

2017 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010023

參展科別 數學

作品名稱 魔環

得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 楊宗穎、高金美

作者姓名 陳麗雯

關鍵字 組合設計、標號、Magic Labeling

作者簡介



我是陳麗雯，目前就讀北一女中數理資優班二年級。平時的興趣很廣泛，也喜歡嘗試新鮮的事物。而在過去這一年多的日子，專題研究可以說是我的生活重心，在鑽研數學的過程中，時而喜悅時而挫敗，但我仍享受著其中一切的點點滴滴，也使自己從中收穫成長不少。

一路走來，很感謝高金美教授一旁的協助、專研老師辛勞的指導以及家人和同學們的鼓勵，很榮幸有這個機會可以與大家分享我的作品，也期許未來的自己可以繼續努力，抱持這份熱忱去探索更多未知的領域。

摘要

假設 G 為簡單圖，令 $V(G)$ 、 $E(G)$ 分別為 G 的頂點與邊所形成的集合， $|V(G)|$ 與 $|E(G)|$ 分別代表 G 的頂點集合與邊集合的元素個數。若 $u, v \in V(G)$ 且 u, v 有邊相連，則將此邊記為 $uv \in E(G)$ 。對於給定的簡單圖 G ，若存在函數 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ，其中 $m = |V(G)| + |E(G)|$ ，且函數 f 滿足下列兩個條件：

(1) f 為 1-1 且映成函數；

(2) 對於每個邊 $uv \in E(G)$ ， $f(u) + f(v) + f(uv)$ 恆為定值 T ，

則稱函數 f 為圖 G 的一個『魔函數』， G 為一個具有『魔和』為 T 的『魔圖』。

在此次研究中，我們證明了下列的結果：

1. 任意圈 C_n 為具有魔和 $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ 或 $\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ 的魔圖；
2. 長度為奇數 n 的圈 C_n ，其中 $n \neq 5$ ，為具有魔和 $\frac{5n+5}{2}$ 的魔圖；
3. 長度為 $n = 4t + 2$ ($t \geq 1$) 的偶圈 C_n ，為具有魔和 $\frac{5n+6}{2}$ 的魔圖；
4. 長度為奇數 n 的圈 C_n 外加兩個相鄰的懸掛邊所成的圖為一個魔圖；
5. 三個具有共同端點的 n -路徑所形成的圖為一個魔圖。

Abstract

Given a simple graph G , let $V(G)$ and $E(G)$ be the vertex set and the edge set of G respectively. $|A|$ is the number of elements in the set A . If $u, v \in V(G)$ and u, v are adjacent, that we denote the edge connecting u and v as uv , that is, $uv \in E(G)$. Let f be a function from $V(G) \cup E(G)$ to the set $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ with $m = |V(G)| + |E(G)|$. If f satisfies the following conditions:

(1) f is one-to-one and onto;

(2) For each edge $uv \in E(G)$, $f(u) + f(v) + f(uv)$ is a constant T ,

then we call f a *magic function* of G and G a *magic graph* with *magic sum* T .

In 1970, A. Kotzig and A. Rosa have shown that an n -cycle is a magic graph. In this project, we have found the following results:

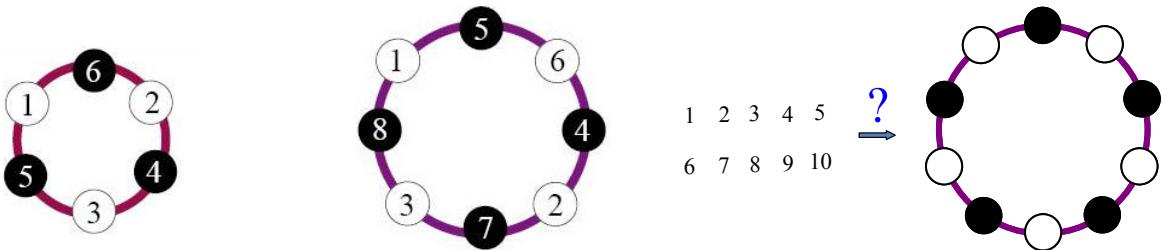
1. Any n -cycle is a magic graph with magic sum $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ or $\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$;
2. Any odd n -cycle is a magic graph with magic sum $\frac{5n+5}{2}$;
3. When $n = 4t + 2$ ($t \geq 1$), any n -cycle is a magic graph with magic sum $\frac{5n+6}{2}$;
4. Any odd n -cycle with two adjacent pendant edges is a magic graph;
5. A graph which is formed by three n -path ($n \geq 2$) with a common end vertex is a magic graph.

壹、前言

一、研究動機

許多報紙都會附上腦力激盪的數學小遊戲，最常見的就是各種形式的填數字遊戲，例如：幻方、數獨、蜜蜂路徑等。2011年9月26日，在自由時報上刊登了一個特別的遊戲『數珠手環』。它有些類似幻方，具有數字總和為定值的特性，但在細節上又不太一樣。題目介紹如下：

- (1) 手環上有六粒珠子黑白隔開，分別鑲有 6,2,4,3,5,1 等六個數字，黑色的珠子上面的數字和左右相鄰白色珠子數字總和都相同（如左下圖所示）。
- (2) 手環上有八粒珠子黑白隔開，分別鑲有 5,6,4,2,7,3,8,1 等八個數字，黑色的珠子上面的數字和左右相鄰白色珠子數字總和也都相同（如右下圖所示）。



今有十粒黑白相隔的珠子串成手環，如何將號碼1~10號個別鑲嵌在黑、白珠上，能使得黑色珠與相鄰兩粒白色珠上的數字總和為定值？若能完成數字的鑲嵌，我們稱此數珠手環有解。數珠手環的相關問題在歷屆科展中已有人研究過（將此問題稱為邏輯圈），但結論只停留在一些簡單的特例，不夠一般化，因此我們試圖針對不同長度的數珠手環問題，進行研究。

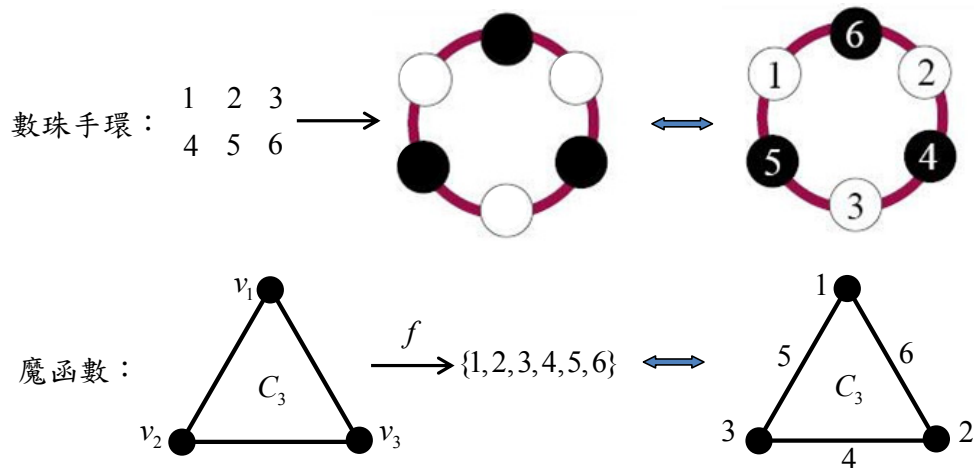
原始的數珠手環問題，手環是由黑白相間的珠子所串連而成，欲將自然數鑲嵌在黑白相間的珠子上，使得每一個黑色珠與相鄰的兩個白色珠上的數字總和恆為定值。若手環有 n 個白色珠，則稱此手環的長度為 n 。給定一個長度為 n 的手環，我們可將此手環視為一個圈 C_n ，其中 n 個白色珠即為圈 C_n 的 n 個頂點，而 n 個黑色珠可轉換為圈 C_n 的 n 個邊。此外將鑲嵌自然數的動作，視為一個函數 f ，其中函數 f 的定義域為 $V(C_n) \cup E(C_n)$ ，對應域為 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 。

若函數 $f: V(C_n) \cup E(C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 滿足下列兩條件：

(1) [1-1 特性]： f 為 1-1 且映成函數；

(2) [定值特性]：對於每個邊 $uv \in E(C_n)$ ， $f(u) + f(v) + f(uv)$ 恆為定值 T ，

則我們稱函數 f 為圈 C_n 的一個『魔函數』。不難得知，數珠手環的問題有解與否，等價於圈 C_n 是否存在一個魔函數 f 。



例如：考慮圈 C_3 （如上圖所示），其中 $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ ， $E(C_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ 。

令函數 $f: V(C_3) \cup E(C_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 定義為 $f(v_1) = 1$ 、 $f(v_2) = 3$ 、 $f(v_3) = 2$ 、 $f(v_1v_2) = 5$ 、 $f(v_2v_3) = 4$ 、 $f(v_3v_1) = 6$ 。

考慮邊 v_1v_2 ，則 $f(v_1) + f(v_2) + f(v_1v_2) = 1 + 3 + 5 = 9$ ；

考慮邊 v_2v_3 ，則 $f(v_2) + f(v_3) + f(v_2v_3) = 3 + 2 + 4 = 9$ ；

考慮邊 v_3v_1 ，則 $f(v_3) + f(v_1) + f(v_3v_1) = 2 + 1 + 6 = 9$ 。

由此可知，如此定義的函數 f 即為 C_3 的一個魔函數。

事實上，數珠手環問題可視為圖論（Graph Theory）中的一種標號問題（Labeling problem），其中魔函數即是在圖形的點與邊上進行標號的設計。為了方便進行數學研究，除了利用函數、級數、矩陣等高中數學概念，我們將使用圖論的語言來重新詮釋問題，更將此問題作進一步的推廣。

二、研究目的

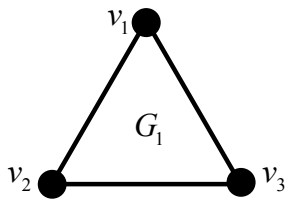
對於不同類型的簡單圖 G ，我們考慮點集合 $V(G)$ 與邊集合 $E(G)$ 上的標號，欲設計魔函數 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ，其中 $m = |V(G)| + |E(G)|$ 。以下則為本文的研究目的：

1. 對於圈 C_n ($n \geq 3$)，發展雙向脈絡表設計魔函數。
2. 對於圈 C_n ($n \geq 3$)，探討魔函數 f 的定值可能性為何？在合理範圍內的定值，是否皆存在魔函數？
3. 對於一般簡單圖 G （樹狀圖 tree、路徑圖 path、弦圖 chordal graph、二部圖 bipartite graph、平面圖 planar graph 等），是否皆存在魔函數？
4. 設計一個新的簡單圖類型，使其必然存在魔函數。

貳、研究方法與過程

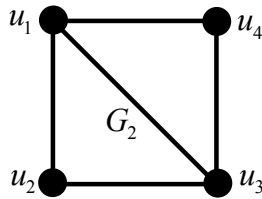
一、基本概念與名詞解釋

一個圖 G 是由一些點與邊所構成的圖形，每一條邊都是建立在兩個不同的頂點上，我們將圖 G 的所有頂點視為一個集合 $V(G)$ ，將圖 G 的所有邊視為一個集合 $E(G)$ ，對於兩個不同的頂點 $u, v \in V(G)$ ，若存在一條邊連結頂點 u, v ，則將此邊記為 $uv \in E(G)$ 。以左下圖 G_1 為例， G_1 的頂點集合為 $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ ，邊集合為 $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ 。以右下圖 G_2 為例， G_2 的頂點集合為 $V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ，邊集合為 $E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_1u_3\}$ 。



$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

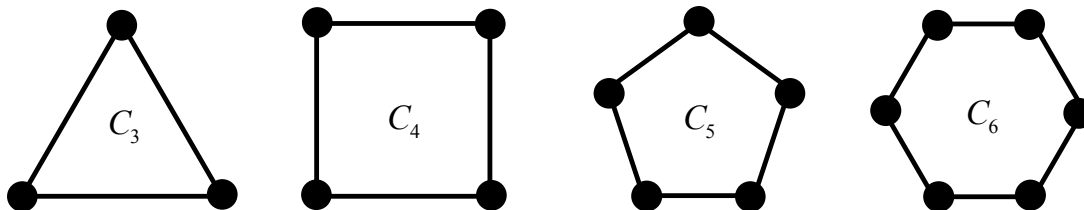
$$E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$$



$$V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1, u_1u_3\}$$

若一個圖 G 的頂點與邊恰好形成一個環狀圖形，我們特別將此類型的圖稱為『圈 (cycle)』。上述的圖 G_1 即為一個圈，但圖 G_2 並不是一個圈。若一個圈的頂點數為 n ，則稱此圈的長度為 n 。上述的圖 G_1 即為長度為 3 的圈。對於長度為 n 的圈，我們稱為『 n -cycle』，並以符號『 C_n 』表示。下列圖形分別為 C_3 、 C_4 、 C_5 、 C_6 的圖形。



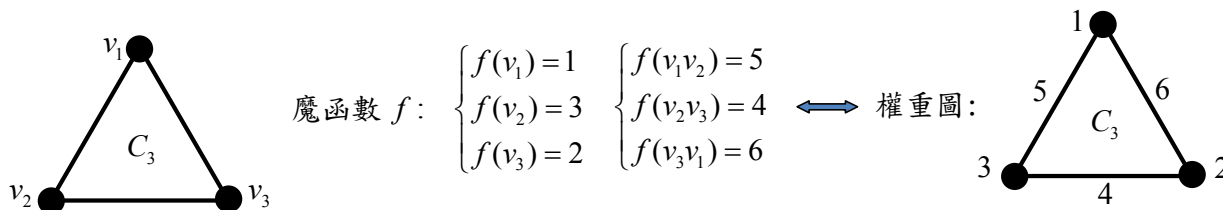
給定一個簡單圖 G ，令 $|V(G)| + |E(G)| = m$ ，若函數 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 滿足：

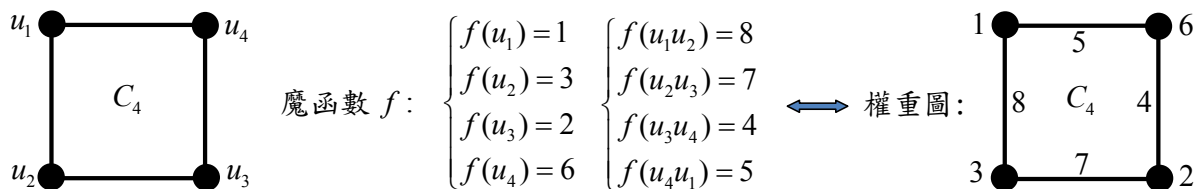
- (1) [1-1 特性]： f 為 1-1 且映成函數；
- (2) [定值特性]：對於每個邊 $uv \in E(G)$ ， $f(u) + f(v) + f(uv)$ 恆為定值 T ，

則我們稱函數 f 為圖 G 的一個『魔函數 *magic-function*』，並將 f 在定值特性中的定值 T 稱為 f 的『魔和 *magic-sum*』。若圖 G 存在一個魔函數 f ，則稱 G 為『魔圖 *magic-graph*』。

此外，給定一個魔圖 G ，考慮所有魔函數的定值所形成的集合，我們稱此集合為魔圖 G 的『魔光譜 *magic-spectrum*』，以符號記為『 $S(G)$ 』，意即 $S(G) = \{T: G \text{ 存在定值為 } T \text{ 的魔函數}\}$ 。

給定圖 G ，令 f 為 G 的一個魔函數，根據魔函數 f 的對應關係， G 上的每一個點與邊皆被賦予一個自然數，若我們將該自然數標記在相對應的點或邊上，則可得到一個賦值圖形 G ，我們將此賦值的圖形稱為 f 在 G 上的『權重圖』。換句話說，權重圖為原始圖形在點與邊上賦予自然數的結果，用以表現魔函數 f 的對應關係。為了便於表示魔函數 f ，我們亦可直接利用權重圖來代表 f 。下圖即為圈 C_3 與 C_4 的例子。





在圖論中，所謂的一個簡單圖（simple graph） G 指的是由點跟邊所構成的無迴圈圖形，其中必須滿足任意兩點 $u, v \in V(G)$ ，若 u, v 有邊相連，則 u, v 之間的邊僅有一條。意即簡單圖是一個沒有重複邊且沒有迴圈的圖形。有關魔函數的問題，討論的對象不僅僅是圈 C_n ，事實上，對於一般簡單圖 G ，我們最終關心的是，什麼類型的簡單圖 G 具有魔函數的存在性？

二、簡單的例子啟蒙

奇數圈 C_3

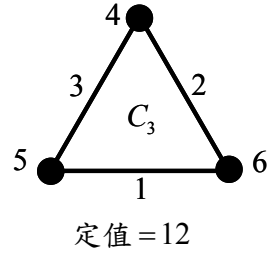
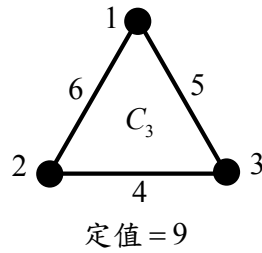
考慮圈 C_3 ，欲建立魔函數 $f: V(C_3) \cup E(C_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，其中 $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ ， $E(C_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ 。因為 f 具有定值特性，假設對 C_3 的每一個邊 $uv \in E(C_3)$ ， $f(u) + f(v) + f(uv) = T$ ，首先我們探討定值 T 的可能值。因為 $|E(C_3)| = 3$ ，考慮

$$3T = [f(v_1) + f(v_2) + f(v_1v_2)] + [f(v_2) + f(v_3) + f(v_2v_3)] + [f(v_3) + f(v_1) + f(v_3v_1)]$$

$$= 2(f(v_1) + f(v_2) + f(v_3)) + (f(v_1v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3v_1))。$$

因為 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_1v_2), f(v_2v_3), f(v_3v_1)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，倘若希望 T 為所有可能的最小值，由於 $3T$ 的值中，頂點 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 的函數值各被計算了兩次，可知 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$ 的值必然要越小越好，因此我們考慮 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\} = \{1, 2, 3\}$ 、 $\{f(v_1v_2), f(v_2v_3), f(v_3v_1)\} = \{4, 5, 6\}$ ，可知 $3T = 2(f(v_1) + f(v_2) + f(v_3)) + (f(v_1v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3v_1)) = 2(1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) = 27$ ，故定值 T 的最小值為 9。

