

# 2017 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010029

參展科別 數學

作品名稱 三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 新北市立文山國民中學

指導教師 蕭偉智

作者姓名 石博允、錢昀

關鍵字 有向線段比值和、二次曲線系、重心座標

## 作者簡介



作者合照（左起：石博允、錢昀）

我是石博允，個性樂觀隨和，跟普通班或資優班的同學都相處得很好。我的興趣是閱讀、魔術方塊，喜歡在空閒的時間到籃球場打球。自國小起，我便對數理科目展現興趣和天份，國中考取數理資優班後，學習到非常多數理知識、解題策略、實驗操作，也認識不少愛好數學的同學、學長姊或學弟妹，我十分喜愛這樣的校園生活。八年級起，我選修獨立研究課程，在老師的指導下進行幾何研究，我們投入超過一年半的時間和心力在這件作品上，持續修改研究方向及內容，我們成功劃分出不少漂亮性質。國中畢業後，我想繼續就讀高中科學班或數理資優班，持續學習精進數理。

我是錢昀，喜愛閱讀、繪畫、益智遊戲，我也覺得科學現象、推理、或實驗很酷！所以從小就愛上閱讀科學文章、書籍以及雜誌。學校的數學和理化課程，我總

是非常投入參與，我喜歡動腦思考、解決問題，熱愛實驗操作，因為我享受找尋方法解決問題的過程，那非常有趣且極具挑戰。我與石博允同學一起研究數學，做研究的過程讓我學到解決問題的多元方法，以及如何清楚書寫與口頭說明我們的證明思路。這次進入臺灣國際科展的發表舞台，讓我感到既興奮又緊張！感謝近兩年來指導老師、教授及其他曾經幫助過我們的人，讓我們有這個光榮的機會發表我們的數學研究。

## 摘要

本研究源自三角形的重心及其外接圓所構作的線段比值的古老幾何性質，我們不但推廣原命題，還創造新命題：給定  $\triangle ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$ ，令直線  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{BG}$ ,  $\overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$  點，再取任意  $k$  值，探討  $P$  點集合的性質。

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right\}$$

主要研究發現為：

- (1)  $\Gamma_{3,k}$  為二次曲線系，其橢圓、拋物線、雙曲線之形態不因  $k$  值而改變，而是被外接錐線  $\Gamma$  所決定。
- (2) 發現  $\triangle ABC$  重心  $G$ 、 $\Gamma$  中心  $O$ 、 $\Gamma_{3,k}$  中心  $O_{3,k}$  的共線性及比例常數。
- (3) 完整劃分  $\Gamma_{3,k}$  的非退化與退化型態，並發現只有  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓時， $k$  值有跳躍現象。
- (4) 發現錐線  $\Gamma$  上取相異六點而生成兩個錐線  $\Gamma_{3,k}$ 、 $\Pi_{3,k}$  重合的充分條件。

最後，我們以「錐線  $\Gamma$  上取一點、兩點到多點」的線性組合手法，推廣多邊形與其外接錐線的生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  之性質。

## Abstract

This study is derived from the ancient geometric property of the sum of the ratios of several segments constructed by the centroid, and circumcircle of a given triangle. We not only generalized the original problem, but also created new proposition: “Given triangle  $\Delta ABC$  and point  $P$  in plane, and suppose that line  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}$  meet the circumconic  $\Gamma$  of the polygon again in  $A', B', C'$  respectively”, for any real number  $k$ , we focused on the set of points  $P$ :

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right. \right\}$$

The results of this study are as follows:

- (a)  $\Gamma_{3,k}$  is a family of conics, the types (elliptic, parabolic, or hyperbolic) are not changed by the value of  $k$ , but determined by the circumconic  $\Gamma$ .
- (b) The centroid of given triangle  $\Delta ABC$ , center of circumconic  $\Gamma$ , and center of generated conic  $\Gamma_{3,k}$  are collinear.
- (c) Only when  $\Gamma_{3,k}$  is elliptic does the  $k$  value jump ( $k$  is discontinuous real number distribution).
- (d) We found out the sufficient conditions for the coincidence of two conics  $\Gamma_{3,k}$  and  $\Pi_{3,k}$  generated by six points which lie on the given conic  $\Gamma$ .

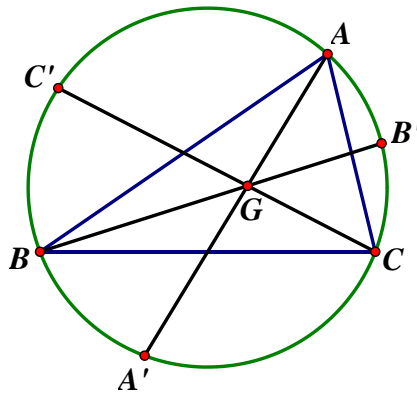
Finally, we used a linear combination method for generalizing the properties of the conic  $\Gamma_{n,k}$  generated by a circumconic of polygon.

# 壹、前言

## 一、研究動機

本研究起源於一個古老且有趣幾何性質（圖 1-1-1）：

「給定  $\triangle ABC$  與其外接圓  $\Gamma$ ， $G$  點為  $\triangle ABC$  的重心，若射線  $\overrightarrow{AG}$ ， $\overrightarrow{BG}$ ， $\overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A'$ ， $B'$ ， $C'$ ，則  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}} = 6$ 」<sup>1</sup>。



▲圖 1-1-1

這是有意思的性質！我們可以換個觀點，將該命題看作圓內接『任意』三角形，而線段比值和  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}$  為定值，是三角形變動下的一種不變量。

利用動態幾何軟體 GSP 與 Geogebra 進行實驗，然後我們觀察到一些特殊而有趣的現象，所以展開一系列的推廣命題及證明。

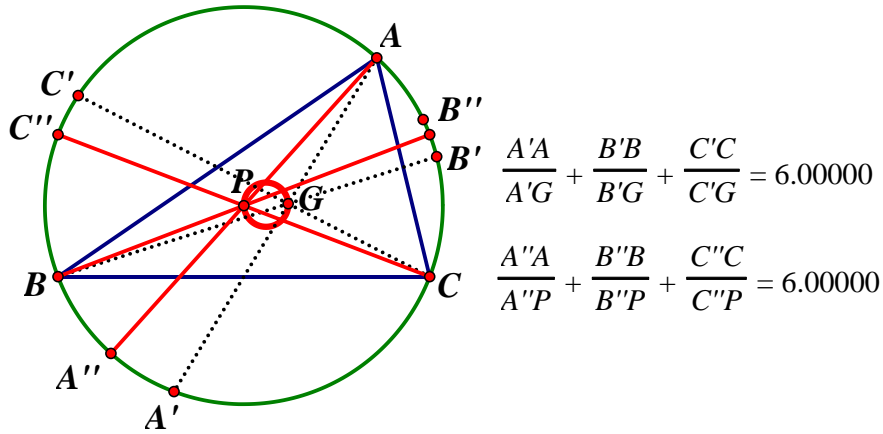
### 提問 1 (唯一性)：

同樣給定  $\triangle ABC$  與其外接圓  $\Gamma$ ，除了重心  $G$  點以外，還有沒有其他  $P$  點滿足  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = 6$ ？顯然，若  $P$  點為  $\Gamma$  的圓心符合所求（圖 1-2），我們後續實驗亦發現符合所求的  $P$  點有無限多個，這些  $P$  點的點集合（ $P$  點的運動軌跡）居然構成一個圓。

$$\Gamma_{3,6} = \left\{ P \mid \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = 6 \right\}$$

<sup>1</sup> 原始命題是  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{GC'}} = 3$ ，本研究中我們使用  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}} = 6$ 。

如圖 1-1-2， $P$  點的運動軌跡是為以外接圓圓心  $O$  點和三角形重心  $G$  點連線為直徑的一個圓。



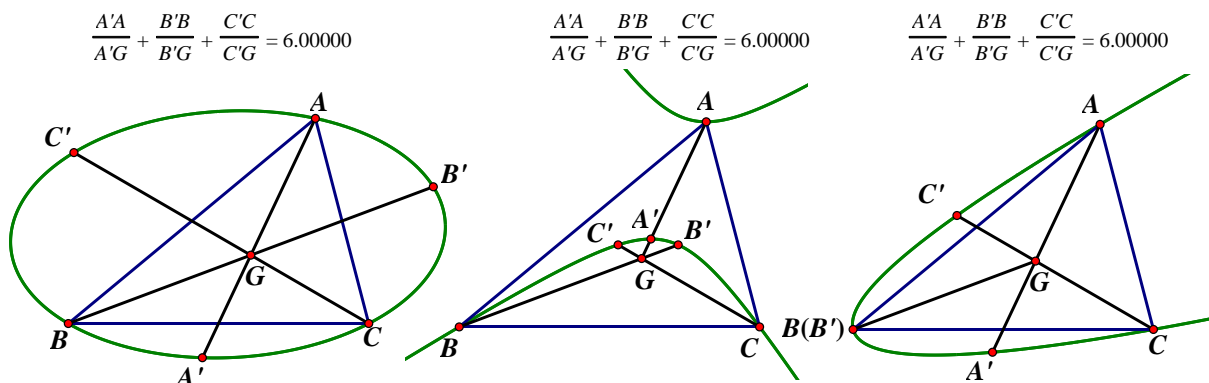
▲圖 1-1-2

**提問 2 (改變給定的外接圓):**

由於圓是錐線的一種，所以我們將外接圓改成外接錐線來觀察。也就是說，給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，直線  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{BG}$ ,  $\overrightarrow{CG}$  分

別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$ ，同時考慮有向線段比值，則  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{GA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{GB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{GC'}}$  的值是多少呢？

如圖 1-1-3，實驗發現，居然有向線段比值和  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{GA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{GB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{GC'}} = 6$ ！



▲圖 1-1-3

在圓、橢圓、拋物線、雙曲線的條件下，這個一致的結果讓我們很驚喜！

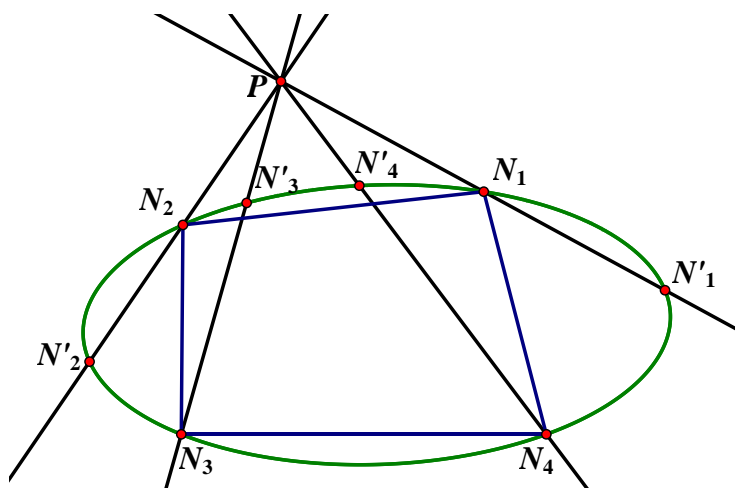
同樣的延伸思考是，取任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ )， $P$  點滿足  $\frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = k$  的  $P$  點集合有什麼性質呢？

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = k \right\}$$

### 提問 3 (改變給定的兩個條件):

延續提問 2 的思考模式，如果改變一開始的兩個給定條件—— $\triangle ABC$  與其外接圓，改變為「多邊形與其外接錐線 (圖 1-1-4)」，那麼結果又是如何呢？因此我們推廣命題為：

給定多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  與其外接錐線  $\Gamma$ 。考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overline{N_1P}$ ,  $\overline{N_2P}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{N_nP}$  分別交  $\Gamma$  於  $N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  點，再取任意  $k$  值，探討集合  $\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{PN'_n} = k \right\}$  的性質。



▲圖 1-1-4

從前述的提問和實驗觀察，可知道這個古老幾何性質還有許多未被發現且有趣的新性質及推廣！因此，我們就展開一系列研究工作。



## 二、文獻探討（原始問題）

本研究的原始命題曾被選作為我國教育部所舉辦的 2015 年「資優數學研習營」的獨立研究測驗試題。同時，我們也發現 George A. Tsintsifas 在 1983 年於數學解題雜誌《Crux Math.》提出此性質及其延伸不等式的徵答[4]。

我們分析兩者的解法差異：

給定  $\triangle ABC$  與其外接圓  $\Gamma$ ， $G$  點為  $\triangle ABC$  的重心，令射線  $\overrightarrow{AG}$ ， $\overrightarrow{BG}$ ， $\overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A'$ ， $B'$ ， $C'$ 。試證  $\frac{AA'}{GA'} + \frac{BB'}{GB'} + \frac{CC'}{GC'} = 6$ 。

### 【Tsintsifas 的證明】中線定理及圓幂定理

證明。

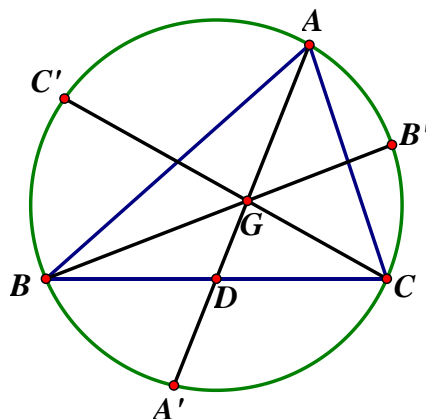
1. 如圖 1-2-1，令  $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$  且  $m_a, m_b, m_c$  分別為中線長依中線性質可得  $4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2$ ， $m_b, m_c$  亦同
2. 令  $D$  是  $\overline{BC}$  上的中點，則依據圓幂性質可得

$$m_a \times \overline{DA'} = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ 可得 } \overline{DA'} = \frac{a^2}{4m_a}$$

$$\text{所以 } \overline{GA'} = \overline{GD} + \overline{DA'} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6m_a}$$

$$\text{再得 } \frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}} = \frac{m_a + \frac{a^2}{4m_a}}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6m_a}} = \frac{3b^2 + 3c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GB'}}, \frac{\overline{CG}}{\overline{GC'}} \text{ 亦同，因此 } \frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{GC'}} = 6$$



▲圖 1-2-1

【資優數學研習營的解法】重心座標 (Barycentric coordinate)

證明.

1. 利用重心座標，令  $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ； $A, B, C$  的座標分別為

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ ，則重心  $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ； $\Delta ABC$  外接圓的方程式為

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

2. 因為  $A'$  在直線  $\overleftrightarrow{AG}$  上，故可設  $A'(1-2t, t, t)$  代入外接圓的方程式解  $t$

得  $t = \frac{b^2+c^2}{2b^2+2c^2-a^2}$ ，所以  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}} = \frac{t}{t-\frac{1}{3}} = \frac{3b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$ ，同樣方法可得  $\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}} = \frac{3a^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$ 、

$\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}} = \frac{3a^2+3b^2}{a^2+b^2+c^2}$ ，因此  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GA'}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GB'}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{GC'}} = 6$

在研究方法上，Tsintsifas 利用中線定理及圓幂定理處理此證明，這個方法適用於三角形及其外接圓中，然而若一般化推廣到多邊形與其外接錐線的時候就不適用了。重心座標為齊次座標 (Homogeneous coordinates) 的一種，是射影幾何的座標系統，它比笛卡兒座標表示更為簡單及對稱，又可表示無窮遠點 (直線)，將圓錐曲線的變換統整起來。因此，本研究採取重心座標作為研究方法。

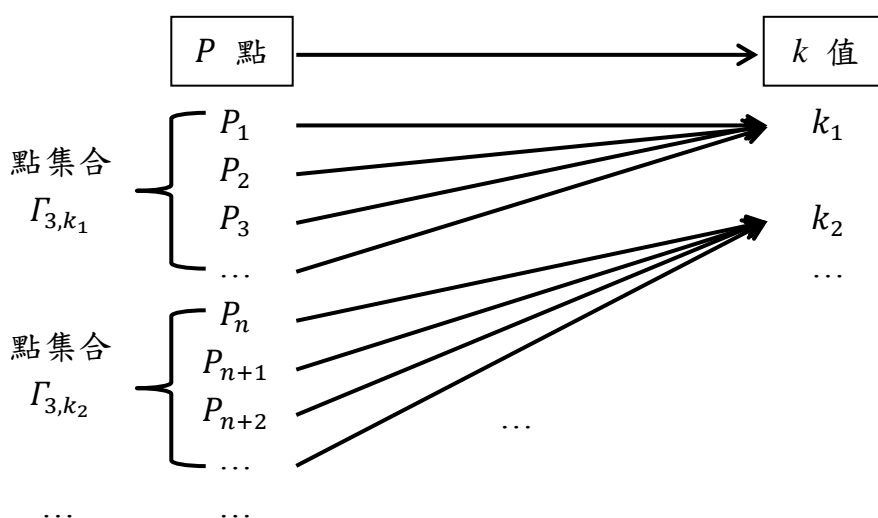
關於此性質是否有前人進行推廣？我們以全國科展資料庫、Google 學術搜尋、Jstor 資料庫等進行搜尋，都沒有發現推廣研究。2015 年 12 月，我們進一步將軟體觀察的結果寫信給 Tsintsifas 進行研究諮詢，Tsintsifas 回信告知我們的研究內容是新的發現「*I don't see that point of the problem. I think, it is new one. Try to publish it.*」，這鼓舞著我們的發現是有實質貢獻的，並繼續深入研究。

### 三、研究架構

由提問 1 和提問 2 的觀察，我們擬定本研究的對應結構關係為圖 3-1，並且可以將其轉化為圖 3-2 的對應關係。

#### (一) 研究結構一：點對應到值

給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{BP}$ ,  $\overrightarrow{CP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$  點 (圖 1-3-1)

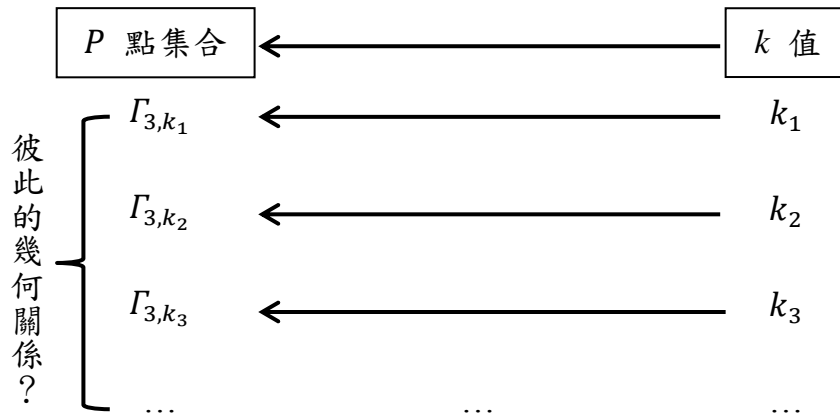


▲圖 1-3-1

#### (二) 研究結構二：值對應到點集合

給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，考慮平面上  $P$  點，令直線  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{BP}$ ,  $\overrightarrow{CP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$  點，使得  $P$  點滿足  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k$  等於任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ ) (圖 1-3-2)，即

