2017 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010025

参展科別　數學

作品名稱　動物大"關"園

——探討與推廣特定限制下的組合問題

得獎獎項　大會獎：四等獎

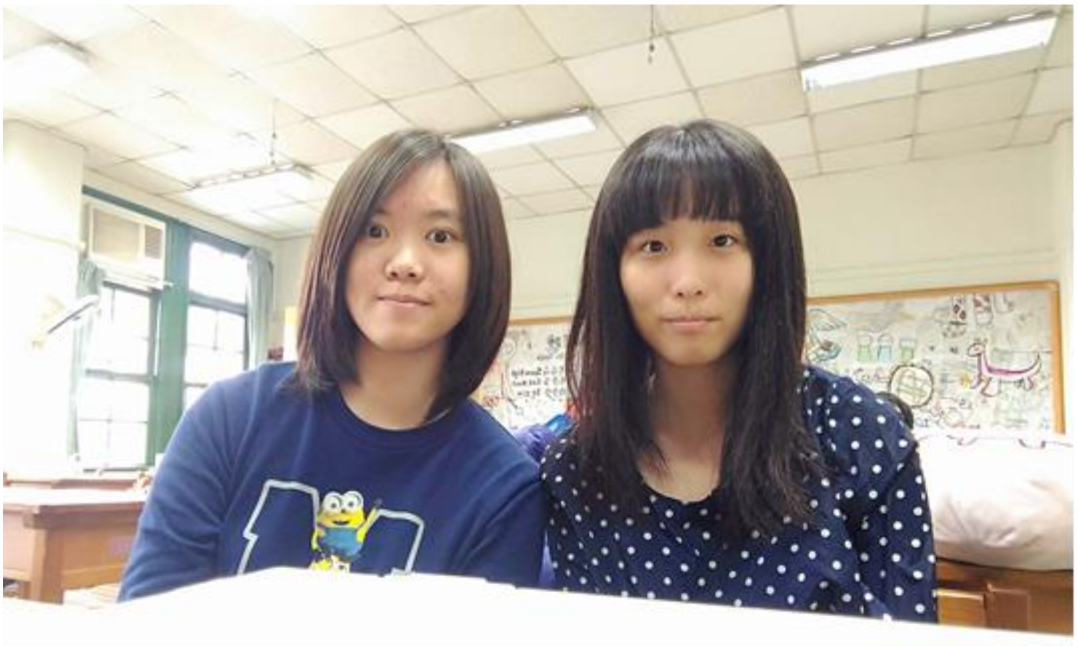
就讀學校　臺北市立第一女子高級中學

指導教師　林盈宏

作者姓名　傅楷容、黃鈺晴

關鍵字　定距、排列組合、生成函數

作者簡介



大家好，我們是傅楷容和黃鈺晴，目前就讀北一女中三年級。數學是我們的共同興趣，很開心能做科展，探討自己有興趣的東西，學習各種新知，探索摩斯漢堡的菜單，挑戰踩地雷極限。一直以來非常感謝老師、教授的指導，讓我們在研究過程中收穫良多。

摘要

將$1,2,...,n$依序排成直線，任意取出k個數，取法數即為C_k^n，但如果取出的k個數有限制，那問題就會有很多的變化。我們最先探討的是不含定距元素的直線與圓排列的組合問題，先從k中無任兩數相鄰，再將問題一般化成使得k中無任兩數之間隔為m。我們用分割的方法代替多數前人所採用的複雜的遞迴關係，求出取法數。

接著，我們推廣取法的限制，運用排列組合、排容原理、以及生成函數等做法，深入的探討各式各樣的組合數。

Abstract

In this study, we discuss the numbers of ways of selecting k numbers from $1,2,...,n$ under certain constraints. First, we enumerate the way of selecting k numbers from $1,2,...,n$ arrayed in a line with no two selected numbers being m-separated (i.e. for any two selected number i, j ,$|i-j| \neq m$). We solve the problem by means of partition instead of dealing with the complicated recurrence equation (which was often used in previous studies).

In order to further discuss this kind of problems, we set up other different constraints, solving them with combinations and permutations, principle of inclusion and exclusion, generating functions, etc. We also extend all these problems to selecting k numbers from $1,2,...,n$ arrayed in a circle.

壹、前言

一、研究動機

我們在數學傳播(文獻一)中看到一個有趣的問題：一個關著白鶴的鐵籠，籠門有 15 根欄杆。把這個籠子改關猴子，猴子比白鶴大，因此門上的鐵條可以減少，減少的原則是每兩條欄杆間的間隔最多是原來的兩倍(不能拆相鄰的兩條)，否則猴子就會逃之夭夭，若規定減少的鐵條數目，求取鐵條的方法有多少種？若是改關體型和力氣都較大的猩猩，拆欄杆的方法又有多少種？

上述題目只跟直線排列的物體有關。若把籠子改成圓形，在相同的條件下，方法數為何？我們覺得這是個非常有趣的問題，可以有很多延伸，又認為這篇文獻的數學模型在一般化之後不太符合原始問題的情境，所以我們改變一些原始題目的條件來探討拆欄杆的問題。

二、研究目的

設想**合理的情境**，並建構出以下數學模型。

(一)求出將$1,2,\ldots,n$依序排成直線，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$(即任意兩數相減$\neq m$)的取法數

(二)求出將$1,2,\ldots,n$依序排成圓，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$的取法數

(三)求出將$1,2,\ldots,n$依序排成直線，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

（四）求出將$1,2,...,n$依序排成圓，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

（五）求出將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，留下的$n-k$個數之間隔$\in A$，$A=\{a_1,a_2,...\}$的取法數

（六）求出將$1,2,...,n$依序排成圓，取k個數，留下的$n-k$個數之間隔$\in A$，$A=\{a_1,a_2,...\}$的取法數

三、研究設備及器材

MathType、小畫家、筆電、紙、筆、Excel

貳、研究方法或過程

一、名詞定義

（一）$F_m(n,k)$

將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$的取法數

（二）$G_m(n,k)$

將$1,2,...,n$依序排成圓，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$的取法數

（三）$f_{s,a}(n,k)$

將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

（四）$g_{s,a}(n,k)$

將$1,2,...,n$依序排成圓，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

（五）$F(n,k,A)$

將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，留下的$n-k$個數之間隔$\in A$，$A=\{a_1,a_2,...\}$

（六）$G(n,k,A)$

將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，留下的$n-k$個數之間隔$\in A$，$A=\{a_1,a_2,...\}$

（七）以下用黑球⬤表示要取出的數或欄杆，白球◯表示不取的。

二、不含定距元素的直線與圓排列的組合問題

不含定距元素的組合問題是文獻一所提出的問題，也是我們的原始問題。探討將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$（m**即為題目中的定距**）的取法數。

（一）$F_m(n,k)$

原始問題：一個關著白鶴的鐵籠，籠門有 15 根欄杆。把這個籠子改關猴子，猴子比白鶴大，因此門上的欄杆可以減少，減少的原則是每兩條欄杆間的間隔最多是原來的兩倍（不能拆相鄰的兩條），否則猴子就會逃之夭夭。如果我們要從原來的欄杆上精簡出 6 根欄杆，有多少種刪取欄杆的方法？

1　　2　　3　　4　　5　　6

以上圖為例，若已拆了 4，就不能再拆 3 或 5。

我們可以把問題簡化：

問題 1：從$1,2,...,15$中取出 6 個數，其中任意兩數不相鄰，有多少種取法？

設取出的 6 個數為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，不妨令$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$。不相鄰可表述為$a_i>a_{i-1}+1$，$i=2,3,4,5,6$

把$a_1,a_2,...,a_6$依次減去$0,1,...,5$：

$a'_6=a_6-5\le 15-5=10$，$a'_i\ge a'_{i-1}+1$

$$\begin{array}{ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 & a'_6 \end{array}$$