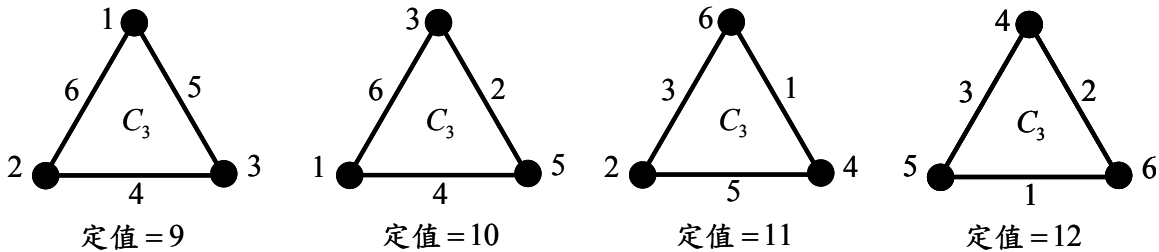
不失一般性，令 $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3$ ，可推得 $f(v_1v_2) = 6, f(v_2v_3) = 4, f(v_3v_1) = 5$ 。如此我們建構出一個定值 $T = 9$ 的魔函數 f ，而 f 所決定的權重圖如左下圖所示。



同理，倘若希望 T 為所有可能的最大值，可知 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$ 的值必然要越大越好，因此我們考慮 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\} = \{4, 5, 6\}$ 、 $\{f(v_1v_2), f(v_2v_3), f(v_3v_1)\} = \{1, 2, 3\}$ ，可知 $3T = 2(f(v_1) + f(v_2) + f(v_3)) + (f(v_1v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3v_1)) = 2(4 + 5 + 6) + (1 + 2 + 3) = 36$ ，故定值的最大值為 12。

不失一般性，令 $f(v_1) = 4, f(v_2) = 5, f(v_3) = 6$ ，可推得 $f(v_1v_2) = 3, f(v_2v_3) = 1, f(v_3v_1) = 2$ 。如此我們亦可建構出一個定值 $T = 12$ 的魔函數 f ，而 f 所決定的權重圖如右上圖所示。

由於 $9 \leq T \leq 12$ ，對於 $T = 10$ 或 $T = 11$ ，不難建構出相對的魔函數 f 。因此在合理範圍內的定值 T ，圈 C_3 皆存在魔函數，其對應的權重圖如下圖所示：



根據以上討論，我們有了以下結論：

結論 1： 圈 C_3 的魔光譜 $S(C_3) = \{9, 10, 11, 12\}$ 。

偶數圈 C_4

考慮圈 C_4 ，欲建立魔函數 $f: V(C_4) \cup E(C_4) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，其中 $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ， $E(C_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ 。因為 f 具有定值特性，假設對 C_4 的每一個邊 $uv \in E(C_4)$ ，

$f(u) + f(v) + f(uv) = T$ ，首先我們探討定值 T 的可能值。

$$\begin{aligned} \text{因為 } |E(C_4)| = 4, \text{ 考慮 } 4T &= \sum_{i=1}^4 [f(v_i) + f(v_{i+1}) + f(v_i v_{i+1})], \text{ 其中令 } v_5 = v_1。 \\ &= 2(f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4)) + (f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) + f(v_3 v_4) + f(v_4 v_1))。 \end{aligned}$$

考慮 $S(C_4)$ 的最小值：

因為 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_1 v_2), f(v_2 v_3), f(v_3 v_4), f(v_4 v_1)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，倘若希望 T 為所有可能的最小值，由於 $4T$ 的值中，頂點 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的函數值各被計算了兩次，可知 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ 的值必然要越小越好。

首先我們考慮 $\{f(v) : v \in V(C_4)\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_4)\} = \{5, 6, 7, 8\}$ ，由於

$$T = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{v \in V(C_4)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_4)} f(uv) \right) = \frac{1}{4} (2(1+2+3+4) + (5+6+7+8)) = \frac{46}{4} \notin \mathbb{N} \text{ 並非自然數。同理，}$$

當 $\{f(v) : v \in V(C_4)\} = \{1, 2, 3, 5\}$ 時，亦可發現 T 也非自然數。因此我們持續改變點集函數值的選取，試著讓計算出來的定值 T 為自然數。

進一步考慮 $\{f(v) : v \in V(C_4)\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_4)\} = \{4, 5, 7, 8\}$ 。

$$\text{可知 } T = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{v \in V(C_4)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_4)} f(uv) \right) = \frac{1}{4} (2(1+2+3+6) + (4+5+7+8)) = \frac{48}{4} = 12 \in \mathbb{N}。 \text{ 因此 } C_4 \text{ 的}$$

魔函數中，定值 T 的最小可能值為 12。

考慮 $S(C_4)$ 的最大值：

倘若希望 T 為所有可能的最大值，可知 $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ 的值必然要越大越好，因此我們考慮 $\{f(v) : v \in V(C_4)\} = \{5, 6, 7, 8\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_4)\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

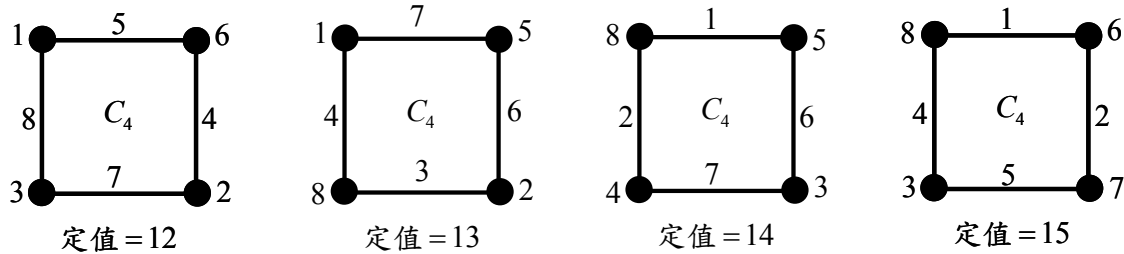
$$\text{可知 } T = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{v \in V(C_4)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_4)} f(uv) \right) = \frac{1}{4} (2(5+6+7+8) + (1+2+3+4)) = \frac{62}{4} \notin \mathbb{N} \text{ 並非自然數。同}$$

樣我們依序微調 $\{f(v) : v \in V(C_4)\}$ 的選取。

考慮 $\{f(v) : v \in V(C_4)\} = \{3, 6, 7, 8\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_4)\} = \{1, 2, 4, 5\}$ 。

可知 $T = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{v \in V(C_4)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_4)} f(uv) \right) = \frac{1}{4} (2(3+6+7+8) + (1+2+4+5)) = \frac{60}{4} = 15 \in \mathbb{N}$ 。因此 C_4 的魔函數中，定值 T 的最大可能值為 15。

在分析了定值 T 的範圍後，對於 $T = 12, 13, 14, 15$ ，我們分別建構了 C_4 的魔函數，其相對應的權重圖如下所示：



根據以上討論，我們有以下結論：

結論 2： 圈 C_4 的魔光譜 $S(C_4) = \{12, 13, 14, 15\}$ 。

對於圈 C_n ，我們可以觀察頂點的函數值，並快速判斷是否存在魔函數，以下即為魔函數存在性的必要條件：

結論 3： 若 f 為圈 C_n 的魔函數，則所有頂點函數值的平均必為自然數，意即 $\mu_v = \frac{\sum_{v \in V(C_n)} f(v)}{n} \in \mathbb{N}$ 。

【證明】：

令 $f : V(C_n) \cup E(C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 為 C_n 的魔函數，其中 T 為魔函數 f 的定值。

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{n} \left(2 \sum_{v \in V(C_n)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_n)} f(uv) \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{v \in V(C_n)} f(v) \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} + \sum_{v \in V(C_n)} f(v) \right) \\
 &= (2n+1) + \frac{\sum_{v \in V(C_n)} f(v)}{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{\sum_{v \in V(C_n)} f(v)}{n} \in \mathbb{N} .
 \end{aligned}$$

三、奇數圈 C_{2k+1} 的魔光譜

在觀察了圈 C_3 、 C_4 的魔函數可能性之後，我們很自然的提出下列問題：

【問題 1.】：對於 $n \geq 5$ ，圈 C_n 是否存在魔函數？

【問題 2.】：對於 $n \geq 5$ ，圈 C_n 的魔光譜 $S(C_n)$ 的元素為何？

【問題 3.】：對於一般簡單圖 G （樹狀圖 tree、路徑圖 path、弦圖 chordal graph、二部圖 bipartite graph、平面圖 planar graph 等），是否皆存在魔函數？

在討論 C_3 與 C_4 的過程當中，我們將魔函數所決定的權重圖製作成配對表，然而配對表的概念，引發了我們設計一個尋找數字配對的策略，其中數字配對（3 數總和）必須符合加總為定值的條件，以滿足魔函數的定值特性。接下來對於一般的自然數 n ，我們將更進一步討論圈 C_n 的魔函數存在性並進行推廣。

Kotzig 與 Rosa 於 1970 年時發表『*Magic Valuations of Finite Graphs*』一文中，對於一般圖形的魔函數提出下列定理：

魔函數對偶定理：

給定圖 G ， $V(G)$ 與 $E(G)$ 分別為 G 的頂點集合與邊集合。

1. 若 f 為 G 的魔函數，定義函數 f' 為
$$\begin{cases} f'(v) = (|V(G)| + |E(G)| + 1) - f(v) & , \text{當 } v \in V(G) \\ f'(uv) = (|V(G)| + |E(G)| + 1) - f(uv) & , \text{當 } uv \in E(G) \end{cases}$$

，則 f' 亦為 G 的魔函數。

2. $k \in S(G) \Leftrightarrow 3(|V(G)| + |E(G)| + 1) - k \in S(G)$ 。

奇數圈 C_5 與 C_7

考慮長度 $n = 5$ 的圈 C_5 ，欲設計魔函數 $f: V(C_5) \cup E(C_5) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ，以下利用相同的手法評估定值 T 的最小值。令 $\{f(v) : v \in V(C_5)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_5)\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ，

可知 $T = \frac{1}{5} \left(2 \sum_{v \in V(C_5)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_5)} f(uv) \right) = \frac{1}{5} \left(2 \left(\sum_{i=1}^5 i \right) + \left(\sum_{i=6}^{10} i \right) \right) = 14$ 。意即 C_5 的魔函數 f 中，定值 T 的

最小值可能為 14。接下來我們將設計一套標準作業流程，建構出魔函數 f 相對的權重圖。

首先我們設計一個表格，表格的最上橫排的數字代表頂點的函數值，最左直行的數字代表邊的函數值，而此表格內部為一個 5×5 的矩陣 $[a_{ij}]$ ，如表格 1 所示。

(表格1)

	1	2	3	4	5
10					
9					
8					
7					
6					

由於定值 $T = 14$ ：

- 若 $f(uv) = 10$ ，則 $f(u) + f(v) = 4 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} = \{1, 3\}$ ，為了呈現頂點函數值的相對關係，我們令 $a_{11} = 3$ 、 $a_{13} = 1$ 。
- 若 $f(uv) = 9$ ，則 $f(u) + f(v) = 5 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} = \{1, 4\}$ 或 $\{2, 3\}$ ，因此令 $a_{21} = 4$ 、 $a_{24} = 1$ 且 $a_{22} = 3$ 、 $a_{23} = 2$ 。
- 若 $f(uv) = 8$ ，則 $f(u) + f(v) = 6 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} = \{1, 5\}$ 或 $\{2, 4\}$ ，因此令 $a_{31} = 5$ 、 $a_{35} = 1$ 且 $a_{32} = 4$ 、 $a_{34} = 2$ 。
- 若 $f(uv) = 7$ ，則 $f(u) + f(v) = 7 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} = \{2, 5\}$ 或 $\{3, 4\}$ ，因此令 $a_{42} = 5$ 、 $a_{45} = 2$ 且 $a_{43} = 4$ 、 $a_{44} = 3$ 。
- 若 $f(uv) = 6$ ，則 $f(u) + f(v) = 8 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} = \{3, 5\}$ ，因此令 $a_{53} = 5$ 、 $a_{55} = 3$ 。

由此我們可獲得一個數字矩陣 $[a_{ij}]$ ，如表格 2 所示。接下來我們將從表格 2 進行篩選，尋找出適當的邊與點權重值的配對組合。

(表格2)

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

由數字矩陣 $[a_{ij}]$ 第一列可知，若邊 uv 的權重值為 $f(uv) = 10$ ，則兩頂點 u, v 的權重值必為 $\{f(u), f(v)\} = \{1, 3\}$ ，故我們將 $[a_{ij}]$ 中的 a_{11}, a_{13} 以陰影做記號，如此獲得表格 3。同理，可將 $[a_{ij}]$ 中的 a_{53}, a_{55} 以陰影做記號，如此獲得表格 4。

(表格3)

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

(表格4)

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

當邊 uv 的權重值為 $f(uv) = 9$ ，則兩頂點 u, v 的權重值必為 $\{f(u), f(v)\} = \{1, 4\}$ 或 $\{2, 3\}$ ，因為從表格 4 可看出，權重值為 3 的點已與權重值為 6 與 10 的邊配對，所以 $\{f(u), f(v)\} \neq \{2, 3\}$ ，故 $\{f(u), f(v)\} = \{1, 4\}$ ，我們將 $[a_{ij}]$ 中的 a_{21}, a_{24} 以陰影做記號，如此獲得表格 5。

(表格5)

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

(表格6)

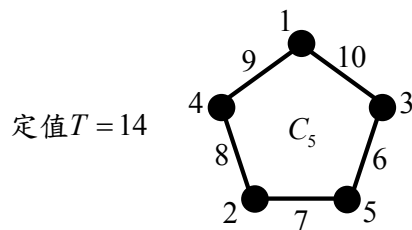
	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

當邊 uv 的權重值為 $f(uv) = 8$ ，則兩頂點 u, v 的權重值必為 $\{f(u), f(v)\} = \{1, 5\}$ 或 $\{2, 4\}$ ，因為從表格 5 可看出，權重值為 1 的點已與權重值為 9 與 10 的邊配對，所以 $\{f(u), f(v)\} \neq \{1, 5\}$ ，故 $\{f(u), f(v)\} = \{2, 4\}$ ，我們將 $[a_{ij}]$ 中的 a_{32}, a_{34} 以陰影做記號，如此獲得表格 6。

當邊 uv 的權重值為 $f(uv) = 7$ ，則兩頂點 u, v 的權重值必為 $\{f(u), f(v)\} = \{2, 5\}$ 或 $\{3, 4\}$ ，因為從表格 6 可看出，權重值為 4 的點已與權重值為 8 與 9 的邊配對，所以 $\{f(u), f(v)\} \neq \{3, 4\}$ ，故 $\{f(u), f(v)\} = \{2, 5\}$ ，我們將 $[a_{ij}]$ 中的 a_{42}, a_{45} 以陰影做記號，如此獲得最後的表格 7。

(表格7)

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3



在表格 7 中，我們可以觀察出表格 7 具有下列特性：

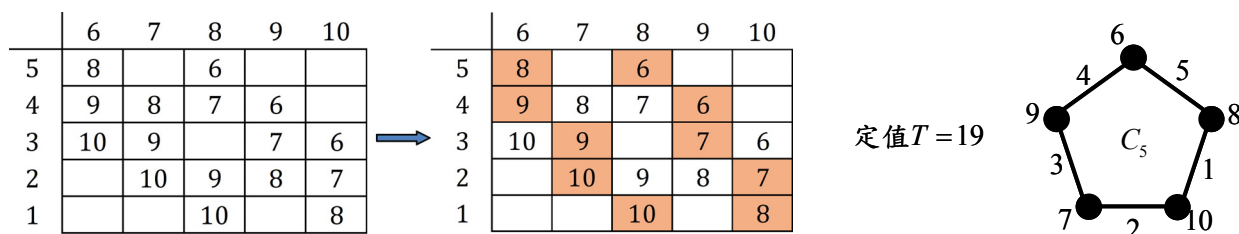
特性 1： $[a_{ij}]$ 中的每一行皆恰有兩個陰影記號；

特性 2： $[a_{ij}]$ 中的每一列皆恰有兩個陰影記號；

特性 3： 每一個邊的權重值與該列兩個陰影區的數字加總為定值 $T = 14$ 。

事實上， $[a_{ij}]$ 中的每一行皆恰有兩個陰影記號，這意謂著此點的權重值與哪兩個邊的權重值進行配對。同理， $[a_{ij}]$ 中的每一列皆恰有兩個陰影記號，這意謂著此邊的權重值與哪兩個點的權重值進行配對。然而根據數字矩陣 $[a_{ij}]$ 中數字的建構方法，我們可確定對於任意邊的權重值與該列陰影區的點權重值，其總和皆為定值 $T = 14$ 。因此透過表格 7，呈現出權重值的配對關係，我們可以依序建構圈 C_5 對於定值 $T = 14$ 的權重圖，如右上圖所示。

根據魔函數對偶定理，可知『 $14 \in S(C_5) \Leftrightarrow 3(5+5+1) - 14 = 19 \in S(C_5)$ 』，其配對表格與魔函數的權重圖如下：



因為 $14 \in S(C_5)$ 為 C_5 的魔光譜中的最小值，透過魔函數對偶定理可知所得的定值 19 即為魔光譜 $S(C_5)$ 中的最大值。

由於表格 7 的建構過程中，我們同時需考量點的權重值 $\{f(v) : v \in V(C_5)\}$ 、邊的權重值 $\{f(uv) : uv \in E(C_5)\}$ 與權重值的加總配對關係，因此表格 7 的最終結構與特性即決定了 C_5 對於定值 $T = 14$ 的魔函數，因此我們將表格 7 稱為圈 C_5 的一個『雙向脈絡表』，簡稱『脈絡表』。雙向脈絡表即為我們接下來尋找魔函數可能性的主要工具。

結論 4：對於圈 C_5 ，魔光譜 $S(C_5)$ 中的最小值為 14，最大值為 19。

接下來考慮圈 C_7 ，欲設計魔函數 $f : V(C_7) \cup E(C_7) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ ，並評估定值 T 的最小值。令 $\{f(v) : v \in V(C_7)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_7)\} = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ ，可知

$$T = \frac{1}{7} \left(2 \sum_{v \in V(C_7)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_7)} f(uv) \right) = \frac{1}{7} \left(2 \left(\sum_{i=1}^7 i \right) + \left(\sum_{i=8}^{14} i \right) \right) = 19$$

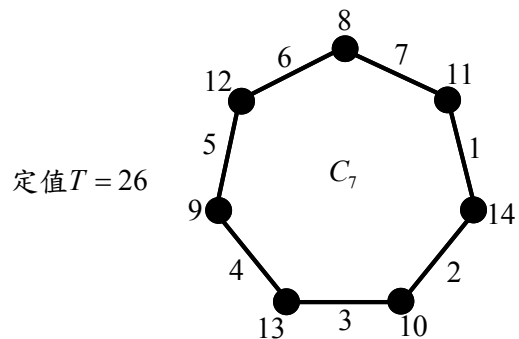
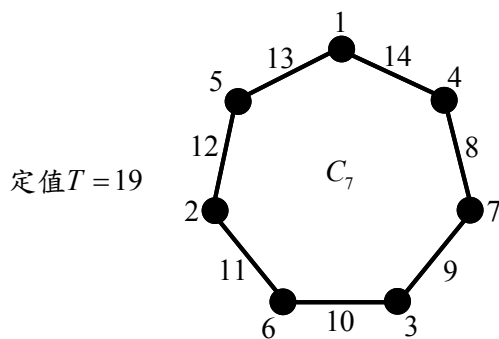
意即 C_7 的魔函數 f 中，定值 T 的最小值可能為 19。下列為針對定值 $T = 19$ 的脈絡表：

