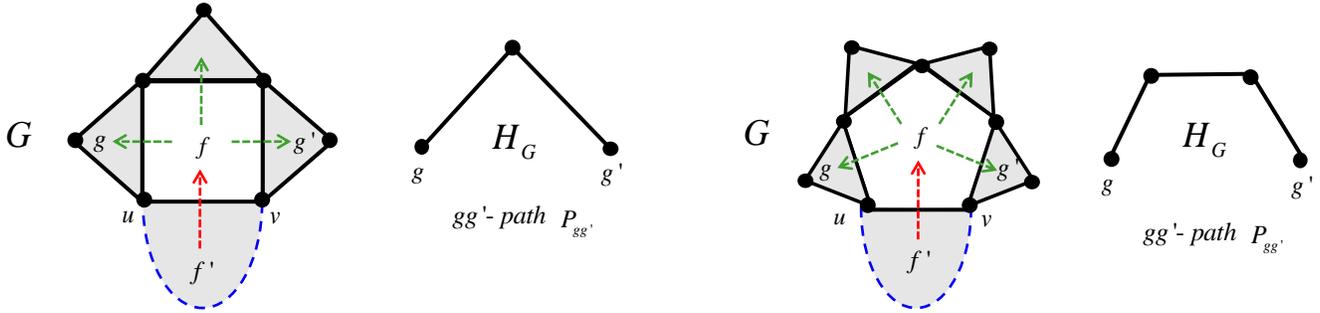
根據  $D_G$  的建構步驟，依序執行 *Step-1*、*Step-2*、*Step-3* 與 *Step-4*，可知  $D_G$  中的有向邊為一組一組的逐步增加，可能一次增加許多有向邊。將第  $i$  組新增的有向邊集合記為  $E_i(D_G)$ ，其中  $i \in \mathbb{N}$ ，故  $E(D_G) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i(D_G)$ 。根據 *Step-1* 可知，若  $(f', f) \in E_1(D_G)$ ，則  $f$  在  $G$  中必為 3-*face*；此外，由 *Step-2* 與 *Step-3* 可知，若  $(f', f) \in E_i(D_G)$ ，其中  $i \neq 1$ ，則  $f$  在  $G$  中必為 4-*face* 或 5-*face*。

以下我們將利用數學歸納法證明：『對任意自然數  $i \geq 1$ ，若  $(f', f) \in E_i(D_G)$ ，則引理命題中的情況必成立』。

當  $i = 1$  時，根據 *Step-1* 可知，若  $(f', f) \in E_1(D_G)$ ，則  $f$  在  $G$  中必為 3-*face*。意即  $f$  在  $H_G$  中為一個單點  $f \in V(H_G)$ ，此單點亦可視為一條  $ff$ -*path* 滿足引理結論。

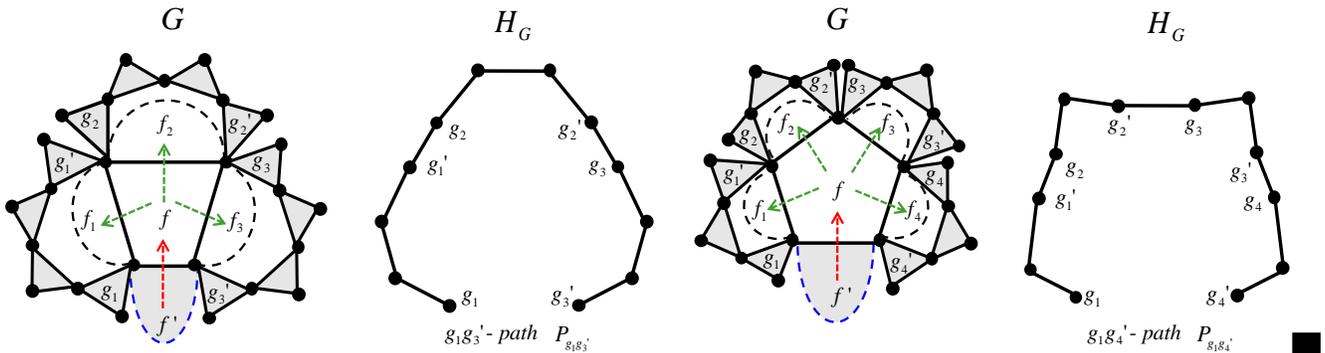


當  $i=2$  時，考慮  $(f', f) \in E_2(D_G)$ ，根據 Step-2 與 Step-3 可知，若  $f$  在  $G$  中必為  $k$ -face，其中  $k \in \{4, 5\}$ ，則  $f$  在  $G$  中必恰與  $k-1$  個 3-face 相鄰，而此  $k-1$  個 3-face 在  $H_G$  中形成一條  $gg'$ -path  $P_{gg'}$ ，滿足結論。