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right\}$$

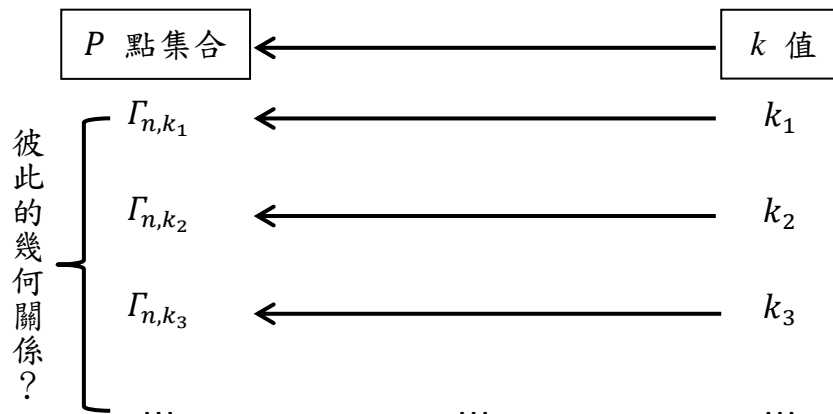


▲圖 1-3-2

同理可得推廣情形的結構：

給定多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，考慮平面上  $P$  點，令直線  $\overline{N_1P}$ ,  $\overline{N_2P}$ , ...,  $\overline{N_nP}$  分別交  $\Gamma$  於  $N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  點，使得  $P$  點滿足  $\frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{PN'_n}$  等於任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ ) (圖 1-3-3)，即

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{PN'_n} = k \right\}$$



▲圖 1-3-3

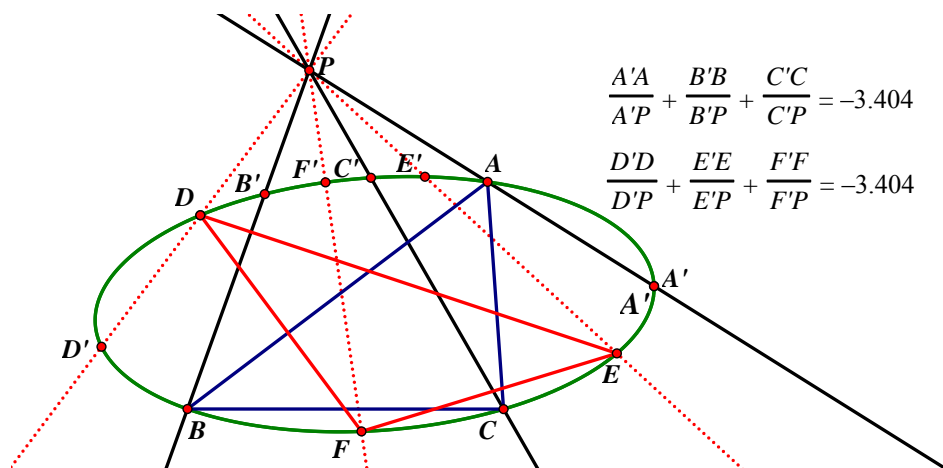
#### 四、研究目的

給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$  點，則有以下目的：

- (一) 令  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，則找出  $\frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'}$  的值一般式(以  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  表示)
- (二) 取任意  $k$  值，找出滿足  $\frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = k$  的  $P$  點集合  $\Gamma_{3,k}$ 。
- (三) 給定不同的值  $k_1, k_2, k_3, \dots$ ，找出對應的  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$  之間的關係。
- (四)  $\Delta ABC$ 、與其外接錐線  $\Gamma$ 、生成錐線  $\Gamma_{3,k}$ ，三者的幾何直觀關係。
- (五) 生成錐線橢圓  $\Gamma_{3,k}$  中， $k$  值的不連續跳躍現象

我們也考慮轉化構造方法，如圖 1-4-1，給定錐線  $\Gamma$ ，並在  $\Gamma$  上任取相異六點  $A, B, C, D, E, F$ ，考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{EP}, \overrightarrow{FP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C', D', E', F'$  點，則

- (六)  $\frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = \frac{\overline{DD'}}{PD'} + \frac{\overline{EE'}}{PE'} + \frac{\overline{FF'}}{PF'}$  的充分條件是什麼？



▲圖 1-4-1

更一般的推廣是，給定多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{N_1P}, \overrightarrow{N_2P}, \dots, \overrightarrow{N_nP}$  分別交  $\Gamma$  於點  $N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  點，則有以下目的：

- (七) 取任意  $k$  值，找出滿足  $\frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{PN'_n} = k$  的  $P$  點集合  $\Gamma_{n,k}$ 。
- (八) 給定不同的值  $k_1, k_2, k_3, \dots$ ，找出對應的  $\Gamma_{n,k_1}, \Gamma_{n,k_2}, \Gamma_{n,k_3}, \dots$  之間的關係。
- (九) 多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$ 、與其外接錐線  $\Gamma$ 、生成錐線  $\Gamma_{n,k}$ ，三者的幾何直觀關係。

## 貳、研究工具與方法

### 一、研究工具

The Geometer's Sketchpad 5.0、GeoGebra 5.0、Cabri 3D v2、Wolframalpha 網站

### 二、預備知識

本研究使用重心座標下的直線方程式、無窮遠線方程式(無窮遠點)、二次曲線方程、面積公式、極點極線等射影幾何相關性質[5][6]，來探討有向線段比值的問題，如下：

#### (一) 重心座標 (Barycentric coordinates)

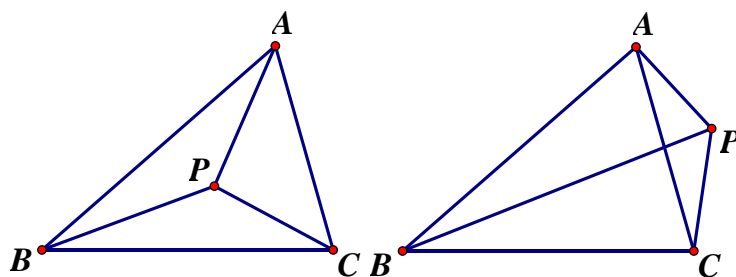
平面上任一點  $P$  與  $\triangle ABC$  三頂點形成三個子三角形  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$ ,  $\triangle PAB$  利用這些三角形有向面積來描述此點的位置，就定義為  $P$  點的重心座標，即

$$P(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = P(\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB)$$

若三個實數序對  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  滿足  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$  時，我們就稱  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  為正規化的重心坐標 (Normalized barycentric coordinates)。

其中  $\triangle PBC$  的頂點  $P, B, C$  為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。

因此，我們有三個頂點  $A, B, C$  的座標  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 。



▲圖 2-2-1

利用重心座標系統可以表示直線方程式、二次曲線方程式、無窮遠線方程式、無窮遠點等，有以下事實：

#### (二) 直線方程式

若點坐標  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  滿足一次方程  $\sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2 + \sigma_3\mu_3 = 0$ ，則全體點  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  為一直線，其中  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  為常數。

### (三) 無窮遠點 (point at infinity) 與無窮遠線 (line at infinity)

若  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  滿足  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ ，則  $P$  稱為無窮遠點，其中  $L_\infty: \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$  為無窮遠線。

### (四) 二次曲線方程式

若點坐標  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  滿足二次方程

$$A\mu_1^2 + B\mu_2^2 + C\mu_3^2 + 2D\mu_1\mu_2 + 2E\mu_1\mu_3 + 2F\mu_2\mu_3 = 0$$

或

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

則全體點  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  稱為二次曲線，其中  $A, B, C, D, E, F$  為常數。

$\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$  稱作二次曲線的係數矩陣。

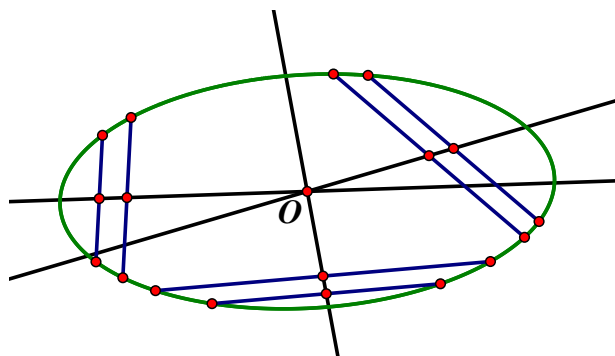
### (五) 極點 (pole) 與極線 (polar line)

給定  $\Gamma$  為二次曲線  $A\mu_1^2 + B\mu_2^2 + C\mu_3^2 + 2D\mu_1\mu_2 + 2E\mu_1\mu_3 + 2F\mu_2\mu_3 = 0$ ，對平面上任意給定點  $P(x_1, x_2, x_3)$ ，下述直線稱為  $P$  點對  $\Gamma$  的極線，而  $P$  點稱作極點：

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

### (六) 二次曲線中心

二次曲線沿非漸近方向的一組平行弦之中點的軌跡為一直線，該直線為二次曲線的直徑，所有的直徑通過  $O$  點，則定義  $O$  點為二次曲線的中心。



▲圖 2-2-2



## 參、研究結果與討論

### 一、給定「點」對應到「值」： $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}$ 的一般式

我們先研究基礎的問題：給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線)，再考慮任意點  $P$ ，令直線  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$ ,  $\overline{CP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$  點，則  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}$  的一般式為何？

我們必須先求出  $\Delta ABC$  的外接錐線  $\Gamma$  的方程式，因為重心座標下的二次曲線皆可表示為形式：

$$A\mu_1^2 + B\mu_2^2 + C\mu_3^2 + 2D\mu_1\mu_2 + 2E\mu_1\mu_3 + 2F\mu_2\mu_3 = 0$$

再將  $\Gamma$  上的三個頂點  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  代入前面的方程式而得到  $A = B = C = 0$ ，再令常數  $2D = n_3, 2E = n_2, 2F = n_1$ ，就得出引理 1.1。

**引理 1.1**  $\Delta ABC$  的外接錐線  $\Gamma$  的方程式為

$$\Gamma \equiv n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0$$

其中  $n_1, n_2, n_3 \in R$  且  $n_1n_2n_3 \neq 0$

接著，我們還需要重心坐標的有向面積比值公式，以轉換本研究所求的有向線段比之引理 1.2 ([6], p.6)。

**引理 1.2** 若正規化的重心坐標  $P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3), R(z_1, z_2, z_3)$ ，則有向面積比值如下：

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

以下證明在  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  (橢圓、拋物線、雙曲線) 下，考慮任意點  $P$  的有向線段比值和的一般式。

**性質 1.1** 任意點  $P(x_1, x_2, x_3)$  構作的有向線段比值和為

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)[(n_2 + n_3)x_1 + (n_1 + n_3)x_2 + (n_1 + n_2)x_3]}{n_1x_2x_3 + n_2x_1x_3 + n_3x_1x_2}$$

證明.

1. 如圖 3-1-1, 令  $P(x_1, x_2, x_3), A(1, 0, 0)$

可得  $\overrightarrow{AP}$  方程式為  $x_3\mu_2 - x_2\mu_3 = 0$

令直線  $\overrightarrow{AP}$  與  $\Gamma$  的交點為  $A'$

依據引理 1.1 求  $A'$  點座標

$$\text{即 } \begin{cases} x_3\mu_2 - x_2\mu_3 = 0 \\ n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0 \end{cases}$$

化簡可得

$$A'(-n_1x_2x_3, x_2(n_2x_3 + n_3x_2), x_3(n_2x_3 + n_3x_2))$$

2. 依據引理 1.2, 考慮有向面積比與有向線段比的轉換

注意到  $B, A, A', P$  點皆需要將重心坐標正規化

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} = \frac{S_{\Delta BAA'}/S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BPA'}/S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta BAA'}}{S_{\Delta BPA'}}$$

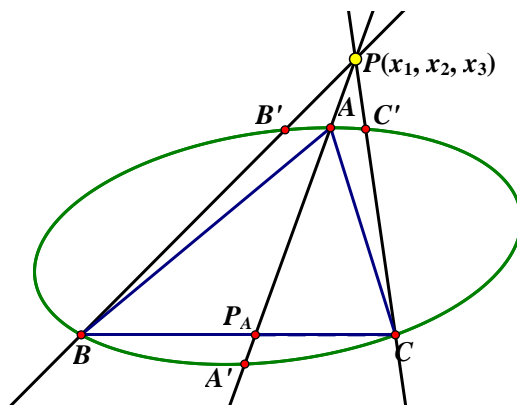
$$\begin{aligned} &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -n_1x_2x_3 & x_2(n_2x_3 + n_3x_2) & x_3(n_2x_3 + n_3x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -n_1x_2x_3 & x_2(n_2x_3 + n_3x_2) & x_3(n_2x_3 + n_3x_2) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(n_2x_3 + n_3x_2)}{n_1x_2x_3 + n_2x_1x_3 + n_3x_1x_2} \end{aligned}$$

再由齊次座標的輪換對稱性可得

$$\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(n_1x_3 + n_3x_1)}{n_1x_2x_3 + n_2x_1x_3 + n_3x_1x_2}, \quad \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(n_1x_2 + n_2x_1)}{n_1x_2x_3 + n_2x_1x_3 + n_3x_1x_2}$$

因此

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)[(n_2 + n_3)x_1 + (n_1 + n_3)x_2 + (n_1 + n_2)x_3]}{n_1x_2x_3 + n_2x_1x_3 + n_3x_1x_2}$$



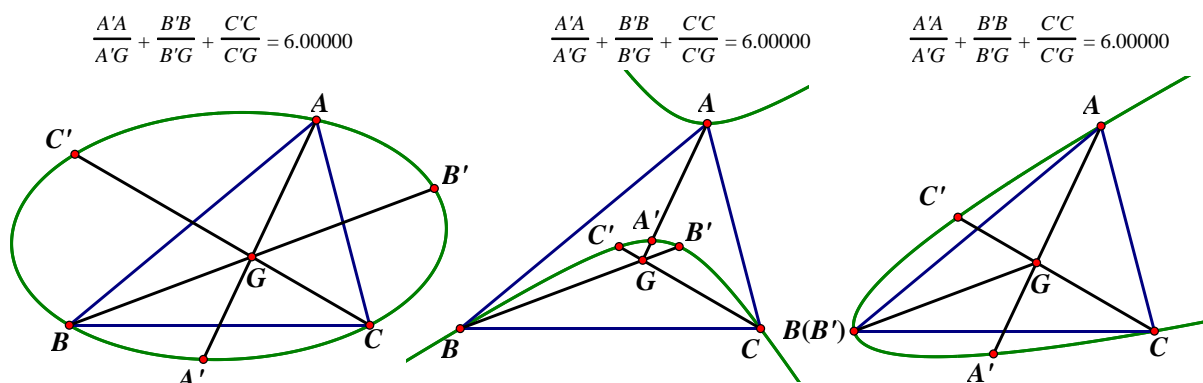
▲ 圖 3-1-1

利用性質 1.1，我們證明了一開始的提問 2 的觀察結果。給定  $\triangle ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$ ，令直線  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$ ，則有以下推論 1.1。

**推論 1.1** 有向線段比值和  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{GA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{GB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{GC'}} = 6$

證明。

令  $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  代入性質 1.1 所得出得一般式，即得可  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{GA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{GB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{GC'}} = 6$



▲圖 3-1-2

## 二、給定「值」對應到「點集合」

我們換個角度看這個問題，給定  $\triangle ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$ ，構造有向線段比值  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}}$ ，再考慮取任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ )，則滿足  $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k$  的  $P$  點的點集合 ( $P$  點的運動軌跡) 是什麼？

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right\}$$

令動點  $P$  的座標  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，給定值為  $k$ ，依據性質 1.1 可得

$$k = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]}{n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2}$$

整理可得， $P$  點滿足

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3] - k(n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2) = 0$$

或寫成矩陣形式

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} n_2 + n_3 & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

因此，滿足有向線段比值和為給定  $k$  值的  $P$  點的點集合為一個「二次曲線」，我們將這個二次曲線稱為生成錐線「 $\Gamma_{3,k}$ 」，其中下標的「3」表示由三角形所構成，「 $k$ 」表示取值  $k$ 。而有以下性質 2.1。

**性質 2.1** 若取任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ )，則滿足  $\frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = k$  的  $P$  點集合為一個二次曲線  $\Gamma_{3,k}$

$$\Gamma_{3,k} \equiv (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3] - k(n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2) = 0$$

### 【討論一】給定不同 $k$ 值，是否影響 $\Gamma_{3,k}$ 的型態？

我們給定不同的值  $k_1, k_2, k_3, \dots$ ，可得出對應的二次曲線  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$ ，又非退化的二次曲線的型態有橢圓、拋物線、雙曲線三種類型，所以我們好奇不同的  $k$  值會不會使得  $\Gamma_{3,k}$  發生形態上的改變呢？

換句話說，我們想知道  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓、拋物線、雙曲線的型態，它是由那些變數所決定？我們要找出  $\Gamma_{3,k}$  的二次曲線判別式。

從射影幾何的觀點，判別二次曲線的型態的方法是討論二次曲線與無窮遠線的相交情形[2]，而有以下引理 2.1。

**引理 2.1** 考慮二次曲線  $\Gamma_{3,k}$  與無窮遠線  $L_\infty$  相交情形，則可判別  $\Gamma_{3,k}$  的型態

- (1)  $\Gamma_{3,k}$  與  $L_\infty$  相離時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓
- (2)  $\Gamma_{3,k}$  與  $L_\infty$  相切時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線
- (3)  $\Gamma_{3,k}$  與  $L_\infty$  相交兩點時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線

接著，我們繼續證明  $\Gamma_{3,k}$  的二次曲線判別式。

**性質 2.2** 非退化二次曲線  $\Gamma_{3,k}$  的型態判別式為

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

- (1)  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓
- (2)  $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線
- (3)  $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線