	1	2	3	4	5	6	7
14	4	3	2	1			
13	5	4		2	1		
12	6	5	4	3	2	1	
11	7	6	5		3	2	1
10		7	6	5	4	3	2
9			7	6		4	3
8				7	6	5	4

→

	1	2	3	4	5	6	7
14	4	3	2	1			
13	5	4		2	1		
12	6	5	4	3	2	1	
11	7	6	5		3	2	1
10		7	6	5	4	3	2
9			7	6		4	3
8				7	6	5	4

根據魔函數對偶定理可知， $3(7+7+1)-19=26 \in S(C_7)$ ，為魔光譜 $S(C_7)$ 的最大值。利用脈絡表的結構，可建構 C_7 在定值 $T=19$ 、 $T=26$ 的權重圖，如下圖所示：



結論 5：對於圈 C_7 ，魔光譜 $S(C_7)$ 中的最小值為 19，最大值為 26。

C_5 與 C_7 雙向脈絡表的規律

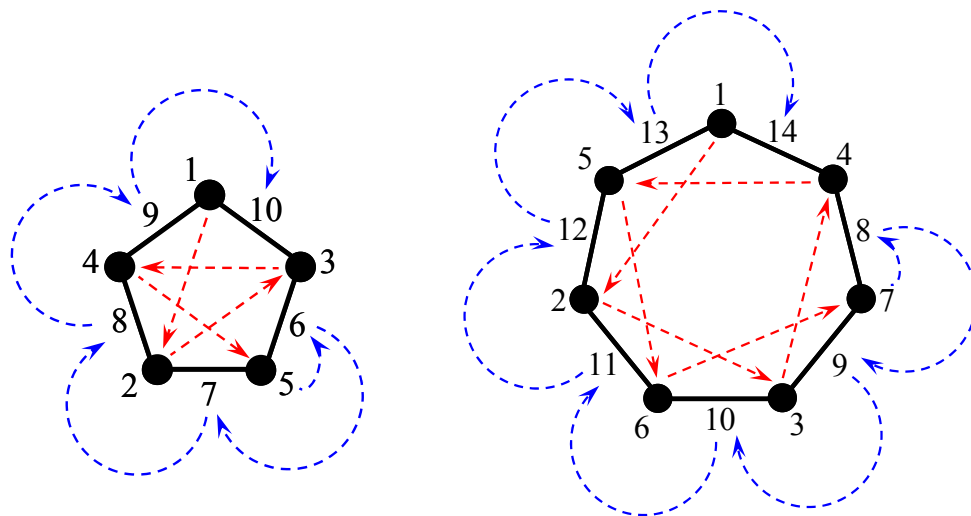
上述的討論過程，我們透過分析雙向脈絡表，從脈絡表的結構，建立權重圖。對於 C_5 與 C_7 ，若考慮最小定值 T ，觀察脈絡表，我們察覺到兩者脈絡表的陰影區域有著共同的規律，此規律亦可在個別權重圖上有明顯的表徵，如下圖所示。

	1	2	3	4	5
10	3		1		
9	4	3	2	1	
8	5	4		2	1
7		5	4	3	2
6			5		3

C_5 : 最小定值 $T=14$

	1	2	3	4	5	6	7
14	4	3	2	1			
13	5	4		2	1		
12	6	5	4	3	2	1	
11	7	6	5		3	2	1
10		7	6	5	4	3	2
9			7	6		4	3
8				7	6	5	4

C_7 : 最小定值 $T=19$



搭配脈絡表，由上述兩個權重圖的示意箭頭可看出賦予權重的規則步驟：

步驟 1：由某一頂點開始，按逆時針順序，每隔一個點依序賦予權重；

步驟 2：在最後一個被賦予權重的點之後，由該點逆時針方向的邊開始，按順時針順序，依序將邊賦予權重；

步驟 3：在步驟 1 與步驟 2 的過程中，依照點與邊所規劃的權重值集合，按自然數的順序陸續賦予權重。

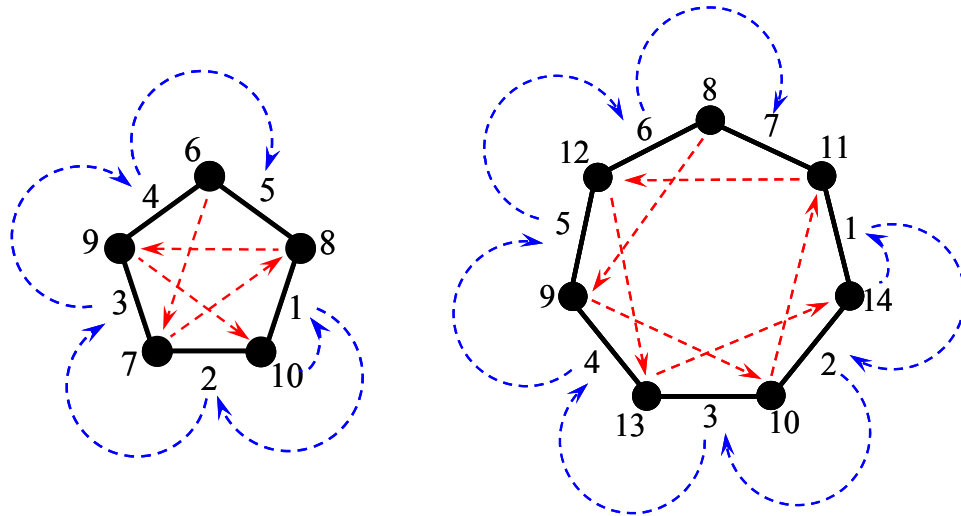
對於 C_5 與 C_7 ，若考慮最大定值 T ，兩者脈絡表的陰影區域也有與上述相仿的規律，我們亦將此規律展現在權重圖上，如下圖所示。由 C_5 與 C_7 的權重圖中，可察覺示意箭頭賦予權重的規則步驟與最小定值的權重圖構造方法相同。

	6	7	8	9	10
5	8		6		
4	9	8	7	6	
3	10	9		7	6
2		10	9	8	7
1			10		8

C_5 : 最大定值 $T = 19$

	8	9	10	11	12	13	14
7	11	10	9	8			
6	12	11		9	8		
5	13	12	11	10	9	8	
4	14	13	12		10	9	8
3		14	13	12	11	10	9
2			14	13		11	10
1				14	13	12	11

C_7 : 最大定值 $T = 26$



一般奇數圈 C_{2k+1} 的權重圖規律

在探討了奇數圈 C_5 與 C_7 之後，我們參考 C_5 與 C_7 的脈絡表陰影區域的位置，循著相同的規律，推廣到一般的奇數圈 C_{2k+1} ，對於魔光譜 $S(C_{2k+1})$ 的最小值與最大值，亦可快速的建立 C_{2k+1} 的脈絡表。而權重圖的構造規則一併可推廣到一般的奇數圈 C_{2k+1} 。

考慮 $S(C_{2k+1})$ 的最小值：

欲設計魔函數 $f: V(C_{2k+1}) \cup E(C_{2k+1}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4k+2\}$ ，評估定值 T 的最小值。

令 $\{f(v) : v \in V(C_{2k+1})\} = \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{2k+1})\} = \{2k+2, 2k+3, \dots, 4k+2\}$ ，可知

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2k+1} \left(2 \sum_{v \in V(C_{2k+1})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{2k+1})} f(uv) \right) = \frac{1}{2k+1} \left(2 \left(\sum_{i=1}^{2k+1} i \right) + \left(\sum_{i=2k+2}^{4k+2} i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2k+1} \left(2 \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} + \frac{(6k+4)(2k+1)}{2} \right) = 5k+4。
 \end{aligned}$$

意即 C_{2k+1} 的魔光譜 $S(C_{2k+1})$ 最小值可能為 $5k+4$ 。

在製作脈絡表時，首先完成脈絡表中的數字矩陣。根據所得的規律，我們可以直接選擇出適當陰影區的位置進而完成脈絡表（如下表），同時也可利用示意箭頭直接構造定值 $T = 5k+4$ 的權重圖，如下圖所示。

$$\begin{cases} f(v_i) = \frac{i+1}{2} & , \text{ if } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = (k+1) + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \text{ is even} \\ f(v_i v_{i+1}) = 4k+2-i & , \text{ if } i \in \{0,1,2,\dots,2k\} \end{cases} \quad \circ$$

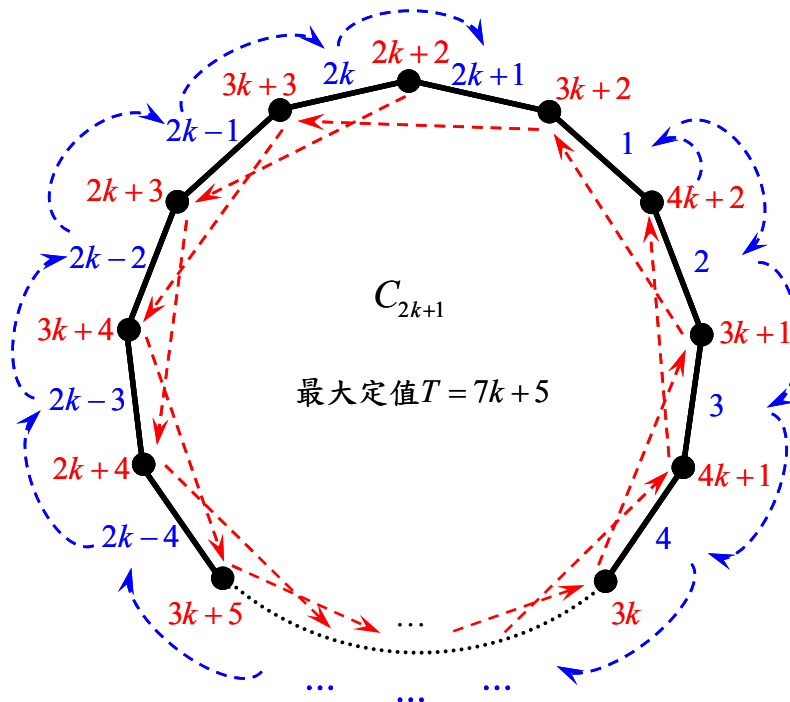
其中規定 $v_0 = v_{2k+1}$

對於 C_{2k+1} 中的任意邊 $v_i v_{i+1} \in E(C_{2k+1})$ 而言， $i \in \{0,1,2,\dots,2k\}$ 且 $v_0 = v_{2k+1}$ ，檢驗邊 $v_i v_{i+1}$ 與相鄰兩頂點 v_i, v_{i+1} 的函數值 $F(v_i v_{i+1})$ ，以下考慮 i 的奇偶性分類計算：

1. 當 i 為奇數時， $F(v_i v_{i+1}) = f(v_i) + f(v_{i+1}) + f(v_i v_{i+1}) = \left(\frac{i+1}{2}\right) + \left((k+1) + \frac{i+1}{2}\right) + (4k+2-i)$
 $= 5k+4$ 。
2. 當 i 為偶數時， $F(v_i v_{i+1}) = f(v_i) + f(v_{i+1}) + f(v_i v_{i+1}) = \left((k+1) + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{i+2}{2}\right) + (4k+2-i)$
 $= 5k+4$ 。

由上述檢驗可知，對於最小定值 $T = 5k+4$ ，我們所定義的函數 f 確實為 C_{2k+1} 的一個魔函數。

利用魔函數對偶定理可知 $3((2k+1)+(2k+1)+1) - (5k+4) = 7k+5 \in S(C_{2k+1})$ ，故 C_{2k+1} 的魔光譜 $S(C_{2k+1})$ 最大值為 $7k+5$ 。有關 C_{2k+1} 在最大定值 $T = 7k+5$ 時的權重圖如下圖所示：



綜合本文至此已知的結果，我們有下面定理：

定理 1：對於奇數圈 C_{2k+1} ，魔光譜 $S(C_{2k+1})$ 的最小值為 $5k+4$ ，最大值為 $7k+5$ 。

四、偶數圈 C_{2k} 的魔光譜

對於偶數圈 C_{2k} ，我們依然利用雙向脈絡表進行探索魔函數的存在性（決定脈絡表中陰影區域），並試圖從中找出規律，進一步將建構出權重圖。在進行討論最小與最大定值時，論述的手法與本文在討論 C_4 時相仿，故我們對於脈絡表的操作細節不再贅述，而是直接呈現主要的結果。

偶數圈 C_6

魔函數 $f: V(C_6) \cup E(C_6) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ，評估魔光譜 $S(C_6)$ 中的最小值。

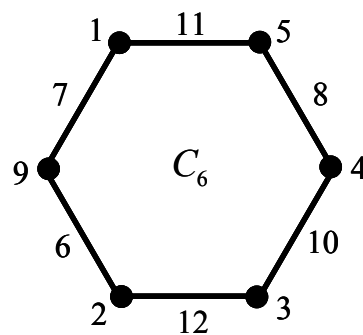
令 $\{f(v) : v \in V(C_6)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_6)\} = \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ ，可知

$$T = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{v \in V(C_6)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_6)} f(uv) \right) = \frac{1}{6} (2(1+2+3+4+5+9) + (6+7+8+10+11+12)) = 17。$$

意即 C_6 的魔光譜 $S(C_6)$ 最小值可能為 17。我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5				9
12	4	3	2	1					
11	5	4		2	1				
10		5	4	3	2				
8				5	4				
7	9								1
6		9							2

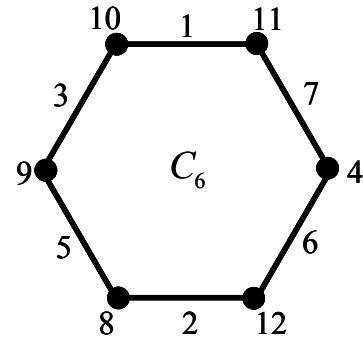
C_6 : 最小定值 $T=17$



根據魔函數對偶定理，可知 $3(6+6+1)-(17)=22 \in S(C_6)$ ，為魔光譜 $S(C_6)$ 的最大值，其脈絡表與權重圖，如下所示：

	4			8	9	10	11	12
7	11						4	
6	12							4
5				9	8			
3				11	10	9	8	
2				12	11		9	8
1					12	11	10	9

C_6 : 最大定值 $T=22$



偶數圈 C_8

魔函數 $f: V(C_8) \cup E(C_8) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ ，評估魔光譜 $S(C_8)$ 中的最小值。

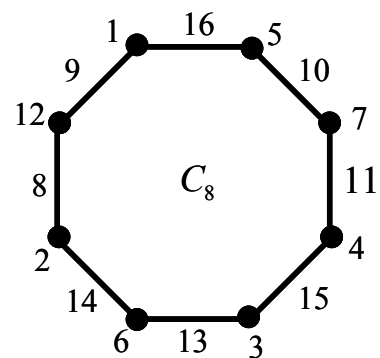
令 $\{f(v) : v \in V(C_8)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_8)\} = \{8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16\}$ ，可知

$$T = \frac{1}{8} \left(2 \sum_{v \in V(C_8)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_8)} f(uv) \right) = \frac{1}{8} (2(40) + (96)) = 22。$$

意即 C_8 的魔光譜 $S(C_8)$ 最小值可能為 22。我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7					12
16	5	4		2	1							
15	6	5	4	3	2	1						
14	7	6	5		3	2	1					
13		7	6	5	4	3	2					
11				7	6	5	4					
10					7		5					
9	12					7	6					1
8		12										2

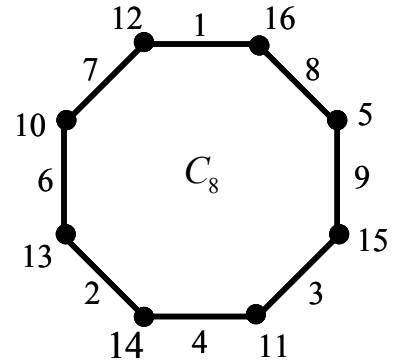
C_8 : 最小定值 $T=22$



根據魔函數對偶定理，可知 $3(8+8+1)-(22)=29 \in S(C_8)$ ，為魔光譜 $S(C_8)$ 的最大值，其脈絡表與權重圖，如下所示：

	5				10	11	12	13	14	15	16
9	15									5	
8	16				11	10					5
7					12		10				
6					13	12	11	10			
4					15	14	13	12	11	10	
3					16	15	14		12	11	10
2					16	15	14	13	12	11	
1							16	15		13	12

C_8 : 最大定值 $T=29$



偶數圈 C_{12}

魔函數 $f: V(C_{12}) \cup E(C_{12}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 24\}$ ，評估魔光譜 $S(C_{12})$ 中的最小值。

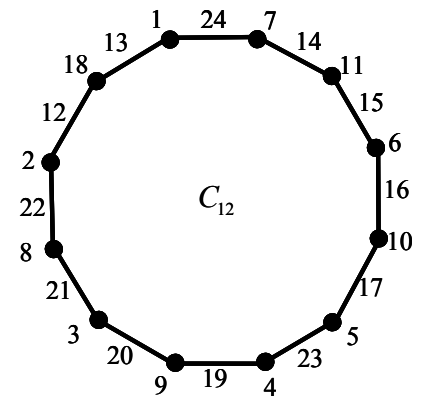
令 $\{f(v) : v \in V(C_{12})\} = \{1, 2, \dots, 11, 18\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{12})\} = \{12, 13, \dots, 17, 19, 20, \dots, 24\}$ ，可知

$$T = \frac{1}{12} \left(2 \sum_{v \in V(C_{12})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{12})} f(uv) \right) = 32。$$

意即 C_{12} 的魔光譜 $S(C_{12})$ 最小值可能為 32。我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11											18	
24	7	6	5		3	2	1																
23	8	7	6	5	4	3	2	1															
22	9	8	7	6		4	3	2	1														
21	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1													
20	11	10	9	8	7		5	4	3	2	1												
19		11	10	9	8	7	6	5	4	3	2												
17				11	10	9	8	7	6	5	4												
16					11	10	9		7	6	5												
15						11	10	9	8	7	6												
14							11	10		8	7												
13	18							11	10	9	8												1
12		18							11		9												2

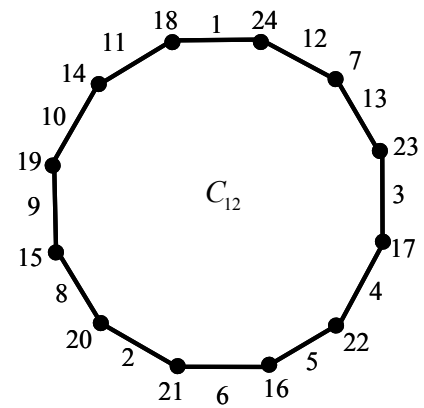
C_{12} : 最小定值 $T=32$



根據魔函數對偶定理，可知 $3(12+12+1)-(32)=43 \in S(C_{12})$ ，為魔光譜 $S(C_{12})$ 的最大值，其脈絡表與權重圖，如下所示：