假設  $i=1 \sim t$  時，命題皆成立。

當  $i=t+1$  時，若  $(f', f) \in E_{t+1}(D_G)$ ，則  $f$  在  $G$  中必為 4-face 或 5-face。若  $f$  在  $G$  中為 4-face，則根據 Step-2 可知  $(f, f_1) \in E_{j_1}(D_G)$ 、 $(f, f_2) \in E_{j_2}(D_G)$ 、 $(f, f_3) \in E_{j_3}(D_G)$ ，其中  $f_1, f_2, f_3$  在  $G$  中皆與  $f$  相鄰，且  $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq t$ 。根據歸納法假設可知，在  $H_G$  中必存在  $g_1g_1'$ -path  $P_{g_1g_1'}$ 、 $g_2g_2'$ -path  $P_{g_2g_2'}$ 、 $g_3g_3'$ -path  $P_{g_3g_3'}$ ，滿足引理中的結論。在  $H_G$  中結合  $P_{g_1g_1'}$ 、 $P_{g_2g_2'}$  與  $P_{g_3g_3'}$  即可得一條  $g_1g_3'$ -path  $P_{g_1g_3'}$ ，其中  $P_{g_1g_3'}$  亦滿足引理命題中的結論。若  $f$  在  $G$  中為 5-face，則同理可證。意即，當  $i=t+1$  時，命題亦成立。根據數學歸納法得證，當  $i \in \mathbb{N}$  時，命題恆成立。



**Lemma 7:** 令  $G$  是最小反例，若  $f, f' \in V(D_G)$ ，且  $(f', f) \in E(D_G)$ ，則  $(f, f') \notin E(D_G)$ 。  
 意即有向圖  $D_G$  中沒有雙向的有向邊。

**【證明】：**

令  $f, f' \in V(D_G)$ ，且  $(f', f) \in E(D_G)$ 。

根據  $D_G$  的建構方式可知，在  $G$  中， $f'$  不為 3-face。

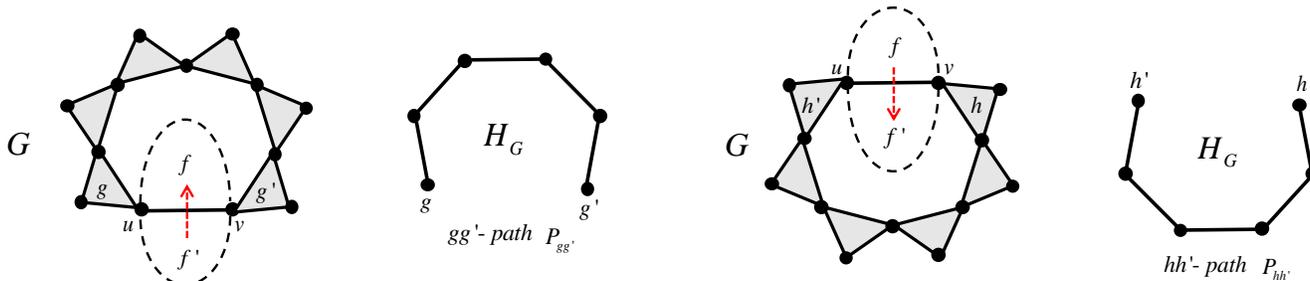
若面  $f$  在  $G$  中為 3-face，則根據  $D_G$  的建構方式可知，在  $D_G$  中， $(f, f') \notin E(D_G)$ 。

若面  $f$  在  $G$  中不為 3-face。

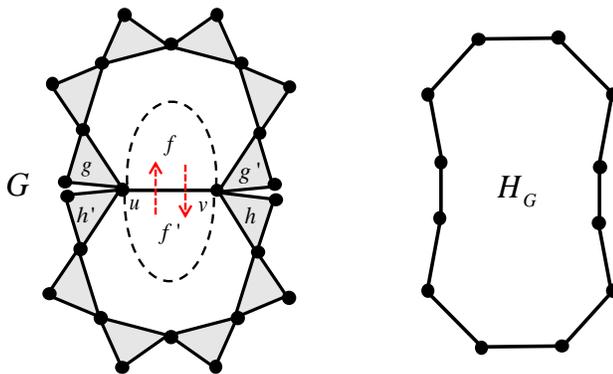
根據 Lemma 6 可知，在  $H_G$  中必存在一條  $gg'$ -path  $P_{gg'}$ ，其中  $P_{gg'}$  在  $G$  中對應的 3-face 與面  $f'$  將包圍面  $f$ ，且在  $G$  中點  $u$ 、 $v$  分別與面  $g$ 、 $g'$  相鄰，其中  $uv \in E(G)$  為  $f$  與  $f'$  相鄰的邊。

假設  $(f, f') \in E(D_G)$

根據 Lemma 6 可知，在  $H_G$  中必存在一條  $hh'$ -path  $P_{hh'}$ ，其中  $P_{hh'}$  在  $G$  中對應的 3-face 與面  $f$  將包圍面  $f'$ ，且在  $G$  中點  $v$ 、 $u$  分別與面  $h$ 、 $h'$  相鄰，其中  $uv \in E(G)$  為  $f$  與  $f'$  相鄰的邊。