數組$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$與$(a'_1,a'_2,a'_3,a'_4,a'_5,a'_6)$是一一對應的，於是我們可以將問題 1 轉化為從$1,2,...,10$**中任意取出 6 個相異數，有多少種取法？**

方法數$=F_1(15,6)=C_6^{10}=210$

再來將此問題 1 一般化為問題 2，探討如下：

問題 2：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成直線，取 k 個數，其中任意兩數不相鄰，有多少種取法？

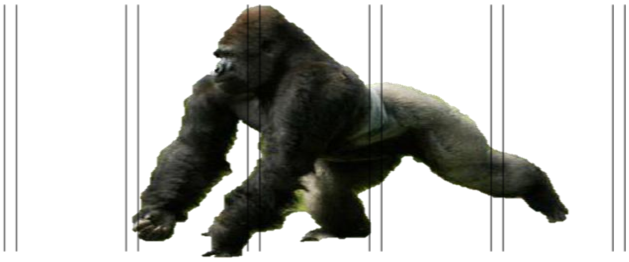
仿照上面做法可得 $F_1(n,k)=C_k^{n-k+1}$ ， $n\geq 2k-1$

至此我們得到如下的【定理一】:

定理一：

$$F_1(n,k)=C_k^{n-k+1} \text{，} n\geq 2k-1$$

如果改關猩猩，猩猩比猴子大得多，所以欄杆間的間隔可以是原來的三倍。但猩猩的力氣又比猴子大，所以不能出現獨立的一根欄杆(其相鄰的兩根欄杆均被拿去)。



1　2　3　4　5　6

以上圖為例，若已拆了 3 和 4，就不能再拆 2 或 5，否則猩猩會跑出來；也不能再拆 1 或 6，否則猩猩會破壞 2 或 5。

以數學的語言來描述，問題可以轉化成問題 3：

問題 3：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成直線，取 k 個數，其中任意兩數之間隔 $\neq 2$，即任意兩數 $i,j\,(j>i)$， $j-i\neq 2$，有多少種取法？

我們可以把取出的 k 個數字分成：

$$\begin{cases} \text{不含}1 \Rightarrow F_2(n-1,k) \\ \text{含}1 \begin{cases} \text{不含}2 \Rightarrow \text{必不含}3 \Rightarrow F_2(n-3,k-1) \\ \text{含}2 \Rightarrow \text{必不含}3,4 \Rightarrow F_2(n-4,k-2) \end{cases} \end{cases}$$

由上可得 $F_2(n,k)=F_2(n-1,k)+F_2(n-3,k-1)+F_2(n-4,k-2)$

初始條件： $F_2(n,1)=n$ ， $F_2(1,k)=0$ ， $k>1$，我們約定 $F_2(n,0)=1$

雖然已經找出遞迴關係，但是這樣的遞迴關係頗複雜，很難直接求出一般的表達式。我們引用 J.Konvalina 的文獻，得到【定理二】：

定理二：

$$F_2(n,k)=\sum_{i=0}^{h}C_{k-2i}^{n+1-k-2i} \text{ ， } h=\left[\frac{k}{2}\right] \text{ ， } n\ge 2(k-1)$$

他的證明方法是驗證右邊的表達式既滿足初始條件，又滿足遞歸關係，但在文獻二中只有證明這個表達式是對的，而沒有說是怎麼推導出來的，也只適用於 $m=2$ 的情況。因此我們需要更直觀的方法，才能推廣並一般化。

接下來討論 m 為任意正整數的情況。

問題 4：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成直線，取 k 個數，其中任意兩數之間隔 $\neq m$，即任意兩數 $i,j\,(j>i)$， $j-i\neq m$，有多少種取法？

此方法數即為我們定義的 $F_m(n,k)$，以下是文獻一中的做法：

令 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ ， $n=qm+r$ ， $0\le r<m$

將除以 m 同餘的數歸為一軌 $\therefore$ 所求的取法即為不可取一軌中相鄰的兩數

用下圖的方式將 N 分為 N_t 和 $\tilde{N}_t$ 兩個子序列，其中 $0<t<m$

	N_t			$\tilde{N}_t$			
1 m+1 2m+1 …	2	…	t	t+1	t+2	…	m qm
qm+1		n				n	
軌							

記 $s=|N_t|$ ，則 $s=\begin{cases} qt+r, & \text{當 } 0<t\le r \\ qt+t, & \text{當 } r<t<m \end{cases} \Rightarrow s=qt+\min(r,t)$

我們要從 N_t 中取 j 個數，從 $\tilde{N}_t$ 中取 $(k-j)$ 個數

先討論 N_t ：我們將 N_t 重新編號如下圖所示

1	2	3	…	t
t+1	t+2			
…				qt
qt+1			s	

不可取一軌中相鄰的兩數，即所取任兩數差不可為 t $\therefore$ 方法數 $=F_t(s,j)$

再討論 $\tilde{N}_t$：同理，方法數$=F_{m-t}\left(n-s,k-j\right)$

$$\therefore F_m\left(n,k\right)=\sum_{j=0}^{k}F_t\left(s,j\right)F_{m-t}\left(n-s,k-j\right) \quad \text{又 } j\le s \text{ 且 } k-j\le n-s$$

$$\Rightarrow F_m\left(n,k\right)=\sum_{j=\max(0,k-n+s)}^{\min(k,s)}F_t\left(s,j\right)F_{m-t}\left(n-s,k-j\right)\text{--}(1)$$

為了得到更完整的結果，利用 $t=1$ 來求得。

由(1)式，令 $t=1$

N_t			$\tilde{N}_t$	
1	2	3	⋯	m
m+1				
⋯				
(q-1)m+1				qm
qm+1				

當 $r=0$ 則 $s=q$；當 $r>0$ 則 $s=q+1$。整合以上兩種情況，$s=\left[\dfrac{n-1}{m}\right]+1$

由【定理一】，便得 $F_m\left(n,k\right)=\displaystyle\sum_{k_1=\max(0,k-n+s)}^{\min(k,s)}C_{k_1}^{\left[\frac{n-1}{m}\right]-k_1+2}\times F_{m-1}\left(n-\left[\frac{n-1}{m}\right]-1,k-k_1\right)$

運用上式遞歸，可得【定理三】：

定理三：

$$F_m\left(n,k\right)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=k}\prod_{i=1}^{m}C_{k_i}^{\left[\frac{n-i}{m}\right]-k_i+2}$$

事實上，以上作者的做法等同於**將 n 排列後分割成數個獨立的軌(如下圖)，不能取一軌中相鄰的兩數，再利用【定理一】**，得到一般式。

1	2	3	…	m-2	m-1	m
m+1	m+2	m+3	…	2m-2	2m-1	2m
…						
						qm
qm+1		…	qm+r			

三、$G_m(n,k)$

若將原始題目中的籠子改為環狀的，在同樣的限制下取出欄杆，方法數為何？我們也先從 $m=1$ 的情況討論。

問題 5：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中任意兩數不相鄰，有多少種取法？

在這個問題裡圓跟直線很像，只須扣掉直線中首尾都取的取法。而直線中首尾都取的情況下，第 2 個和第 $n-1$ 個必不取，所以：

$$G_1(n,k)=F_1(n,k)-F_1(n-4,k-2)$$
$$=C_k^{n-k+1}-C_{k-2}^{(n-4)-(k-2)+1}=C_k^{n-k+1}-C_{k-2}^{n-k-1}$$
$$=\frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!}-\frac{(n-k-1)!}{(k-2)!(n-2k+1)!}$$
$$=C_k^{n-k}\frac{n}{n-k}$$

所以我們得到了【定理四】:

