2017 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 010005

參展科別 數學

作品名稱 翻轉塗色驚嘆號

得獎獎項 大會獎：二等獎

就讀學校 國立臺南女子高級中學

指導教師 舒宇宸、洪士薰

作者姓名 莊沅蓉

關鍵字 **Thue-Morse Sequence、**

3-Arithmetic-Progression

作者簡介

我是莊沅蓉，就讀臺南女中數理資優班三年級。一直以來，都覺得數學是個很酷的科目。解題的剎那的欣喜和成就感固然難得，但最享受的還是思考的過程裡，即使不知道所用的方向正確與否，仍舊不斷嘗試的過程。今年很幸運地來到國際科展與眾多數學能手一同切磋，希望過程中一切順利也希望能在自己的題目上有更上一層樓的嶄新突破與完整研究。在此以 Dale Carnegie 的名言共勉之：“Most of the important things in the world have been accomplished by people who have kept on trying when there seemed to be no hope at all.”

摘要

本作品『翻轉塗色驚嘆號』為 2016 年國際科展『翻轉塗色』的一般化延伸改進作品. 在過去文獻中討論的問題是在一列已上色的格子中, 估計會有多少個『等間隔而且同色格子』的可能. 而本研究所探討的問題是用兩個顏色 (以 1 及 0 表示,1 跟 0 互為補色), 並以 Thue-Morse 遞迴着色 (若 B 已着色, 則接下來的 $|B|$ 個格子就着上 B 的補色, 其中 $|B|$ 表示 B 的格子數), 其中每次遞迴時精確的『三個間隔相同而且同色的格子』(本作品稱為 3-AP) 的精確總數. 為了表示方便, 我將著好顏色的格為視為一雙色字串. 在之前的作品中, 我以中心排列手法算出了起始字串為 1 時每次遞迴的 3-AP 精確數目. 而本作品的突破在我們推廣到對於任意起始字串 B, 所遞迴產生的 $M_p(B)$ 字串都能精確算出 3-AP 總數, 其困難點在於歸納不同 B 之間的共同性. 令人驚嘆的是, 在遞迴兩次之後, 其 3-AP 增加的數目與 B 的內容無關, 只與 B 的格子數有關. 此為本作之重要定理. 除此之外, 我也給出依序刪去每次遞迴後所剩下的 $M_{p,q}(B)$ 中 3-AP 總數的公式. 其困難點在刪去之後失去了對稱性. 在本作品中突破方式是改變中心排列以偏心排列找出基底, 並以未定係數法將其 3-AP 總數找到. 而令人驚嘆的地方在於, 若同時增加後續字串並同時刪去前方字串, 其 3-AP 增加的數目也與 B 的內容無關, 只與 $|B|$ 有關.

Abstract

Problems involving arithmetic progressions are of interest in number theory, combinatorics, and computer science, from both theoretical and applied points of view. In 2004, Ben Green and Terence Tao proved that the sequence of prime numbers contains arbitrarily long arithmetic progressions. However, it is difficult to count the number of arithmetic progressions with k terms for a sequence of any type. Most existing results only estimate the lower/upper bounds for the number. In this work, we try to count the exact number of arithmetic progressions with 3 terms (3-AP in short) that are contained in the block-generated Thue-Morse (T-M in short) binary string. A block-generated Thue-Morse binary string starts with a block B and is always appended by the Boolean complement (B') of the existing string at the end recursively. The truncated T-M sequence cuts off a shorter T-M from the beginning and therefore the resulting string is no longer of a T-M type. The block-generated T-M binary string replaces 0 and 1 with a generator B and its Boolean complement B', where B can be any binary string. By observing an important symmetric-across property from the particular string patter BB'B'B, we discover an amazing result that the number of 3-AP not completely contained in the first half B B' or the second half of B'B is half of the length of B, regardless what content in B there might be. This property can be applied repeatedly to give the formula for the exact number of 3-AP in the truncated/block-generated T-M binary strings. The results depend only on the length of string B, but not the content of it. Some other extensions of the symmetric-across property on BB'BB'BB'BB', for example, can be likewise discussed to deepen our findings.

一　前言

本篇研究由討論下面的等間隔同色問題開始：

定義 一 (等間隔同色問題). 以 r 種顏色, 由左而右為一列 n 個空格著色, 如上圖即是用兩個顏色著八個空格. 每個空格著一色. 每個顏色可以重複使用. 在一種固定著色中, 我們可以找到幾組「k 個位置間隔相同而且相同顏色」(以下簡稱為 k-AP)？

舉例來說, 我們使用兩種顏色 (白色與黑色) 來著 9 個空格. 假設我們著色的方式是「黑黑黑白黑白白白白」, 而想找的是 3-AP, 也就是「3 個位置間隔相同且同色的位置」, 那麼第 1, 2, 3 個位置都是黑色；第 1, 3, 5 個位置也是黑色; 第 4, 6, 8 個位置是白色; 第 6, 7, 8 個位置是白色; 第 7, 8, 9 個位置是白色. 所以對「黑黑黑白黑白白白白」來說, 可以找到 5 組相同顏色出現在 3 個間隔一樣的位置. 我們會把這 5 組答案放在一個集合中 $\{(1,2,3),(1,3,5),(4,6,8),(6,7,8),(7,8,9)\}$. 一般來說, r 種顏色, n 個位置的著色方法有 r^n 種, 而討論每一個著色方法的等間隔同色問題將會非常繁複. 國際上也有一些文章 [1, 4, 2, 5, 3, 6] 也在討論這個問題. 但大多都在估計值, 而非精確的個數. 本研究為了得出精確的數目, 適度將顏色數, 字串塗色方式加以限制, 因此在本研究中的討論問題如下:

定義 二 (本研究討論問題). 使用 2 種顏色, 並以一個固定的 Thue-Morse 著色法 (詳見定義八到十一) 著色後, 其『3 個位置間隔相同而且同色』(3-AP) 的精確個數.