由此可知在  $H_G$  中， $gg'$ -path  $P_{gg'}$  與  $hh'$ -path  $P_{hh'}$  將在  $H_G$  中形成一個 cycle。此與  $H_G$  不包含 cycle 矛盾。故  $(f, f') \notin E(D_G)$ 。



■

**Lemma 8** : 令  $G$  是最小反例，若  $f \in V(D_G)$ ， $d_{D_G}(f) = k$ ，其中  $k \in \{4, 5\}$ ，則  $|N_{D_G}^+(f)| \leq k - 1$ 。

**【證明】**：

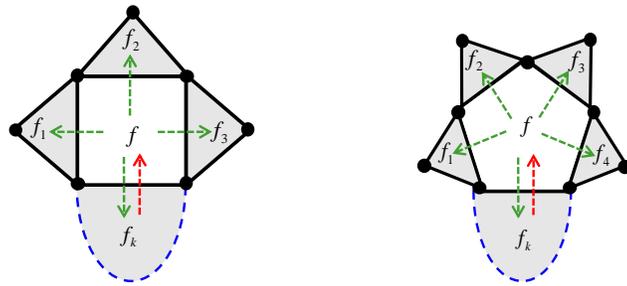
假設  $f$  為  $k$ -face 且  $|N_{D_G}^+(f)| = k$ ，其中  $k = 4, 5$ 。令  $f$  相鄰的面為  $f_1, f_2, \dots, f_k \in N_{D_G}^+(f)$ 。

因為  $H_G$  不包含 cycle，故  $f_1, f_2, \dots, f_k$  不全為 3-face。

不失一般性假設  $f_k$  不是 3-face，則根據  $D_G$  的建構步驟 Step-2、Step-3，可知  $f \in N_{D_G}^+(f_k)$ 。

因為  $f_k \in N_{D_G}^+(f)$  且  $f \in N_{D_G}^+(f_k)$ ，則在  $D_G$  的建構過程中， $(f, f_k) \in E(D_G)$  且  $(f_k, f) \in E(D_G)$ 。

此與 Lemma 7 矛盾。



#### 四、主要定理的證明

在探討了最小反例  $G$  的眾多特性之後，以下我們根據最小反例的結構，利用放電論證法否定最小反例的存在性。

**Lemma 9** : 最小反例  $G$  不存在。

**【證明】**：

以下我們將利用歐拉定理使用放電論證法。

令  $G$  為最小反例，根據 Lemma 5 可知  $G$  不包含  $\mathfrak{R}_1$ -subgraph 與  $\mathfrak{R}_2$ -subgraph 的子圖結構。

根據 Lemma 4 可知任意  $v \in V(G)$ ， $d_G(v) \geq 4$ 。

首先對  $G$  的頂點集合  $V(G)$  與面集合  $F(G)$  賦予電量： $\forall x \in V(G) \cup F(G)$ ，電量  $w(x) = 3d_G(x) - 12$ 。

$d_G(x)$	3	4	5	6	7	.....
$w(x)$	-3	0	3	6	9	.....

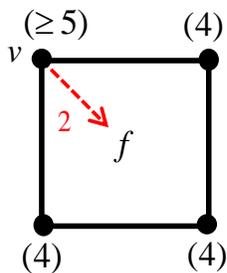
根據歐拉定理可知 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ ，可計算 $G$ 的總電量 $W(G)$ ：

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{v \in V(G)} (3d_G(v) - 12) + \sum_{f \in F(G)} (3d_G(f) - 12) = 3 \left( \sum_{v \in V(G)} d_G(v) + \sum_{f \in F(G)} d_G(f) \right) - 12(|V(G)| + |F(G)|) \\ &= 3(2|E(G)| + 2|E(G)|) - 12(|E(G)| + 2) = -24 \end{aligned}$$

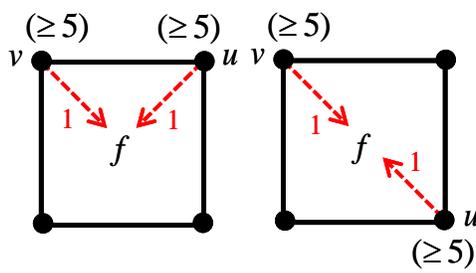
可知 $G$ 的總電量 $W(G) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -24$ 。