> 定理四：
>
> $$G_1(n,k)=C_k^{n-k}\frac{n}{n-k},k\le\frac{n}{2}$$

同直線排列的問題，我們討論 $m=2$ 的情況。

問題 6：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中任意兩數之間隔 $\neq 2$，有多少種取法？

一樣找出圓形排列與直線排列的關聯，把取出的 k 個數字分成：

$$\begin{cases}\text{不含}1\begin{cases}\text{不含}2\Rightarrow F_2(n-2,k)\\ \text{含}2\begin{cases}\text{不含}3\Rightarrow\text{必不含}4,n\Rightarrow F_2(n-5,k-1)\\ \text{含}3\Rightarrow\text{必不含}4,5,n\Rightarrow F_2(n-6,k-2)\end{cases}\end{cases}\\ \text{含}1\begin{cases}\text{不含}2\begin{cases}\text{不含}n\Rightarrow\text{必不含}3,n-1\Rightarrow F_2(n-5,k-1)\\ \text{含}n\Rightarrow\text{必不含}3,n-1,n-2\Rightarrow F_2(n-6,k-2)\end{cases}\\ \text{含}2\Rightarrow\text{必不含}3,4,n-1,n\Rightarrow F_2(n-6,k-2)\end{cases}\end{cases}$$

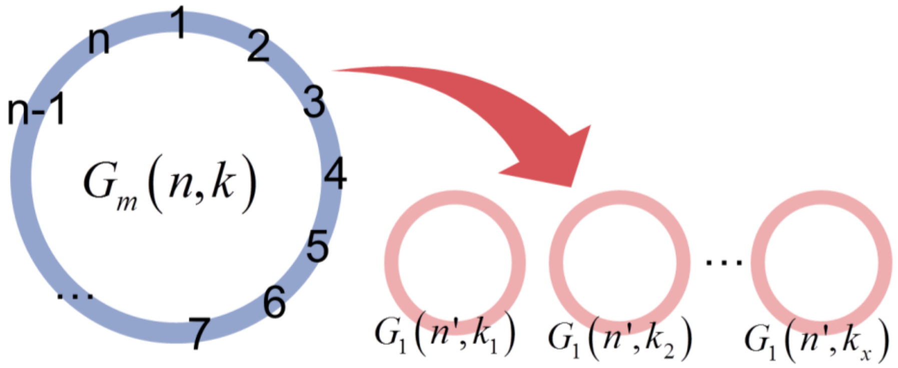
由上可得 $G_2(n,k)=F_2(n-2,k)+2F_2(n-5,k-1)+3F_2(n-6,k-2)$

當 $n\ge 2k+1$ 時，利用【定理二】代入上式，再分別討論 k 為奇數或偶數的情況，可以得到定理五：

> 定理五：
>
> $$G_2(n,k)=C_k^{n-k}\frac{n}{n-k}\text{，}n\ge 2k+1$$

圓形排列的問體最普遍的方法即是以上討論頭尾相接處所有可能的情況，再將它簡化成直線排列。當 m 為任意正整數時，我們一開始也打算用類似的方法來求得，但是發現頭尾相接處非常複雜，難以一一列出。

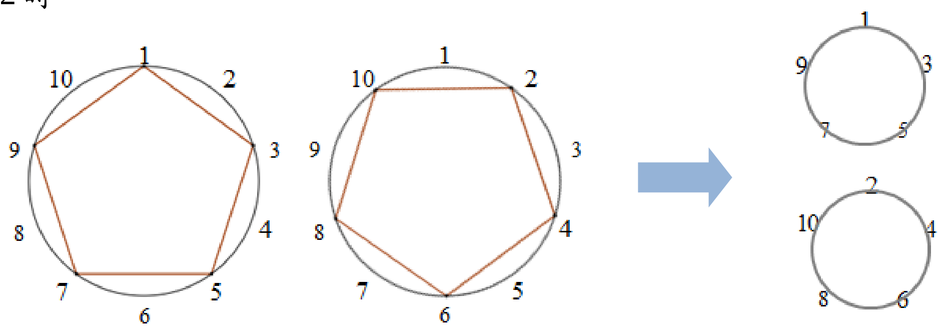
後來想到是不是能用求 $F_m(n,k)$ 的方法，**將大圓分割成一個一個獨立的小圓**，這樣一來就可以克服原先做法遭遇到的困難。



問題 7：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中任意兩數之間隔 $\neq m$，有多少種取法？

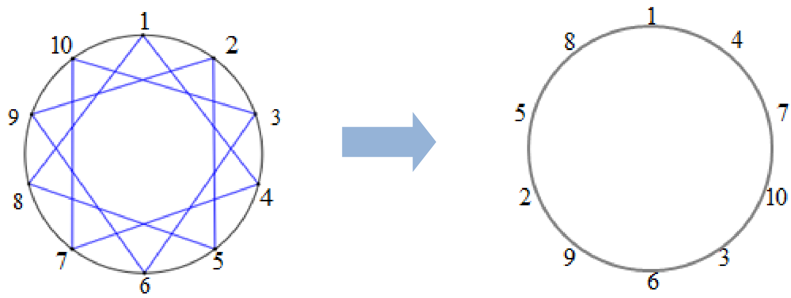
以 $n=10$ 為例，說明分割圓的方式

1. $m=2$ 時



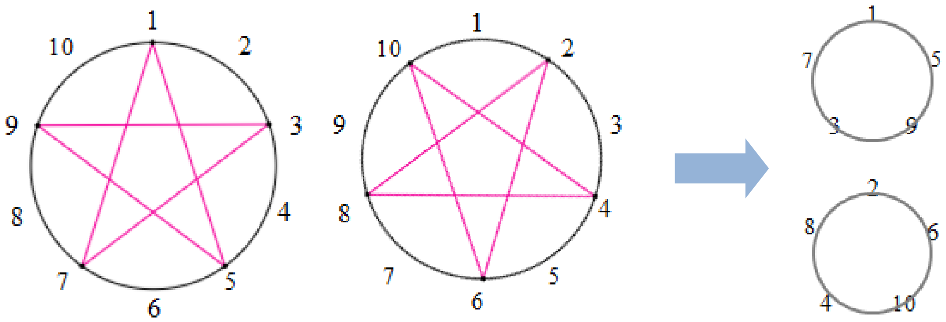
如上圖選取數字，方法為每隔 1 個選一個數字，要將 $1\sim10$ 皆跑盡需要兩個圖形，故分割出兩個小圓。

2. $m=3$ 時



如上圖選取數字，方法為每隔 2 個選一個數字，要將 $1\sim10$ 皆跑盡只需要一個圖形，依選取的順序將數字重新排列。

3. $m=4$ 時



如上圖選取數字，方法為每隔 3 個選一個數字，要將1~10 皆跑盡需要兩個圖形，故分割出兩個小圓。

整理各種情況，$\dfrac{lcm(m,n)}{m}$ 為一圖形的線段數，也就是分割出的小圓內的數字個數。

再將 $\dfrac{lcm(m,n)}{m}$ 化簡為 $\dfrac{n}{\gcd(m,n)}$，所以需要 $\gcd(m,n)$ 個小圓才能跑盡所有數字。

每個小圓裡都不能取到相鄰的數字。

結合【定理四】:

$$G_m(n,k)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{\gcd(m,n)}}\prod_{i=1}^{\gcd(m,n)}G_1\left(\frac{n}{\gcd(m,n)},k_i\right)$$

$$=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{\gcd(m,n)}}\prod_{i=1}^{\gcd(m,n)}\frac{\dfrac{n}{\gcd(m,n)}}{\dfrac{n}{\gcd(m,n)}-k_i}\times C_{k_i}^{\frac{n}{\gcd(m,n)}}$$

$$=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{\gcd(m,n)}}\prod_{i=1}^{\gcd(m,n)}\frac{n}{n-k_i\times\gcd(m,n)}\times C_{k_i}^{\frac{n}{\gcd(m,n)}}$$