	7					14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
13	23					16		14							7	
12	24					17	16	15	14							7
11						18	17		15	14						
10						19	18	17	16	15	14					
9						20	19	18		16	15	14				
8						21	20	19	18	17	16	15	14			
6						23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	
5						24	23	22	21	20		18	17	16	15	14
4							24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
3								24	23	22	21		19	18	17	16
2									24	23	22	21	20	19	18	17
1										24	23	22		20	19	18

C_{12} : 最大定值 $T=43$



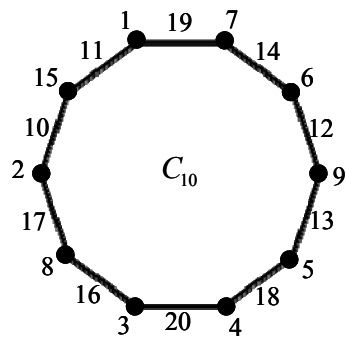
C_{10} 與 C_{14} 的困境

有關偶數圈 C_{2k} 的魔函數研究，透過脈絡表尋找適當的權重配對，使其滿足定值特性。若僅考慮最小與最大定值，在觀察了我們所設計 C_6 、 C_8 、 C_{12} 的脈絡表時，發覺其規律並無法一致性的套用在 C_{10} 與 C_{14} 上，因此我們利用脈絡表，持續探索 C_{10} 與 C_{14} 的權重配對方法，研究結果發現 C_{10} 與 C_{14} 仍然可以順利完成脈絡表的權重配對，並構造出相對應的權重圖，唯其規律與 C_8 、 C_{12} 的情形有所不同。

下列為 C_{10} 在最小定值 $T=27$ 與 C_{14} 在最小定值 $T=37$ 的脈絡表與權重圖：

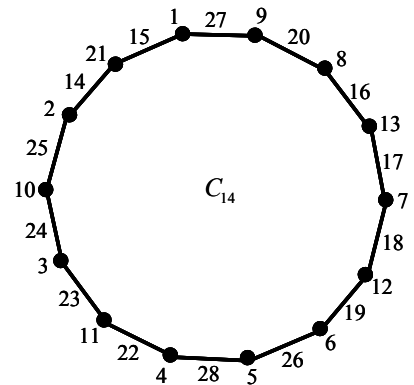
	1	2	3	4	5	6	7	8	9						15
20	6	5	4	3	2	1									
19	7	6	5		3	2	1								
18	8	7	6	5	4	3	2	1							
17	9	8	7	6		4	3	2	1						
16		9	8	7	6	5	4	3	2						
14				9	8	7	6	5	4						
13					9	8		6	5						
12						9	8	7	6						
11	15						9		7						1
10		15						9	8						2

C_{10} : 最小定值 $T=27$

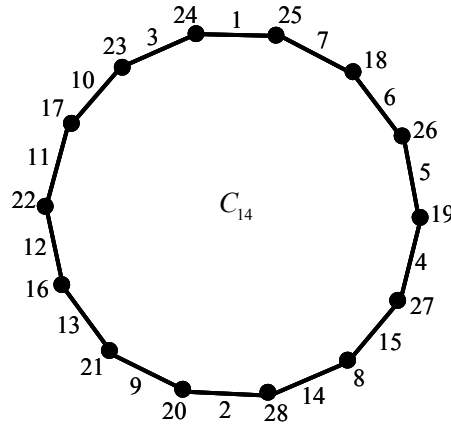
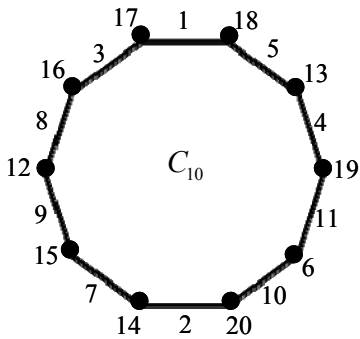


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13					21
28	8	7	6	5	4	3	2	1										
27	9	8	7	6		4	3	2	1									
26	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1								
25	11	10	9	8	7		5	4	3	2	1							
24	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1						
23	13	12	11	10	9	8		6	5	4	3	2	1					
22		13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2					
20				13	12	11	10	9	8	7	6	5	4					
19					13	12	11	10		8	7	6	5					
18						13	12	11	10	9	8	7	6					
17							13	12	11		9	8	7					
16								13	12	11	10	9	8					
15	21									13	12		10	9				1
14		21									13	12	11	10				2

C_{14} : 最小定值 $T = 37$



我們亦可建構 C_{10} 在最大定值 $T = 36$ 與 C_{14} 在最大定值 $T = 50$ 的權重圖，如下圖所示（脈絡表則不再贅述）：



綜合本文至此的討論，我們有下列結論：

結論 6：當 $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ ，魔光譜 $S(C_n)$ 的最小值為 $\frac{5n+4}{2}$ ，最大值為 $\frac{7n+2}{2}$ 。

上述的研究過程中，觀察偶數圈的脈絡表，我們意識到對於偶數圈 C_{2k} ，若要尋找具有一般性規律的魔函數，則需要將偶數圈的長度進一步區分為『4 的倍數』與『被 4 除餘 2』兩種類型（這就是為何 C_8 與 C_{12} 的規律無法直接套用在 C_{10} 與 C_{14} 上）。因此對於偶數圈 C_{2k} ，後續我們將針對 k 的奇偶性進行分類，分為 $k = 2t$ 與 $k = 2t + 1$ 兩類，持續研究 C_{4t} 與 C_{4t+2} 兩種類型的脈絡表規律，以下將完整的呈現偶數圈的魔函數建構方法。

Lemma 1：魔光譜 $S(C_{4t})$ 的最小值為 $10t+2$ ，最大值為 $14t+1$ 。

【證明】：

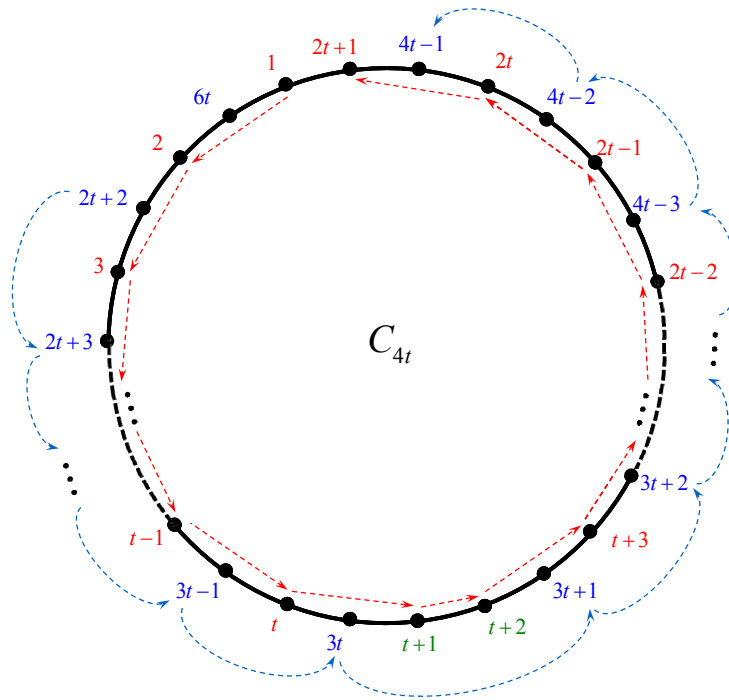
令 $\{f(v) : v \in V(C_{4t})\} = \{1, 2, \dots, 4t-1, 6t\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{4t})\} = \{4t, 4t+1, \dots, 8t\} \setminus \{6t\}$ ，考慮最小定值 $T=10t+2$ 。根據 C_8 與 C_{12} 的脈絡表規律，我們亦可依循規律完成 C_{4t} 的脈絡表，如下表所示：

C_{4t} : 最小定值 $10t+2$

令 C_{4t} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{4t}$ ，則由上述脈絡表的規律，我們可建構函數 f 為：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i) = 1 + \frac{i-1}{2} & , \text{ if } i \in \{1, 2, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 1 + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+2, 2t+3, \dots, 4t\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 2t + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{4, 5, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 2t + \frac{i-1}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+2, 2t+3, \dots, 4t\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 6t & , \text{ if } i = 2 \\ f(v_i v_{i+1}) = (10t+2) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & , \text{ if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 4t-1\}, \text{ 其中規定 } v_0 = v_{4t} \end{array} \right. .$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個點的權重值配對，且定值為 $10t+2$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{4t} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示（方便起見，不特別標記邊的權重值）：



根據魔函數對偶定理，可知 $3((4t) + (4t) + 1) - (10t + 2) = 14t + 1 \in S(C_{4t})$ ，為魔光譜 $S(C_{4t})$ 的最大值。

Lemma 2：魔光譜 $S(C_{4t+2})$ 的最小值為 $10t + 7$ ，最大值為 $14t + 8$ 。

【證明】：

令 $\{f(v) : v \in V(C_{4t+2})\} = \{1, 2, \dots, 4t+1, 6t+3\}$ 、

$\{f(uv) : uv \in E(C_{4t+2})\} = \{4t+2, 4t+3, \dots, 8t+4\} \setminus \{6t+3\}$ ，考慮最小定值 $T = 10t + 7$ 。

根據 C_{10} 與 C_{14} 的脈絡表規律，我們亦可依循規律完成 C_{4t+2} 的脈絡表，如下表所示：

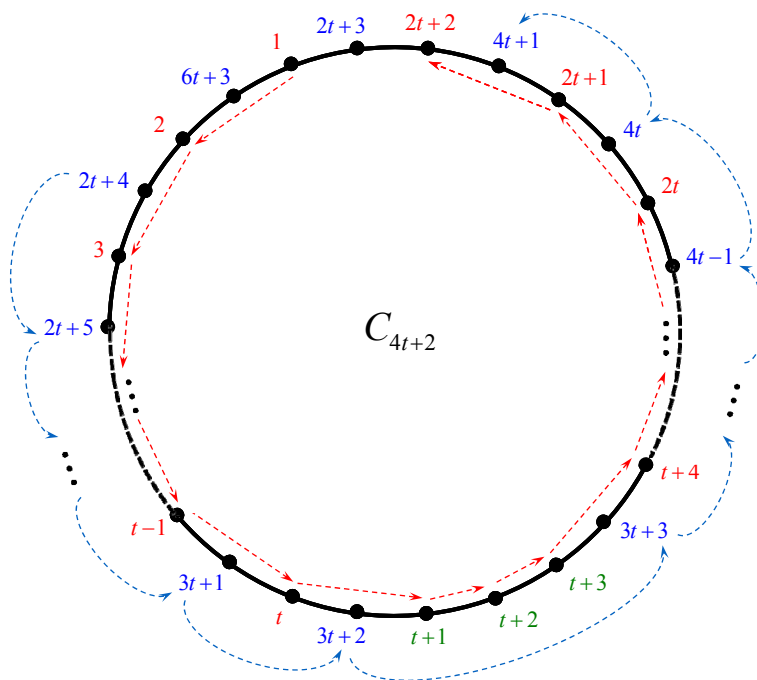
	1	2	3	4	...	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$...	$2t$	$2t+1$	$2t+2$	$2t+3$	$2t+4$	$2t+5$...	$3t+1$	$3t+2$	$3t+3$	$3t+4$...	$4t$	$4t+1$...	$6t+3$		
$8t+4$																													
$8t+3$		$2t+3$																											
$8t+2$																													
$8t+1$			$2t+4$																										
$8t$				$2t+4$																									
$8t-1$				$2t+5$																									
$8t-2$					$2t+5$																								
\vdots																													
$6t+6$																													
$6t+5$																													
$6t+4$																													
\vdots																													
$6t+2$																													
$6t+1$																													
$6t$																													
$6t-1$																													
\vdots																													
$4t+7$																													
$4t+6$																													
$4t+5$																													
$4t+4$																													
$4t+3$																													
$4t+2$																													

C_{4t+2} ：最小定值 $10t + 7$

令 C_{4t+2} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{4t+2}$ ，則由上述脈絡表的規律，我們可建構函數 f 為：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i) = 1 + \frac{i-1}{2} & \text{, if } i \in \{1, 2, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 1 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{2t+3, 2t+3, \dots, 4t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 2t+3 & \text{, if } i = 4t+2 \\ f(v_i) = 2t+2 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 2t+1 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{2t+3, 2t+3, \dots, 4t\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 6t+3 & \text{, if } i = 2 \\ f(v_i) = t+2 & \text{, if } i = 2t+2 \\ f(v_i v_{i+1}) = (10t+7) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & \text{, if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 4t+1\}, \text{ 其中規定 } v_0 = v_{4t+2} \end{array} \right.$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個頂點的權重值配對，且定值為 $10t+7$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{4t+2} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示：



根據對偶定理，可知 $3((4t+2)+(4t+2)+1)-(10t+7)=14t+8 \in S(C_{4t+2})$ ，為魔光譜 $S(C_{4t+2})$ 的最大值。 ■

綜合本文至今，整合奇數圈與偶數圈的結果可得下列定理：

定理 2：任意圈 C_n ，魔光譜 $S(C_n)$ 的最小值為 $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ ，最大值為 $\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ 。

【證明】：

根據定理 1 可知，任意奇數圈 C_{2k+1} 的魔光譜最小值為 $5k+4$ ，最大值為 $7k+5$ 。

令 $n=2k+1$ ，則 $k=\frac{n-1}{2}$ 代入可得任意奇數圈 C_n 的魔光譜最小值為 $5\left(\frac{n-1}{2}\right)+4=\frac{5n+3}{2}$ ；最大值為 $7\left(\frac{n-1}{2}\right)+5=\frac{7n+3}{2}$ 。

同理，根據結論 2、Lemma1 與 Lemma2 可知，偶數圈 C_{4t} 、 C_{4t+2} 的魔光譜最小值分別為 $10t+2$ 、 $10t+7$ ，最大值分別為 $14t+1$ 、 $14t+8$ 。透過變數代換，皆可得任意偶數圈 C_n 的魔光譜最小值為 $\frac{5n+4}{2}$ ；最大值為 $\frac{7n+2}{2}$ 。

綜合 n 的奇偶性可知，任意圈 C_n ，魔光譜 $S(C_n)$ 的最小值為 $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ ，最大值為 $\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ 。 ■

五、魔光譜 $S(C_n)$ 的新元素

對於圈 C_n ，得知魔光譜 $S(C_n)$ 的最小值以及最大值之後，我們持續探討魔光譜內的可能元素。

奇數圈魔光譜 $S(C_{2k+1})$ 的新元素

令 $T_{min}(n)=\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ ， $T_{max}(n)=\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ ，根據本文的定理 2，可知任意圈 C_n ，若 $s \in S(C_n)$ ，

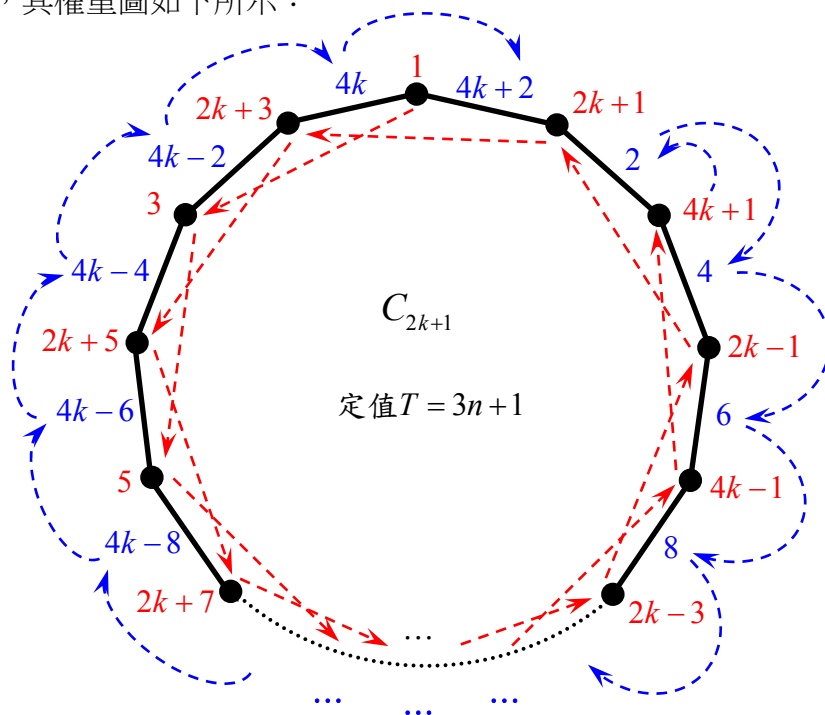
則 $T_{min}(n) \leq s \leq T_{max}(n)$ 。進一步我們提出下列問題：

- (1) 對於介在 $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ 與 $\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ 之間的自然數 s ，圈 C_n 是否皆存在魔函數 f 使其定值為 s ？

(2) 對任意自然數 $n \geq 3$ ，能否刻畫魔光譜 $S(C_n)$ ？

由定理 2 可知『任意自然數 $n \geq 3$ ， $T_{min}(n) \in S(C_n)$ 且 $T_{max}(n) \in S(C_n)$ 』。此外，Kotzig 與 Rosa 於『*Magic Valuations of Finite Graphs*』一文中已指出，『任意奇數 n ， $3n+1 \in S(C_n)$ 』。

令 $\{f(v) : v \in V(C_{2k+1})\} = \{1, 3, 5, \dots, 4k-1, 4k+1\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{2k+1})\} = \{2, 4, 6, \dots, 4k, 4k+2\}$ ，考慮定值 $T = 3n+1$ ，其權重圖如下所示：



尋找魔光譜 $S(C_n)$ 內的元素則是個值得研究的議題。在第 51 屆全國科展小學組的作品中，作品『輪"翻"上陣-探究邏輯圈之數字謎』已用窮舉法說明『圈 C_5 不存在定值為 15 的魔函數』，意即 $T_{min}(5)+1 \notin S(C_5)$ 。因此，我們持續對圈 C_n 探索魔光譜 $S(C_n)$ 包含 $T_{min}(n)+1$ 的可能性。

對其餘奇數圈，以下我們將證明『任意不等於 5 的奇數 n ，圈 C_n 皆存在魔函數 f 使其定值為

$$T_{min}(n)+1 = \left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{5n+5}{2}$$

。根據結論 1 可知， $T_{min}(3)+1 = 10 \in S(C_3)$ ，故以下我們依序討論

C_7 、 C_9 、 C_{11} 、 C_{13} 與 C_{15} ，從中將奇數圈 C_n 分類並規律性的設計定值為 $T_{min}(n)+1$ 的魔函數。