根據圖形的細部結構，我們制訂不同的放電規則，條列如下：

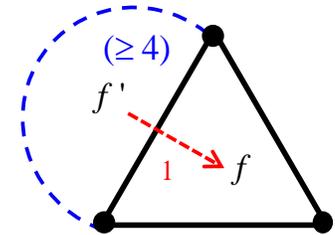
- (R-1)：面 $f$ 是4-*face*，若 $f$ 周圍只有一個點 $v$ 滿足 $d_G(v) \geq 5$ ，則 $v$ 轉移2電量給 $f$ 。(如圖一所示)
- (R-2)：面 $f$ 是4-*face*，若 $f$ 周圍至少兩個點 $u, v$ 滿足 $d_G(u) \geq 5$ ， $d_G(v) \geq 5$ ，則 $u, v$ 皆轉移1電量給 $f$ 。(如圖二所示)
- (R-3)：若面 $f$ 是3-*face*，則每個與 $f$ 相鄰的面 $f'$ 皆轉移1電量給 $f$ 。(如圖三所示)
- (R-4)：考慮 $d_G(f) \geq 5$ 的面 $f$ ，若面 $f'$ 為與 $f$ 相鄰的4-*face*，且 $f'$ 共轉移3電量給其餘相鄰的面，則 $f$ 轉移1電量給 $f'$ 。(如圖四所示)
- (R-5)：考慮 $d_G(f) \geq 4$ 的面 $f$ ，若面 $f'$ 為與 $f$ 相鄰的5-*face*，且 $f'$ 共轉移4電量給其餘相鄰的面，則 $f$ 轉移1電量給 $f'$ 。(如圖五所示)



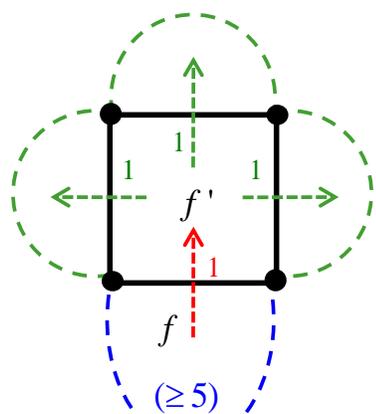
(圖一)



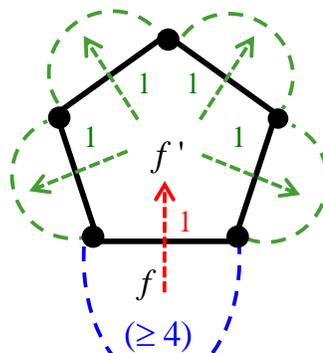
(圖二)



(圖三)



(圖四)



(圖五)

首先執行  $R-1$ 、 $R-2$ 、 $R-3$ ，接著不斷的依序重複  $R-4$ 、 $R-5$ ，直到執行  $R-4$ 、 $R-5$ 時不再有任何放電行為即停止放電。

考慮放電規則  $R-3$ 、 $R-4$ 、 $R-5$ ，若將此三個規則的放電過程以箭頭標示，則在  $G$  的對偶圖  $G^*$  中將可獲得一個有向子圖，呼應著有向圖  $D_G$  的建構步驟  $Step-1$ 、 $Step-2$ 、 $Step-3$ ，可知放電規則  $R-3$ 、 $R-4$ 、 $R-5$  標記的箭頭在  $G^*$  中所得的有向子圖即為  $D_G$ 。

考慮  $f \in F(G)$ ，若  $f'$  與  $f$  相鄰，且根據放電規則  $f$  必須轉移電量給  $f'$ ，則稱  $f'$  為  $f$  的 *Out-face*，並記為  $f' \in Out(f)$ ，其中  $Out(f)$  為  $f$  所有的 *Out-face* 所形成的集合。意即， $Out(f) = N_{D_G}^+(f)$ 。

**Claim：** 根據 Lemma 8 可知

1. 若  $f$  為 4-face，則  $|Out(f)| \leq 3$ 。意即  $f$  轉移出去的電量不大於 3。
2. 若  $f$  為 5-face，則  $|Out(f)| \leq 4$ 。意即  $f$  轉移出去的電量不大於 4。

根據上述五條放電規則  $R-1$ 、 $R-2$ 、 $R-3$ 、 $R-4$ 、 $R-5$ ，我們將重新計算點與面的新電量。

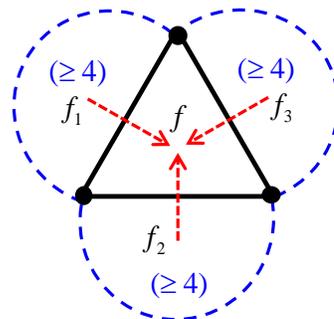
考慮  $f \in F(G)$

(1) 當  $d_G(f) = 3$ ，令  $f$  相鄰的面為  $f_1, f_2, f_3$ 。

因為  $d_\Delta \geq 0$ ，所以  $d_G(f_i) \geq 4$ ，其中  $i = 1, 2, 3$ 。

根據  $R-3$  可知， $f_1, f_2, f_3$  皆轉移 1 電量給  $f$ ，

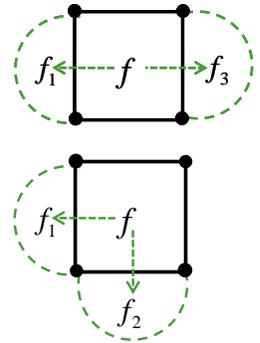
因此新電量  $w'(f) = w(f) + 1 \times 3 = -3 + 1 \times 3 = 0$ 。