所以我們得到【定理六】:

定理六：

$$G_m(n,k)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{\gcd(m,n)}}\prod_{i=1}^{\gcd(m,n)}\frac{n}{n-k_i\times\gcd(m,n)}\times C_{k_i}^{\frac{n}{\gcd(m,n)}}$$

在嘗試簡化 $G_m(n,k)$ 時，我們覺得相對位置一樣的排法可以被歸類成一種，這樣的排法和所有的排法存在類似倍數的關係。我們得出定理七這條的關係式：

定理七：

$nG'(n,k)=kG(n,k)$ ，$G(n,k)$ 表在某限制下，將 $1,2,...,n$ 依序排成圓，取 k 個數的方法數；$G'(n,k)$ 為其中必取 1 的方法數。

〈證明〉

令 $G^i(n,k)$ 為在某限制下，將 $1,2,...,n$ 依序排成圓，取 k 個數且必取 i 的方法數，記

$S=\sum_{i=1}^{n}G^i(n,k)$；$\because G'(n,k)=G^i(n,k)$ $\therefore S=nG'(n,k)$

又在其中一種 $G(n,k)$ 的取法中，如果是取出 $a_1,a_2,...,a_k$ ，則此取法會在

$G^{a_1}(n,k),G^{a_2}(n,k),...,G^{a_k}(n,k)$ 各被數到一次（共 k 次），即 $\sum_{i=1}^{n}G^i(n,k)=kG(n,k)$

$nG'(n,k)=kG(n,k)$ 得證。

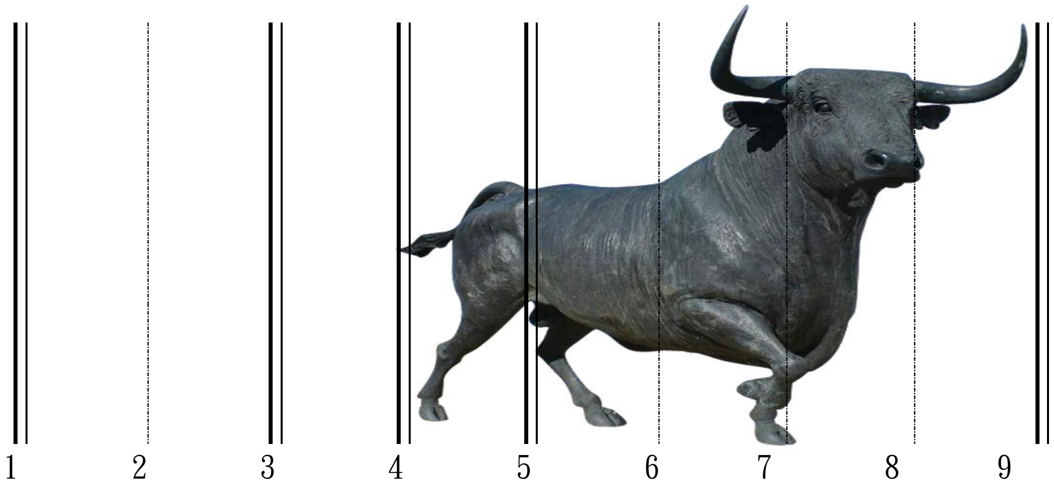
【定理七】能大幅簡化圓形排列的各種問題，**使我們在探討問題時只需解出必取或必留 1 的特例。**

三、推廣原始問題

推廣原始的籠子問題是從關猩猩的出發，關猩猩的條件是因為體型較大，可以連續取兩根欄杆，又因為力氣大，不能留下單獨的一根欄杆，整理過後相當於 $m=2$ 的情況，所以去探討 m 為任意正整數的問題。

我們推測文獻一的作者是先有數學模型，再為它套上情境，但是 $m\geq 3$ 沒辦法套在關動物的情境上。為了更符合原始問題的情境，我們考量不同動物的力氣和體型，加了兩個變數。我們希望動物不要跑出來，籠子也不要被破壞。

從 n 根欄杆中取出 k 根。s 代表力氣，每一組留下的欄杆至少要 s 根，否則會被動物破壞；a 代表體型，不能連拆 a 根，否則動物會跑出來。我們定義取法數為 $f_{s,a}(n,k)$，圓形排列的取法數則是 $g_{s,a}(n,k)$。



以上圖為例，這是一隻$s=3,a=4$的牛。現在已經拆了 2、6、7、8，就不能再拆 5 或 9，否則牛會跑出來；也不能再拆 3，否則 4、5 會被破壞。

（一）$f_{s,a}(n,k)$

我們先探討$f_{s,a}(n,k)$的兩個特例：

1. $f_{s,2}(n,k)$：將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取 2 個的取法數。較簡單的敘述如問題 8：

問題 8：將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中任意兩數之間至少留下s個數，有多少種取法？

仿照**問題 1** 的作法，設取出的k個數為$a_1,a_2,...,a_k$，不妨令$a_1<a_2<...<a_k$。
依題意，$a_i>a_{i-1}+s$，$i=2,3,...,k$

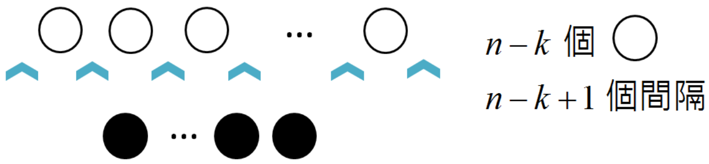
$$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ -) & 0 & 1s & \cdots & (k-1)s \\ \hline & a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_k \end{array} \qquad \begin{array}{l} a'_i \geq a'_{i-1}+1 \\ a'_k \leq n-(k-1)s \end{array}$$

數組$(a_1,a_2,...,a_k)$與$(a'_1,a'_2,...,a'_k)$是一一對應的

得 $f_{s,2}(n,k)=C_k^{n-(k-1)s}$，$k\leq\dfrac{n+1}{s+1}$

2. $f_{1,a}(n,k)$：將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，其中每一組留下的數至少 1 個且不能連續取a個的取法數。較簡單的敘述如問題 9：

問題 9：將$1,2,...,n$依序排成直線，取k個數，不能連續取a個，有多少種取法？



依題意，在一個間隔中最多只能放入$a-1$顆●，由排容原理

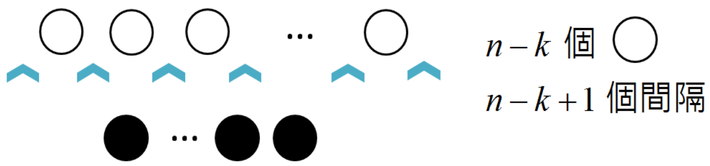
$$f_{1,a}\left(n,k\right)=\sum_{i=0}\left(-1\right)^i C_i^{n-k+1}H_{k-ia}^{n-k+1}=\sum_{i=0}\left(-1\right)^i C_i^{n-k+1}C_{n-k}^{n-ia}$$

接下來探討 $f_{s,a}\left(n,k\right)$。

問題 10：將$1,2,\ldots,n$依序排成直線，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個，有多少種取法？

把$n-k$顆白球排成直線，有$n-k+1$個間隔。先從這些間隔裡取i個放黑球，每兩顆黑球之間至少要有s顆白球，也就是$s-1$個間隔。所以選間隔的方法數是

$f_{s-1,2}\left(n-k+1,i\right)$，舉例來說，如果$s=3$，那麼取的 2 個間隔之間至少要留 2 個間隔，所以是$s-1$。



第二步是在這i個間隔裡面放入k顆●，每個間隔最少放 1 顆，最多放$a-1$顆，用排容原理算得方法數為 $\sum_{j=0}\left(-1\right)^j C_j^iH_{k-i-(a-1)j}^i$ 。

j是不合的間隔數，k顆●$-i\times1$(每個間隔最少放 1 顆)$-\left(a-1\right)j$(放$\geq a$顆)