**證明.**

依據性質 2.1 與引理 2.1，考慮  $\Gamma_{3,k}$  與無窮遠線  $L_\infty$  的相交情形  
不失一般性，令無窮遠線上的點為  $(1, -t, (t-1))$  並代入  $\Gamma_{3,k}$  可得

$$k[t^2(-n_1) + t(n_1 + n_2 - n_3) - n_2] = 0$$

又  $k \neq 0$ ，所以

$$-n_1t^2 + (n_1 + n_2 - n_3)t - n_2 = 0$$

$t$  的有無實根的判別式為

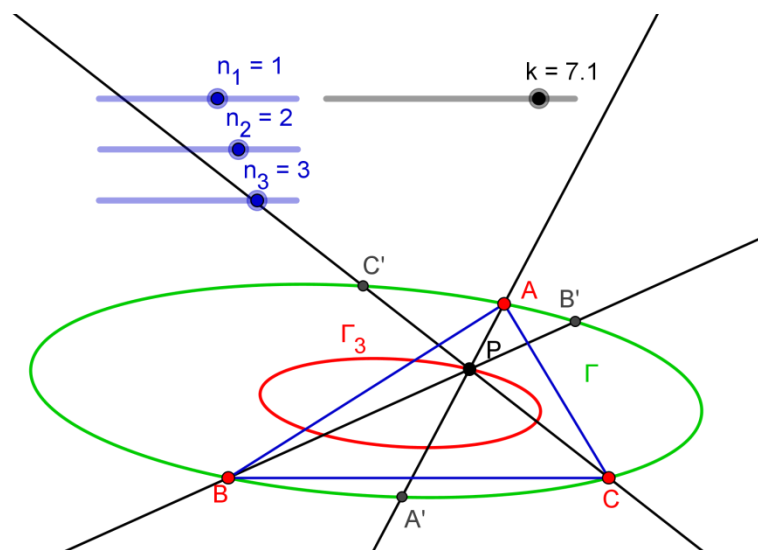
$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

因此

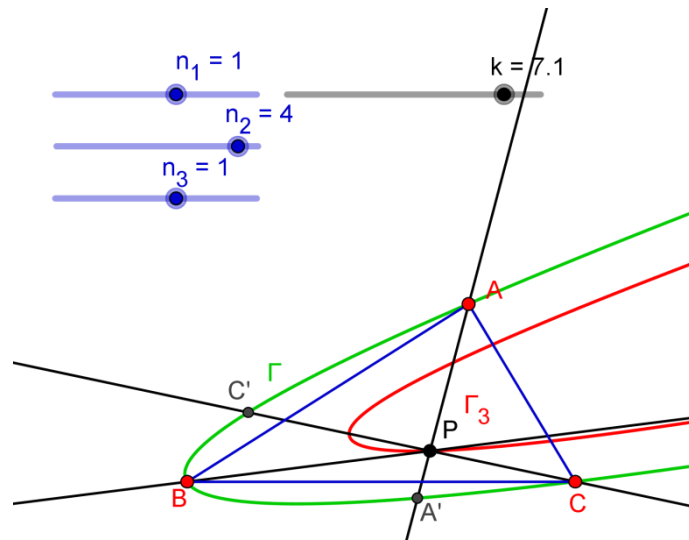
當  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓（圖 3-2-1a）

當  $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線（圖 3-2-1b）

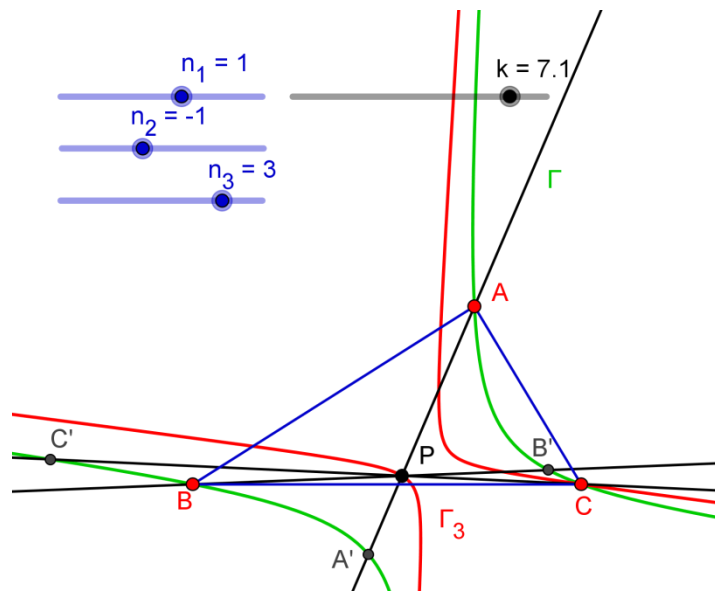
當  $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線（圖 3-2-1c）



▲圖 3-2-1a

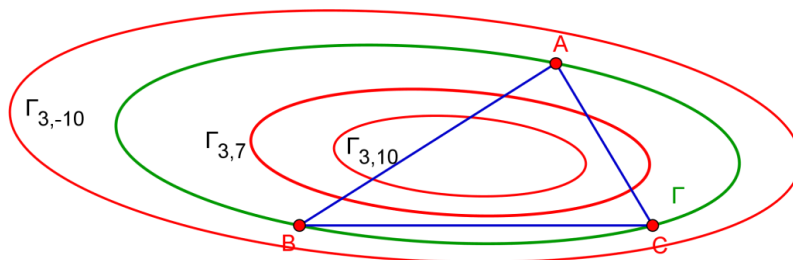


▲圖 3-2-1b



▲圖 3-2-1c

**結果 2.1** 對於所有非退化二次曲線  $\Gamma_{3,k}$  不因  $k$  值影響而改變它的型態。  
 例如：當  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓，不受  $k$  值的影響。

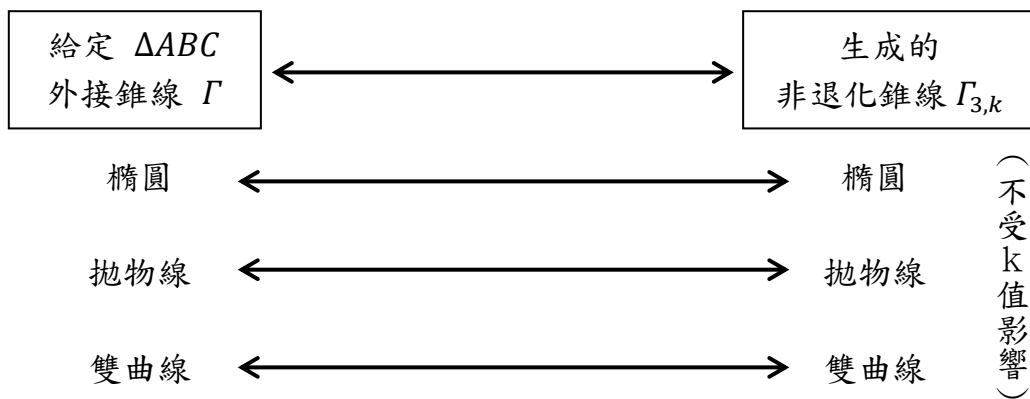


▲圖 3-2-2

**【討論二】給定的外接錐線  $\Gamma$  的型態決定了生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態**

在前面的討論中，我們發現非退化的二次曲線  $\Gamma_{3,k}$  的型態（橢圓、拋物線、雙曲線）不因  $k$  值而產生型變。

我們回頭思考  $\Gamma_{3,k}$  是由  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  所構成，再觀察圖 3-2-1a、圖 3-2-1b、圖 3-2-1c 可以發現給定的外接錐線  $\Gamma$  的型態決定了生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態，如圖 3-1-3，若給定的外接錐線  $\Gamma$  為橢圓，則非退化錐線  $\Gamma_{3,k}$  必為橢圓，反之亦然，以下我們將進行證明。



▲ 圖 3-2-3

**性質 2.3** 給定的  $\Delta ABC$  外接錐線  $\Gamma$  的型態決定了非退化錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態

- (1) 外接錐線  $\Gamma$  為橢圓時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓
- (2) 外接錐線  $\Gamma$  為拋物線時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線
- (3) 外接錐線  $\Gamma$  為雙曲線時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線

**證明.**

由引理 1.1 可得  $\Delta ABC$  的外接錐線  $\Gamma$  的方程式為

$$\Gamma \equiv n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0$$

同樣考慮  $\Gamma$  與無窮遠線  $L_\infty$  的相交情形

不失一般性，令無窮遠線上的點為  $(1, -t, (t-1))$  並代入  $\Gamma$  即可得

$t$  的有無實根的判別式為

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

所以

當  $\Delta < 0$  時， $\Gamma$  即為橢圓

當  $\Delta = 0$  時， $\Gamma$  即為拋物線

當  $\Delta > 0$  時， $\Gamma$  即為雙曲線

至此可知外接錐線  $\Gamma$  與非退化的錐線  $\Gamma_{3,k}$  的二次曲線型態一模一樣  
即得

- (1) 外接錐線  $\Gamma$  為橢圓時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓
- (2) 外接錐線  $\Gamma$  為拋物線時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線
- (3) 外接錐線  $\Gamma$  為雙曲線時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線

### 三、圖形關係：二次曲線 $\Gamma_{3,k}$ 為二次曲線系

前面的討論中，發現給定的  $\triangle ABC$  外接錐線  $\Gamma$  與生成的非退化錐線  $\Gamma_{3,k}$  兩者型態是一樣的。

這一節中，我們將繼續深入討論給定不同  $k_1, k_2, k_3, \dots$  值，其對應的錐線  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$  之間的圖形關係。

從性質 2.1 中可以得知  $\Gamma_{3,k}$  的代數型態，

$$\Gamma_{3,k} \equiv (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3] \\ - k(n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2) = 0$$

顯然， $\Gamma_{3,k}$  是由兩個二次式進行線性組合而構成

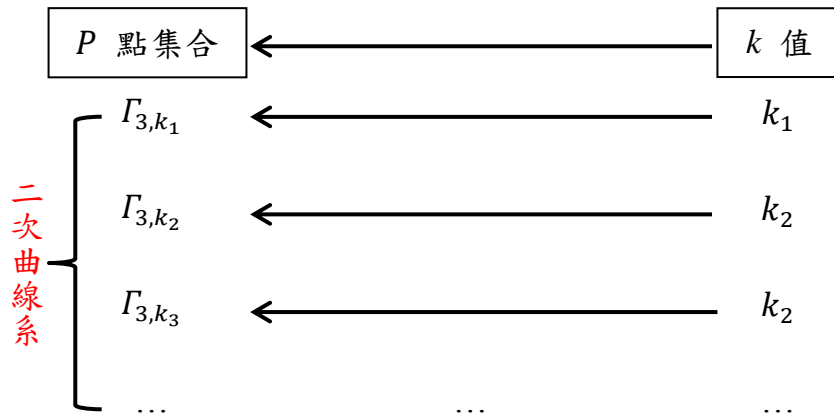
第一個二次式為  $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]$

第二個二次式為  $n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2$

因此， $\Gamma_{3,k}$  構成一個集合即為二次曲線系，而有以下性質 3.1。



$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = k \right\}$$



▲圖 3-3-1

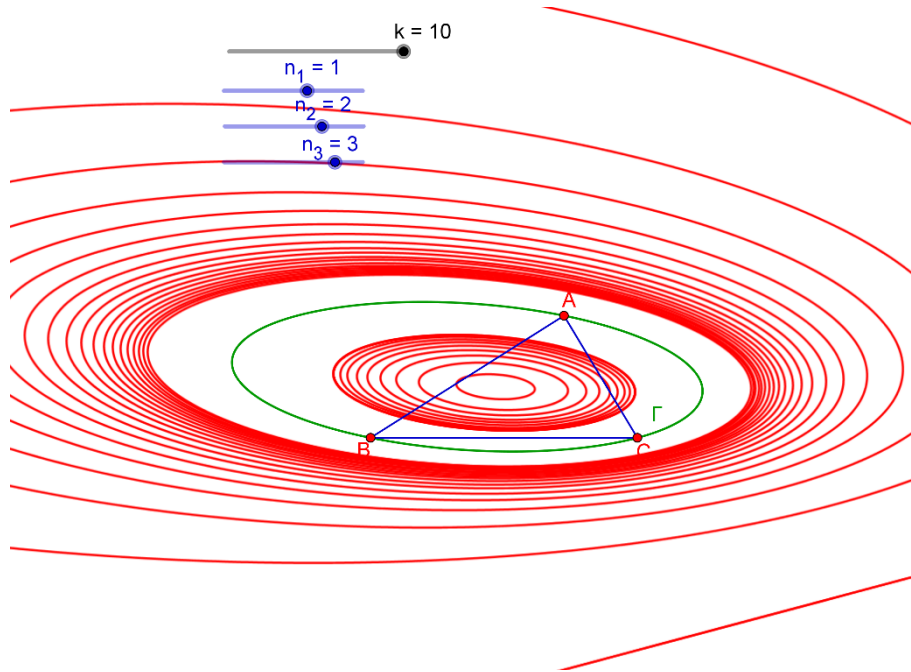
當  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  ( $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$ ) 即為橢圓系

當  $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  ( $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$ ) 即為拋物線系

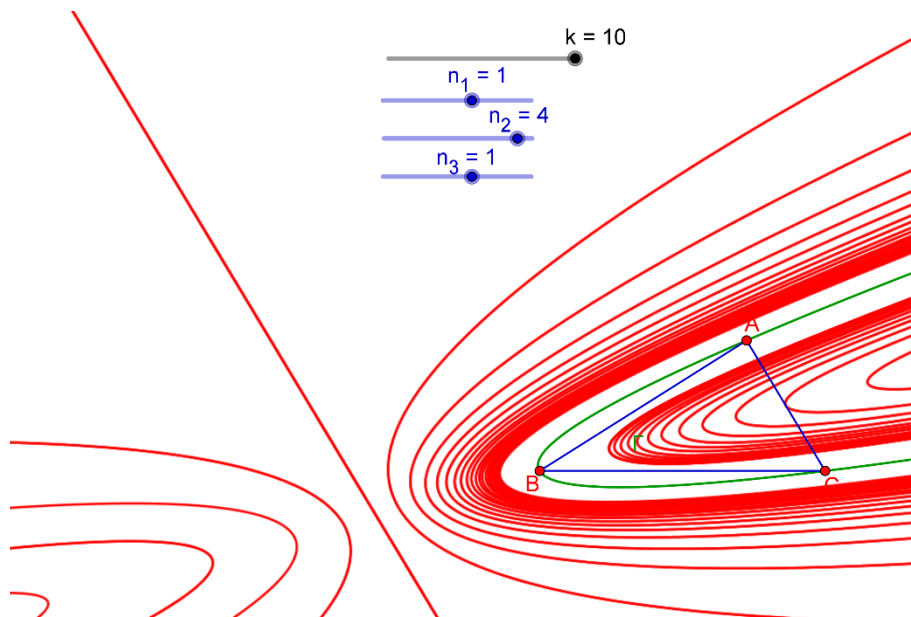
當  $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  ( $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$ ) 即為雙曲線系

**性質 3.1** 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  是一個二次曲線系

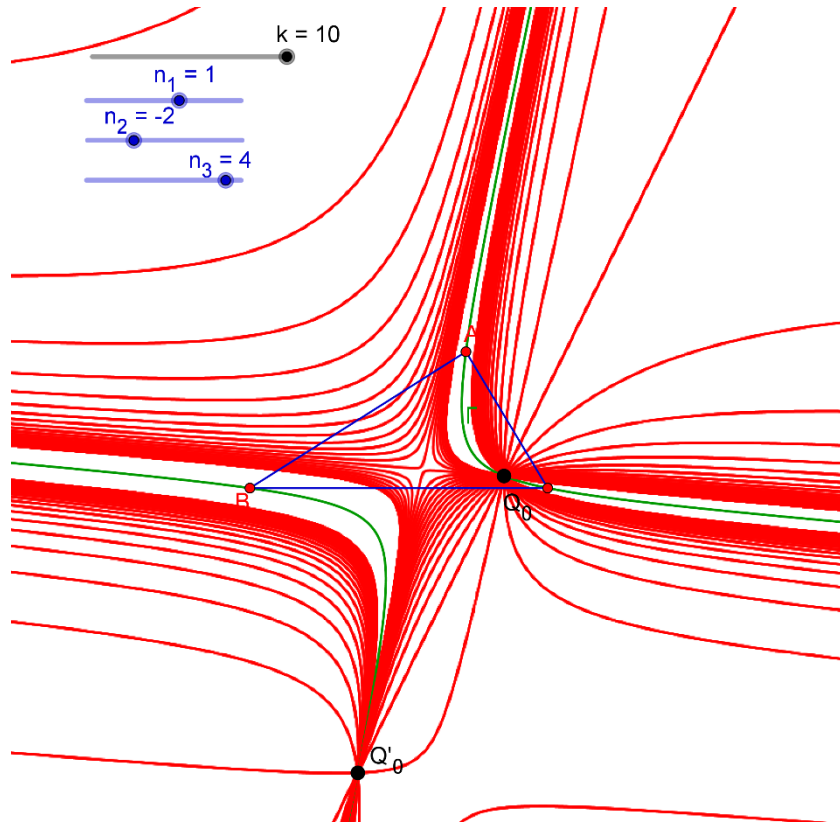
下圖為利用 GeoGebra 分別模擬  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓系 (圖 3-3-2)、拋物線系 (圖 3-3-3)、雙曲線系 (圖 3-3-4)。其中， $k$  的取值為  $-10 \leq k \leq 10$ ，每次增量 0.5。



▲圖 3-3-2



▲圖 3-3-3



▲圖 3-3-4

觀察生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓系 (圖 3-3-2)、拋物線系 (圖 3-3-3)、雙曲線系 (圖 3-3-4) 的圖可以發現,  $\Gamma_{3,k}$  有退化的情形, 這也是我們接下來要研究的事情。不過, 我們先討論  $\Gamma_{3,k}$  二次曲線系的結構。

$$\Gamma_{3,k} \equiv (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3] - k(n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2) = 0$$

從代數式中可以得出  $\Gamma_{3,k}$  二次曲線系是通過兩個二次曲線的「四個交點」的錐線：

其一是, 外接錐線  $\Gamma \equiv n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0$

另一是, 兩相交直線  $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3] = 0$

兩相交直線的其中一條為  $L_\infty: \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ , 另一條直線  $(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3 = 0$  是構成二次曲線系的特殊曲線, 所以我們將其定義, 如定義 3.1。

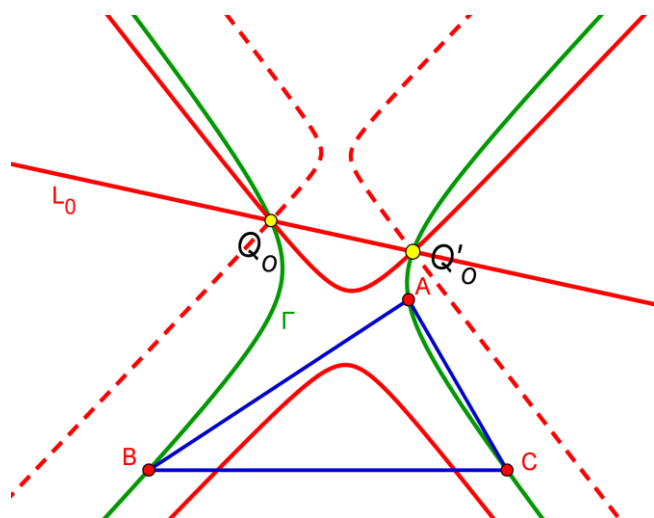
**定義 3.1** 給定  $\Delta ABC$  及其外接錐線  $\Gamma$ ，直線  $(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3 = 0$  定義為  $L_0$  直線