(2) 當  $d_G(f) = 4$ ，令  $f$  相鄰的面依逆時針順序分別為  $f_1, f_2, f_3, f_4$ 。  
 因為  $G$  不包含  $\mathfrak{R}_1$ -*subgraph*，所以  $f$  周圍的點不全為 4-*vertex*。  
 根據  $R-1$ 、 $R-2$ ，可知  $f$  至少可以從周圍的點接收到共 2 電量。

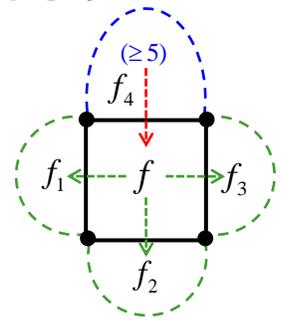
①若  $|Out(f)| \leq 2$ ：

不失一般性可假設  $f_1, f_2 \in Out(f)$ ，則  $f$  必須轉移各 1 電量給  $f_1, f_2$ 。  
 故新電量  $w'(f) \geq w(f) + 2 - 1 \times 2 = 2 - 1 \times 2 = 0$ 。



②若  $|Out(f)| = 3$ ：

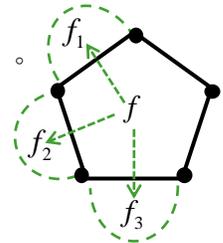
不失一般性可假設  $f_1, f_2, f_3 \in Out(f)$ ，則  $f$  必須轉移各 1 的電量給  $f_1, f_2, f_3$ 。  
 根據  $R-4$ ，可知  $f$  將從  $f_4$  接收到 1 電量。  
 故新電量  $w'(f) \geq w(f) + 2 - 1 \times 3 + 1 = 2 - 1 \times 3 + 1 = 0$ 。



(3) 當  $d_G(f) = 5$ ，令  $f$  相鄰的面依逆時針順序分別為  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ 。

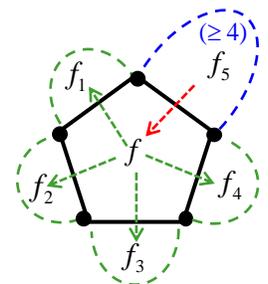
①若  $|Out(f)| \leq 3$ ：

不失一般性可假設  $f_1, f_2, f_3 \in Out(f)$ ，則  $f$  必須轉移各 1 電量給  $f_1, f_2, f_3$ 。  
 故新電量  $w'(f) \geq w(f) - 1 \times 3 = 3 - 1 \times 3 = 0$ 。



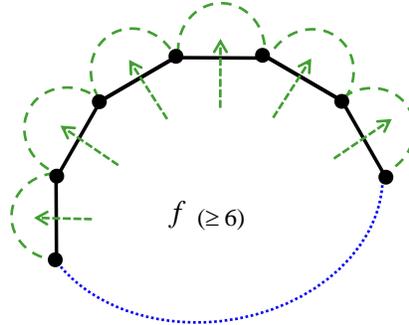
②若  $|Out(f)| = 4$ ：

不失一般性可假設  $f_1, f_2, f_3, f_4 \in Out(f)$ ，則  $f$  必須轉移各 1 的電量給  $f_1, f_2, f_3, f_4$ 。  
 根據  $R-5$ ，可知  $f$  將從  $f_5$  接收到 1 電量。  
 故新電量  $w'(f) = w(f) - 1 \times 4 + 1 = 3 - 1 \times 4 + 1 = 0$ 。



(4) 當  $d_G(f) \geq 6$ 。

因為  $|Out(f)| \leq d_G(f) - 1$ ，可知  $f$  相鄰的面中，最多有  $d_G(f) - 1$  個面會接收  $f$  所轉移出去的電量。故新電量  $w'(f) \geq w(f) - 1 \times (d_G(f) - 1) = 3d_G(f) - 12 - d_G(f) + 1 = 2d_G(f) - 11 \geq 1$ 。



考慮  $v \in V(G)$

根據 Lemma 4，可知  $d_G(v) \geq 4$ 。

(1) 當  $d_G(v) = 4$ 。

因為  $w(v) = 3d_G(v) - 12 = 0$ ，且根據放電規則，任意 4-vertex 並無轉移或接收電量的可能，故新電量  $w'(v) = w(v) = 0$ 。

(2) 當  $d_G(v) = 5$ ，令  $v$  相鄰的面依逆時針順序分別為  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ 。

根據放電規則，任意 5-vertex 只有可能轉移電量給相鄰的 4-face。

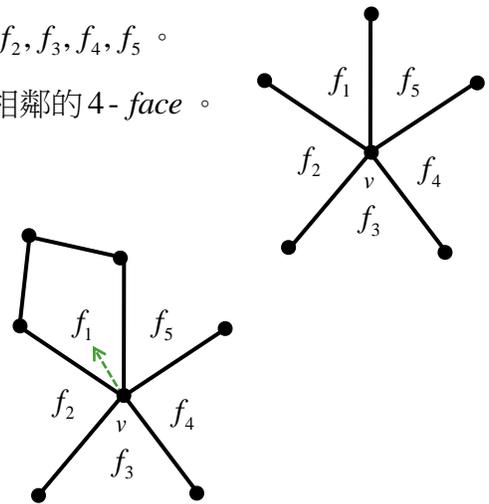
因為  $d_0 \geq 0$ ，所以  $v$  最多與 2 個 4-face 相鄰。