$f_{s-1,2}\left(n-k+1,i\right)$是選間隔的方法數，$\sum_{j=0}\left(-1\right)^j C_j^iH_{k-i-(a-1)j}^i$ 是在間隔中放入黑球的方法數，將兩者相乘：

$$\Rightarrow f_{s,a}\left(n,k\right)=\sum_{i=1}\left(f_{s-1,2}\left(n-k+1,i\right)\sum_{j=0}\left(-1\right)^j C_j^iC_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}\left(C_i^{n-k+1-(i-1)(s-1)}\sum_{j=0}\left(-1\right)^j C_j^iC_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)=\sum_{i=1}\left(C_i^{n-k-is+i+s}\sum_{j=0}\left(-1\right)^j C_j^iC_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

所以我們得到【定理八】：

定理八：

$$f_{s,a}(n,k)=\sum_{i=1}\left(C_i^{n-k-is+i+s}\sum_{j=0}(-1)^j C_j^i C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

（二）$g_{s,a}(n,k)$

我們先探討 $g_{s,a}(n,k)$ 的兩個特例：

1. $g_{s,2}(n,k)$：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中每一組留下的數至少 s 個且不能連續取 2 個的取法數。較簡單的敘述如問題 11：

問題 11：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中任意兩數之間至少留下 s 個數，有多少種取法？

【定理七】說明在處理圓形排列的問題時，只需知道必取 1 的方法數，就可得所有的方法數。

設取出的 k 個數為 $a_1,a_2,\ldots,a_k$，不妨令 $a_1<a_2<\ldots<a_k$。
依題意，$a_i>a_{i-1}+s$，$i=3,\ldots,k$，且 $a_1=1$

$$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ -) & 0 & 1s & \cdots & (k-1)s \\ \hline & a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_k \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_k\le n-s \\ a'_i\ge a'_{i-1}+1 \\ a'_k\le n-s-(k-1)s \end{array}$$

數組 $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ 與 $(a'_1,a'_2,\ldots,a'_k)$ 是一一對應的

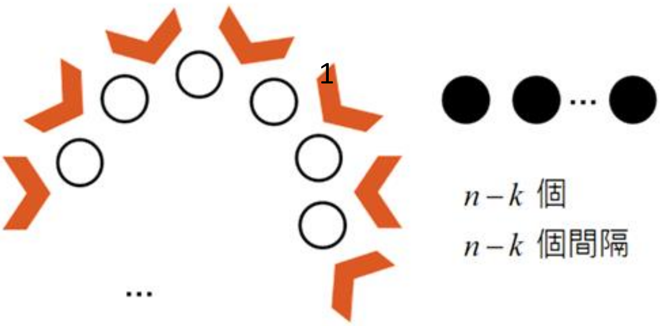
得 $g'_{s,2}(n,k)=C_{k-1}^{n-ks-1}$

$$\therefore g_{s,2}(n,k)=\frac{n}{k}g'_{s,2}(n,k)=\frac{n}{k}C_{k-1}^{n-ks-1}$$

2. $g_{1,a}(n,k)$：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，其中每一組留下的數至少 1 個且不能連續取 a 個的取法數。較簡單的敘述如問題 12：

問題 12：將 $1,2,\ldots,n$ 依序排成圓，取 k 個數，不能連續取 a 個，有多少種取法？

由【定理七】，只需討論必留 1 的情況。



依題意，在一個間隔中最多能放入$a-1$顆●，由排容原理，

$$g'_{1,a}(n,k)=\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k}H_{k-ia}^{n-k}=\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k}C_{k-ia}^{n-ia-1}=\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k}C_{n-k-1}^{n-ia-1}$$

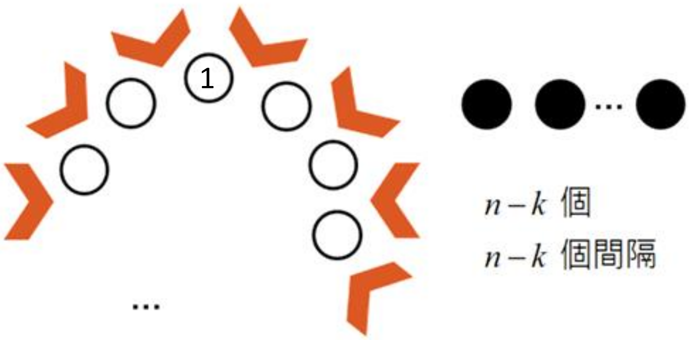
$$\therefore g_{1,a}(n,k)=\frac{n}{n-k}\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k}C_{n-k-1}^{n-ia-1}$$

接下來探討$g_{s,a}(n,k)$。

問題13：將$1,2,\ldots,n$依序排成圓，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個，有多少種取法？

由【定理七】，只需討論必留1的情況。

把$n-k$顆白球排成圓，有$n-k$個間隔。從這些間隔裡取i個放黑球，每兩顆黑球之間至少要有s顆白球，也就是$s-1$個間隔。所以選間隔的方法數是$g_{s-1,2}(n-k,i)$。



同直線排列的做法，

$$g'_{s,a}(n,k)=\sum_{i=1}g_{s-1,2}(n-k,i)\sum_{j=0}(-1)^j C_j^i C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}$$

$$=\sum_{i=1}\left(\frac{n-k}{i}C_{i-1}^{n-k-i(s-1)-1}\sum_{j=0}(-1)^j C_j^i C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

$$\Rightarrow g_{s,a}(n,k)=\frac{n}{n-k}\sum_{i=1}\left(\frac{n-k}{i}C_{i-1}^{n-k-i(s-1)-1}\sum_{j=0}(-1)^{j}C_{j}^{i}C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$
$$=\frac{n}{n-k}\sum_{i=1}\left(\frac{n-k}{i}C_{i-1}^{n-k-is+i-1}\sum_{j=0}(-1)^{j}C_{j}^{i}C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$
$$=\sum_{i=1}\left(\frac{n}{i}C_{i-1}^{n-k-is+i-1}\sum_{j=0}(-1)^{j}C_{j}^{i}C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

定理九：

$$g_{s,a}(n,k)=\sum_{i=1}\left(\frac{n}{i}C_{i-1}^{n-k-is+i-1}\sum_{j=0}(-1)^{j}C_{j}^{i}C_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$$

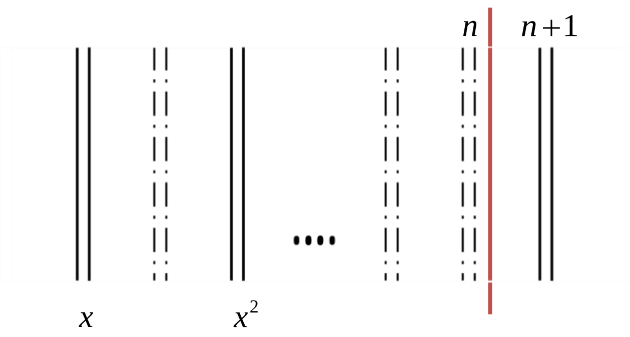
四、限定相鄰兩根要留下的(或要取的)欄杆之間的間隔

若要直接**限定相鄰兩根要留下的(或要取的)欄杆之間的間隔**，則可以採用生成函數的方法，便可以設定更多的情境。

(一) $F(n,k,A)$

限定相鄰兩根留下的欄杆之間隔 $\in A$ ， $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ 。

令 l 為留下的欄杆數($l=n-k$)，方法數為 $\left[x^{n+1}\right]\left(\sum_{i\in A}x^{i}\right)^{l+1}=\left[x^{n+1}\right]\left(\sum_{i\in A}x^{i}\right)^{n-k+1}$ 。