我們得出當給定  $\Delta ABC$  及其外接錐線  $\Gamma$  下，再取不同的  $k$  值  $k_1, k_2, k_3, \dots$ ，其對應的錐線  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \Gamma_{3,k_3}, \dots$  之間的圖形關係，如推論 3.1。

**推論 3.1** 錐線  $\Gamma_{3,k}$  是一個二次曲線系，它們彼此只通過四個共同交點。這四個交點分別是：

其一，外接錐線  $\Gamma$  與無窮遠線  $L_\infty$  的兩個交點，這兩個交點稱為  $Q_\infty$  與  $Q'_\infty$

其二，外接錐線  $\Gamma$  與直線  $L_0$  的兩個交點，這兩個交點稱為  $Q_0$  與  $Q'_0$



▲圖 3-3-5

**推論 3.2** 由基本定義可得四點  $Q_\infty, Q'_\infty, Q_0, Q'_0$  的  $k$  值為未定式，即

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{QA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{QB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{QC'}} = k = \frac{0}{0}$$

**【討論】四點  $Q_\infty, Q'_\infty, Q_0, Q'_0$  的為實點、虛點的判別**

關於二次曲線系  $\Gamma_{3,k}$  的四個共同交點，我們由前面知道  $Q_\infty$  與  $Q'_\infty$  為外接錐線  $\Gamma$  與無窮遠線  $L_\infty$  交點，所以可用  $\Delta$  來判定：

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

$\Delta < 0$  時， $Q_\infty$  與  $Q'_\infty$  皆為虛交點；

$\Delta = 0$  時， $Q_\infty$  與  $Q'_\infty$  皆為實交點（重根）；

$\Delta > 0$  時， $Q_\infty$  與  $Q'_\infty$  為兩相異實交點；

我們利用一樣的方法找出  $Q_0$  與  $Q'_0$  的實虛點之判別式，即解外接錐線  $\Gamma$  與直線  $L_0$  的聯立方程式可得性質 3.2。

$$\begin{cases} (n_1 + n_2)\mu_3 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_2 + n_3)\mu_1 = 0 \\ n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0 \end{cases}$$

**性質 3.2**  $Q_0$  與  $Q'_0$  的實虛點之判別式為  $\delta = -n_1n_2n_3(n_1 + n_2 + n_3) < 0$

(1)  $\delta < 0$  時， $Q_0$  與  $Q'_0$  皆為虛交點

(2)  $\delta = 0$  時， $Q_0$  與  $Q'_0$  皆為實交點（重根）

(3)  $\delta > 0$  時， $Q_0$  與  $Q'_0$  為兩相異實交點

我們利用給定  $\Delta$  的取值（正、負、0），可以求出  $\delta$  的範圍，再依據性質 3.2 而有以下推論 3.3。

### 推論 3.3

(1) 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  是橢圓系時，它們的四個共同交點恆為四個虛交點。

(2) 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  是拋物線系時，它們的四個共同交點恆為兩重根實交點、兩個虛交點。

(3) 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  是雙曲線系時，它們的四個共同交點恆為四個實交點。

## 四、直觀幾何意義： $\Delta ABC$ 、外接錐線 $\Gamma$ 、與生成錐線 $\Gamma_{3,k}$

在先前的研究中，我們找出了幾個重要的事實發現：

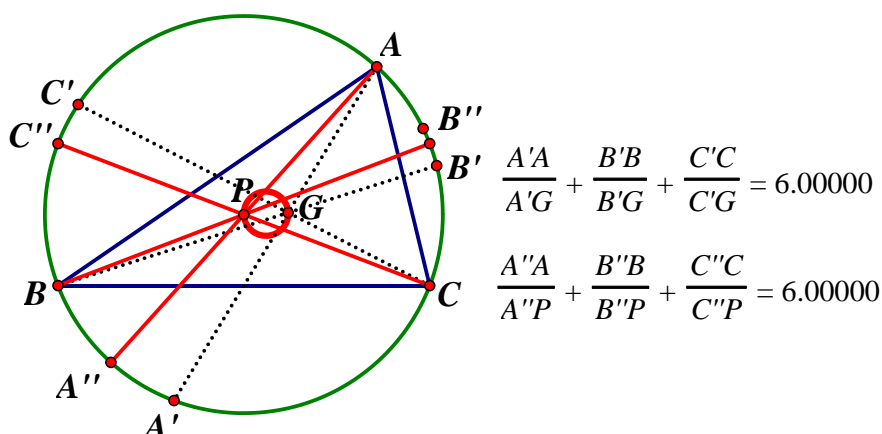
事實一：生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態被外接錐線  $\Gamma$  所決定（兩者同樣型態，二次曲線的判別式相同）， $\Gamma_{3,k}$  不受  $k$  值的改變而產生型態變換。

事實二：給定不同的  $k$  值， $\Gamma_{3,k}$  為二次曲線系，通過四個交點  $Q_\infty, Q'_\infty, Q_0, Q'_0$ 。

我們找出生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  本身的結構，也知道外接錐線  $\Gamma$  與生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的關係，但是它們跟  $\Delta ABC$  的關係是什麼呢？

好奇有沒有更簡潔的圖形表徵可以表示  $\Delta ABC$ 、外接錐線  $\Gamma$ 、與生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  呢？

回到一開始的觀察圖中，我們發現了最原始的圖形表徵：重心與圓心。



▲圖 3-4-1

因應二次曲線，我們採用

- (1)  $\Delta ABC$  的重心  $G$  來代表  $\Delta ABC$
- (2) 外接錐線  $\Gamma$  的中心  $O$  來代表  $\Gamma$
- (3) 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的中心  $O_{3,k}$  來代表  $\Gamma_{3,k}$

我們將問題轉化為研究「重心  $G$ 、中心  $O$ 、中心  $O_{3,k}$  三者位置關係」。

重心  $G$  的座標為  $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，以下將求出中心  $O$ 、中心  $O_{3,k}$  的座標。

為了找出中心  $O$ 、中心  $O_{3,k}$  座標，我們將使用引理 4.1 ([3], p.402)。

**引理 4.1** 無窮遠線  $L_\infty$  對二次曲線的極點是二次曲線的中心

**性質 4.1** 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  中心  $O_{3,k}$  的重心座標

$$O_{3,k} \begin{pmatrix} (n_1(s - n_1)(k - 1) + 2(s - n_2)(s - n_3)), \\ (n_2(s - n_2)(k - 1) + 2(s - n_1)(s - n_3)), \\ (n_3(s - n_3)(k - 1) + 2(s - n_1)(s - n_2)) \end{pmatrix}$$

**證明.**

令錐線  $\Gamma_{3,k}$  的中心為  $O_{3,k}(x_1, x_2, x_3)$

依據性質 2.1 可知  $\Gamma_{3,k}$  的係數矩陣為

$$\begin{bmatrix} n_2 + n_3 & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

可得  $O_{3,k}$  的極線為

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 2(n_2 + n_3) & n_1 + n_2 + (2-k)n_3 & n_1 + n_3 + (2-k)n_2 \\ n_1 + n_2 + (2-k)n_3 & 2(n_1 + n_3) & n_2 + n_3 + (2-k)n_1 \\ n_1 + n_3 + (2-k)n_2 & n_2 + n_3 + (2-k)n_1 & 2(n_1 + n_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

依據引理 4.1 中心  $O_{3,k}$  的極線為無窮遠線

化簡可得聯立方程

$$\begin{cases} (n_1 - n_2 - kn_3)x_1 + (n_1 - n_2 + kn_3)x_2 + (n_1 - n_2)(1-k)x_3 = 0 \\ (n_2 - n_3)(1-k)x_1 + (n_2 - n_3 - kn_1)x_2 + (n_2 - n_3 + kn_1)x_3 = 0 \end{cases}$$

再解  $x_1, x_2, x_3$

可得  $O_{3,k}$  的重心座標

$$O_{3,k}(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \begin{pmatrix} ((k-1)(n_1n_2 + n_1n_3 - n_1^2) + (n_1 + n_2 - n_3)(n_1 - n_2 + n_3)), \\ ((k-1)(n_1n_2 + n_2n_3 - n_2^2) + (-n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + n_2 - n_3)), \\ ((k-1)(n_1n_3 + n_2n_3 - n_3^2) + (n_1 - n_2 + n_3)(-n_1 + n_2 + n_3)) \end{pmatrix}$$

令  $s = \frac{n_1+n_2+n_3}{2}$  可得

$$O_{3,k}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (n_1(s - n_1)(k-1) + 2(s - n_2)(s - n_3)), \\ (n_2(s - n_2)(k-1) + 2(s - n_1)(s - n_3)), \\ (n_3(s - n_3)(k-1) + 2(s - n_1)(s - n_2)) \end{pmatrix}$$

**性質 4.2** 可得出  $\Gamma$  中心  $O$  的重心座標

$$O(n_1(s - n_1), n_2(s - n_2), n_3(s - n_3))$$

證明. 與性質 4.1 的方法相同。

**性質 4.3** 共線性： $\Delta ABC$  的重心  $G$ 、 $\Gamma$  中心  $O$ 、 $\Gamma_{3,k}$  中心  $O_{3,k}$  共線

證明。

考慮  $G$  點、 $O$  點、 $O_{3,k}$  點所形成的三角形面積（圖 3-4-2）

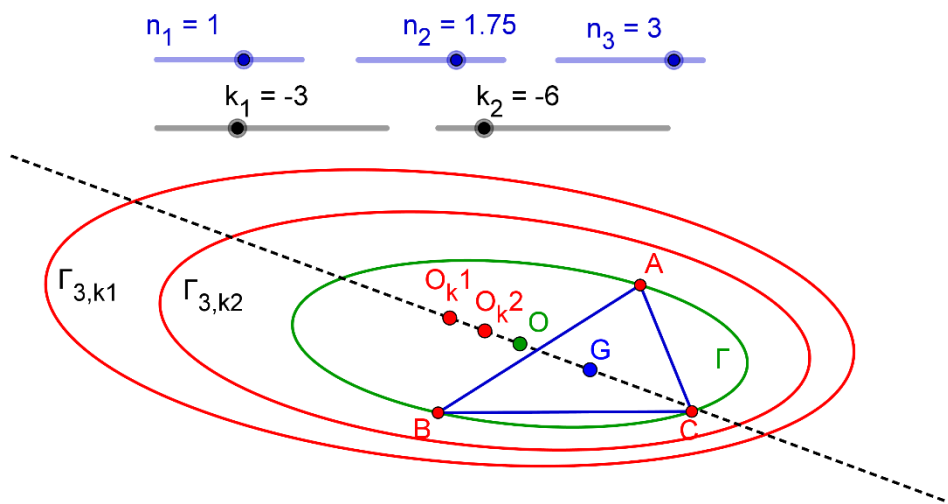
$$\Delta GOO_{3,k} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} n_1(s-n_1) & n_2(s-n_2) & n_3(s-n_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ n_1(s-n_1)(k-1) & n_2(s-n_2)(k-1) & n_3(s-n_3)(k-1) \\ +2(s-n_2)(s-n_3) & +2(s-n_1)(s-n_3) & +2(s-n_1)(s-n_2) \end{vmatrix}$$

其中， $s = \frac{n_1+n_2+n_3}{2}$

將第一行  $\times (-1)$  加到二、三行，降階化簡可得

$$\Delta GOO_{3,k} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (n_1-n_2)(s-n_3) & (n_1-n_3)(s-n_2) \\ (k-3)(n_1-n_2)(s-n_3) & (k-3)(n_1-n_3)(s-n_2) \end{vmatrix} = 0$$

所以， $\Delta ABC$  的重心  $G$  點、 $\Gamma$  中心  $O$  點、 $\Gamma_{3,k}$  中心  $O_{3,k}$  點多點共線



▲ 圖 3-4-2

**【討論一】**  $G$  點、 $O$  點、 $O_{3,k}$  點，三者有向距離比為何？

證明共線性後，我們更想進一步知道  $G$  點、 $O$  點、 $O_{3,k}$  點，三者有向距離比為何？

因為當給定的  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  後， $\overline{OG}$  就固定（為定值），再給任意  $k$  值（ $k_1, k_2, k_3, \dots$ ），其中心  $O_{3,k}$  就會隨之運動， $O_{3,k}$  運動的方向及距離被什麼決定呢？

以下我們證明了共線的  $G$  點、 $O$  點、 $O_{3,k}$  點，三點的有向線段比值。



**性質 4.4**  $\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{OO_{3,k}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{k}$ ，其中  $O$  點與  $G$  點不重合

證明.

由性質 4.3 可得  $G$  點、 $O$  點、 $O_{3,k}$  點共線

先將此三點坐標正規化後

$$G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$O = A(n_1(s - n_1), n_2(s - n_2), n_3(s - n_3))$$

$$O_k = kA \begin{pmatrix} (n_1(s - n_1)(k - 1) + 2(s - n_2)(s - n_3)), \\ (n_2(s - n_2)(k - 1) + 2(s - n_1)(s - n_3)), \\ (n_3(s - n_3)(k - 1) + 2(s - n_1)(s - n_2)) \end{pmatrix}$$

其中  $A = n_1(s - n_1) + n_2(s - n_2) + n_3(s - n_3)$

再考慮

$$\overrightarrow{O_k} = h\overrightarrow{O} + (1 - h)\overrightarrow{G}$$

接著解  $h$

因為輪換對稱性，僅需將三個點的重心坐標第一個分量坐標代入即可求出  $h$

即

$$\frac{n_1(s - n_1)(k - 1) + 2(s - n_2)(s - n_3)}{kA} = h \times \frac{n_1(s - n_1)}{A} + \frac{1 - h}{3}$$

化簡可得  $h = \frac{k-3}{k}$

所以

$$\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{OO_{3,k}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{k}$$



### 【討論二】 $O_{3,k}$ 點的運動方向

我們發現  $\Delta ABC$ 、外接錐線  $\Gamma$ 、以及生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的結構關係（圖 3-4-3），若用重心、中心來代表它們，結果十分簡潔漂亮！

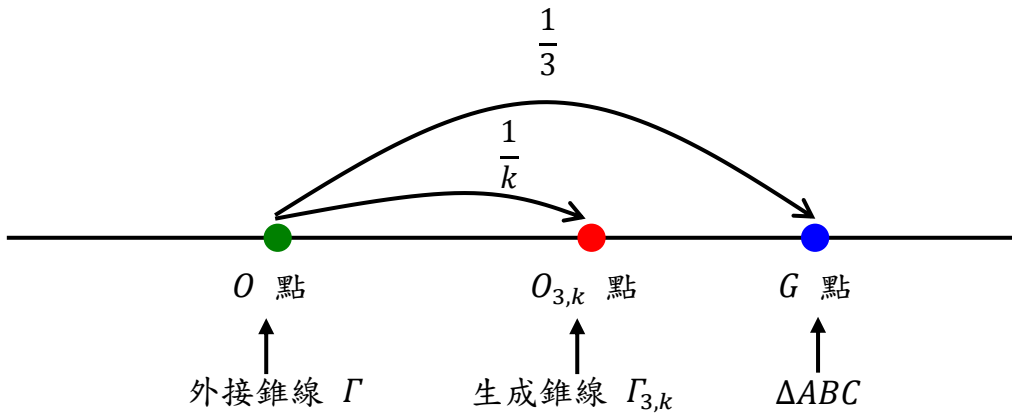
如圖 4-1-3，給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$  後， $O$  點與  $G$  點位置固定且  $\overrightarrow{OG}$  則為定值，此時，考慮取不同的  $k$  值

(1) 當  $k > 0$  時

$O_{3,k}$  介於  $O$  點與  $G$  點之間，且  $k \rightarrow +\infty$  時， $O_{3,k}$  趨近  $O$  點。

(2) 當  $k < 0$  時

$O_{3,k}$  與  $G$  點分別在與  $O$  點異側，且  $k \rightarrow -\infty$  時， $O_{3,k}$  趨近  $O$  點。



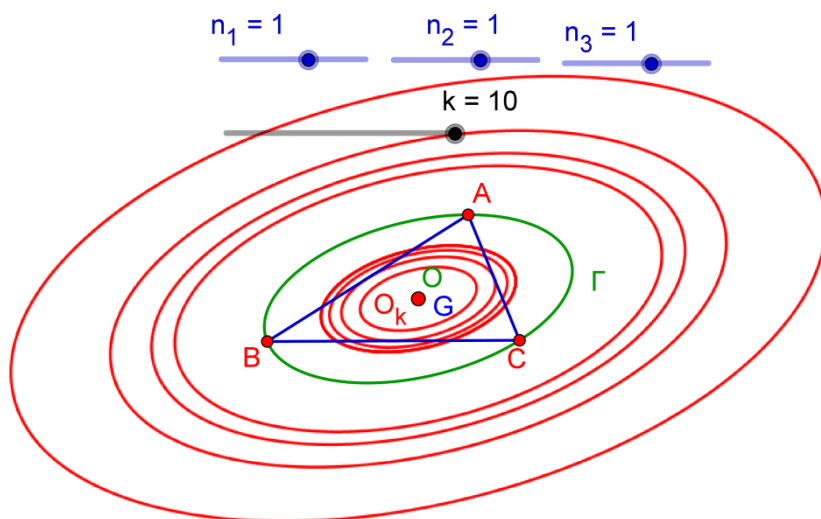
▲圖 3-4-3

**【討論三】  $O$  點與  $G$  點重合時， $O_{3,k}$  的位置在哪裡？**

當  $\Delta ABC$  的重心  $G$  點與其外接錐線  $\Gamma$  中心  $O$  點重合時，外接錐線  $\Gamma$  即為 Steiner 橢圓（過  $\Delta ABC$  三個頂點的外接橢圓中，若該橢圓面積最小，若且唯若該橢圓的中心為  $\Delta ABC$  的重心，該橢圓稱為 Steiner 橢圓），可推得

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1。$$

依據性質 4.1，將  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  代回求得  $O_{3,k}(1,1,1)$ ，因此， $O$  點與  $G$  點重合時， $O_{3,k}$  也會與  $O$  點和  $G$  點三點重合（圖 3-4-4）。