①若  $v$  恰與 1 個 4-face 相鄰：

不失一般性，假設  $f_1$  為 4-face。

根據放電規則可知， $v$  最多轉移 2 電量給  $f_1$ 。

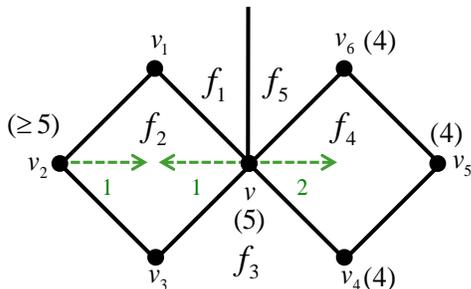
故新電量  $w'(v) \geq w(v) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$ 。



②若  $v$  恰與 2 個 4-face 相鄰：

不失一般性可假設  $f_2, f_4$  皆為 4-face。令  $f_2$  相鄰的點依逆時針順序為  $v_1, v_2, v_3, v$ ；令  $f_4$  相

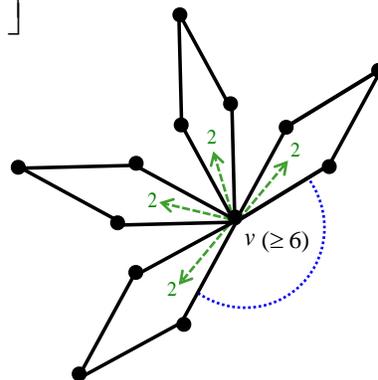
鄰的點依逆時針順序為  $v_4, v_5, v_6, v$  (如圖所示)。因為  $G$  不包含  $\mathfrak{R}_2$ -*subgraph*，所以必存在  $v_i \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  滿足  $d_G(v_i) \geq 5$ 。不失一般性假設  $v_i \in \{v_1, v_2, v_3\}$ ，則  $v$  將轉移1 電量給  $f_2$ ，且最多轉移2 電量給  $f_4$ 。故新電量  $w'(v) \geq w(v) - 1 - 2 = 3 - 1 - 2 = 0$ 。



(3) 當  $d_G(v) \geq 6$ 。

根據放電規則， $v$  只有可能轉移電量給相鄰的 4-*face*。因為  $d_v \geq 0$ ，所以與  $v$  相鄰的任意連續 2 個面中，最多 1 個 4-*face*。可知  $v$  相鄰的面中，最多有  $\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \rfloor$  個 4-*face* 會接收  $v$  所轉移出去的電量。根據放電規則， $v$  最多轉移 2 電量給相鄰的 4-*face*。

$$\begin{aligned} \text{故新電量 } w'(v) &\geq w(v) - 2 \times \left\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \right\rfloor = 3d_G(v) - 12 - 2 \times \left\lfloor \frac{d_G(v)}{2} \right\rfloor \\ &\geq 3d_G(v) - 12 - d_G(v) = 2d_G(v) - 12 \geq 0。 \end{aligned}$$



由於各種放電過程皆是圖  $G$  中的電量在內部轉移，故原始總電量  $W(G)$  與新總電量  $W'(G)$  必相等，意即  $W'(G) = W(G)$ 。但透過上述討論可知，經過  $R-1$ 、 $R-2$ 、 $R-3$ 、 $R-4$ 、 $R-5$  的規則進行放電後，可知  $\forall x \in V(G) \cup F(G)$ ，新電量  $w'(x) \geq 0$ 。換句話說放電之後新的總電量必為非負實數，所以  $W(G) = W'(G) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) \geq 0$ ，此與原總電量  $W(G) = -24$  矛盾。這否定了最小反例  $G$  的存在性。 ■

根據 Lemma 9 可知，主要定理的最小反例不存在，故完成以下主要定理的證明。

**Theorem**：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1)  $d_{\Delta} \geq 0$ ；
- (2)  $d_{\square} \geq 0$ ；
- (3)  $H_G$  不包含 *cycle*；

則平面圖  $G$  必為 *4-choosable*，意即  $\chi_{\ell}(G) \leq 4$ 。

在完成主要定理的證明後，從放電論證法的過程中進行推測，我們提出以下三個猜想：

**Conjecture 1**：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1)  $d_{\Delta} \geq 0$ ；
- (2) 所有 *4-cycle* 與 *5-cycle* 所成的集合，皆為不相交的圈；

則平面圖  $G$  必為 *4-choosable*。

**Conjecture 2**：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1)  $d_{\Delta} + d_{\square} \geq 0$ ；
- (2)  $H_G$  不包含 *cycle*；