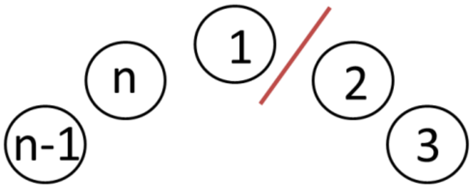


這樣的做法代表最後一根是必留的，但是題目並沒有這樣的限制，所以我們令第 $n+1$ 根是必留的，總共要取 $k+1$ 根。

(二) $G(n,k,A)$

限定相鄰兩根留下的欄杆之間隔 $\in A$ ， $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ 。

令 l 為留下的欄杆數($l=n-k$)。根據【定理七】$nG'(n,k)=kG(n,k)$，只需討論必留 1 的情況。



以紅線處切開，方法數為 $\left[x^n\right]\left(\sum_{i\in A} x^i\right)^l = \left[x^n\right]\left(\sum_{i\in A} x^i\right)^{n-k}$

故總方法數為 $\frac{n}{l}\left[x^n\right]\left(\sum_{i\in A} x^i\right)^l = \frac{n}{n-k}\left[x^n\right]\left(\sum_{i\in A} x^i\right)^{n-k}$ 。

以下舉兩個特例。

(三)特例一： $A=\{1,2,\ldots,a\}$

$A=\{1,2,\ldots,a\}$ 的情境同 $f_{1,a}(n,k)$ 、 $g_{1,a}(n,k)$ 。

1. $F(n,k,A)=f_{1,a}(n,k)=\left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{n-k+1}$

$$\left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{n-k+1} \equiv \left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{l+1}$$
$$\equiv \left[x^{n-l}\right]\left(1+x+\ldots+x^{a-1}\right)^{l+1} \equiv \left[x^{n-l}\right]\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l+1}$$

$$\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l+1} = \left(\sum_{i=0}^{l+1}\binom{l+1}{i}\left(-x^a\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}\binom{(l+1)+j-1}{j}x^j\right) = \sum_{i,j}\binom{l+1}{i}(-1)^i\binom{l+j}{j}x^{ia+j}$$

令 $ia+j=n-l=k$ ， $j=k-ia$ ，我們得到

$$\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l+1} = \sum_{i,j}\binom{l+1}{i}(-1)^i\binom{l+j}{j}x^{ia+j} = \sum_{i}(-1)^i\binom{n-k+1}{i}\binom{n-k+k-ia}{k-ia}x^k$$
$$= \sum_{i}(-1)^i\binom{n-k+1}{i}\binom{n-ia}{k-ia}x^k$$

因此取 x^k 的係數，得 $A=\{1,2,\ldots,a\}$ 時， $F(n,k,A)=\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k+1}{i}\binom{n-ia}{k-ia}$ ，和**問題 9** 的結果相同。

2. $G(n,k,A)=g_{1,a}(n,k)\dfrac{n}{n-k}\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{n-k}$

由【定理七】，只需知道必留 1 的取法數。

$$\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{n-k}\equiv\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots+x^a\right)^{l}$$
$$\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(1+x+\ldots+x^{a-1}\right)^{l}\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l}$$

$$\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l}=\left(\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\left(-x^a\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}\binom{l+j-1}{j}x^j\right)=\sum_{i,j}\binom{l}{i}(-1)^i\binom{l+j-1}{j}x^{ia+j}$$

令 $ia+j=n-l=k$ ， $j=k-ia$ ，我們得到

$$\left(\frac{1-x^a}{1-x}\right)^{l}=\sum_{i,j}\binom{l}{i}(-1)^i\binom{l+j-1}{j}x^{ia+j}=\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-k+k-ia-1}{k-ia}x^k$$
$$=\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-ia-1}{k-ia}x^k=\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-ia-1}{n-k-1}x^k$$

因此取 x^k 的係數，得 $A=\{1,2,\ldots,a\}$ 時， $G'(n,k,A)=\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-ia-1}{n-k-1}$

$G(n,k,A)=\dfrac{n}{n-k}\sum_{i}(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-ia-1}{n-k-1}$ ，和**問題 12** 的結果相同。

(四)特例二： $A=N-\{t\}$

$A=N-\{t\}$ 的條件限制可設想為，若一隻動物的頸寬為 t 個欄杆間隔的寬度，則籠子不能出現 t 個欄杆間隔的寬的空格，否則將導致動物脖子卡住窒息。

1. $F(n,k,A)=\left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^{n-k+1}$

$$\left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^{n-k+1}\equiv\left[x^{n+1}\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^{l+1}$$
$$\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(1+x+\ldots-x^{t-1}\right)^{l+1}\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(\frac{1}{1-x}-x^{t-1}\right)^{l+1}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}-x^{t-1}\right)^{l+1}=\left(\frac{1-x^{t-1}(1-x)}{1-x}\right)^{l+1}=(1-x)^{-(l+1)}\left(1-x^{t-1}(1-x)\right)^{l+1}$$
$$=\sum_m\binom{l+1+m-1}{m}-x^m\sum_i\binom{l+1}{i}(-1)^i x^{i(t-1)}\sum_j^i\binom{i}{j}(-1)^j x^j$$
$$=\sum_{i,j,m}(-1)^{i+j}\binom{l+m}{m}\binom{l+1}{i}\binom{i}{j}x^{m+i(t-1)+j}$$

令 $m+i(t-1)+j=n-l=k$ ， $m=k-j-i(t+1)$

$$\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{l+m}{m}\binom{l+1}{i}\binom{i}{j}x^{m+i(t-1)+j}$$
$$=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{l+k-j-i(t+1)}{l}\binom{l+1}{i}\binom{i}{j}x^k$$
$$=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)}{n-k}\binom{n-k+1}{i}\binom{i}{j}x^k$$

因此取 x^k 的係數，得 $A=N-\{t\}$ 時，

$$F(n,k,A)=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)}{n-k}\binom{n-k+1}{i}\binom{i}{j}\text{ 。}$$

2. $G(n,k,A)=\frac{n}{n-k}\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^{n-k}$

由【定理七】，只需知道必留 1 的取法數。

$$\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^{n-k}\equiv\left[x^n\right]\left(x+x^2+\ldots-x^t\right)^l$$
$$\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(1+x+\ldots-x^{t-1}\right)^l\equiv\left[x^{n-l}\right]\left(\frac{1}{1-x}-x^{t-1}\right)^l$$

$$\left(\frac{1}{1-x}-x^{t-1}\right)^l=\left(\frac{1-x^{t-1}(1-x)}{1-x}\right)^l=(1-x)^{-l}\left(1-x^{t-1}(1-x)\right)^l$$
$$=\sum_m\binom{-l}{m}(-x)^m\sum_i\binom{l}{i}\left(-x^{t-1}(1-x)\right)^i=\sum_{i,j,m}(-1)^{i+j}\binom{l+m-1}{m}\binom{l}{i}\binom{i}{j}x^{m+i(t-1)+j}$$

令 $m+i(t-1)+j=n-l=k$，$m=k-j-i(t+1)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{l+m-1}{m}\binom{l}{i}\binom{i}{j}x^{m+i(t-1)+j}\\
&=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{l+k-j-i(t+1)-1}{l-1}\binom{l}{i}\binom{i}{j}x^{k}\\
&=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)-1}{n-k-1}\binom{n-k}{i}\binom{i}{j}x^{k}
\end{aligned}$$

因此取 x^k 的係數，得 $A=N-\{t\}$ 時，

$$G'(n,k,A)=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)-1}{n-k-1}\binom{n-k}{i}\binom{i}{j}$$

$$G(n,k,A)=\frac{n}{n-k}\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)-1}{n-k-1}\binom{n-k}{i}\binom{i}{j}$$