▲圖 3-4-4

## 五、生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的退化與 $k$ 值的跳躍現象

我們在給定  $\Delta ABC$  的外接錐線  $\Gamma$  為橢圓時，發現了一個有趣的現象：「 $k$  值有跳躍情形」， $k$  值在某些區間會使得生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的像為空集合！

舉例，以  $(n_1, n_2, n_3) = (1, 2, 2)$  的橢圓  $\Gamma$  來模擬觀察（圖 3-5-1）

取  $k = 7$  時，生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓

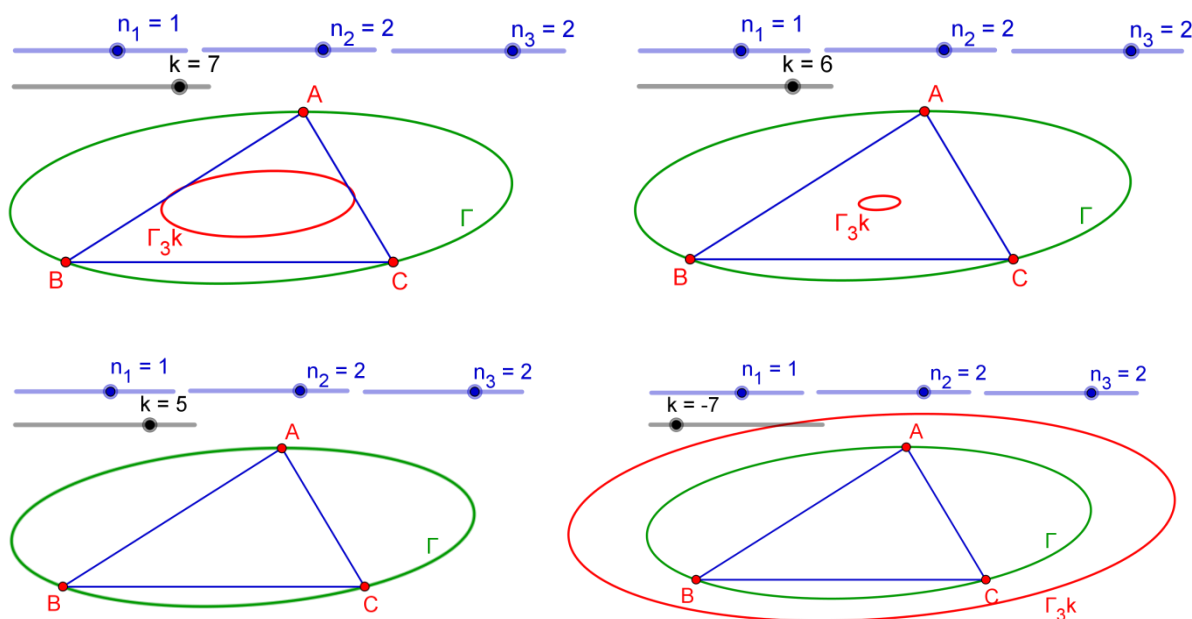
取  $k = 6$  時，生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓

取  $k = 5$  時，生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為空集合

取  $k = -7$  時，生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓

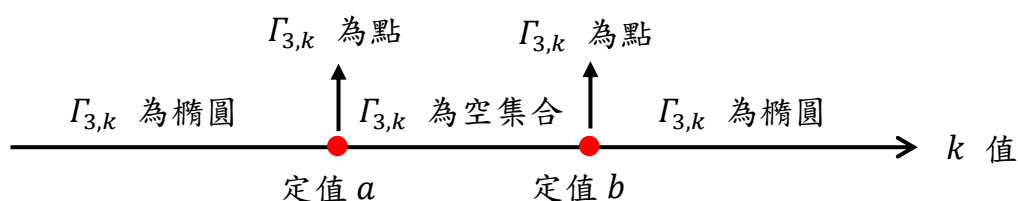
我們猜測  $k$  的取值範圍對於生成橢圓  $\Gamma_{3,k}$  圖形的退化的結構如圖 3-5-2。

將  $k$  值在開區間  $(a, b)$  的變換可看作一種「跳躍」現象，因為在該區間使得橢圓  $\Gamma_{3,k}$  沒有圖形（空集合）。



▲圖 3-5-1

給定  $\Delta ABC$  的外接錐線  $\Gamma$  為橢圓下， $\Gamma_{3,k}$  的變化



▲圖 3-5-2 (猜測)

以下開始進行生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  退化 ( $k$  值) 的研究。

因為生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的係數矩陣為實對稱矩陣，又因實對稱矩陣的特徵值皆為實數，可正交對角化 (orthogonally diagonalizable)，以下我們利用典型線性代數的方法進行「變換變數」([1], p.102-126)，來求出  $\Gamma_{3,k}$  退化的情形。

$\Gamma_{3,k} \equiv$

$$[\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3] \begin{bmatrix} n_2 + n_3 & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

### 【討論一】變數轉換後，何時 $\Gamma_{3,k}$ 會退化？

我們參考文獻[1]，列出利用矩陣對角化處理二次式的步驟及原理，而得出以下性質 5.1。

$$\text{令 } U = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} n_2 + n_3 & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

則

$$\Gamma_{3,k} \equiv U^T A U = 0$$

因為  $A$  為實對稱矩陣，所以可正交對角化，即

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

考慮變數變換

$$U = P V \left( \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \right)$$

則可將  $\Gamma_{3,k}$  寫成

$$U^T A U = (P V)^T A (P V) = V^T P^T A P V = V^T D V = 0$$

也就是

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 = 0$$

其中， $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是矩陣 A 的特徵值

**性質 5.1** 生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  皆可透過變數變換寫成三項平方和之型式

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 = 0$$

我們討論  $\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 = 0$  退化的情形

顯然，特徵值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不可能全部為 0（全部為 0 則任意點都符合方程式）  
所以，考慮特徵值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  其中一個或兩個為 0

(A) 若其中一個為零，不失一般性，令  $\lambda_1 = 0$ ，則

(a)  $\lambda_2$  與  $\lambda_3$  同號，此時圖形為  $v_2 = 0$  且  $v_3 = 0$  這一點。

(b)  $\lambda_2$  與  $\lambda_3$  異號，利用平方差，可知此時圖形兩相交直線。

(B) 若其中兩個為零，不失一般性，令  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ，則此時圖形為  $v_3 = 0$  這一條線。

**性質 5.2** 當生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  退化為一點，或兩相交直線，或一直線時，

$$k = 0, k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$$

其中， $\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3)$ 、 $\delta = -n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3)$

證明。

$$\Gamma_{3,k} \equiv U^T A U = 0$$

因為係數矩陣 A 的特徵值  $\lambda$  至少其中一個為零

將  $\lambda = 0$  代入矩陣 A 特徵方程式

$$\begin{bmatrix} n_2 + n_3 - \lambda & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 - \lambda & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

可得

$$\begin{bmatrix} n_2 + n_3 & \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} \\ \frac{n_1 + n_2 + (2-k)n_3}{2} & n_1 + n_3 & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} \\ \frac{n_1 + n_3 + (2-k)n_2}{2} & \frac{n_2 + n_3 + (2-k)n_1}{2} & n_1 + n_2 \end{bmatrix} = 0$$

換句話說，生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  退化等價於其係數矩陣 A 行列式值為零

利用 WolframAlpha 網站計算解  $k$  值

$$k(n_1 n_2 n_3 k^2 - 6n_1 n_2 n_3 k + n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 - n_1^2(n_2 + n_3) - n_2^2(n_1 + n_3) - n_3^2(n_1 + n_2) + 3n_1 n_2 n_3) = 0$$

所以

$$k=0$$

或

$$k=3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$$

其中  $\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3)$

$$\delta = -n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3)$$

■

使得生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  退化的  $k$  值有三個值  $0, 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$ ，其中  $3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  中的  $\Delta$  是錐線  $\Gamma$  與直線  $L_\infty$  的相交情形的判別式， $\delta$  是錐線  $\Gamma$  與直線  $L_0$  的相交情形的判別式。

我們還發現一個特殊的結果，從性質 5.2 可知，無論  $n_1, n_2, n_3$  的取值情形如何， $k=0$  都會使得所有生成錐線  $\Gamma_{3,k}$ （無論是橢圓類、拋物線類、雙曲線類）退化成兩相交直線（一般來說，只有雙曲線會退化為兩相交直線），其中一條是

無窮遠線  $L_\infty: \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ ，另一條直線則是  $L_0: (n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3 = 0$ 。

**性質 5.3** 無論  $\Gamma_{3,k}$  為無論是橢圓類、拋物線類、雙曲線，若  $k = 0$ ，若且唯若  $\Gamma_{3,k}$  退化為兩相交直線（無窮遠直線  $L_\infty$ 、直線  $L_0$ ）

證明.

因為

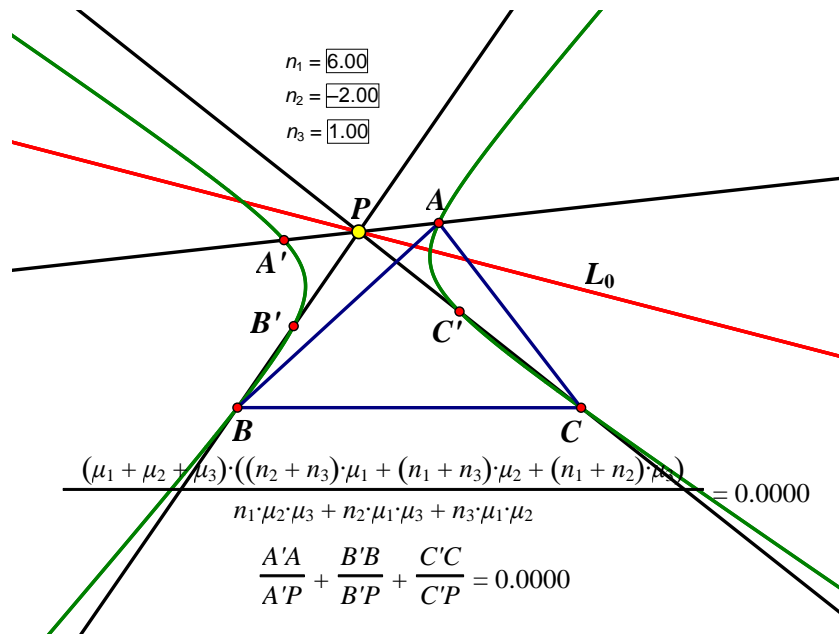
$$\Gamma_{3,k} \equiv \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]}{n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2} = k$$

$k = 0 \Leftrightarrow$

$\Gamma_{3,k}$  為無窮遠線  $L_\infty: \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$

或  $L_0: (n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3 = 0$

（如圖 5-1-3，因無窮遠線無法顯示於歐式平面上，所以圖 3-5-3 僅有直線  $L_0$ ）



▲ 圖 3-5-3

**【討論二】**生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的退化值  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$  是否必為實數（必然存在）？

我們要繼續問的問題是， $\Gamma_{3,k}$  的退化值  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$  是否必為實數？等價

於討論  $\sqrt{\Delta\delta}$  是否為實數。

因為給定外接錐線是  $\Gamma$ ，可依據性質 2.2 得出判別式  $\Delta$

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

Case1  $\Gamma$  是雙曲線時

$\Gamma$  是雙曲線時， $\Delta > 0$ 。此時直線  $L_0$  與外接錐線  $\Gamma$  必有兩個交點（由性質 3.1 得知直線  $L_0$  不是外接錐線  $\Gamma$  的漸近線），所以  $\delta > 0$ ，得出  $\sqrt{\Delta\delta} \in \mathbb{R}$ 。

Case2  $\Gamma$  是拋物線時

$\Gamma$  是拋物線時， $\Delta = 0$ 。此時， $\sqrt{\Delta\delta} = 0$ ，即  $\sqrt{\Delta\delta} \in \mathbb{R}$ 。

Case3  $\Gamma$  是橢圓時

$\Gamma$  是橢圓時， $\Delta < 0$ 。接著，我們只要確認  $\delta = -n_1n_2n_3(n_1 + n_2 + n_3)$  的正負性質即可。我們發現  $\delta$  必小於 0，即  $\sqrt{\Delta\delta} \in \mathbb{R}$ ，以下是我們的證明：

**性質 5.4** 所有生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的退化值  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$  必為實數（必然存在）

證明。

1. 給定外接二次曲線  $\Gamma$  是雙曲線或拋物線時，由前面討論可證明  $\Gamma_{3,k}$  的退化值

$$k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3} \text{ 必為實數（必然存在）}$$

2. 考慮給定外接二次曲線  $\Gamma$  是橢圓，可得

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3) < 0$$

化簡不等式可得兩種情況

$$(1) n_1 > 0, n_2 > 0, (n_1 + n_2 - 2\sqrt{n_1n_2}) < n_3 < (n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1n_2})$$

$$(2) n_1 < 0, n_2 < 0, (n_1 + n_2 - 2\sqrt{n_1n_2}) < n_3 < (n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1n_2})$$

Case1  $n_1 > 0, n_2 > 0$  時

$$\text{顯然，} n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1n_2} > 0$$

$$\text{再由算幾不等式可得 } n_1 + n_2 - 2\sqrt{n_1n_2} > 0$$

$$\text{所以，} n_3 > 0$$



Case2  $n_1 < 0, n_2 < 0$  時

$$\text{顯然, } n_1 + n_2 - 2\sqrt{n_1 n_2} < 0$$

$$\text{再由算幾不等式可得 } (-n_1) + (-n_2) - 2\sqrt{n_1 n_2} > 0$$

$$\text{所以 } n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1 n_2} < 0$$

$$\text{因此, } n_3 < 0$$

由 Case1 和 Case2 得知  $n_1, n_2, n_3$  同號

推得

$$\delta = -n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3) < 0$$

所以

$$\Delta\delta > 0$$

即, 橢圓  $\Gamma_{3,k}$  的退化值  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  必為實數

所有生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的退化值  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  必為實數 (必然存在)



**【舉例】橢圓  $(n_1, n_2, n_3) = (5, 2, 2)$**

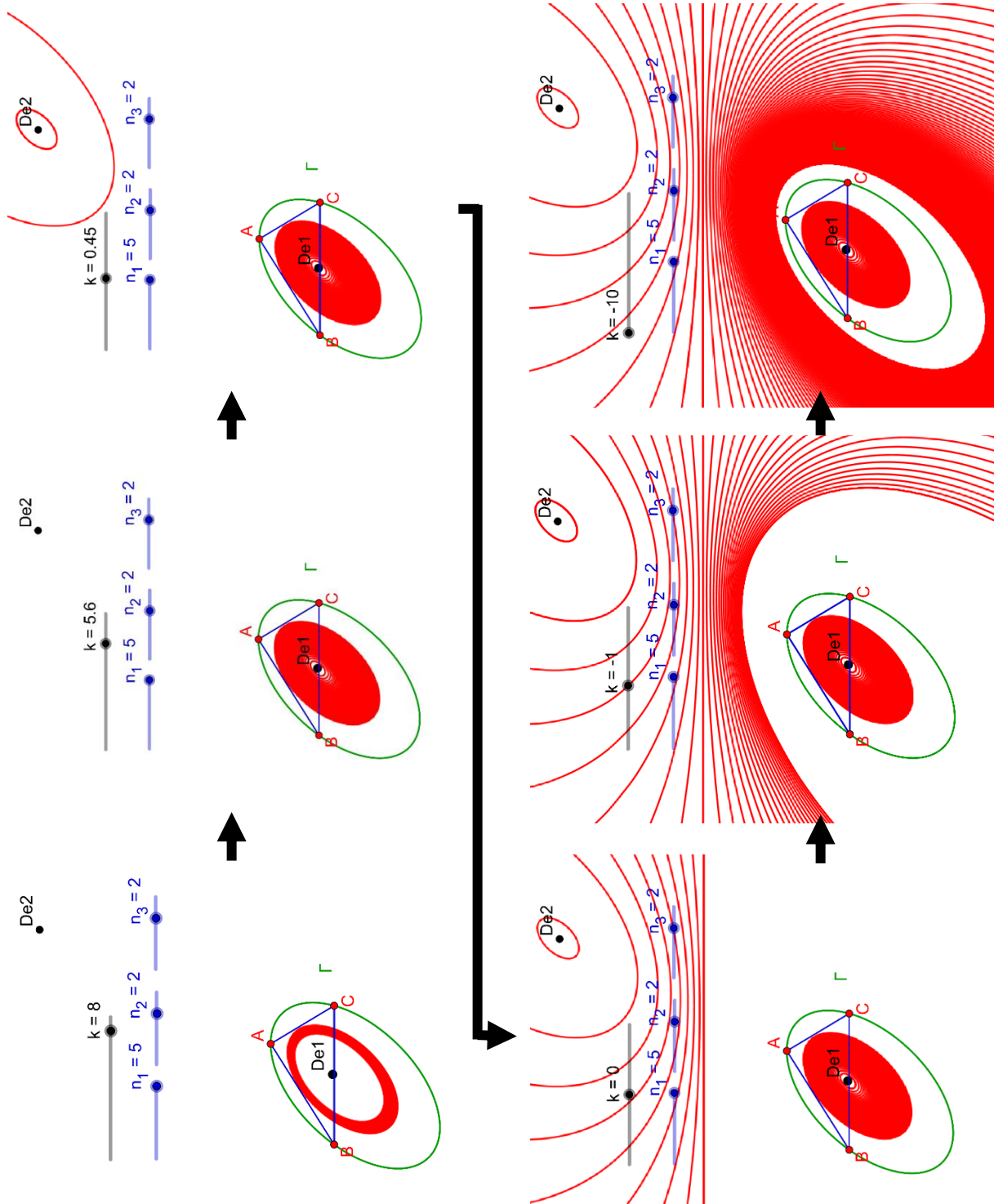
$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3) = -15$$

$$\delta = -n_1 n_2 n_3 (n_1 + n_2 + n_3) = -180$$

$$\text{可得 } k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3} = \frac{6 \pm \sqrt{27}}{2}$$

利用 GeoGebra 模擬橢圓  $\Gamma_{3,k}$  退化為點之情形 (圖 3-5-4)。其中,  $k$  的取值為  $-10 \leq k \leq 10$ , 每次增量 0.05。