則平面圖  $G$  必為 *4-choosable*。

**Conjecture 3**：若平面圖  $G$  滿足下列條件

- (1)  $d_{\Delta} \geq 0$ ；
- (2)  $H_G$  不包含 *cycle*；

則平面圖  $G$  必為 *4-choosable*。

## 參、研究結果與討論

### 一、研究結果

對於平面圖，對於長度較小的圈進行限制，我們設計了充分條件使得平面圖為 *4-choosable*。

若平面圖  $G$  滿足：

- (1) 任意兩個 *3-cycle* 最多共用一個點 ( $d_{\Delta} \geq 0$ )；
- (2) 任意兩個 *4-cycle* 最多共用一個點 ( $d_{\square} \geq 0$ )；
- (3) 不存在一個圈，使得圈的各邊皆與 *3-cycle* 相鄰 ( $H_G$  不包含 *cycle*)；

則平面圖  $G$  必為 *4-choosable*。

### 二、討論

列表著色數問題比一般著色問題更加複雜，一般著色問題可說是列表著色數問題的特例，也就是當所有的點可用顏色清單都一樣的時候，就是一般著色問題。在這份研究說明書中，我們利用放電論證法，探索出一些條件限制，使得平面圖  $G$  的列表著色數  $\chi_\ell(G) \leq 4$ 。

研究過程中，我們利用了反證法、數學歸納法以及放電論證法證明定理。其中，反證法是高中數學學到的證明方法，應用在  $\sqrt{2}$  是無理數的證明當中；放電論證法則是利用平面圖的點與面的關係，在點與面上設定權重（電量），接著操作權重的轉移，進一步利用放電論證法分析平面圖的特殊結構，平面圖的歐拉定理則是放電論證法的根基。本研究主要定理的證明是利用數學歸納法，其中數學歸納法是建立在平面圖的頂點數上，先證明當  $n=1$  的時候敘述正確，假設  $n \leq k$  時皆正確，則可推得  $n=k+1$  亦正確，因此敘述便像骨牌一樣具有連鎖效應，進一步推得最小反例  $G$  的眾多結構特性（所謂最小反例意指第一張沒倒下的骨牌）。最後利用放電論證法，說明最小反例的不存在性，目標是建立放電規則，運用最小反例的特質，說明放電前、放電後總電量不相同，由於放電規則僅將電量在圖中內部進行轉移，由此推導出矛盾，即可得知最小反例  $G$  並不存在。倘若以骨牌的概念來理解，這意味著不會倒下的骨牌不存在，故完成主要定理的證明。

根據最小反例的結構，討論如何建立放電規則時，可以發覺，對於度數較大的點與面，仍有殘存的電量可供轉移，這意謂著在允許存在長度較小的圈時，平面圖為 *4-choosable* 的充分條件應仍有許多的面向可繼續探索。

## 肆、結論與應用

### 一、結論

四色定理說明了所有平面圖皆為  $4$ -colorable，對於列表著色數的問題，Thomassen 證明了所有平面圖皆為  $5$ -choosable，此外 Voigt 建構了非  $4$ -choosable 的平面圖，而 Gutner 證明了判斷一個平面圖是否為  $4$ -choosable 是 NP-hard 問題。因此尋找平面圖為  $4$ -choosable 的充分條件即為熱門的研究議題，其研究方向大多限制在長度較小的圈，限制類型可區分為『圈的存在性』、『圈與圈的距離』與『圈與圈的相鄰關係』。整合來說，『長度較小的圈之分布狀況』即為充分條件的研究主軸，至今也已有許多重要且美麗的結果。本文的研究主要是以『允許圈的存在性』做為前提，限制長度較小的圈之分布與結構關係，設計嶄新的充分條件，意圖使滿足條件的平面圖為  $4$ -choosable。為了精確描述  $3$ -cycle 在平面圖中的稠密程度，我們特別定義特殊圖形  $H_G$  來說明  $3$ -cycle 的分布狀況。有別以往的放電論證法運用的一次性放電，本文使用的放電策略則是階段性放電，為了清楚紀錄放電的過程，我們設計了有向子圖  $D_G$  的建構步驟，搭配放電規則，從對偶圖中建構有向子圖  $D_G$ ，進一步從有向子圖  $D_G$  的結構去探索平面圖的充分條件，整個脈絡是一個相當具有份量也富有美感的證明。

有關列表著色數的問題，尚有許多研究的空間，不論是將條件放寬鬆，或是討論非平面圖上的性質，亦或是討論不同曲面上的平面圖（不同曲面上的平面圖依然有相對的歐拉特徵數，同樣具備點、邊、面等概念，因此仍可使用放電論證法），許多數學家都關注著列表著色的研究議題，相信隨著研究的蓬勃發展，我們將更能掌握列表著色的方法。

### 二、應用

每個點給定一個專屬列表，列表內各有不同的顏色可供選擇，然而有邊相連的點必須要從各自的列表中選取一個顏色，使得顏色不相同。這樣的列表著色問題可應用在『資源分配』、『作業程序排程』、『排課設計』與『無線電頻率規劃』等相關問題。將實際問題中的物件抽象化為點，若物件與物件之間有條件衝突，則在相對的兩點間建立一條邊，如此一來即可將實際問題建構出一個由點與邊所組成的圖，再根據物件的限制條件，決定該點的顏色清單，顏色即是資源，顏色