奇數圈 C_7

考慮函數 $f: V(C_7) \cup E(C_7) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{\min}(7)+1$ 。

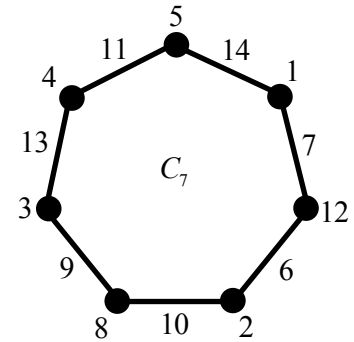
令 $\{f(v) : v \in V(C_7)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_7)\} = \{6, 7, 9, 10, 11, 13, 14\}$ ，可知

$$T = \frac{1}{7} \left(2 \sum_{v \in V(C_7)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_7)} f(uv) \right) = \frac{1}{7} (2(1+2+3+4+5+8+12) + (6+7+9+10+11+13+14)) = 20$$

。意即魔函數 f 的定值為 $T_{\min}(7)+1=20$ 。我們能決定恰當陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	8	12
14	5	4		2	1		
13		5	4	3	2		
11	8			5	4		1
10		8					2
9			8				3
7	12				8		5
6		12					1

$C_7 : T_{\min}(7)+1=20$



奇數圈 C_9

考慮函數 $f: V(C_9) \cup E(C_9) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 18\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{\min}(9)+1$ 。

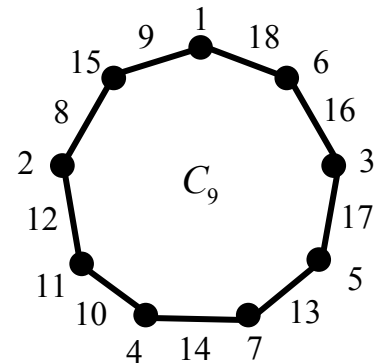
令 $\{f(v) : v \in V(C_9)\} = \{1, 2, 3, \dots, 7, 11, 15\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_9)\} = \{8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18\}$ ，經過

計算可知 $T = \frac{1}{9} \left(2 \sum_{v \in V(C_9)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_9)} f(uv) \right) = 25$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{\min}(9)+1=25$ 。我們亦

能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7	11	15
18	6	5	4	3	2	1			
17	7	6	5		3	2	1		
16		7	6	5	4	3	2		
14				7	6	5	4		
13	11				7		5		1
12		11				7	6		2
10				11					4
9	15				11				5
8		15				11			6

$C_9 : T_{\min}(9)+1=25$



奇數圈 C_{11}

考慮函數 $f: V(C_{11}) \cup E(C_{11}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 22\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{\min}(11) + 1$ 。

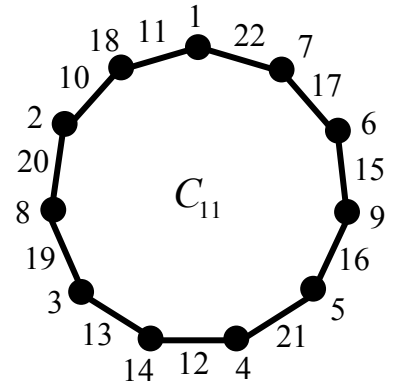
令 $\{f(v) : v \in V(C_{11})\} = \{1, 2, \dots, 9, 14, 18\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{11})\} = \{10, \dots, 13, 15, 16, 17, 19, \dots, 22\}$ ，經過

計算可知 $T = \frac{1}{11} \left(2 \sum_{v \in V(C_{11})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{11})} f(uv) \right) = 30$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{\min}(11) + 1 = 30$ 。我們

亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9					14					18
22	7	6	5		3	2	1												
21	8	7	6	5	4	3	2	1											
20	9	8	7	6		4	3	2	1										
19		9	8	7	6	5	4	3	2										
17				9	8	7	6	5	4										
16					9	8		6	5										
15	14					9	8	7	6					1					
13			14					9	8									3	
12				14														4	
11	18				14													5	1
10		18				14												6	2

$C_{11} : T_{\min}(11) + 1 = 30$



奇數圈 C_{13}

考慮函數 $f: V(C_{13}) \cup E(C_{13}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{\min}(13) + 1$ 。

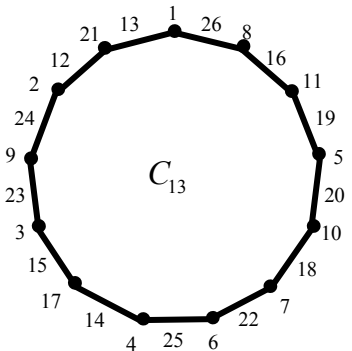
令 $\{f(v) : v \in V(C_{13})\} = \{1, 2, 3, \dots, 11, 17, 21\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{13})\} = \{12, \dots, 16, 18, 19, 20, 22, \dots, 26\}$ ，

經過計算可知 $T = \frac{1}{13} \left(2 \sum_{v \in V(C_{13})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{13})} f(uv) \right) = 35$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{\min}(13) + 1 = 35$ 。

我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11					17				21
26	8	7	6	5	4	3	2	1												
25	9	8	7	6		4	3	2	1											
24	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1										
23	11	10	9	8	7		5	4	3	2	1									
22		11	10	9	8	7	6	5	4	3	2									
20				11	10	9	8	7	6	5	4									
19					11	10	9	7	6	5										
18						11	10	9	8	7	6									
16		17						11	10	9	8					2				
15			17						11		9					3				
14				17						11	10					4				
13	21				17											5				1
12		21				17										6				2

$C_{13} : T_{\min}(13) + 1 = 35$



奇數圈 C_{15}

考慮函數 $f: V(C_{15}) \cup E(C_{15}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(15)+1$ 。

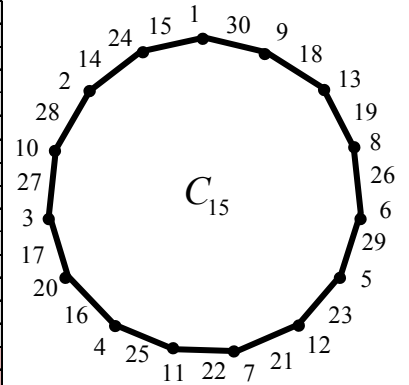
令 $\{f(v) : v \in V(C_{15})\} = \{1, 2, \dots, 13, 20, 24\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{15})\} = \{14, \dots, 19, 21, 22, 23, 25, \dots, 30\}$ ，可

知 $T = \frac{1}{15} \left(2 \sum_{v \in V(C_{15})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{15})} f(uv) \right) = 40$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{min}(15)+1 = 40$ 。我們亦能夠

決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	20	24
30	9	8	7	6		4	3	2	1						
29	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1					
28	11	10	9	8	7		5	4	3	2	1				
27	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1			
26	13	12	11	10	9	8		6	5	4	3	2	1		
25		13	12	11	10	9	8	7	6	5	4		2		
23				13	12	11	10	9	8	7	6	5	4		
22					13	12	11	10		8	7	6	5		
21						13	12	11	10	9	8	7	6		
19	20							13	12	11	10	9	8		1
18		20							13	12		10	9		2
17			20							13	12	11	10		3
16				20							13		11		4
15	24				20							13	12		5
14		24				20								13	12
															6

$C_{15} : T_{min}(15)+1 = 40$



綜合結論 1 與上述的討論，我們可得以下結果：

結論 7： 當 $n = 3, 7, 9, 11, 13, 15$ ，則 $T_{min}(n)+1 = \frac{5n+5}{2} \in S(C_n)$ 。

從上述 C_7 、 C_9 、 C_{11} 、 C_{13} 與 C_{15} 所設計的魔函數脈絡表中，我們將奇數圈 C_n ($n \neq 5$) 進行分類並規律性的設計出定值為 $T_{min}(n)+1$ 的魔函數。因此除了 C_5 以外的所有奇數圈，我們得出下列引理：

Lemma 3： 任意奇數圈 C_n ， $n \neq 5$ ，則 $T_{min}(n)+1 = \frac{5n+5}{2} \in S(C_n)$ 。

【證明】：

當 $n \neq 5$ ，我們將奇數圈 C_n 細分成 C_{4t+1} 與 C_{4t+3} 兩種類行進行探討。

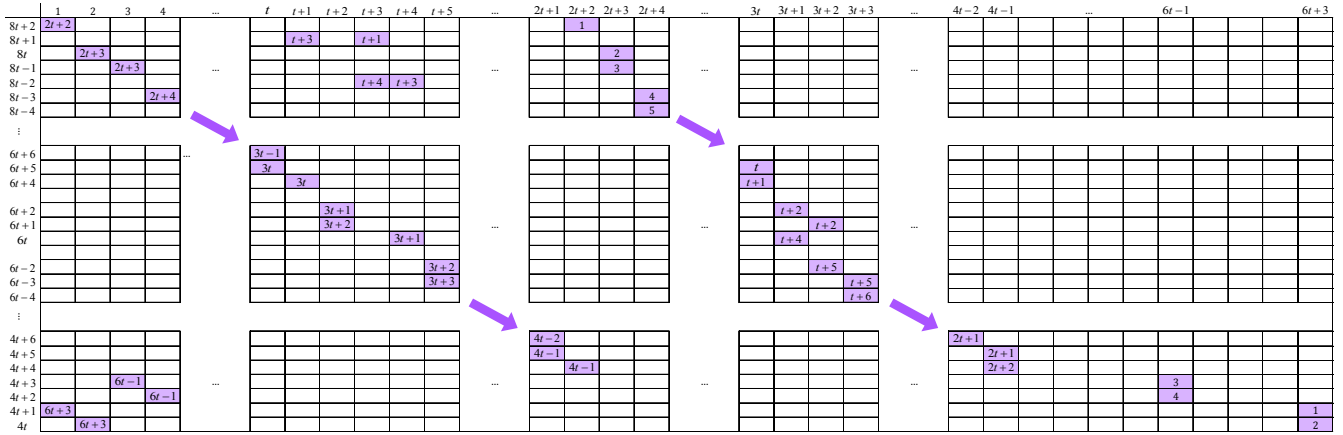
考慮 C_{4t+1}

當 $t = 2$ 時，根據結論 7 可知奇數圈 C_9 的魔光譜 $S(C_9)$ 包含 25，意即 $T_{min}(9)+1 \in S(C_9)$ 。

當 $t \geq 3$ 時，令 $\{f(v) : v \in V(C_{4t+1})\} = \{1, 2, 3, \dots, 4t-1, 6t-1, 6t+3\}$ 、

$\{f(uv) : uv \in E(C_{4t+1})\} = \{4t, 4t+1, \dots, 8t+2\} \setminus \{6t-1, 6t+3\}$ ，考慮定值 $T = 10t+5$ 。

我們可依循規律完成 C_{4t+1} 的脈絡表，如下所示：

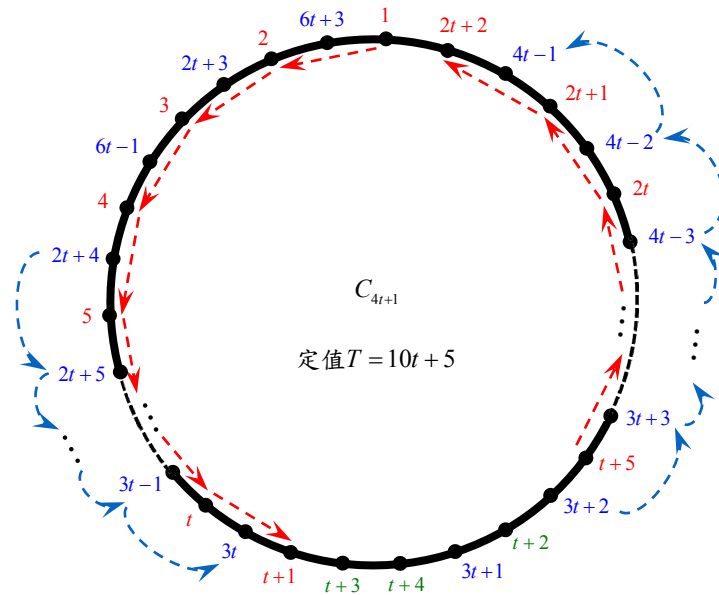


$$C_{4t+1} : T_{\min}(4t+1)+1 = 10t+5$$

令 C_{4t+1} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{4t+1}$ ，則根據上述脈絡表的規律，我們可建構函數 f 為：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i) = 1 + \frac{i-1}{2} & , \text{ if } i \in \{1, 2, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 1 + \frac{i+1}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+7, 2t+8, \dots, 4t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 2t + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{8, 9, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = (2t-1) + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+6, 2t+7, \dots, 4t+1\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 6t+3 & , \text{ if } i = 2 \\ f(v_i) = 2t+3 & , \text{ if } i = 4 \\ f(v_i) = 6t-1 & , \text{ if } i = 6 \\ f(v_i) = 3t+1 & , \text{ if } i = 2t+4 \\ f(v_i) = t+3 & , \text{ if } i = 2t+2 \\ f(v_i) = t+4 & , \text{ if } i = 2t+3 \\ f(v_i) = t+2 & , \text{ if } i = 2t+5 \\ f(v_i v_{i+1}) = (10t+5) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & , \text{ if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 4t\}, \text{ 其中規定 } v_0 = v_{4t+1} \end{array} \right. .$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個頂點的權重值配對，且相鄰兩點與邊的函數值總和為定值 $T_{min}(4t+1)+1=10t+5$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{4t+1} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示：



考慮 C_{4t+3}

當 $t=0,1,2$ 時，根據結論 7 可知 $T_{min}(3)+1 \in S(C_3)$ 、 $T_{min}(7)+1 \in S(C_7)$ 且 $T_{min}(11)+1 \in S(C_{11})$ 。

當 $t \geq 3$ 時，令 $\{f(v) : v \in V(C_{4t+3})\} = \{1, 2, 3, \dots, 4t+1, 6t+2, 6t+6\}$ 、

$\{f(uv) : uv \in E(C_{4t+3})\} = \{4t+2, 4t+3, \dots, 8t+6\} \setminus \{6t+2, 6t+6\}$ ，考慮定值 $T = 10t+10$ 。我們可依

循規律完成 C_{4t+3} 的脈絡表，如下所示：

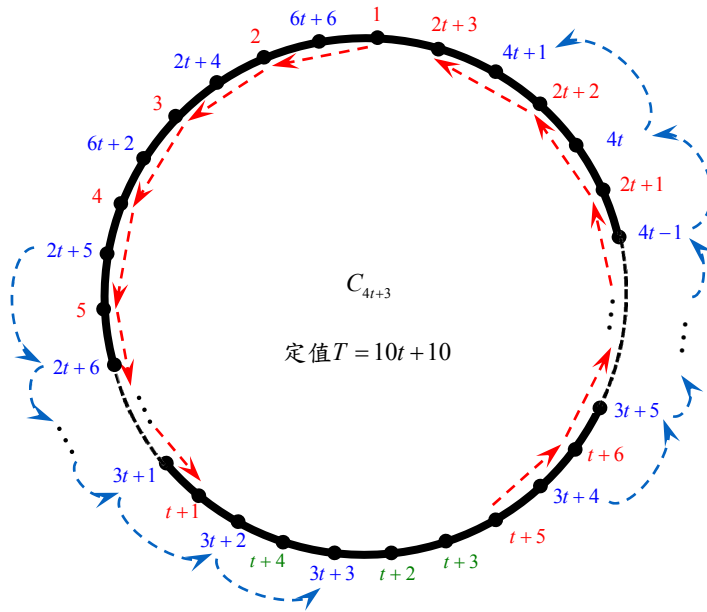
	1	2	3	4	...	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$...	$2t+2$	$2t+3$	$2t+4$	$2t+5$...	$3t+1$	$3t+2$	$3t+3$	$3t+4$...	$4t$	$4t+1$...	$6t+2$	$6t+6$		
$8t+6$	$2t+3$													1															
$8t+5$							$t+3$	$t+2$						2															
$8t+4$		$2t+4$												3															
$8t+3$			$2t+4$																										
$8t+2$				$2t+5$				$t+5$	$t+3$																				
$8t+1$																													
$8t$																													
$6t+9$																													
$6t+8$							$3t+1$																						
$6t+7$							$3t+2$													t									
$6t+5$																				$t+1$									
$6t+4$																					$t+2$								
$6t+3$							$3t+3$														$t+3$								
$6t+1$																						$t+4$							
$6t$																						$t+4$							
$6t-1$																							$t+5$						
$4t+8$																													
$4t+7$																													
$4t+6$																													
$4t+5$				$6t+2$																									
$4t+4$					$6t+2$																								
$4t+3$		$6t+6$																											
$4t+2$			$6t+6$																										

$$C_{4t+3} : T_{min}(4t+3)+1 = 10t+10$$

令 C_{4t+3} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{4t+3}$ ，則根據上述脈絡表的規律，我們可建構函數 f 為：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i) = 1 + \frac{i-1}{2} & , \text{ if } i \in \{1, 2, \dots, 2t+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 1 + \frac{i+1}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+7, 2t+8, \dots, 4t+3\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = (2t+1) + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{8, 9, \dots, 2t+4\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 2t + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \in \{2t+8, 2t+9, \dots, 4t+3\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 6t + 6 & , \text{ if } i = 2 \\ f(v_i) = 2t + 4 & , \text{ if } i = 4 \\ f(v_i) = 6t + 2 & , \text{ if } i = 6 \\ f(v_i) = 3t + 3 & , \text{ if } i = 2t + 4 \\ f(v_i) = t + 4 & , \text{ if } i = 2t + 3 \\ f(v_i) = t + 2 & , \text{ if } i = 2t + 5 \\ f(v_i) = t + 3 & , \text{ if } i = 2t + 6 \\ f(v_i v_{i+1}) = (10t + 10) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & , \text{ if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 4t+2\}, \text{ 其中規定 } v_0 = v_{4t+3} \end{array} \right. .$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個點的權重值配對，且相鄰兩點與邊的函數值總和為定值 $T_{min}(4t+3)+1=10t+10$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{4t+3} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示：



偶數圈魔光譜 $S(C_{4t+2})$ 的新元素

偶數圈的部分，本質上就是相較奇數圈比較複雜的問題，在上述偶數圈的最小魔和及最大魔和的情況中，權重規律須進一步分為兩類，故我們在固定其定值為 $T_{min}(n)+1$ 時，先將偶數圈分為 $n = 4t$ 與 $n = 4t + 2$ ，再針對此兩類進一步討論。首先我們從 $n = 4t + 2$ 進行討論，以下我們將

證明『任意長度 $n = 4t + 2$ 的圈 C_n 皆存在魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(n)+1 = \left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{5n+6}{2}$ 』。