圖 5-1-4 中的黑色的點 De1 和黑色的點 De2 為兩個退化的點。



▲圖 3-5-4

**推論 5.1**  $k=3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  使得生成橢圓  $\Gamma_{3,k}$  退化為兩個點

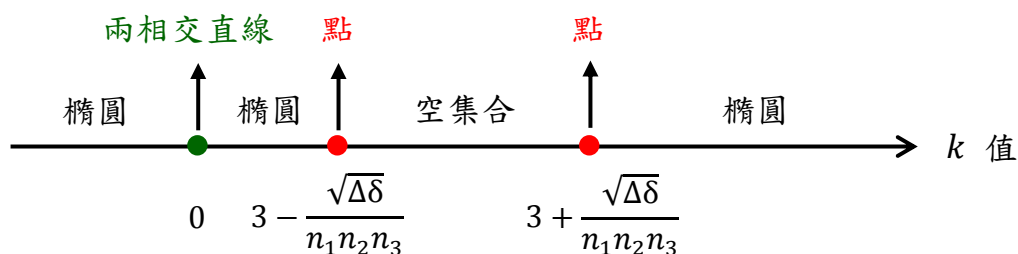
**推論 5.2** 生成橢圓  $\Gamma_{3,k}$  的  $k$  值存在不連續區間的跳躍現象

證明. 由性質 5.4 即可得知。

至此，我們證明了觀察到的橢圓  $\Gamma_{3,k}$  中， $k$  值「跳躍」現象。

如圖 3-5-4，特殊的是， $3 - \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3} < k < 3 + \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$  為跳躍不連續的區間。

這是  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓才有的現象！我們再利用 WolframAlpha 網站求得在橢圓  $\Gamma_{3,k}$  的條件下， $-3 < \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3} < 3$ ，所以可得出圖 3-5-5。



▲ 圖 3-5-5

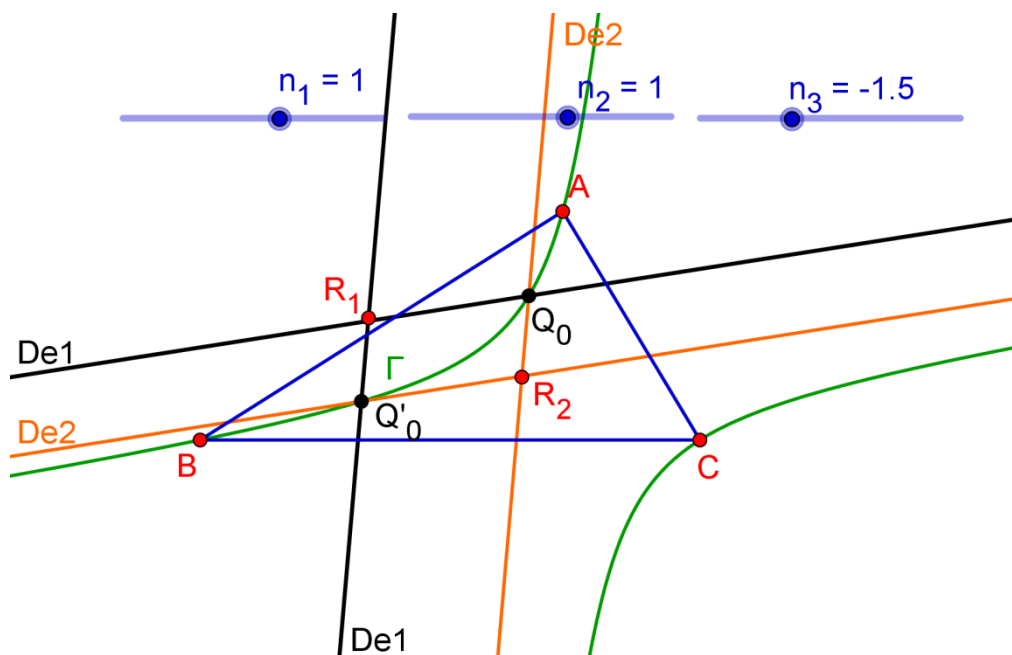
**【舉例】** 雙曲線  $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, \frac{-3}{2})$

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3) = \frac{33}{4}$$

$$\delta = -n_1n_2n_3(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{3}{4}$$

$$\text{可得 } k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3} = \frac{12 \pm \sqrt{99}}{4}$$

利用 GeoGebra 模擬雙曲線  $\Gamma_{3,k}$  退化為兩相交直線之情形 (圖 3-5-6)。可以看出圖中有兩組兩相交直線，黑色的兩相交直線 De1、橘色的兩相交直線 De2。這兩組兩相交直線 (四條直線) 構成一個平行四邊形  $R_1Q'_0R_2Q_0$ 。



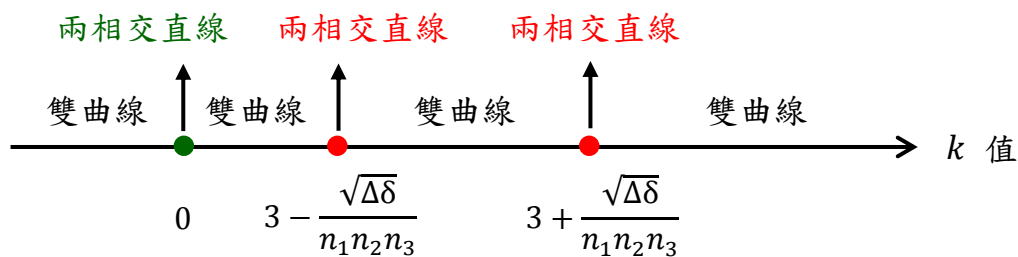
▲圖 3-5-6

**推論 5.3**  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  使得生成雙曲線  $\Gamma_{3,k}$  退化的兩組相交直線構成一個平行四邊形

**證明.**

由推論 3.1 與推論 3.3 得知  $\Gamma_{3,k}$  為二次曲線系，通過四點  $Q_\infty, Q'_\infty, Q_0, Q'_0$ ，如圖 3-5-6，不失一般性，令直線  $\overleftrightarrow{R_1 Q'_0}$  通過一個無窮遠點  $Q_\infty$ ，因為直線  $\overleftrightarrow{R_2 Q'_0}$  和  $\overleftrightarrow{R_1 Q'_0}$  交於  $Q'_0$  點，所以直線  $\overleftrightarrow{R_1 Q'_0}$  和直線  $\overleftrightarrow{R_2 Q_0}$  必交於相同的無窮遠點  $Q_\infty$ ，即  $\overleftrightarrow{R_1 Q'_0} \parallel \overleftrightarrow{R_2 Q_0}$ ，同理  $\overleftrightarrow{R_1 Q_0} \parallel \overleftrightarrow{R_2 Q'_0}$ 。

我們一樣刻畫生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為雙曲線的退化與非退化型態圖（圖 3-5-7）。



▲圖 3-5-7

**【舉例】**拋物線  $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 4)$

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3) = 0$$

$$\delta = -n_1n_2n_3(n_1 + n_2 + n_3) = -24$$

$$\text{可得 } k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3} = 3$$

我們發現生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為拋物線下， $k = 3$  會使得  $\Gamma_{3,k}$  退化為無窮遠點。

**推論 5.4**  $k=3$  使得生成拋物線  $\Gamma_{3,k}$  退化為無窮遠點

**證明.**

我們將  $k=3$  代回  $\Gamma_{3,k}$  並利用 WolframAlpha 網站進行矩陣對角化可將  $\Gamma_{3,k}$  寫成三項平方和之型式

$$v_2^2 + v_3^2 = 0$$

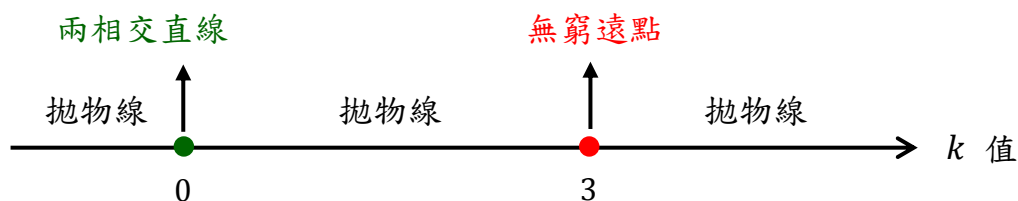
解兩直線交點  $\begin{cases} v_2^2 = 0 \\ v_3^2 = 0 \end{cases}$ ，又因為依據推論 3.1 與推論 3.3，得知拋物線  $\Gamma_{3,k}$  必通

過無窮遠點  $Q_\infty$  (兩重根實交點) 和兩個虛交點，所以兩直線交點  $\begin{cases} v_2^2 = 0 \\ v_3^2 = 0 \end{cases}$  必

為  $Q_\infty$ ，即  $k=3$  使得生成拋物線  $\Gamma_{3,k}$  退化為無窮遠點



我們一樣刻畫生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  為拋物線的退化與非退化型態圖 (圖 3-5-8)。



▲圖 3-5-8

最後依據第二節至第五節的研究成果，我們可將生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的圖形做以下劃分（下表）：

表 3-1  $\Gamma_{3,k}$  的圖形劃分

$k$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
非退化錐線 ( $k$ 不為以下的值)	橢圓	拋物線	雙曲線
$k = 0$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$
$k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	兩個退化點	一個無窮遠點	兩組兩相交直線 (形成平行四邊形)
$3 - \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3} < k < 3 + \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	$\emptyset$	拋物線	雙曲線

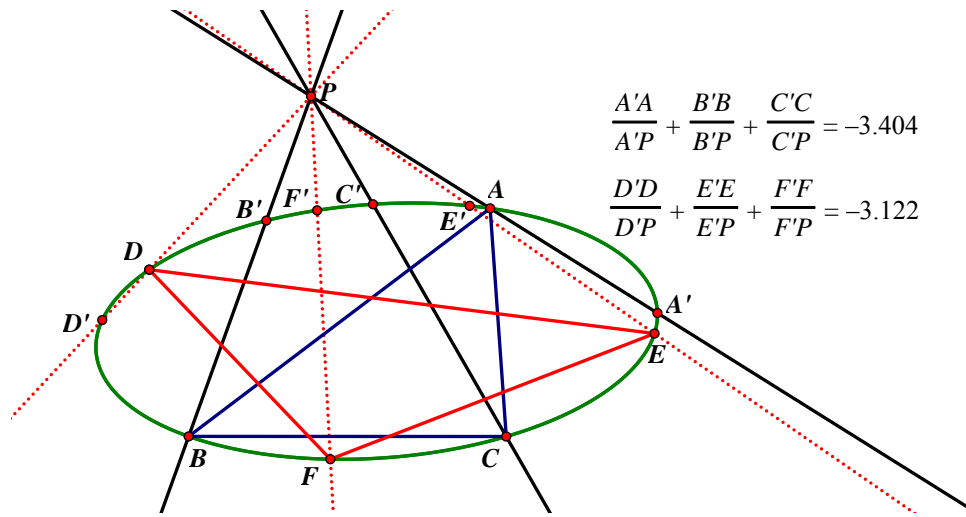
## 六、構造方式的轉換思考：錐線 $\Gamma$ 取點

前面的研究命題條件為可以等價於以下命題：

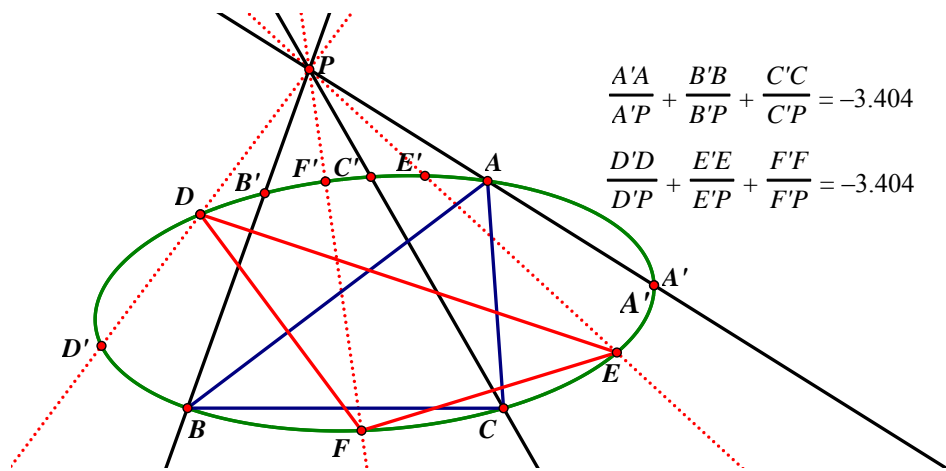
「給定任意錐線  $\Gamma$ ，在  $\Gamma$  上取相異三點  $A, B, C$ ，考慮平面上任意  $P$  點，令直線  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$ ，使得  $P$  點滿足  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}$  為任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ )， $P$  點的集合為二次曲線」

所以，我們有了新的研究想法（圖 3-6-1）：

若再取相異三點  $D, E, F$ ，那麼  $\frac{\overline{DD'}}{\overline{PD'}} + \frac{\overline{EE'}}{\overline{PE'}} + \frac{\overline{FF'}}{\overline{PF'}}$  和原先的  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}$  會相等嗎？什麼時候會相等？



▲圖 3-6-1a



▲圖 3-6-1b

我們的新問題如下：

給定任意錐線  $\Gamma$ ，並在  $\Gamma$  上任取相異六點  $A, B, C, D, E, F$ ，考慮平面上任意  $P$  點，令直線  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$ ,  $\overline{CP}$ ,  $\overline{DP}$ ,  $\overline{EP}$ ,  $\overline{FP}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C', D', E', F'$  點，則

$\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{PD'}} + \frac{\overline{EE'}}{\overline{PE'}} + \frac{\overline{FF'}}{\overline{PF'}}$  的充分條件是什麼？

### 【討論一】基底變換 (change of basis)

前面研究可得知若以  $\Delta ABC$  為座標基底， $P$  點座標為  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，則

$\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}$  的一般式為 (性質 1.1)：

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]}{n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2}$$

同樣地，我們改變以  $\Delta DEF$  為座標基底， $P$  點座標為  $P(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3)$ ，則

$\frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{PD'}} + \frac{\overrightarrow{EE'}}{\overrightarrow{PE'}} + \frac{\overrightarrow{FF'}}{\overrightarrow{PF'}}$  的一般式為：

$$\frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{PD'}} + \frac{\overrightarrow{EE'}}{\overrightarrow{PE'}} + \frac{\overrightarrow{FF'}}{\overrightarrow{PF'}} = \frac{(\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3)[(n'_2 + n'_3)\mu'_1 + (n'_1 + n'_3)\mu'_2 + (n'_1 + n'_2)\mu'_3]}{n'_1\mu'_2\mu'_3 + n'_2\mu'_1\mu'_3 + n'_3\mu'_1\mu'_2}$$

注意到： $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  與  $P(\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3)$  的位置相同，只是座標表示法不同。

因此，我們先要處理的就是在基底變換  $\Delta ABC \mapsto \Delta DEF$  下，

$P$  點

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix}$$

以及錐線  $\Gamma$  的係數

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix}$$

在  $\Delta ABC$  為座標基底下，令正規化重心座標

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), P(\mu_1, \mu_2, \mu_3), D(d_1, d_2, d_3), E(e_1, e_2, e_3), F(f_1, f_2, f_3)$ ，而有以下事實 6.1。

<p><b>事實 6.1</b> <math>P = \begin{bmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 &amp; e_1 &amp; f_1 \\ d_2 &amp; e_2 &amp; f_2 \\ d_3 &amp; e_3 &amp; f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix}</math></p>
--

接著處理錐線  $\Gamma$  的係數變換，也就是考慮錐線  $\Gamma$  的方程式變換。



<p><b>性質 6.1</b> <math>\Gamma</math> 的係數變換</p>	$\begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 f_3 + e_3 f_2 & e_1 f_3 + e_3 f_1 & e_1 f_2 + e_2 f_1 \\ d_2 f_3 + d_3 f_2 & d_1 f_3 + d_3 f_1 & d_1 f_2 + d_2 f_1 \\ d_2 e_3 + d_3 e_2 & d_1 e_3 + d_3 e_1 & d_1 e_2 + d_2 e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$
--	--

證明.

令  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  在錐線  $\Gamma$  上

所以滿足

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

又由事實 6.1 得到

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix}$$

所以錐線  $\Gamma$  可寫成

$$[\mu'_1 \quad \mu'_2 \quad \mu'_3] \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix} = 0$$

注意到： $D(d_1, d_2, d_3), E(e_1, e_2, e_3), F(f_1, f_2, f_3)$  在  $\Gamma$

考慮化簡

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n'_3 & n'_2 \\ n'_3 & 0 & n'_1 \\ n'_2 & n'_1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 f_3 + e_3 f_2 & e_1 f_3 + e_3 f_1 & e_1 f_2 + e_2 f_1 \\ d_2 f_3 + d_3 f_2 & d_1 f_3 + d_3 f_1 & d_1 f_2 + d_2 f_1 \\ d_2 e_3 + d_3 e_2 & d_1 e_3 + d_3 e_1 & d_1 e_2 + d_2 e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

也就是基底變換下錐線  $\Gamma$  可寫成

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = [\mu'_1 \quad \mu'_2 \quad \mu'_3] \begin{bmatrix} 0 & n'_3 & n'_2 \\ n'_3 & 0 & n'_1 \\ n'_2 & n'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix} = 0$$



接下來，我們要進入本節最後的證明。

**性質 6.2** 若  $\triangle ABC$  的重心與  $\triangle DEF$  的重心相同，則

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{PD'}} + \frac{\overrightarrow{EE'}}{\overrightarrow{PE'}} + \frac{\overrightarrow{FF'}}{\overrightarrow{PF'}}$$

證明.