可以代表著空間、時間、人力與設備等概念。利用最少的資源達成目標則是普遍的需求，因此某些最佳化的問題，可透過列表著色的理論來解決。這顯示著色問題中的列表著色是具有相當重要性的研究，亦具備高度的研究價值。

### 三、未來展望

有關平面圖的四色選擇數問題，持續研究更寬鬆的充分條件，使平面圖為 *4-choosable*，將是我們後續努力的研究方向，因此我們將未來欲研究的問題羅列如下：

1. 是否存在滿足主要定理中恰兩個條件的平面圖  $G$ ，使得  $\chi_\ell(G) > 4$ ？
2. 在允許平面圖有相鄰 *3-cycle* 的前提下，能否設計充分條件，使得  $\chi_\ell(G) \leq 4$ ？
3. 在允許平面圖有相鄰 *4-cycle* 的前提下，能否設計充分條件，使得  $\chi_\ell(G) \leq 4$ ？
4. 對於平面圖  $G$ ，在允許  $H_G$  有 *cycle* 的前提下，能否設計充分條件，使得  $\chi_\ell(G) \leq 4$ ？
5. 有關本文中所提出的兩個猜想 Conjecture 1、Conjecture 2 與 Conjecture 3 是否正確？

### 伍、參考文獻

1. 張鎮華 (2012)，Lovász 的兩傘，數學傳播 36 卷 2 期。
2. 張鎮華，蔡牧村，圖論及其演算法，(台大數學系圖論課程教材)。
3. 曹亮吉 (1977)，淺談四色問題，數學傳播 1 卷 4 期。
4. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。
5. Gary Chartrand, Linda Lesniak and Ping Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6<sup>th</sup>, CRC Press 2016.
6. P. Chen, M. Chen and Y. Wang, *Planar graphs without 4-cycles adjacent to triangles are 4-choosable*, Discrete Math. , 339 (2016), 3052-3057.
7. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. 26 (1979), 125-157.
8. Babak Farzad, *Planar Graphs without 7-Cycles Are 4-Choosable*, J. Discrete Math. , 23(3) (2009), 1179–1199.
9. S. Gutner, *The complexity of planar graph choosability*, Discrete Math. , 159 (1996), 119-130.
10. Appel, K. and Haken, W. , *Every Planar Map is Four-Colorable, II: Reducibility*, Illinois J. Math. 21 (1977), 491–567.
11. Peter B.C. Lam, B. Xu and J. Liu, *The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles*, J. Combin. Theory Ser. B 76 (1999), 117–126.

12. C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory Ser. B, 62 (1994), no.1, 180–181.
13. V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors*, Metody Diskret. Anal., 19 (1976), 3-10. (in Russian)
14. M. Voigt, *List colourings of planar graphs*, Discrete Math. , 120 (1993), 215-219.
15. Wang Weifan and Ko-Wei Lih, *The 4-choosability of planar graphs without 6-cycles*, Australasian Journal of Combinatorics 24 (2001), pp. 157–164.
16. Wang Weifan and Ko-Wei Lih, *The 4-choosability of planar graphs without 5-cycles*, Applied Mathematics Letters 15 (2002), 561–565.
17. Wang Weifan and Ko-Wei Lih, *Choosability and edge choosability of planar graphs without intersecting triangles*, J. Discrete Math. , 15(4) (2002), 538–545.
18. Wang Weifan, *Planar graphs that have no short cycles with a chord are 3-choosable*, Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 11, No 1 (2007), pp. 179–186.
19. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2<sup>nd</sup> , Pearson Education Taiwan 2008.
20. Chung-Ying Yang and Xuding Zhu, *Cycle Adjacency of Planar Graphs and 3-Colourability*, Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 15, No 4 (2011), pp. 1575–1580.

## 【評語】 010036

四色問題是 1850 年代被提出來的問題，它在問是否所有地圖都可以用四種顏色著色，使得有共用邊界的國家要著不同顏色。這個問題被提出來以後，逐漸受到重視，引領出圖著色這個領域，陸續有許多極具深度被發現。歷經一百多年，在 1970 年代，四色問題被用放電理論及電腦的幫助，證明出四色定理。

這是一篇非常特別的作品，它是在研究圖形的列表著色問題，這是圖著色問題的一個更廣義的版本。平面圖的列表著色數，由於與四色定理密切相關，長久來一直受到大家關注。作者針對圈與圈滿足特定條件（長度為 3 的圈不相鄰，長度為 4 的圈不相鄰，相連的長度為 3 的圈不會形成圈）的平面圖的列表著色數作了分析，給出了當滿足此特定條件時，列表著色數的上界，是一序列相關結果中很優良的作品。這篇文章能夠充分掌握問題的關鍵點，並藉由巧妙的分析手法，設計出適當的放電規則，得出最終結論。整體來講，說理清晰且有條理，是一篇難得的好作品。