以下我們依序討論 C_6 、 C_{10} 、 C_{14} 、 C_{18} 、 C_{22} 與 C_{26} ，從中將長度 $n = 4t + 2$ 的圈 C_n 進行分類並規律性的設計定值為 $T_{min}(n)+1$ 的魔函數。

偶數圈 C_6

考慮函數 $f : V(C_6) \cup E(C_6) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(6)+1$ 。

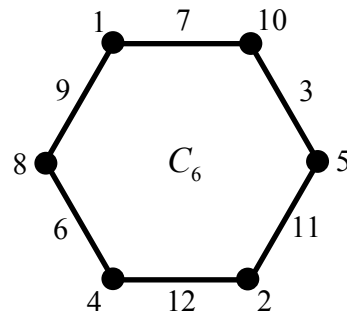
令 $\{f(v) : v \in V(C_6)\} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_6)\} = \{3, 6, 7, 9, 11, 12\}$ 。

可知 $T = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{v \in V(C_6)} f(v) + \sum_{uv \in E(C_6)} f(uv) \right) = \frac{1}{6} (2(1+2+4+5+8+10) + (3+6+7+9+11+12)) = 18$ 。

意即魔函數 f 的定值為 $T_{min}(6)+1 = 18$ 。我們能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	4	5	8	10
12	5	4	2	1		
11		5		2		
9	8		5	4	1	
7	10					1
6		10	8		4	2
3				10		5

$$C_6 : T_{min}(6)+1=18$$



偶數圈 C_{10}

考慮函數 $f: V(C_{10}) \cup E(C_{10}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(10)+1$ 。

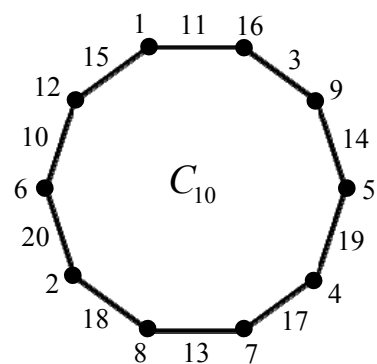
令 $\{f(v) : v \in V(C_{10})\} = \{1, 2, 4, \dots, 9, 12, 16\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{10})\} = \{3, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20\}$ ，

經過計算可知 $T = \frac{1}{10} \left(2 \sum_{v \in V(C_{10})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{10})} f(uv) \right) = 28$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{min}(10)+1 = 28$ 。

我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	4	5	6	7	8	9	12	16
20	7	6			2	1				
19	8	7	5	4		2	1			
18	9	8	6		4		2	1		
17		9	7	6	5	4		2		
15	12		9	8	7	6	5	4	1	
14		12		9	8	6	5		2	
13				9	8	7	6			
11	16			12			9	8	5	1
10		16			12				6	2
3								16		9

$$C_{10} : T_{min}(10)+1=28$$



偶數圈 C_{14}

考慮函數 $f: V(C_{14}) \cup E(C_{14}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 28\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(14) + 1$ 。

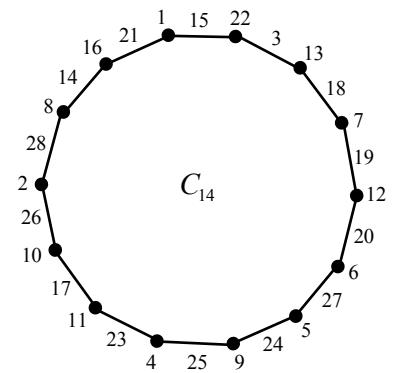
令 $\{f(v) : v \in V(C_{14})\} = \{1, 2, 4, 5, \dots, 13, 16, 22\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{14})\} = \{3, 14, 15, 17, \dots, 21, 23, \dots, 28\}$ ，

經過計算可知 $T = \frac{1}{14} \left(2 \sum_{v \in V(C_{14})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{14})} f(uv) \right) = 38$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{min}(14) + 1 = 38$ 。

我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	16	22
28	9	8	6	4	2	1								
27	10	9	7	6	5	4	2	1						
26	11	10	8	7	5	4	2	1						
25	12	11	9	8	7	6	5	4	2	1				
24	13	12	10	9	8	6	5	4	2	1				
23		13	11	10	9	8	7	6	5	4				
21	16		13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	1	
20		16		13	12	11	10	8	7	6	5		2	
19				13	12	11	10	9	8	7	6			
18			16		13	12	11	9	8	7			4	
17			16			13	12	11	10	9	8		5	
15	22				16			13	12	11	10		7	1
14		22				16			13	11		8		2
3													22	13

$C_{14} : T_{min}(14) + 1 = 38$



偶數圈 C_{18}

考慮函數 $f: V(C_{18}) \cup E(C_{18}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 36\}$ ，欲設計魔函數 f 使其定值為 $T_{min}(18) + 1$ 。

令 $\{f(v) : v \in V(C_{18})\} = \{1, 2, 4, \dots, 17, 20, 28\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(C_{18})\} = \{3, 18, 19, 21, \dots, 27, 29, \dots, 36\}$ ，

經過計算可知 $T = \frac{1}{18} \left(2 \sum_{v \in V(C_{18})} f(v) + \sum_{uv \in E(C_{18})} f(uv) \right) = 48$ 。意即魔函數 f 的定值為 $T_{min}(18) + 1 = 48$ 。

我們亦能夠決定恰當的陰影區域，完成脈絡表與權重圖，如下所示：

Lemma 4 : 任意長度為 $n = 4t + 2$ ($t \geq 1$) 的圈 C_n , 則 $T_{min}(n) + 1 = \frac{5n + 6}{2} \in S(C_n)$ 。

【證明】:

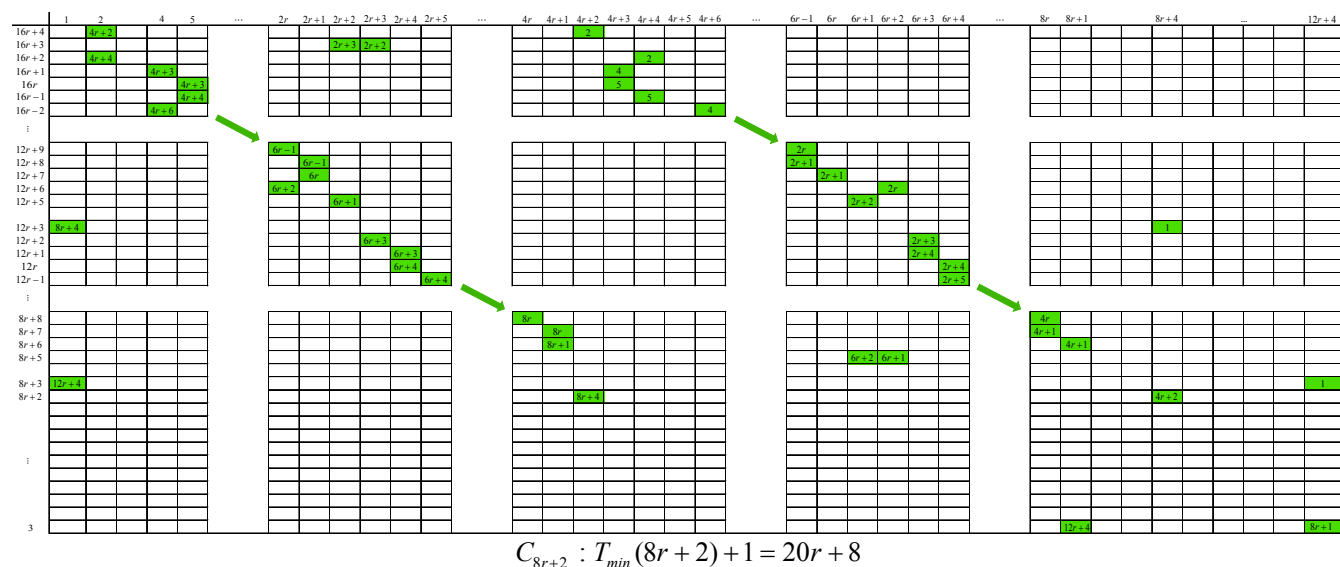
我們將長度為 $n = 4t + 2$ 的圈 C_n , 根據 t 的奇偶性再細分成 C_{8r+2} 與 C_{8r+6} 兩種類行進行探討。

考慮 C_{8r+2}

當 $r \geq 1$ 時, 令 $\{f(v) : v \in V(C_{8r+2})\} = \{1, 2, 4, 5, \dots, 8r + 1, 8r + 4, 12r + 4\}$,

$\{f(uv) : uv \in E(C_{8r+2})\} = \{3, 8r + 2, 8r + 3, \dots, 16r + 4\} \setminus \{8r + 4, 12r + 4\}$, 考慮定值 $T = 20r + 8$ 。

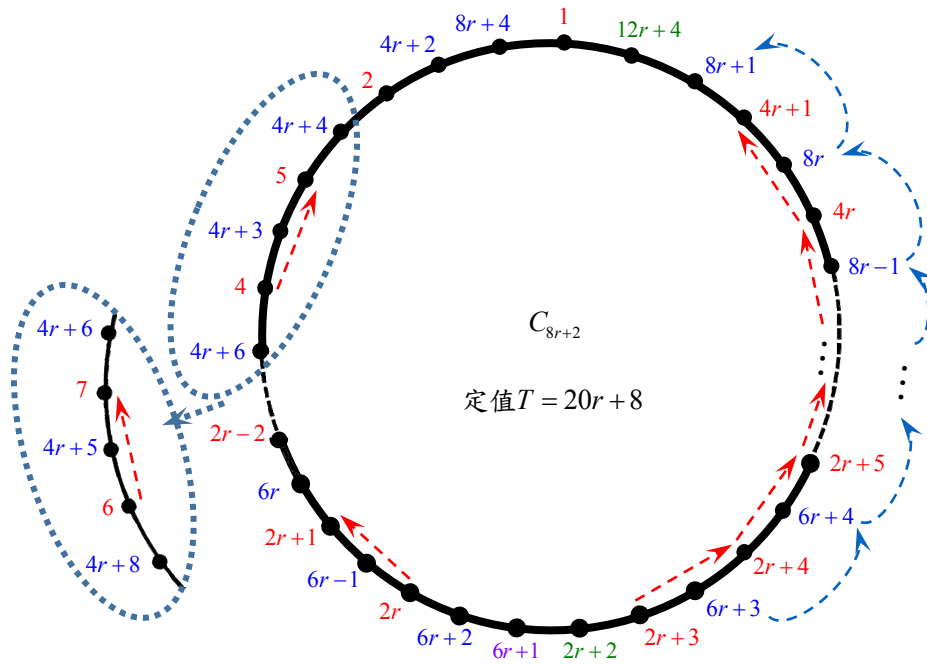
我們可依循規律完成 C_{8r+2} 的脈絡表, 如下所示:



令 C_{8r+2} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{8r+2}$, 則根據上述脈絡表的規律, 我們可建構函數 f 為:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
f(v_i) = 1 & \text{, if } i = 1 \\
f(v_i) = 8r + 4 & \text{, if } i = 2 \\
f(v_i) = 4r + 2 & \text{, if } i = 3 \\
f(v_i) = \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 0 \pmod{4} \\
f(v_i) = 2 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 2 \pmod{4} \\
f(v_i) = (4r+1) + \frac{i+1}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 1 \pmod{4} \\
f(v_i) = 4r + \frac{i-1}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 3 \pmod{4} \quad \circ \\
f(v_i) = 1 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4r+4, 4r+5, \dots, 8r+1\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\
f(v_i) = 4r + \frac{i+1}{2} & \text{, if } i \in \{4r+4, 4r+5, \dots, 8r+1\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\
f(v_i) = 2r + 2 & \text{, if } i = 4r + 3 \\
f(v_i) = 12r + 4 & \text{, if } i = 8r + 2 \\
f(v_i) = 6r + 1 & \text{, if } i = 4r + 2 \\
f(v_i v_{i+1}) = (20r + 8) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & \text{, if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 8r+1\} \text{ , 其中規定 } v_0 = v_{8r+2}
\end{array} \right.$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個頂點的權重值配對，且相鄰兩點與邊的函數值總和為定值 $T_{min}(8r+2)+1=20r+8$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{8r+2} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示：



考慮 C_{8r+6}

當 $r = 0$ 時，根據結論 8，已得知 $T_{min}(6) + 1 \in S(C_6)$ 。

當 $r \geq 1$ 時，令 $\{f(v) : v \in V(C_{8r+6})\} = \{1, 2, 4, 5, \dots, 8r + 5, 8r + 8, 12r + 10\}$ 、

$\{f(uv) : uv \in E(C_{8r+6})\} = \{3, 8r + 6, 8r + 7, \dots, 16r + 12\} \setminus \{8r + 8, 12r + 10\}$ ，考慮定值 $T = 20r + 18$ 。我

們可依循規律完成 C_{8r+6} 的脈絡表，如下所示：

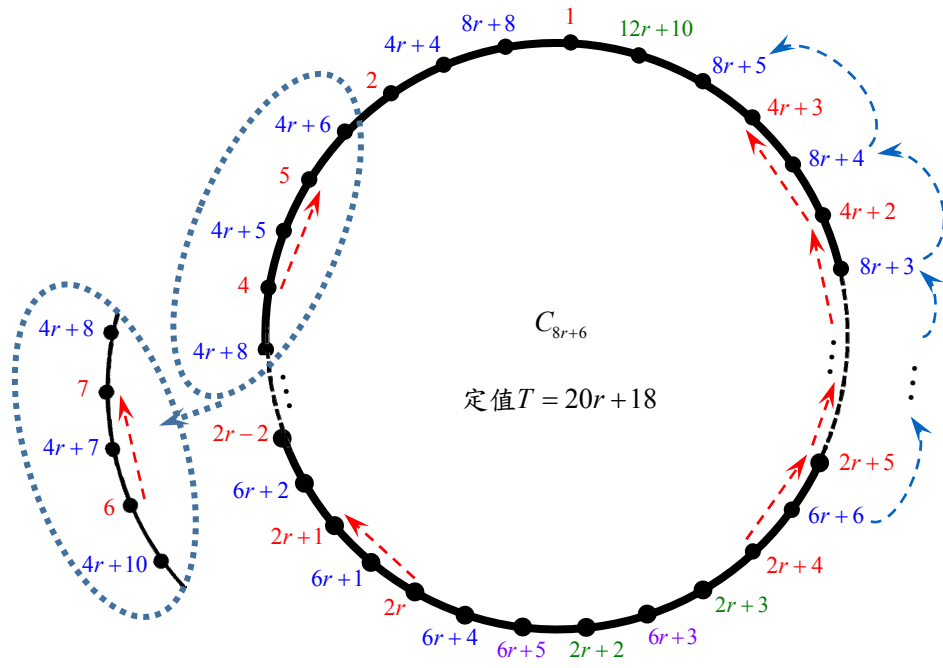
	1	2	4	5	...	$2r$	$2r+1$	$2r+2$	$2r+3$	$2r+4$	$2r+5$	$2r+6$...	$4r+2$	$4r+3$	$4r+4$	$4r+5$	$4r+6$	$4r+7$	$4r+8$...	$6r+1$	$6r+2$	$6r+3$	$6r+4$	$6r+5$	$6r+6$	$6r+7$...	$8r+4$	$8r+5$	$8r+8$...	$12r+10$			
$16r+12$		$4r+4$																																			
$16r+11$																																					
$16r+10$		$4r+6$																																			
$16r+9$			$4r+5$																																		
$16r+8$				$4r+6$																																	
$16r+7$					$4r+8$																																
$16r+6$																																					
1																																					
$12r+17$						$6r+1$	$6r+1$																														
$12r+16$						$6r+1$	$6r+2$																														
$12r+15$						$6r+2$																															
$12r+14$							$6r+3$	$6r+3$																													
$12r+13$							$6r+3$																														
$12r+12$							$6r+5$	$6r+6$																													
$12r+11$							$6r+5$																														
$12r+9$		$8r+8$																																			
$12r+8$																																					
$12r+7$																																					
$12r+6$																																					
$12r+5$																																					
1																																					
$8r+12$																																					
$8r+11$																																					
$8r+10$																																					
$8r+9$																																					
$8r+7$																																					
$8r+6$																																					
1																																					
3																																					

$C_{8r+6} : T_{min}(8r+6) + 1 = 20r + 18$

令 C_{8r+6} 的頂點依逆時針順序排列名稱分別為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{8r+6}$ ，則根據上述脈絡表的規律，我們可建構函數 f 為：

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 f(v_i) = 1 & \text{, if } i = 1 \\
 f(v_i) = 8r + 8 & \text{, if } i = 2 \\
 f(v_i) = 4r + 4 & \text{, if } i = 3 \\
 f(v_i) = \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 0 \pmod{4} \\
 f(v_i) = 2 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 2 \pmod{4} \\
 f(v_i) = (4r+3) + \frac{i+1}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 1 \pmod{4} \\
 f(v_i) = (4r+1) + \frac{i+1}{2} & \text{, if } i \in \{4, 5, \dots, 4r+1\} \text{ 且 } i \equiv 3 \pmod{4} \\
 f(v_i) = 1 + \frac{i}{2} & \text{, if } i \in \{4r+6, 4r+7, \dots, 8r+5\} \text{ 且 } i \text{ is even} \\
 f(v_i) = (4r+2) + \frac{i+1}{2} & \text{, if } i \in \{4r+6, 4r+7, \dots, 8r+5\} \text{ 且 } i \text{ is odd} \\
 f(v_i) = 2r + 2 & \text{, if } i = 4r + 3 \\
 f(v_i) = 2r + 3 & \text{, if } i = 4r + 5 \\
 f(v_i) = 12r + 10 & \text{, if } i = 8r + 6 \\
 f(v_i) = 6r + 5 & \text{, if } i = 4r + 2 \\
 f(v_i) = 6r + 3 & \text{, if } i = 4r + 4 \\
 f(v_i v_{i+1}) = (20r + 18) - f(v_i) - f(v_{i+1}) & \text{, if } i \in \{0, 1, 2, \dots, 8r + 5\}, \text{ 其中規定 } v_0 = v_{8r+6}
 \end{array} \right.$$

由脈絡表可知，每一個頂點的權重值皆與兩個邊的權重值配對，同時每一個邊的權重值也與兩個點的權重值配對，且相鄰兩點與邊的函數值總和為定值 $T_{min}(8r+6)+1 = 20r+18$ 。可逐一檢驗我們建構的函數 f 確實為 C_{8r+6} 的一個魔函數。相對應的頂點權重圖如下所示：



根據魔函數對偶定理，由 Lemma 3 與 Lemma 4 的結果可知，當 n 為奇數 ($n \neq 5$) 或 $n = 4t + 2$ 時，恆有『 $T_{max}(n) - 1 \in S(C_n)$ 』。

綜合 Lemma 3 與 Lemma 4 的結果，我們可得下列定理：

定理 3：任意圈 C_n ，當 n 不為 4 的倍數且 $n \neq 5$ 時，則 $T_{min}(n) + 1$ 、 $T_{max}(n) - 1 \in S(C_n)$ 。