考慮

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]}{n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2}$$

$$\frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{PD'}} + \frac{\overrightarrow{EE'}}{\overrightarrow{PE'}} + \frac{\overrightarrow{FF'}}{\overrightarrow{PF'}} = \frac{(\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3)[(n'_2 + n'_3)\mu'_1 + (n'_1 + n'_3)\mu'_2 + (n'_1 + n'_2)\mu'_3]}{n'_1\mu'_2\mu'_3 + n'_2\mu'_1\mu'_3 + n'_3\mu'_1\mu'_2}$$

因為  $P$  點為正規化重心座標

$$\text{所以分子部分 } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 = 1$$

再由因性質 6.2 可知正規化重心座標下

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = [\mu'_1 \quad \mu'_2 \quad \mu'_3] \begin{bmatrix} 0 & n'_3 & n'_2 \\ n'_3 & 0 & n'_1 \\ n'_2 & n'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix}$$

即分母部分

$$n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = n'_1\mu'_2\mu'_3 + n'_2\mu'_1\mu'_3 + n'_3\mu'_1\mu'_2$$

所以本命題等價討論基底變換下

分子中的  $(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3$  何時等於

$$(n'_2 + n'_3)\mu'_1 + (n'_1 + n'_3)\mu'_2 + (n'_1 + n'_2)\mu'_3$$

我們把  $(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3$  寫成矩陣形式

$$\begin{aligned} & [n_2 + n_3 \quad n_1 + n_3 \quad n_1 + n_2] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \\ &= [n_2 + n_3 \quad n_1 + n_3 \quad n_1 + n_2] \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到：

因為  $\triangle ABC$  的重心與  $\triangle DEF$  的重心相同

所以  $d_1 + e_1 + f_1 = d_2 + e_2 + f_2 = d_3 + e_3 + f_3 = 1$

代入化簡後可得

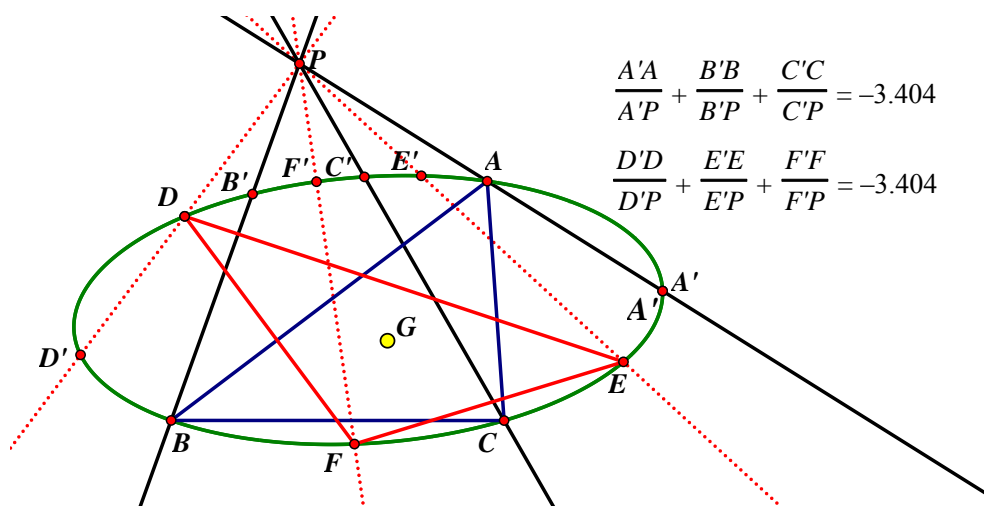
$$[n_2 + n_3 \quad n_1 + n_3 \quad n_1 + n_2] \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} = [n'_2 + n'_3 \quad n'_1 + n'_3 \quad n'_1 + n'_2]$$

因此，若  $\triangle ABC$  的重心與  $\triangle DEF$  的重心相同

$$\begin{aligned} & [n_2 + n_3 \quad n_1 + n_3 \quad n_1 + n_2] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \\ &= [n_2 + n_3 \quad n_1 + n_3 \quad n_1 + n_2] \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix} \\ &= [n'_2 + n'_3 \quad n'_1 + n'_3 \quad n'_1 + n'_2] \begin{bmatrix} \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{PD'}} + \frac{\overrightarrow{EE'}}{\overrightarrow{PE'}} + \frac{\overrightarrow{FF'}}{\overrightarrow{PF'}}$$



▲圖 3-6-2

**推論 6.1** 若  $\Delta ABC$  的重心與  $\Delta DEF$  的重心相同，則生成錐線

$$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{AA'}}{PA'} + \frac{\overline{BB'}}{PB'} + \frac{\overline{CC'}}{PC'} = k \right\} \quad \text{與} \quad \Pi_{3,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{DD'}}{PD'} + \frac{\overline{EE'}}{PE'} + \frac{\overline{FF'}}{PF'} = k \right\} \quad \text{重合}$$

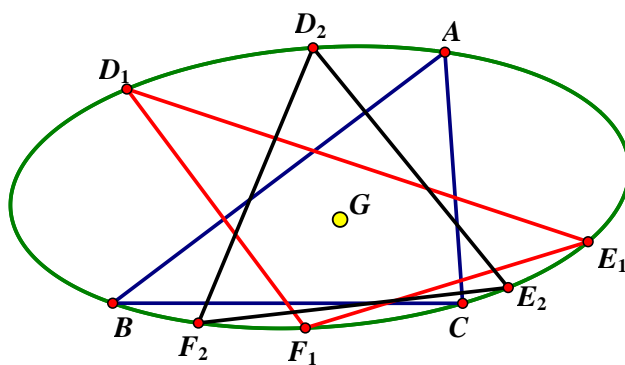
**【討論二】 $\Delta DEF$  是否是唯一？**

給定  $\Delta ABC$  的重心座標  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  為其外接錐線  $\Gamma$  方程式為  $n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_3\mu_1 + n_3\mu_1\mu_2$ ，若在  $\Gamma$  上再取三點  $D(d_1, d_2, d_3), E(e_1, e_2, e_3), F(f_1, f_2, f_3)$ ，使得  $\Delta DEF$  的重心與  $\Delta ABC$  的重心  $G$  重合，則  $D, E, F$  需滿足兩個條件：

其一， $D, E, F$  在  $\Gamma$  上

其二， $d_1 + e_1 + f_1 = d_2 + e_2 + f_2 = d_3 + e_3 + f_3$

所以，三個變數，兩條方程式，則符合條件的  $\Delta DEF$  會有無限多個(圖 3-6-3)。另一個角度來說，如果給定點  $D$ ，那麼  $\Delta DEF$  就是唯一。



▲圖 3-6-3

**【作圖舉例】** 給定  $\Delta ABC$  與其重心  $G$  和外接圓  $\Gamma$ ，做出相同重心的  $\Delta DEF$

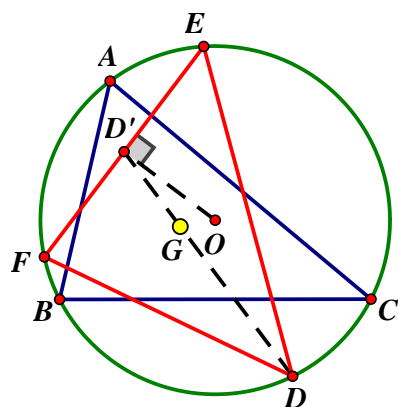
如圖 3-6-4，給定  $\Delta ABC$  與其重心  $G$  和外接圓  $\Gamma$ 。

Step1：在小於 180 度的圓弧上任取一點  $D$ ，連接  $\overline{DG}$ 。

Step2：取一點  $D'$ ，使得  $\overline{DG} = 2\overline{GD'}$ ，連接  $\overline{OD'}$ 。

Step3：過  $D'$  作  $\overline{OD'}$  的垂線，交圓於相異兩點  $E, F$ 。

則  $\Delta DEF$  與  $\Delta ABC$  有相同重心  $G$ 。



▲圖 3-6-4

## 七、一般化：給定多邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ 與其外接錐線 $\Gamma$

最後，我們一般化推廣到多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  的情形。

給定多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  與其外接錐線  $\Gamma$ 。考慮任取一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{N_1P}$ ,  $\overrightarrow{N_2P}$ , ...,  $\overrightarrow{N_nP}$  分別交  $\Gamma$  於  $N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  點，再取任意  $k$  值，研究  $\Gamma_{n,k}$  的性質：

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{\overrightarrow{PN'_1}} + \frac{\overrightarrow{N_2N'_2}}{\overrightarrow{PN'_2}} + \dots + \frac{\overrightarrow{N_nN'_n}}{\overrightarrow{PN'_n}} = k \right. \right\}$$

### (一) $\Gamma_{n,k}$ 的二次曲線形態（橢圓、拋物線、雙曲線）判別式

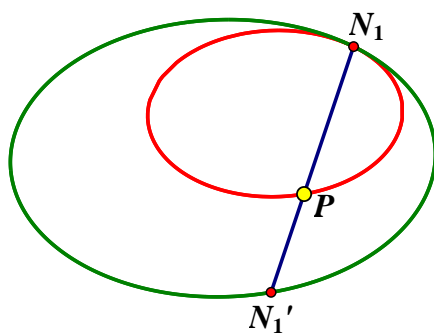
此時，我們轉化思考模式，將命題轉化為「給定錐線  $\Gamma$ ，在  $\Gamma$  取點構作有向線段比值」。從單點、兩點，到多點的討論：

#### 【在 $\Gamma$ 上取一點的情形】

在  $\Gamma$  取一點  $N_1$ ，考慮平面上一點  $P$ ，令直線  $\overrightarrow{N_1P}$  交  $\Gamma$  於  $N'_1$ ，再取任意  $k$  值，則

$$\Gamma_{1,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{\overrightarrow{PN'_1}} = k \right. \right\}$$

如圖 3-7-1，由定義不難知道， $P$  點集合  $\Gamma_{1,k}$  是與  $\Gamma$  位似（相似）的二次曲線。



▲ 圖 3-7-1

**【在  $\Gamma$  上取兩點到取  $n$  點的情形】**

在  $\Gamma$  取相異兩點  $N_1, N_2$ ，考慮平面上一點  $P$ ，令直線  $\overline{N_1P}, \overline{N_2P}$  分別交  $\Gamma$  於  $N'_1, N'_2$  點，再取任意  $k$  值，則

$$\Gamma_{2,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} = k \right\}$$

可以將其拆解為

$$\Gamma_{2,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} = k_1 \wedge \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} = k_2 \wedge k_1 + k_2 = k \right\}$$

因為由前面可知道  $\frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} = k_1$  是一個二次曲線、 $\frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} = k_2$  也是一個二次曲線，考慮這兩個二次曲線的線性組合（二次曲線系）

$$1 \times \left( \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} - k_1 \right) + 1 \times \left( \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} - k_2 \right) = 0$$

即可得

$$\frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} = k_1 + k_2 = k$$

所以， $\Gamma_{2,k}$  也是一個二次曲線。

因此，同理可證在  $\Gamma$  上取  $n$  點， $\Gamma_{n,k}$  為二次曲線（性質 7.1）。

**性質 7.1** 若取任意  $k$  值 ( $k \in \mathbb{R}$ ) 且  $\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{PN'_2} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{PN'_n} = k \right\}$ ，則  $\Gamma_{n,k}$  為二次曲線 ( $n \in \mathbb{N}$ )

接著我們要繼續討論生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  的二次曲線形態(橢圓、拋物線、雙曲線)判別式。

利用前面單點、兩點、三點、 $\dots$ 、 $n$  點的線性組合方法（二次曲線系），可以發現給定的外接錐線  $\Gamma$  的型態決定了生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  的型態。非退化的二次曲線  $\Gamma_{n,k}$  的型態（橢圓、拋物線、雙曲線）不因  $k$  值而產生型態改變。

**性質 7.2** 非退化二次曲線  $\Gamma_{n,k}$  的型態判別式為

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

- (1)  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為橢圓
- (2)  $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為拋物線
- (3)  $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為雙曲線

**證明.**

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overrightarrow{N_2N'_2}}{PN'_2} + \cdots + \frac{\overrightarrow{N_nN'_n}}{PN'_n} = k \right. \right\}$$

考慮

$$\frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{PN'_1} = k_1, \frac{\overrightarrow{N_2N'_2}}{PN'_2} = k_2, \dots, \frac{\overrightarrow{N_nN'_n}}{PN'_n} = k_n$$

且

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$$

又因為  $\forall i \in \mathbb{N}$ ， $\frac{\overrightarrow{N_iN'_i}}{PN'_i} = k_i$  為與外接錐線  $\Gamma$  相似的二次曲線（型態相同）

所以在線性組合下

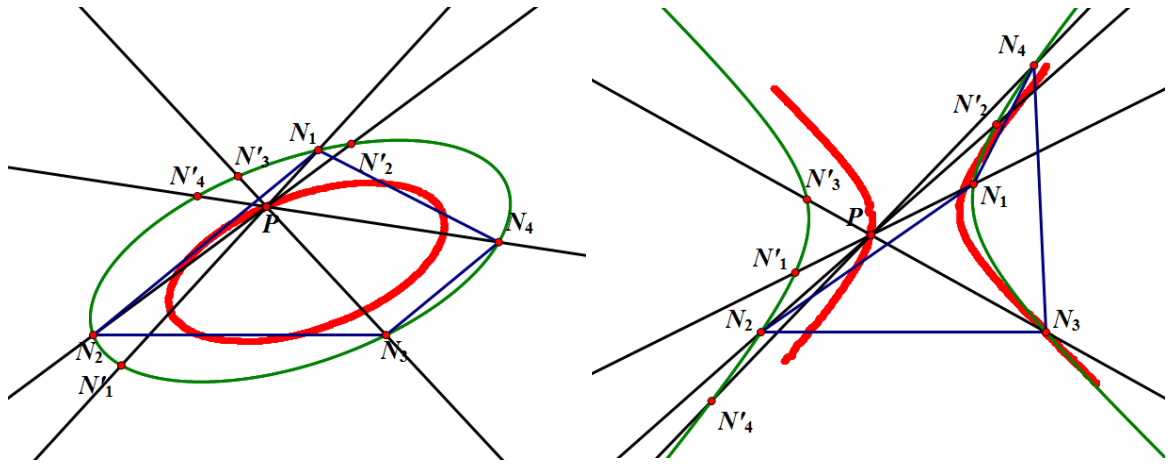
$$\left( \frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{PN'_1} - k_1 \right) + \left( \frac{\overrightarrow{N_2N'_2}}{PN'_2} - k_2 \right) + \cdots + \left( \frac{\overrightarrow{N_nN'_n}}{PN'_n} - k_n \right) = 0$$

$$\frac{\overrightarrow{N_1N'_1}}{PN'_1} + \frac{\overrightarrow{N_2N'_2}}{PN'_2} + \cdots + \frac{\overrightarrow{N_nN'_n}}{PN'_n} = k$$

$\Gamma_{n,k}$  與外接錐線  $\Gamma$  的二次曲線型態（橢圓、拋物線、雙曲線）相同

因此

- 當  $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為橢圓
- 當  $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為拋物線
- 當  $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為雙曲線



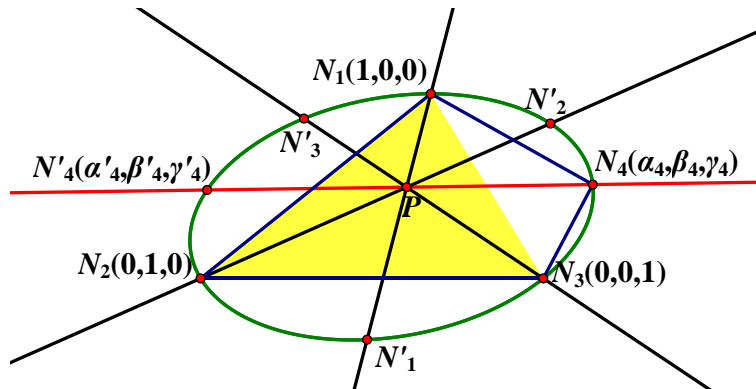
▲圖 3-7-2

(二) 直觀幾何意義：多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$ 、外接錐線  $\Gamma$ 、與生成錐線  $\Gamma_{n,k}$

**【研究方法的討論與選擇】**

我們本來利用重心座標方式想求出  $\Gamma_{n,k}$  的二次曲線方程式，如圖 3-7-3，將多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  的三個頂點  $N_1, N_2, N_3$  作為重心坐標的基底參考三角形  $\Delta N_1N_2N_3$ ，再令  $N_n(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ ，若直線  $\overline{N_nP}$  交  $\Gamma$  於  $N'_n(\alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n)$  可依據引理 1.2 計算出有向線段比值

$$\frac{\overline{N_nN'_n}}{\overline{PN'_n}} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\alpha'_n\beta_n - \beta'_n\alpha_n + \beta'_n\gamma_n - \gamma'_n\beta_n + \gamma'_n\alpha_n - \alpha'_n\gamma_n)}{3(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)(\alpha'_n\mu_2 - \beta'_n\mu_1 + \beta'_n\mu_3 - \gamma'_n\mu_2 + \gamma'_n\mu_1 - \alpha'_n\mu_3)}$$



▲圖 3-7-3



再推得  $\Gamma_{n,k}$  的二次曲線方程式

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,k} \equiv & \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)[(n_2 + n_3)\mu_1 + (n_1 + n_3)\mu_2 + (n_1 + n_2)\mu_3]}{n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_3\mu_1 + n_3\mu_1\mu_2} \\ & + \sum_{i=4}^n \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\alpha'_i\beta_i - \beta'_i\alpha_i + \beta'_i\gamma_i - \gamma'_i\beta_i + \gamma'_i\alpha_i - \alpha'_i\gamma_i)}{3(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)(\alpha'_i\mu_2 - \beta'_i\mu_1 + \beta'_i\mu_3 - \gamma'_i\mu_2 + \gamma'_i\mu_1 - \alpha'_i\mu_3)} \\ & - k = 0 \end{aligned}$$

但是此方法的缺點是找出的  $\Gamma_{n,k}$  方程式不易化簡，其二次曲線係數矩陣很複雜，導致我們無法得出  $\Gamma_{n,k}$  的中心  $O_{n,k}$  的座標。

因此，我們換個研究方法，回到最初的「笛卡爾座標」與「圓冪性質」討論圓的中心  $O_{n,k}$  的位置。

因為在射影平面，所有二次曲線是相同的，所以我們僅須透過圓射影變換後，就可以證明多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  的重心  $G$ 、外接錐線  $\Gamma$  的中心  $O$ 、與生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  的中心  $O_{n,k}$  三點的共線性關係。

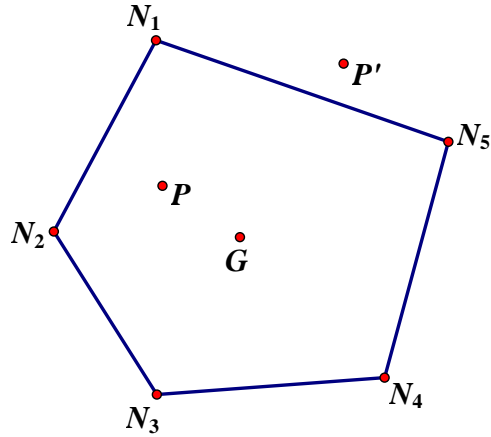
**引理 7.1** 給定  $n$  邊形頂點  $N_n(x_n, y_n)$ 、重心  $G\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right)$ ，以及動點  $P(x, y)$ ，則  $\sum_{i=1}^n \overline{N_i P}^2 = n\overline{PG}^2 + c_1$ ，其中  $c_1$  為正實數（定值常數）

證明.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \overline{N_i P}^2 \\ &= (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + \dots + (y - y_n)^2 \\ &= nx^2 - 2x \sum_{i=1}^n x_i + (\sum_{i=1}^n x_i^2) + ny^2 - 2y \sum_{i=1}^n y_i + (\sum_{i=1}^n y_i^2) \\ &= n\left(x^2 - \frac{2\sum_{i=1}^n x_i}{n}x\right) + (\sum_{i=1}^n x_i^2) + n\left(y^2 - \frac{2\sum_{i=1}^n y_i}{n}y\right) + (\sum_{i=1}^n y_i^2) \\ &= n\left(\left(x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right)^2\right) + (\sum_{i=1}^n x_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} + (\sum_{i=1}^n y_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \\ &= n\overline{PG}^2 + (\sum_{i=1}^n x_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} + (\sum_{i=1}^n y_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \end{aligned}$$

又依據科西不等式有  $(\sum_{i=1}^n x_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} > 0$ ,  $(\sum_{i=1}^n y_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} > 0$

所以  $\sum_{i=1}^n \overline{N_i P}^2 = n\overline{PG}^2 + c$



$$(N_1P^2 + N_2P^2 + N_3P^2 + N_4P^2 + N_5P^2) - 5 \cdot PG^2 = 113.95 \text{ 厘米}^2$$

$$(N_1P'^2 + N_2P'^2 + N_3P'^2 + N_4P'^2 + N_5P'^2) - 5 \cdot P'G^2 = 113.95 \text{ 厘米}^2$$

▲ 圖 3-7-4

**引理 7.2** 若給定兩點  $A$  與  $B$ ，以及動點  $P$ ，滿足  $a\overline{PA}^2 + b\overline{PB}^2 = m$ ，其中  $m(a+b) \geq 0$ ，則  $P$  的軌跡為圓且圓心在直線  $\overleftrightarrow{AB}$  上

證明.