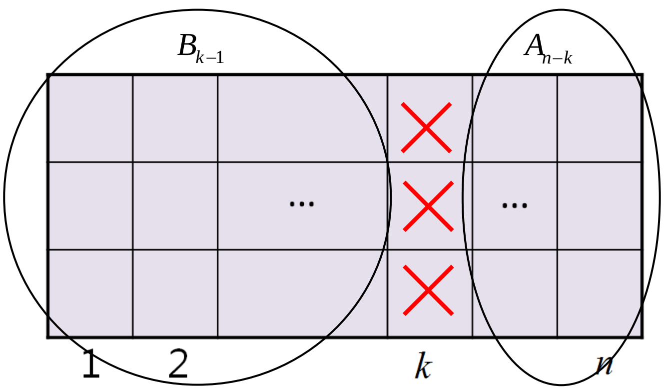
五、二維平面上的問題

我們嘗試將原始問題(不能取相鄰的兩個)推廣到平面上：
在一個 $3\times n$ 的方格裡放入黑球，任兩顆黑球不相鄰，有多少種放法？(全部不放也算一種)

設 A_n 為此題解，第 k 行是第一個沒有放入黑球的行

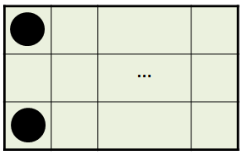
$A_n=A_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}A_{n-k}+B_n$，$n\geq 2$，$B_{k-1}$ 表前 $k-1$ 行中每行都有放入黑球的方法數

定義 $A_0=1$，使遞迴式中的 $B_{n-1}A_0$ 有意義。

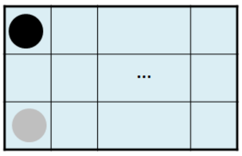


在前$k-1$行，我們依照第一行的圖形分成三種：

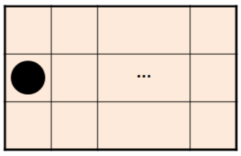
α_m



$\beta_m\left(\gamma_m\right)$



δ_m



遞迴關係：

$$\begin{cases}\alpha_m = \delta_{m-1} \\ \beta_m = \beta_{m-1} + \delta_{m-1} \\ \delta_m = 2\beta_{m-1} + \alpha_{m-1}\end{cases} \qquad B_m = \alpha_m + 2\beta_m +$$

為了使以上遞迴式適用於$m \geq 1$的所有情況，我們定義初始條件：

$\alpha_0 = 1$，$\beta_0 = \gamma_0 = 0$，$\delta_0 = 1$

利用以上遞迴關係

$\Rightarrow \beta_m = \beta_{m-1} + 3\beta_{m-2} - \beta_{m-3}$

$\Rightarrow B_m = \alpha_m + 2\beta_m + \delta_m = B_{m-1} + 2\beta_m$（定義$B_0 = 2$）

先求β_m的生成函數，就可以求B_m的生成函數：

$$\sum_{m\geq 3}\beta_m x^m = x\sum_{m\geq 3}\beta_{m-1}x^{m-1} + 3x^2\sum_{m\geq 3}\beta_{m-2}x^{m-2} - x^3\sum_{m\geq 3}\beta_{m-3}x^{m-3}$$

$$\Rightarrow \beta(x) - \beta_0 - \beta_1 x - \beta_2 x^2 = x\left(\beta(x) - \beta_0 - \beta_1 x\right) + 3x^2\left(\beta(x) - \beta_0\right) - x^3\beta(x)$$

$$\Rightarrow \left(1 - x - 3x^2 + x^3\right)\beta(x) = -x^2 + 0 + x + 2x^2$$

$$\Rightarrow \beta(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x - 3x^2 + x^3}$$

$$B_m = B_{m-1} + 2\beta_m$$

$$\sum_{m\geq 1}B_m x^m = x\sum_{m\geq 1}B_{m-1}x^{m-1} + 2\sum_{m\geq 1}\beta_m x^m$$

$$\Rightarrow B(x) - B_0 = xB(x) + 2\left(\beta(x) - \beta_0\right) \Rightarrow (1-x)B(x) = 2 + 2\beta(x)$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{2}{1-x}\left(1 + \beta(x)\right) = \frac{2\left(1 + x - x^2\right)}{1 - x - 3x^2 + x^3}$$

再用生成函數的摺積：令$C(x)=B(x)A(x)$

$$\sum C_n x^n=\left(\sum B_n x^n\right)\left(\sum A_n x^n\right)，C_n=\sum_{k=0}^{n}B_k A_{n-k}$$

$$A_n=A_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}B_{k-1}A_{n-k}+B_n$$

$$\Rightarrow A_n=A_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}B_k A_{(n-1)-k}+B_n\Rightarrow A_n=A_{n-1}+C_{n-1}-B_0A_{n-1}+B_n$$

$$\Rightarrow A_n=-A_{n-1}+C_{n-1}+B_n\Rightarrow A(x)-A_0=-xA(x)+xC(x)+B(x)-B_0$$

$$\Rightarrow\left(1+x-xB(x)\right)A(x)=B(x)-1$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{B(x)-1}{1+x-xB(x)}=\frac{1+3x+x^2-x^3}{1-2x-6x^2+x^4}$$

得A_n的生成函數$A(x)=\dfrac{1+3x+x^2-x^3}{1-2x-6x^2+x^4}$

$$A_n=\left[x^n\right]\frac{1+3x+x^2-x^3}{1-2x-6x^2+x^4}$$

且A_n的遞迴式$A_n=2A_{n-1}+6A_{n-2}-A_{n-4}$

定理十：

$$A_n=\left[x^n\right]\frac{1+3x+x^2-x^3}{1-2x-6x^2+x^4}$$

參、研究結果與討論

一、研究結果

我們探討了各限制下從$1,2,\ldots,n$取出k個數的方法，茲將研究結果說明如下：

(一)**不含定距元素**：將$1,2,\ldots,n$依序排成直線或圓，取k個數，其中任意兩數之間隔$\neq m$的取法數

直線排列	圓形排列
$F_1(n,k)=C_k^{n-k+1}$，$n\geq 2k-1$	$G_1(n,k)=C_k^{n-k}\dfrac{n}{n-k}$
$F_2(n,k)=\sum_{i=0}^{h}C_{k-2i}^{n+1-k-2i}$，$n\geq 2(k-1)$，$h=\left[\dfrac{k}{2}\right]$	$G_2(n,k)=C_k^{n-k}+C_{k-1}^{n-k-1}$，$n\geq 2k+1$
$F_m(n,k)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=k}\prod_{i=1}^{m}C_{j_k}^{\left[\frac{n-i}{m}\right]-k_i+2}$	$G_m(n,k)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{\gcd(m,n)}}\prod_{i=1}^{\gcd(m,n)}\dfrac{n}{n-k_i\times\gcd(m,n)}\times C_{k_i}^{\frac{n}{\gcd(m,n)}}$

(二)**簡化圓形排列問題的關係式**：

$nG'(n,k)=kG(n,k)$；表在某限制下，將$1,2,\ldots,n$依序排成圓，取k個數的方法數；

$G'(n,k)$為其中必取 1 的方法數。

(三)**推廣原始問題的情境**：考量不同動物的力氣和體型，加了這兩個變數。從n根欄杆中取出k根欄杆。s代表力氣，每一組留下的欄杆至少要s根，否則會被動物破壞；a代表體型，不能連拆a根，否則動物會跑出來。我們希望動物不要跑出來，籠子也不要被破壞，取出欄杆的取法數