至於當 $n = 4t$ 時，我們對於偶數圈 C_n 提出以下猜想：

Conjecture 1：任意長度為 $n = 4t$ ($t \geq 1$) 的圈 C_n ，則 $T_{min}(n) + 1 = \frac{5n+6}{2} \in S(C_n)$ 。

對於任意圈 C_n ($n \geq 6$)，我們更感到好奇的是，所有介在 $T_{min}(n)$ 與 $T_{max}(n)$ 之間的數，是否皆屬於魔光譜 $S(C_n)$ 中的元素？因此我們提出了對於圈 C_n 的魔光譜猜想：

Conjecture 2：任意 $n \geq 6$ ，若 $\left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor \leq s \leq \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ ，則圈 C_n 皆存在魔函數使其定值為 s 。

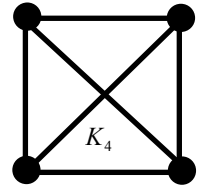
六、特殊圖形的魔函數

給定 n 個頂點，若任兩頂點皆有一邊相連，則稱此圖形為『完全圖』，並記為『 K_n 』。考慮四個頂點的完全圖 K_4 ，其中 $|V(K_4)|=4$ ， $|E(K_4)|=6$ 。假設 $f:V(K_4)\cup E(K_4)\rightarrow\{1,2,3,\dots,10\}$ 為 K_4 的魔函數，其定值為 T 。

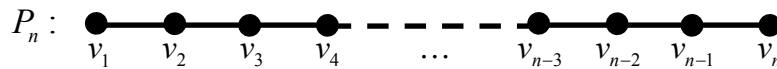
因為 $6T=3\sum_{v\in V(K_4)}f(v)+\sum_{uv\in E(K_4)}f(uv)=(1+2+3+\dots+10)+2\sum_{v\in V(K_4)}f(v)=55+2\sum_{v\in V(K_4)}f(v)$ ，所以

$6T-2\sum_{v\in V(K_4)}f(v)=55$ ，此式必然與奇偶性矛盾，由此可知完全圖 K_4 不存在魔函數。這意味著不

是所有簡單圖都具有魔函數，更顯示研究魔函數存在性的難度。因此探索哪些特殊類型的簡單圖是具有魔函數的存在性即為接下來的研究方向。



討論完圈 C_n 之後，我們挑選同樣具有規律對稱結構的圖進行研究。所謂的路徑圖 P_n ($n\geq 2$) 是具有 n 個頂點， $n-1$ 條邊的簡單圖。令 P_n 的頂點集合為 $V(P_n)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， P_n 的邊集合為 $E(P_n)=\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$ ，可知圖形結構等同於將 C_n 任意去掉一條邊的結果，如下圖所示：



奇數路徑圖 P_{2k+1}

對於奇數頂點的路徑圖 P_{2k+1} ，我們設計魔函數 $f:V(P_{2k+1})\cup E(P_{2k+1})\rightarrow\{1,2,3,\dots,4k+1\}$ 。

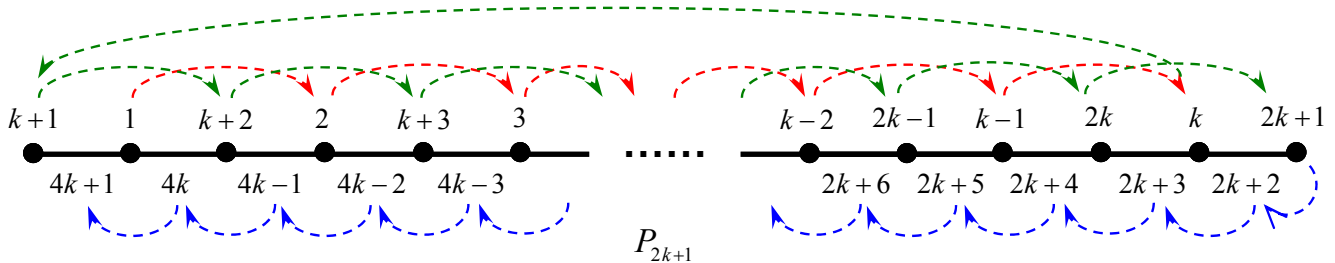
令 $\{f(v):v\in V(P_{2k+1})\}=\{1,2,\dots,2k+1\}$ 、 $\{f(uv):uv\in E(P_{2k+1})\}=\{2k+2,2k+3,\dots,4k+1\}$ ，其中函

數 f 定義為：

$$\begin{cases} f(v_i) = \frac{i}{2} & , \text{ if } i \text{ is even} \\ f(v_i) = k + \frac{i+1}{2} & , \text{ if } i \text{ is odd} \\ f(v_i v_{i+1}) = 4k+2-i & , \text{ if } i \in \{1,2,\dots,2k\} \end{cases}$$

。不難驗證 f 確實為 P_{2k+1} 的魔函數，其

定值為 $T=5k+3$ （此為最小魔和），而權重圖如下圖所示，其中示意箭頭為賦予權重的順序。



偶數路徑圖 P_{2k}

對於偶數頂點的路徑圖 P_{2k} ，我們設計魔函數 $f:V(P_{2k})\cup E(P_{2k})\rightarrow\{1,2,3,\dots,4k-1\}$ 。

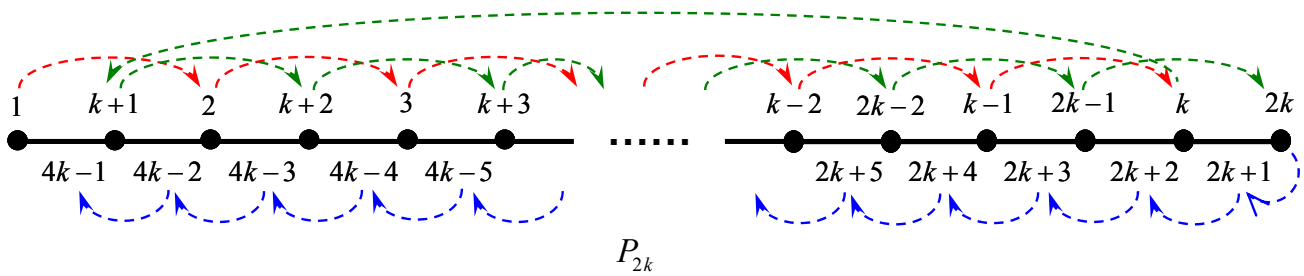
令 $\{f(v):v\in V(P_{2k})\}=\{1,2,\dots,2k\}$ 、 $\{f(uv):uv\in E(P_{2k})\}=\{2k+1,2k+2,\dots,4k-1\}$ ，其中函數 f 定

義為：

$$\begin{cases} f(v_i) = \frac{i+1}{2} & , \text{if } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = k + \frac{i}{2} & , \text{if } i \text{ is even} \\ f(v_i v_{i+1}) = 4k - i & , \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 2k-1\} \end{cases}$$

。不難驗證 f 確實為 P_{2k} 的魔函數，其定值為

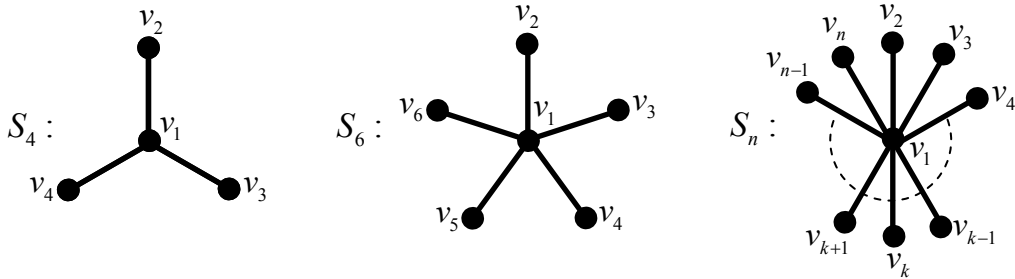
$T = 5k + 1$ （此為最小魔和），而權重圖如下圖所示，其中示意箭頭為賦予權重的順序。



星狀圖 S_n

所謂的星狀圖 S_n （ $n \geq 2$ ）是具有 n 個頂點， $n-1$ 條邊的簡單圖，其中 S_n 的頂點集合為

$V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， S_n 的邊集合為 $E(S_n) = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, \dots, v_1 v_n\}$ ，如下圖所示：



我們設計魔函數 $f:V(S_n)\cup E(S_n)\rightarrow\{1,2,3,\dots,2n-1\}$ 。令 $\{f(v):v\in V(S_n)\}=\{1,2,\dots,n\}$ 、

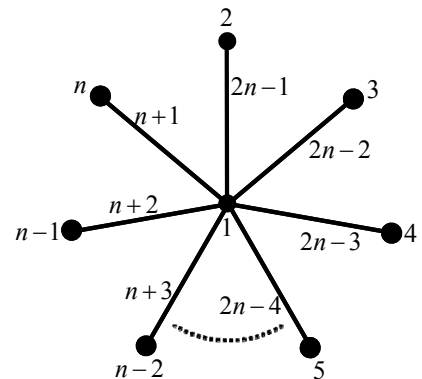
$\{f(uv):uv\in E(S_n)\}=\{n+1,n+2,\dots,2n-1\}$ ，

其中函數 f 定義為：

$$\begin{cases} f(v_i) = i & , \text{if } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ f(v_1 v_i) = 2n + 1 - i & , \text{if } i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

不難驗證 f 確實為 S_n 的魔函數，其定值為 $T = 2n + 2$

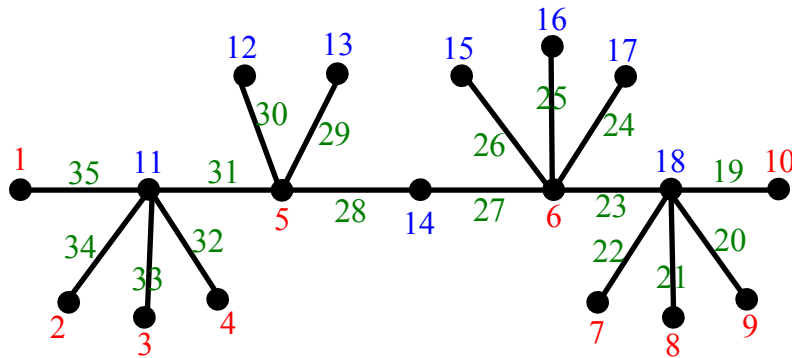
（此為最小魔和），而權重圖如右圖所示。



綜合上述討論，我們有下列引理：

Lemma 5： $n \geq 2$ ，路徑圖 P_n 與星狀圖 S_n 皆存在魔函數。

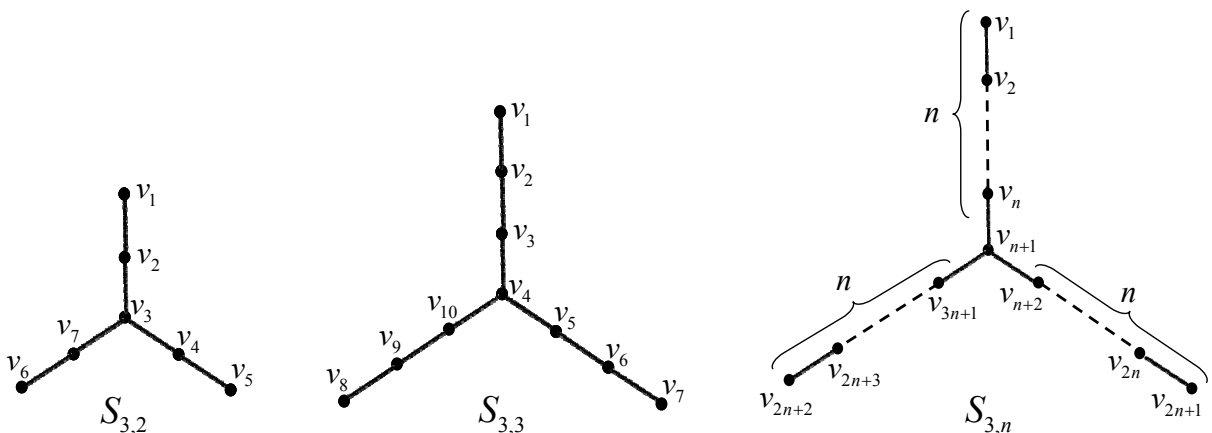
合併路徑圖與星狀圖的魔函數建構規律，對於圖論中的毛毛蟲圖（Caterpillar graph），我們亦可建構出魔函數，下圖為毛毛蟲圖的一個範例（定值 47），可以發覺魔函數的對應具有規律性，然而此賦值規律可推廣到任意的毛毛蟲圖。



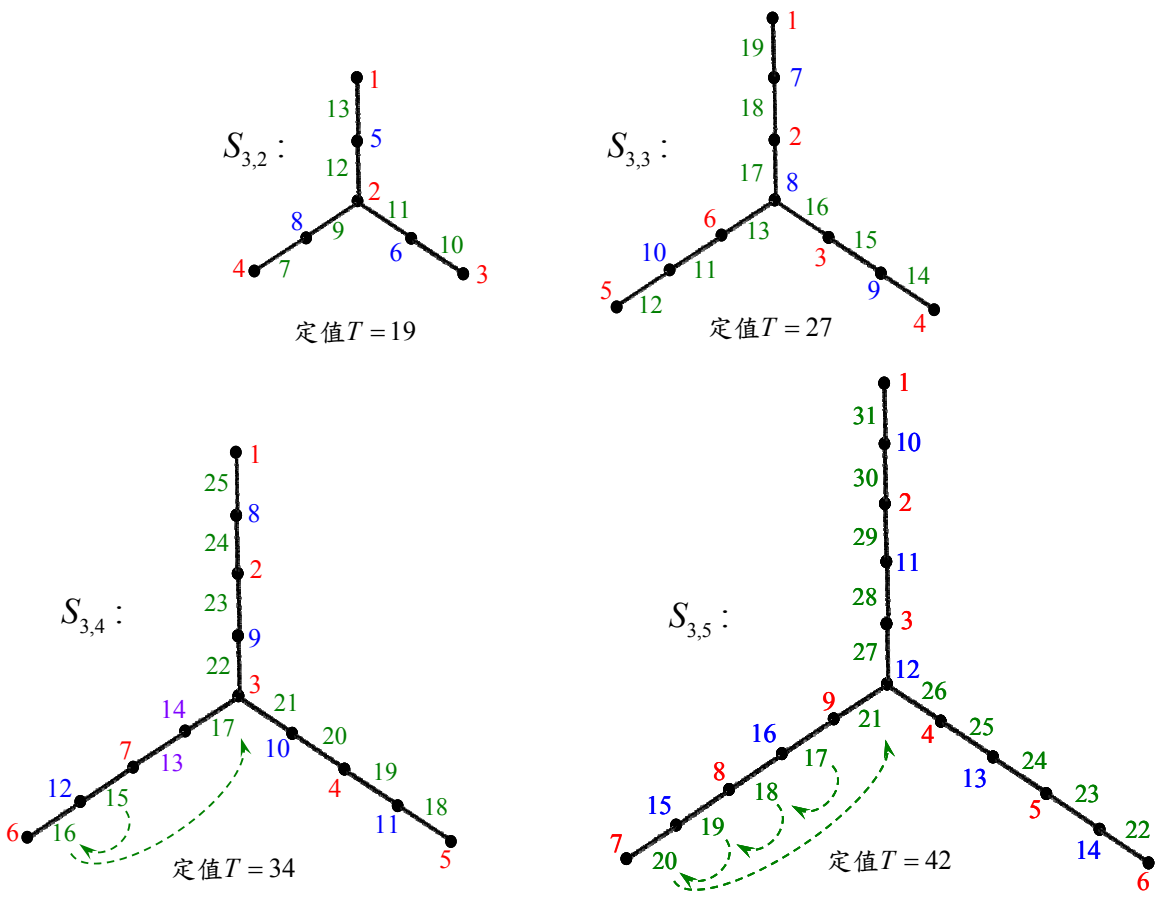
定理 4：任意毛毛蟲圖（Caterpillar graph）皆存在魔函數。

等長三腳樹狀圖 $S_{3,n}$

以下繼續探討一類特殊的樹狀圖 $S_{3,n}$ ，其中 $S_{3,n}$ 的頂點集合為 $V(S_{3,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{3n}, v_{3n+1}\}$ ， $S_{3,n}$ 的邊集合為 $E(S_{3,n}) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, 2n\} \cup \{v_i v_{i+1} : i = 2n+2, 2n+3, \dots, 3n\} \cup \{v_{3n+1} v_{n+1}\}$ 。根據 $S_{3,n}$ 的圖形樣貌，我們稱 $S_{3,n}$ 為『等長三腳樹狀圖』。不難得知，當 $n=1$ 時， $S_{3,1}$ 即為星狀圖 S_3 。等長三腳樹狀圖 $S_{3,n}$ 的圖形如下所示（以下探討 $S_{3,n}$ 的頂點名稱，皆以右下圖的編號順序呈現）：



延伸並改良毛毛蟲圖的魔函數建構規律，我們分別建構出 $S_{3,2}$ 、 $S_{3,3}$ 、 $S_{3,4}$ 、 $S_{3,5}$ 的魔函數，其權重圖如下所示：



透過上述的賦值規律，對任意自然數 n ，根據 n 的奇偶性，我們皆可設計 $S_{3,n}$ 的魔函數。故我們得出下列定理：

定理 5： 當 $n \in \mathbb{N}$ ，等長三腳樹狀圖 $S_{3,n}$ 皆存在魔函數。

【證明】：

對於 $S_{3,n}$ 的圖形，我們將 n 的奇偶性分開討論。

n 為奇數

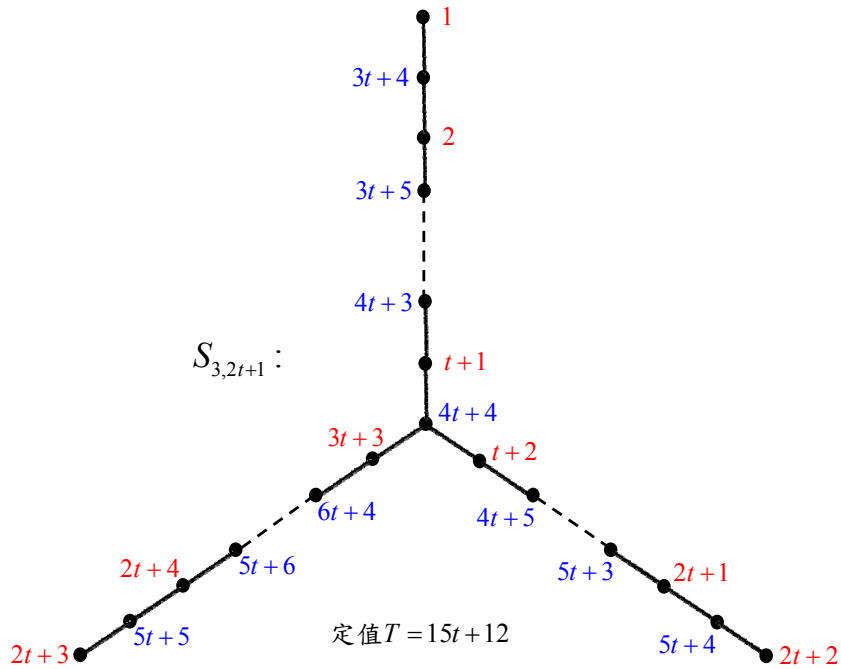
令 n 為奇數 $2t+1$ ，考慮三腳樹狀圖 $S_{3,2t+1}$ 。

我們設計魔函數 $f: V(S_{3,2t+1}) \cup E(S_{3,2t+1}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12t+7\}$ 。