不失一般性，令  $A(0,0), B(d,0), P(x,y)$ ，整理可得  $(x - \frac{bd}{a+b})^2 + y^2 = \frac{m(a+b) + (bd)^2}{(a+b)^2}$ ，

若  $m(a+b) \geq 0$ ，若且唯若  $P$  的軌跡為圓，其圓心  $(\frac{bd}{a+b}, 0)$  在  $\overleftrightarrow{AB}$  上

**性質 7.3** 給定多邊形  $N_1N_2N_3 \dots N_n$  與其外接圓  $\Gamma$ ，再取任意  $k$  值 ( $k \in R$ ) 且  $\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{\overline{PN'_1}} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{\overline{PN'_2}} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{\overline{PN'_n}} = k \right\}$ ，則  $\Gamma_{n,k}$  為圓，且  $\Gamma_{n,k}$  的圓心在直線  $\overleftrightarrow{OG}$  上

證明.

考慮  $\sum_{i=1}^n \frac{\overline{N_iN'_i}}{\overline{PN'_i}} = k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\overline{N_iP}}{\overline{PN'_i}} = k - n$

因為  $N_i, P, N'_i$  三點共線

依據圓幂性質可得  $\overline{N_iP} \cdot \overline{PN'_i} = R^2 - d^2$ ，其中  $R$  為  $\Gamma$  的半徑、 $d = \overline{PO}$

所以將  $\sum_{i=1}^n \frac{\overline{N_iP}}{\overline{PN'_i}} = k - n$  同乘  $\overline{N_iP} \cdot \overline{PN'_i}$  可得

$$\sum_{i=1}^n \overline{N_iP}^2 = (k - n)(R^2 - d^2)$$

再依據引理 7.1 有  $\sum_{i=1}^n \overline{N_iP}^2 = n\overline{PG}^2 + c_1$

$$\sum_{i=1}^n \overline{N_iP}^2 = n\overline{PG}^2 + c_1 = (k - n)(R^2 - d^2)$$

$$\Rightarrow n\overline{PG}^2 + (k - n)\overline{PO}^2 = (k - n)R^2 - c_1$$

注意到： $P$  點在圓  $\Gamma$  內部時， $k > 0, (k - n) > 0$

$P$  點在圓  $\Gamma$  外部時， $k < 0, (k - n) < 0$

依據引理 7.2 檢驗

$$((k - n)R^2 - c_1)(n + (k - n)) = k((k - n)R^2 - c_1) > 0$$

因此可得  $P$  的軌跡為圓且圓心在  $\overline{OG}$  上



**性質 7.4**  $\overline{OG} : \overline{OO_{n,k}} = \frac{1}{n} : \frac{1}{k}$ ，其中  $n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$

**證明.**

由性質 7.3 知道給定多邊形  $N_1N_2N_3 \dots N_n$  與其外接圓  $\Gamma$  下

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{\overline{PN'_1}} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{\overline{PN'_2}} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{\overline{PN'_n}} = k \right\} \text{ 為一個圓}$$

依據引理 7.2 就可推得  $\Gamma_{n,k}$  為圓的情況下

$$\overline{OG} : \overline{OO_{n,k}} = \frac{1}{n} : \frac{1}{k}$$

射影變換下，二次曲線（圓、橢圓、雙曲線、拋物線）皆可表示為同一形式的代數方程式，該二次曲線的中心坐標由係數所表示

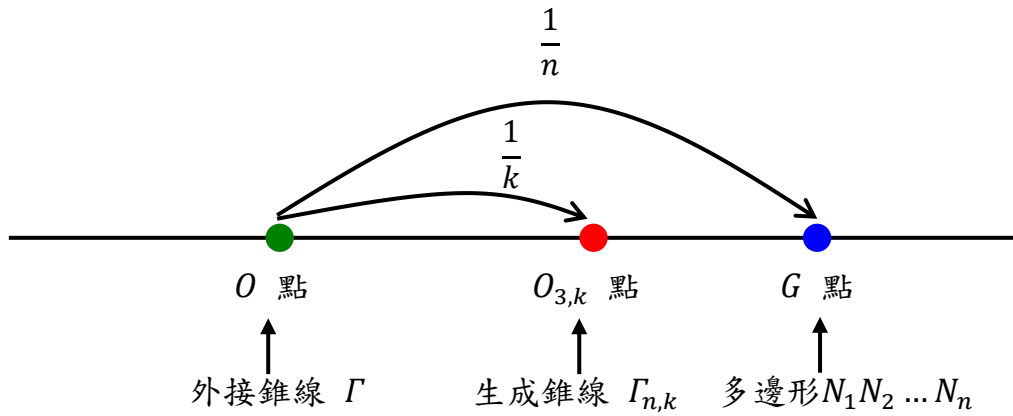
又因重心座標與笛卡爾座標之間為線性變換：

$$P(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \Leftrightarrow P(x_p, y_p)$$

$$\begin{cases} x_p = \mu_1 x_a + \mu_2 x_b + \mu_3 x_c \\ y_p = \mu_1 y_a + \mu_2 y_b + \mu_3 y_c \end{cases}$$

其中  $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$

因此，圓的中心  $O$  點、 $\Gamma_{n,k}$  的圓心  $O_{n,k}$ 、多邊形  $N_1 N_2 \dots N_n$  的重心  $G$  點的位置關係，可推論至所有二次曲線（圓、橢圓、雙曲線、拋物線），如圖 3-7-5



▲圖 3-7-5



## 肆、結論

本研究將一個古老的幾何性質進行推廣與創新，我們主要研究給定  $\Delta ABC$  與其外接錐線  $\Gamma$ ，令直線  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{BG}$ ,  $\overrightarrow{CG}$  分別交  $\Gamma$  於  $A', B', C'$ ，再取任意  $k$  值，探討集合  $\Gamma_{3,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right. \right\}$  的性質。

我們使用射影幾何的觀點，以重心座標 (Barycentric coordinate) 為工具，令  $\Delta ABC$  三頂點座標  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 、任意  $P$  點座標  $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 、外接錐線  $\Gamma$  的方程式  $n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0$ ，進行研究而有以下發現：

### (一) $\Gamma_{3,k}$ 的型態與判別式

$\Gamma_{3,k} = \left\{ P \left| \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{PA'}} + \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{PB'}} + \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{PC'}} = k \right. \right\}$  為一個二次曲線， $\Gamma_{3,k}$  的橢圓、拋物線、雙曲線之型態不受  $k$  的取值而產生型態改變。給定的外接錐線  $\Gamma$  的型態決定了非退化錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態，兩者相同型態 (例如：當  $\Gamma$  為橢圓時， $\Gamma_{3,k}$  為橢圓)。

$\Gamma_{3,k}$  的橢圓、拋物線、雙曲線判別式為

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3)$$

- 1、 $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為橢圓
- 2、 $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為拋物線
- 3、 $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{3,k}$  即為雙曲線

### (二) 取不同值 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 時， $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$ 彼此的關係

證明生成  $\Gamma_{3,k}$  的型態被外接錐線  $\Gamma$  所決定後，我們進一步好奇「取不同值  $k_1, k_2, \dots, k_n$  時， $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$  的彼此關係」，例如： $\Gamma$  為橢圓時，這些橢圓  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$  彼此的關係是什麼？

我們發現  $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$  組成一個「二次曲線系」， $k$  值是兩個二次曲線的線性組合之係數。

$\Gamma_{3,k}$  皆通過四個共同交點，其一，外接錐線  $\Gamma$  與無窮遠線  $L_\infty$  的兩個交點，其二，外接錐線  $\Gamma$  與直線  $L_0$  的兩個交點。

### (三) $\Delta ABC$ 、外接錐線 $\Gamma$ 、與生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的幾何關係

研究發現生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  本身的結構為二次曲線系，也知道外接錐線  $\Gamma$  與生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的型態相同，但是它們跟  $\Delta ABC$  的關係是什麼呢？有沒有更基礎的關聯呢？

我們用點來表徵圖形，以「重心  $G$  來代表  $\Delta ABC$ 」、「中心  $O$  代表外接錐線  $\Gamma$ 」、「中心  $O_{3,k}$  來代表生成錐線  $\Gamma_{3,k}$ 」，將問題轉化為研究「重心  $G$ 、中心  $O$ 、中心  $O_{3,k}$  三者位置關係」，結果發現  $G$ 、 $O$ 、 $O_{3,k}$  三點共線

$$\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{OO_{3,k}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{k}$$

利用這個發現可以視覺化  $O_{3,k}$  ( $\Gamma_{3,k}$ ) 的運動方向。

### (四) 生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 圖形的劃分

利用矩陣對角化的方法，將  $\Gamma_{3,k}$  化成平方和的形式，討論  $k$  值使得  $\Gamma_{3,k}$  發生退化的情形。

我們證明  $k=0, 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  時，會發生退化情形，與一般觀念不同的是， $k=0$  時，會使得橢圓、拋物線、雙曲線都退化為兩相交直線（一般來說，只有雙曲線會退化為兩相交直線）！這樣的特殊性質與線段比值構造方式有關。

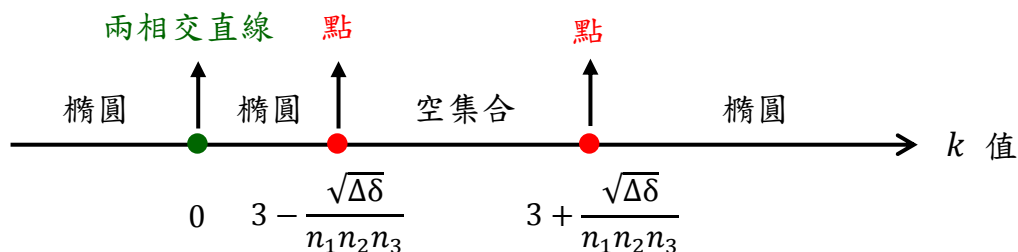
再利用  $\Gamma_{3,k}$  為二次曲線系的性質，我們分別討論  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓、拋物線、雙曲線的非退化與退化。依據我們的研究，可將生成錐線  $\Gamma_{3,k}$  的圖形做以下劃分（如下表）。

表 4-1  $\Gamma_{3,k}$  的圖形劃分

$k$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
非退化錐線 ( $k$ 不為以下的值)	橢圓	拋物線	雙曲線
$k = 0$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$
$k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	兩個退化點	一個無窮遠點	兩組兩相交直線 (形成平行四邊形)
$3 - \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3} < k < 3 + \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	$\emptyset$	拋物線	雙曲線

### (五) 只有生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 為橢圓下， $k$ 值出現不連續跳躍現象

當  $\Gamma_{3,k}$  為橢圓時，將  $k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$  帶入可以得到兩個退化點，我們描繪出  $\Gamma_{3,k}$  的圖形情形（圖 4-1-1），這是橢圓獨特的性質。



▲圖 4-1-1

以下  $k$  值區間使得橢圓  $\Gamma_{3,k}$  為不成像的空集合，也就是  $k$  值不連續而有跳躍情形。

$$3 - \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3} < k < 3 + \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$$

### (六) 錐線 $\Gamma$ 取六點的有向線段比值和

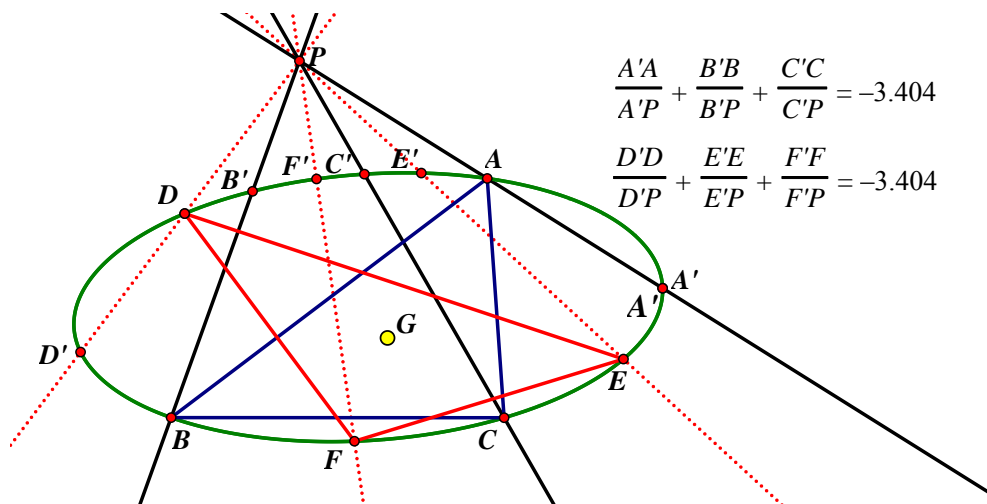
考慮換個方式問問題，如圖給定任意錐線  $\Gamma$ ，並在  $\Gamma$  上任取相異六點  $A, B, C, D, E, F$ ，仿照前面相同的構造方式下，可得出兩個有向線段比值和

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} \quad , \quad \frac{\overline{DD'}}{\overline{PD'}} + \frac{\overline{EE'}}{\overline{PE'}} + \frac{\overline{FF'}}{\overline{PF'}}$$

我們好奇這兩個有向線段比值和，何時會相等？

利用重心座標基底變換的方法，我們證明了若  $\Delta ABC$  的重心與  $\Delta DEF$  的重心相同，則  $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{PD'}} + \frac{\overline{EE'}}{\overline{PE'}} + \frac{\overline{FF'}}{\overline{PF'}}$ 。

此外，我們也發現錐線  $\Gamma$  上的三角形中與  $\Delta ABC$  重心相同的三角形不是唯一，也就是圖 4-1-2 的  $\Delta DEF$  不是唯一。



▲圖 4-1-2

最後，我們一般化研究多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$ 。

給定多邊形  $N_1N_2 \dots N_n$  與其外接錐線  $\Gamma$ 。考慮任取一點  $P$ ，令直線

$\overline{N_1P}$ ,  $\overline{N_2P}$ , ...,  $\overline{N_nP}$  分別交  $\Gamma$  於  $N'_1, N'_2, \dots, N'_n$  點，再取任意  $k$  值，探討集合

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1N'_1}}{\overline{PN'_1}} + \frac{\overline{N_2N'_2}}{\overline{PN'_2}} + \dots + \frac{\overline{N_nN'_n}}{\overline{PN'_n}} = k \right\} \text{ 的性質。}$$

### (七) 一般化的情形：多邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ 與其外接錐線 $\Gamma$

我們以「錐線  $\Gamma$  上取一點、兩點到  $n$  點」的分析討論，再利用線性組合，



推廣找出生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  為二次曲線 ( $n \in \mathbb{N}$ )，換句話說

取一點  $N_1$ ，則  $\Gamma_{1,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1 N_1'}}{PN_1'} = k \right\}$  為二次曲線

取兩點  $N_1, N_2$ ，則  $\Gamma_{2,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1 N_1'}}{PN_1'} + \frac{\overline{N_2 N_2'}}{PN_2'} = k \right\}$  為二次曲線

以此類推，取  $n$  點  $N_1, N_2, \dots, N_n$ ，則  $\Gamma_{n,k} = \left\{ P \mid \frac{\overline{N_1 N_1'}}{PN_1'} + \frac{\overline{N_2 N_2'}}{PN_2'} + \dots + \frac{\overline{N_n N_n'}}{PN_n'} = k \right\}$

為二次曲線。

無論取幾點， $\Gamma_{n,k}$  的橢圓、拋物線、雙曲線之型態被給定的錐線  $\Gamma$  的型態決定，所以  $\Gamma_{n,k}$  的橢圓、拋物線、雙曲線判別式依舊為

$$\Delta = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 2(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3)$$

- 1、 $\Delta < 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為橢圓
- 2、 $\Delta = 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為拋物線
- 3、 $\Delta > 0$  時， $\Gamma_{n,k}$  即為雙曲線

當  $n \geq 3$  時，我們證明了多邊形  $N_1 N_2 \dots N_n$  的重心  $G$ 、錐線  $\Gamma$  的中心  $O$ 、生成錐線  $\Gamma_{n,k}$  的中心  $O_{n,k}$  三點共線

$$\overline{OG} : \overline{OO_{n,k}} = \frac{1}{n} : \frac{1}{k}$$

## 伍、參考文獻

- [1]黃子嘉 (2011)。線性代數及其應用 (下)。台北市，鼎茂圖書。
- [2]黃武雄 (1981)。高中解析幾何後記。數學傳播季刊，5(1)，37-46。
- [3]趙文敏 (1993)。幾何學概論。台北市，九章出版社。
- [4]George A. Tsintsifas (1983). Problem 723. *Crux Math.*, 9, pp. 91-92.
- [5]M. Schindler, & E. Chen (2012). *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, available at [http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary\\_full.pdf](http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary_full.pdf).
- [6]Z. Abel (2007). *Barycentric Coordinates*, available at [http://zacharyabel.com/papers/Barycentric\\_A07.pdf](http://zacharyabel.com/papers/Barycentric_A07.pdf)

## 【評語】 010029

本作品探討 Tsintsifas(1983) 的一個關於在給定外接錐線的三角形內，某些線段比的和為定值的變種問題，本作品的研究問題來源清楚，方法主要是利用重心座標來推導出相關直線與錐線的方程式，藉以探討三角形與其外接錐線的生成錐線的性質，本作品內容的陳述頗為條理清楚，手法頗為一致。建議日後可探討當三角形的外接錐線為圓錐曲線以外的其他曲線時，是否仍有類似的結果。