直線排列	圓形排列
$f_{1,a}(n,k)=\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k+1}C_{n-k}^{n-ia}$	$g_{1,a}(n,k)=\dfrac{n}{n-k}\sum_{i=0}(-1)^i C_i^{n-k}C_{n-k-1}^{n-ia-1}$
$f_{s,2}(n,k)=C_k^{n-(k-1)s}$，$k\leq\dfrac{n+1}{s+1}$	$g_{s,2}(n,k)=\dfrac{n}{k}C_{k-1}^{n-ks-1},k<\dfrac{n}{s+1}$
$f_{s,a}(n,k)=\sum_{i=1}\left(C_i^{n-k-is+i+s}\sum_{j=0}(-1)^j C_j^iC_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$	$g_{s,a}(n,k)=\sum_{i=1}\left(\dfrac{n}{i}C_{i-1}^{n-k-is+i-1}\sum_{j=0}(-1)^j C_j^iC_{i-1}^{k-(a-1)j-1}\right)$

(四)**限定相鄰兩根要留下的(或要取的)欄杆之間的間隔**：限定相鄰兩根留下的欄杆之間隔 $\in A$，$A=\{a_1,a_2,\ldots\}$，從 n 跟欄杆中取出 k 根的方法數

$A=\{1,2,\ldots,a\}$：

直線排列	圓形排列
$F(n,k,A)=\sum_i(-1)^i\binom{n-k+1}{i}\binom{n-ia}{k-ia}$	$G(n,k,A)=\frac{n}{n-k}\sum_i(-1)^i\binom{n-k}{i}\binom{n-ia-1}{n-k-1}$

$A=N-\{t\}$：

$F(n,k,A)=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)}{n-k}\binom{n-k+1}{i}\binom{i}{j}$	$G(n,k,A)=\frac{n}{n-k}\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\binom{n-j-i(t+1)-1}{n-k-1}\binom{n-k}{i}\binom{i}{j}$

(五)**將原始問題(不能取相鄰的兩個)推廣到平面上**：在一個 $3\times n$ 的方格裡放入黑球，任兩顆黑球不相鄰，有多少種放法？(全部不放也算一種)

$$A_n=\left[x^n\right]\frac{1+3x+x^2-x^3}{1-2x-6x^2+x^4}$$

(六)以下是我們利用電腦運算得到的數據：

$F_m(10,k)$

$F_m(10,k)$	m=1	2	3	4	5
k=1	10	10	10	10	10
2	36	37	38	39	40
3	56	62	68	74	80
4	35	46	58	68	80
5	6	12	22	24	32
6	0	0	3	0	0
7	0	0	0	0	0

$G_m(10,k)$

$G_m(10,k)$	m=1	2	3	4	5	6
k=1	10	10	10	10	10	10
2	35	35	35	35	35	35
3	50	50	50	50	50	50
4	25	25	25	25	25	25
5	2	0	2	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

$f_{1,a}(n,k)$

$f_{1,a}(10,k)$	a=2	3	4	5	6	7	8	9	10
k=1	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	36	45	45	45	45	45	45	45	45
3	56	112	120	120	120	120	120	120	120
4	35	161	203	210	210	210	210	210	210
5	6	126	216	246	252	252	252	252	252
6	0	45	145	185	205	210	210	210	210
7	0	4	40	80	104	116	120	120	120
8	0	0	3	15	27	36	42	45	45
9	0	0	0	0	2	4	6	8	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$f_{s,2}(n,k)$

$f_{s,2}(10,k)$	s=1	2	3	4	5	6	7	8	9
k=1	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	36	28	21	15	10	6	3	1	0
3	56	20	4	0	0	0	0	0	0
4	35	1	0	0	0	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$g_{1,a}(n,k)$

$g_{1,a}(10,k)$	a=2	3	4	5	6	7	8	9	10
k=1	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	35	45	45	45	45	45	45	45	45
3	50	110	120	120	120	120	120	120	120
4	25	150	200	210	210	210	210	210	210
5	2	102	202	242	252	252	252	252	252
6	0	25	110	170	200	210	210	210	210
7	0	0	20	60	90	110	120	120	120
8	0	0	0	5	15	25	35	45	45
9	0	0	0	0	0	0	0	0	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$g_{s,2}(n,k)$

$g_{s,2}(10,k)$	s=1	2	3	4	5	6	7	8	9
k=1	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	35	25	15	5	0	0	0	0	0
3	50	10	0	0	0	0	0	0	0
4	25	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A_n 、 B_n

n	0	1	2	3	4	5	6
A_n	1	5	17	63	227	827	2999
B_n	2	4	8	18	38	84	180

二、討論

(一)我們發現當 $n=2k$ 時，$G_2(n,k)\neq G_1(n,k)$。值得注意的是，$G_1(n,k)\neq 0$ 的條件限制為 $k\leq\frac{n}{2}$，也就是說 k 的最大值是 $\left[\frac{n}{2}\right]$。分割出來的小圓中有 $\frac{n}{2}=k$ 個數，所以每個小圓最多能取出 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 個數。

當 $n=2k$ 時，若 n 是 4 的倍數，則每個小圓必定各取 $\left[\frac{k}{2}\right]=\frac{k}{2}$ 個數，$G_2(n,k)=4$；

當 $n=2k$ 時，若 n 不是 4 的倍數，則必有一個小圓要取超過 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 個數，$G_2(n,k)=0$。

$$所以\ G_2(n,k)=\begin{cases} C_k^{n-k}\dfrac{n}{n-k},\ n>2k \\ 4,\ n=2k\ 且\ n\ 是\ 4\ 的倍數 \\ 0,\ n=2k\ 且\ n\ 不是\ 4\ 的倍數或\ n<2k \end{cases}$$

(二)若 $\gcd(m_1,n)=\gcd(m_2,n)$，則 $G_{m_1}(n,k)=G_{m_2}(n,k)$。這讓我們在計算數值時方便許多。

(三)**問題 9** 和**問題 12** 我們分別採用了排容原理以及生成函數的做法得出完全相同的結果。比較此兩種做法，排容原理乍看之下算式較少解題較為快速，然而若改變取法的限制(如特例二)，使用排容原理會變得既繁瑣又複雜，而且每種題目都要用不同的算法。生成函數在處理上相當直觀且方便，我們認為這是比較好的做法。

(四)解決了二維平面上的問題，可以利用填數字的方式協助解決不含兩個定距元素的問題。

1	4		
2	5	…	
3	6		

1	2		n
n+1	n+2	…	
2n+1			

肆、結論與應用

(一)我們成功的解決原始問題，並將其推廣到圓形排列上。我們用分割的方法代替多數前人所採用的複雜的遞迴關係。

(二)我們猜測文獻一(原始問題)的作者是先有數學模型再為它套上情境，然而這些情境只適用於這個數學模型的幾個特例。我們以更符合原始情境的觀點，討論在關具有不同力氣和體型的動物時拆欄杆的方法數。

(三)若要直接限定相鄰兩根要留下的(或要取的)欄杆之間的間隔，則可以採用生成函數的方法，便可以設定更多的情境。

伍、參考文獻

一、柳柏濂(1997)‧柵欄前面的思考—不含定距元素的組合問題‧*數學傳播*，81，29-34。

二、Irving Kaplansky(1943). Solution of the “Problème des ménages”. Bull. Amer. Math. Soc., 49, 784-785

三、John Konvalina(1981). On the number of combinations without unit separation. Journal of Combinatorial theory, series A 31, 101-107

四、Toufik Mansour and Yidong Sun(2007). On the number of combinations without certain separations. European Journal of Combinatorics, 1200-1206

五、Beih El-Sayed El-Desouky, Mohamed Moustafa Gad, Shimaa El-Eraqy(2015). Generalization of some problems with s-separation. Applied Mathematics, 2015, 6, 1-6

【評語】010025

把 1,2,…,n 依序排成直線,任意取出 k 個數,取法數就是C_k^n。這篇文章主要在研究，當選出來的 k 個數有不同限制時的問題。它運用排列組合、排容原理、以及生成函數等方法，探討六種不同限制時的問題。

整體來說，得到的結論有一定的趣味。