令 $\{f(v) : v \in V(S_{3,2t+1})\} = \{1, 2, \dots, 6t+4\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(S_{3,2t+1})\} = \{6t+5, 6t+6, \dots, 12t+7\}$ ，其中函數 f 定義為：

$$\left\{ \begin{array}{l} f(v_i) = \frac{i+1}{2} \quad \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 4t+3\} \text{ and } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = \frac{i}{2} + 1 \quad \cdot \text{if } i \in \{4t+4, 4t+5, \dots, 6t+4\} \text{ and } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 3t+3 + \frac{i}{2} \quad \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 4t+3\} \text{ and } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 3t+3 + \frac{i-1}{2} \quad \cdot \text{if } i \in \{4t+4, 4t+5, \dots, 6t+4\} \text{ and } i \text{ is odd} \\ f(v_i v_{i+1}) = 15t+12 - (f(v_i) + f(v_{i+1})) \quad \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 6t+4\} \setminus \{4t+3\}, \text{ 其中規定 } v_{6t+5} = v_{2t+2} \end{array} \right.$$

不難驗證 f 確實為 $S_{3,2t+1}$ 的魔函數，其定值為 $T = 15t+12$ ，而頂點權重圖如下圖所示：



n 為偶數

令 n 為偶數 $2t$ ，考慮三腳樹狀圖 $S_{3,2t}$ 。

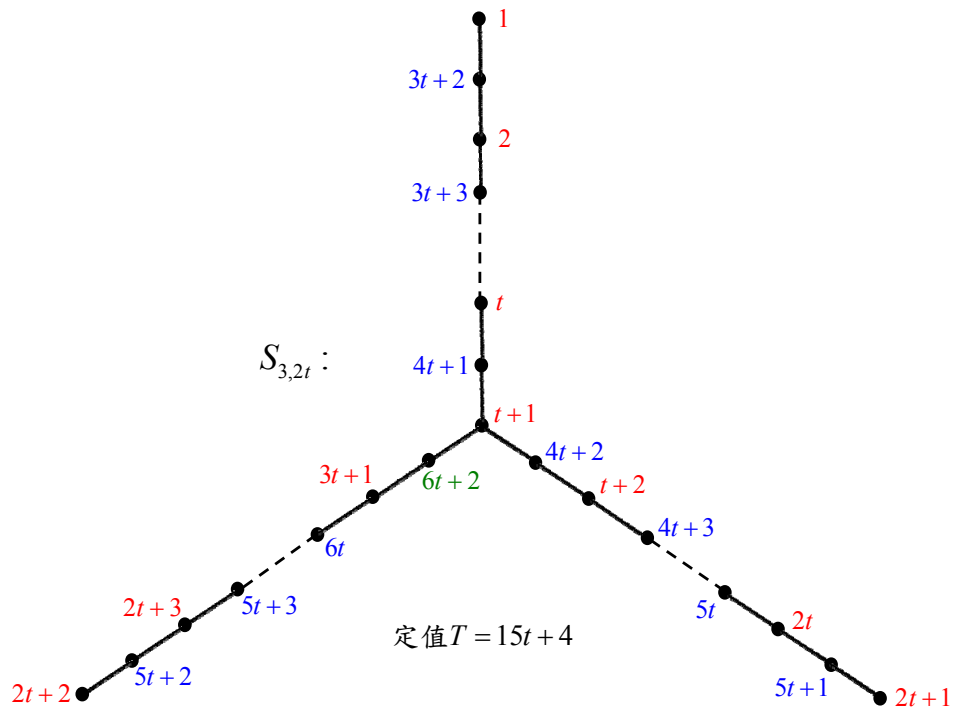
我們設計魔函數 $f : V(S_{3,2t}) \cup E(S_{3,2t}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12t+1\}$ 。

令 $\{f(v) : v \in V(S_{3,2t})\} = \{1, 2, \dots, 6t+2\}$ 、 $\{f(uv) : uv \in E(S_{3,2t})\} = \{6t+1\} \cup \{6t+3, 6t+4, \dots, 12t+1\}$,

其中函數 f 定義為：

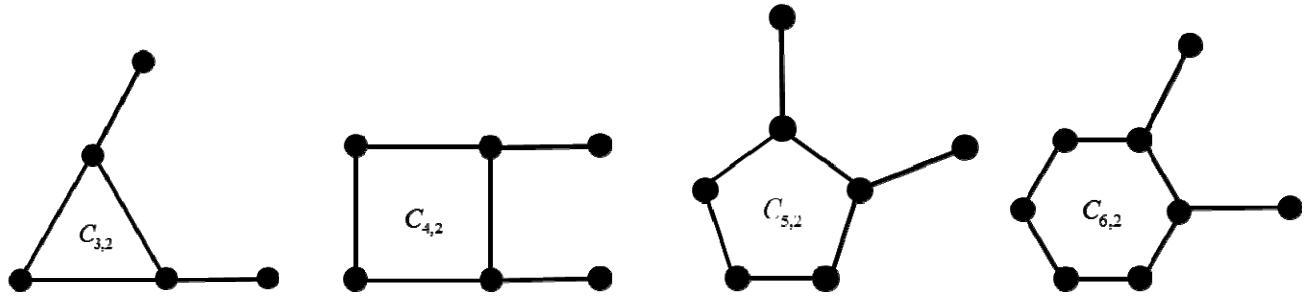
$$\left\{ \begin{array}{ll} f(v_i) = \frac{i+1}{2} & \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 4t+1\} \text{ and } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = \frac{i}{2} + 1 & \cdot \text{if } i \in \{4t+2, 4t+3, \dots, 6t\} \text{ and } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 3t+1 + \frac{i}{2} & \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 4t+1\} \text{ and } i \text{ is even} \\ f(v_i) = 3t+1 + \frac{i-1}{2} & \cdot \text{if } i \in \{4t+2, 4t+3, \dots, 6t\} \text{ and } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = 6t+2 & \cdot \text{if } i = 6t+1 \\ f(v_i v_{i+1}) = 15t+4 - (f(v_i) + f(v_{i+1})) & \cdot \text{if } i \in \{1, 2, \dots, 6t+1\} \setminus \{4t+1\}, \text{ 其中規定 } v_{6t+2} = v_{2t+1} \end{array} \right. .$$

不難驗證 f 確實為 $S_{3,2t}$ 的魔函數，其定值為 $T = 15t+4$ ，而頂點權重圖如下圖所示：



圈的變形 $C_{2k-1,2}$

將圈 C_n 於一頂點新增一條邊，在文獻中已有探討過此類圖形的魔函數，因此我們選擇改變增加的邊數，使相鄰的點個別新增一條邊，我們以符號記為『 $C_{n,2}$ 』。當 $n = 3, 4, 5, 6$ ， $C_{n,2}$ 的圖形如下所示：



當 $k \geq 2$ 時，考慮奇數 $n = 2k - 1$ ，我們亦成功設計出圖形 $C_{2k-1,2}$ 的魔函數，故有下列定理：

定理 6： 當 $k \geq 2$ ， $C_{2k-1,2}$ 皆存在魔函數使其定值為 $5k + 3$ ，意即 $5k + 3 \in S(C_{2k-1,2})$ 。

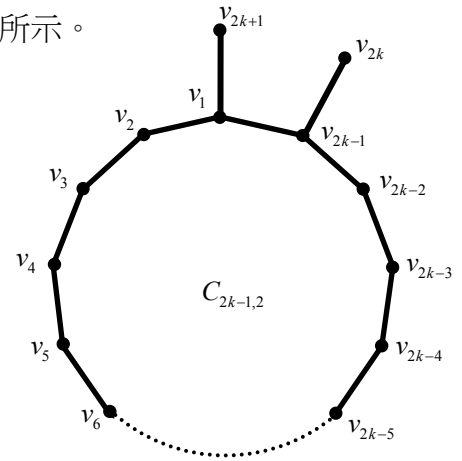
【證明】：

當 $k \geq 2$ ，考慮 n 為奇數 $2k - 1$ ，其中 $C_{2k-1,2}$ 的頂點名稱，如右圖所示。

我們設計魔函數 $f : V(C_{2k-1,2}) \cup E(C_{2k-1,2}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4k + 2\}$ 。

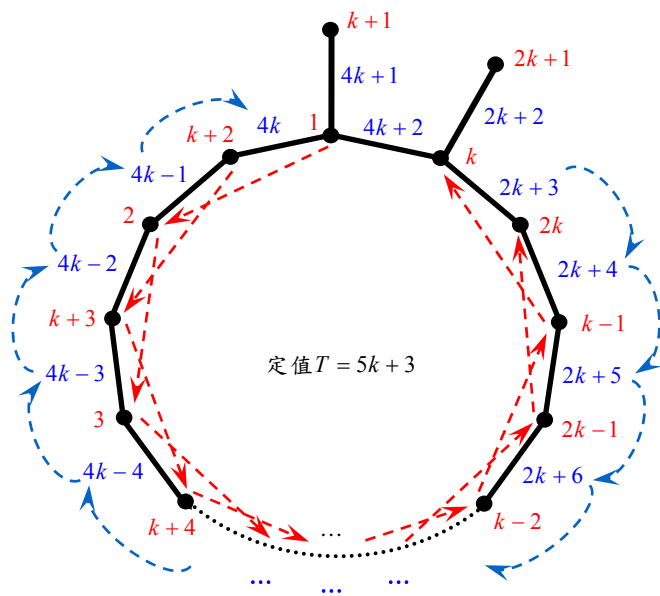
令 $\{f(v) : v \in V(C_{2k-1,2})\} = \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ 、

$\{f(uv) : uv \in E(C_{2k-1,2})\} = \{2k + 2, 2k + 3, \dots, 4k + 2\}$ 。



$$\text{定義函數 } f \text{ 為：} \begin{cases} f(v_i) = \frac{i+1}{2} & , \text{ if } i \text{ is odd} \\ f(v_i) = (k+1) + \frac{i}{2} & , \text{ if } i \text{ is even} \\ f(v_i v_{i+1}) = 4k + 1 - i & , \text{ if } i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\} \\ f(v_1 v_{2k-1}) = 4k + 2 \\ f(v_1 v_{2k+1}) = 4k + 1 \end{cases}$$

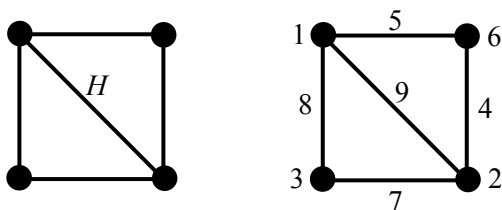
不難驗證 f 確實為 $C_{2k-1,2}$ 的魔函數，其定值為 $T = 5k + 3$ ，而權重圖如下圖所示：



由於路徑圖 P_n 、星狀圖 S_n 、毛毛蟲圖與等長三腳樹狀圖 $S_{3,n}$ 皆為特殊類型的樹狀圖，因此對於一般樹狀圖，我們仍將努力尋找設計魔函數的方法。同時猜測所有的樹狀圖皆具有魔函數的存在性。

Conjecture 3 : 任意樹狀圖 (Tree) 皆存在魔函數。

此外，所謂弦圖 G 為圈 C_n 再加上任意一邊所成的圖形，我們亦好奇這樣的弦圖 G 是否也具有魔函數。考慮 H 為圈 C_4 再加上任意一邊所成的弦圖，我們仍成功的設計出魔函數，如下圖所示。至於一般弦圖是否具有魔函數，亦成為我們後續研究的目標。



Conjecture 4 : 任意弦圖 (Chordal graph) 皆存在魔函數。

參、研究結果與討論

一、研究結果

令 $T_{min}(n) = \left\lfloor \frac{5n+4}{2} \right\rfloor$ ， $T_{max}(n) = \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor$ ，以下我們用表格來呈現目前對於圈 C_n ，有關魔光

譜 $S(C_n)$ 所知的結果：

C_n	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6 \sim 15$	$n=2k+1$	$n=4t$	$n=4t+2$
$T_{min}(n) \cdot T_{max}(n)$	○	○	○	○	○	○	○
$T_{min}(n)+1$ $T_{max}(n)-1$	○	○	×	○	○	?	○
$3n$	○	○	×	○	?	○	?
$3n+1$ 、 $3n+2$	○	○	○	○	○	?	?
所有合理定值	○	○	$T \neq 15, 18$	○	?	?	?

此外對於一般路徑圖 P_n ($n \geq 2$)、星狀圖 S_n ($n \geq 2$)、毛毛蟲圖、等長三腳樹狀圖 $S_{3,n}$ 以及圈的變形圖 $C_{2k-1,2}$ ，我們亦刻畫出設計魔函數的規律方法。

二、討論

數珠手環是魔函數建立在圈 C_n 上的問題，必須適當的將自然數 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 安排在各頂點與邊上，使其滿足定值特性，看似簡單的問題，實際上涉及到數字之間的配對關係，卻不容易找到答案。在奇數圈 C_{2k+1} 上，有一般性的規律可以給出適當的權重，但對於偶數圈 C_{2k} 而言，欲設計一般性規律構造方法，則複雜許多，需要做更細緻的分類討論，而在魔光譜新元素的討論中，即便只針對奇數圈，也必須做更細緻分類，並且當 n 大於一定長度時 ($n \geq 13$)，才可設計出具有一般性的魔函數建構方法。對於結構如此對稱的圈 C_n ，在 n 的奇偶性不同、所求魔和 T 不同時，問題的難度就困難許多，可想而知，對於一般簡單圖 G ，判斷是否存在魔函數，實為『組合設計 (Combinatorial Design)』領域中的難題。

肆、結論與應用

一、結論

給定簡單圖 G ，圖 G 是否具有魔函數的存在性，這是一個函數設計的問題，我們的研究主要是提供一個程序性的探索方法，將原始的『數學小遊戲』抽象化為『組合設計問題』，再依設計所需滿足的條件轉換為『脈絡表』，脈絡表可視為另一個具有視覺化的遊戲，方便觀察並尋找模式，因此成為我們探索魔函數的利器，在沒有計算機的輔助下，我們欲從脈絡表尋找函數設計的規律，當然脈絡表能順利執行與否，完全仰賴圈 C_n 的極度對稱結構。若僅考慮圈 C_n ，我們相信，脈絡表的探索過程，可以翻譯為程式語言，設計成一套有效率的演算法，透過計算機的演算能力，即能判別圈 C_n 是否存在魔函數。至於一般圖 G ，則需要善用圖形本身的規律結構，才便於我們設計出滿足條件的函數。整篇研究是一個遊戲轉變成數學，再從數學蛻變為另一個遊戲，從中我們獲得許多有意義數學模型，整個歷程展現數學研究道路上的景致~~何其美妙！

二、應用

在應用層面上，魔函數的定值特性，以現實生活中的觀點來理解，事實上可視為一種『資源平均分配』的概念（圖論中的標號問題基本上常可視為資源分配問題），縱然我們目前能解決的問題不多，這更反應著此數學問題的難度，因此我們相信，魔函數是一個相當有意義的問題，也是值得繼續研究的主題。在研究方法上，或許需要引入更多圖論、組合學與數論的工具才能有更大的突破，這也是當初我們為何選擇用圖論的語言來詮釋數珠手環的動機。

三、未來展望

有關魔函數的問題，針對具有結構規律的簡單圖 G ，將是我們後續努力的研究方向，因此我們將未來欲研究的問題羅列如下：

1. 哪些類型的簡單圖 G （樹狀圖 tree、弦圖 chordal graph、二部圖 bipartite graph、平面圖 planar graph 等），具有魔函數的存在性？
2. 若簡單圖 G 具有魔函數，則如何刻畫圖 G 的魔光譜 $S(G)$ ？
3. 給與定值 T （ $T \geq 6$ ），是否皆存在一個具有魔函數的簡單圖 G ，使其定值為 T ？
4. 魔函數與圖論中眾多的標號問題（Labeling problem）是否具有特殊的關連性？

5. 研究過程中所提出的四個猜想是否為真？

伍、參考文獻

1. (2011 年 9 月 26 日)，《數珠手環》。自由時報，數學 543。
2. 中華民國第 25 屆全國科學展覽小學組，《怎樣安排才恰當》。
3. 中華民國第 37 屆全國科學展覽小學組，《奇妙的數學遊戲》。
4. 中華民國第 45 屆全國科學展覽國中組，《七邊型的數字謎題》。
5. 中華民國第 51 屆全國科學展覽小學組，《輪"翻"上陣-探究邏輯圈之數字謎》。
6. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊。南一出版社。
7. A. Kotzig and A. Rosa, *Magic Valuations of Finite Graphs*, *Canad. Math. Bull.* Vol. 13 (4), 1970.
8. A. M. Marr and W. D. Wallis, *Magic Graphs*, Springer, 2013.
9. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2008.

【評語】 010023

圖形的 magic labeling 問題。作者針對 cycle 是否存在著 magic labeling 和對應的 magic-spectrum 作了分析，對一些較小的 cycle，給出了完整的答案，對一般的情況，也给出了一些分析。除了 cycle，針對一些特別的圖形，也作了一番討論。圖形的 magic labeling 問題是頗為有趣的問題，相關的變形問題非常的多，也有許多研究結果。作者們所考慮的問題其實是（在一些論文中所使用的名稱）所謂的 Edge-magic total labeling 問題。藉由簡單的配對技巧，作者們證明了所有的圈 (cycle) 都是魔和 (magic sum) 為 $\lfloor \frac{5n+4}{2} \rfloor$ 的魔圖，並進一步的證明了所有的奇數圈 (odd cycle) 都是魔和 (magic sum) $\frac{5n+5}{2}$ 為的魔圖。針對一些特別的樹狀圖 (path、caterpillar、特殊的 spider)，也作了一些分析。分析的技巧很有趣，值得嘉許。比較可惜的是，或許是由於名稱上的差異，作者們沒注意到有許多文中給出的結論其實是已經有結果了。作者們確實得出了一些新的結果，如果能在這些新的結果上多作著墨會更好。