(一)　基本定義及性質

如果我們將黑、白兩個顏色分別對應到 0 及 1. 每個不同的著色方式就對應了一個 0 跟 1 的字串. 如之前舉例的「黑黑黑白黑白白白白」就對應了 000101111 這個字串. 在這裡, 我們給上述的二進位字串一個專有名詞:

定義 三 (雙色字串). 長度為 n 的雙色字串為 $B = b_1b_2\cdots b_n$, 其中 b_i 為 0 或 1. 我們用 $|B|$ 來表示 B 的字串長度 n.

一個雙色字串就對應了一種兩個顏色的著色方式. 在介紹 Thue-Morse 雙色字串之前, 我們先定義以下的字串操作:

定義 四 (字串串接). 令 $A = a_1a_2\cdots a_m$, $B = b_1b_2\cdots b_n$ 為兩個長度分別為 m, n 的雙色字串, 定義 AB 為長度是 $m+n$ 的雙色字串 $a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$.

定義 五 (互補字串). 令 $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$; 若 $B = b_1b_2\cdots b_n$ 為一個長度為 n 的雙色字串, 則定義 $\bar{B} = \bar{b_1}\bar{b_2}\cdots\bar{b}_n$ 為 B 的互補雙色字串

定義 六 (逆寫字串). 若 $B = b_1b_2\cdots b_n$, 我們定義 $\overleftarrow{B} = b_nb_{n-1}\cdots b_1$ 為 B 的逆寫字串

定義 七 (子字串). 若 $B = b_1b_2\cdots b_n$, 我們定義 $B(s,t) = b_sb_{s+1}\cdots b_{t-1}b_t$ 為 B 的子字串

有了以上的字串操作, 我們就可以透過遞迴來定義一系列的 Thue-Morse 字串:

定義 八 (p 次遞迴 Thue-Morse 字串 T_p). 令 $T_0 = 1$, 並對於所有的正整數 p, 定義

$$T_p = T_{p-1}\overline{T_{p-1}} \tag{1}$$

為長度為 2^p 的 Thue-Morse 雙色字串.

舉例來說, $T_1 = 10$, $T_2 = 1001$, $T_3 = 10010110$, $T_4 = 1001011001101001$. 而在一開始的圖即對應 T_3.

此外, 本文亦討論從前方截斷 2^q 個位置的 Thue-Morse 雙色字串中的 3-AP 個數.

定義 九 (截斷的 Thue-Morse 字串 $T_{p,q}$)**.** 對 Thue-Morse 字串 T_p, 拿走它最前面 $2^q(0 \le q \le p-1)$ 個字元而得到的新字串, 我們稱為截斷的 Thue-Morse 字串 $T_{p,q} = T_p(2^q+1, 2^p)$. 它的長度為 $2^p - 2^q$.

除此之外, 如果我們改變 Thue-Morse 一開始起始字串, 從 1 變成一個一般的文字 B, 再利用 Thue-Morse 遞迴關係我們就可以建構出長度為 $|B| \cdot 2^p$ 的字串, 這樣的字串我們稱為一般化的 Thue-Morse 雙色字串

定義 十 (一般化的 Thue-Morse 字串 $M_p(B)$)**.** 令 $M_0(B) = B$, 為一個長度為 $|B|$ 的雙色字串並對於所有的正整數 p, 定義

$$M_p(B) = M_{p-1}(B)\overline{M_{p-1}(B)} \tag{2}$$

為長度為 $|B| \cdot 2^p$ 的一般化 Thue-Morse 雙色字串.

在這個定義下, $T_p = M_p(1)$. 此外, 我們可以發現, $M_p(B)$ 是將 T_p 中的 1 換成 B, 而 0 換成 $\bar{B}$ 的字串. 舉例來說, $T_2 = 1001$, $B = 010$ 的話, 那麼 $M_2(B) = B\bar{B}\bar{B}B = 010101101010$.

仿照前面 $T_{p,q}$ 的定義, 我們也可以定義出一般化的截斷 Thue-Morse 字串, 即 M_p 被截去前面一段長度 $|B| \cdot 2^q$ 的 $M_q(B)$ 所剩下的子字串 $M_{p,q}$:

定義 十一 (一般化的 Thue-Morse 字串 $M_p(B)$)**.** $M_{p,q}(B) = M_p(B)(|B| \cdot 2^q + 1, |B| \cdot 2^p)$. 而一般化截斷 Thue-Morse 字串長度為 $|M_{p,q}(B)| = (2^p - 2^q)|B|$.

對於字串的操作, 我們有以下的引理:

引理 十二 (字串操作引理)**.** $\bar{\bar{B}} = B$, $\overline{\overleftarrow{B}} = \overleftarrow{\bar{B}}$, $\overleftarrow{AB} = \overleftarrow{B}\overleftarrow{A}$.

礙於篇幅, 這個簡單的引理我們就不證明了. 我們將用這個引理證明以下對於 T_p 的定理:

定理 十三. *當 p 是奇數, $\overleftarrow{T_p} = \overline{T_p}$; 當 p 是偶數, $\overleftarrow{T_p} = T_p$.*

Proof. p 是奇數的情況：
若 $p = 1$ 則 $T_1 = 10$, $\overline{T_1} = 01$, $\overleftarrow{T_1} = 01$, 所以 $\overline{T_1} = 01 = \overleftarrow{T_1} = 01$. 假設 $p = k$, k 是奇數時成立, 也就是說 $\overleftarrow{T_k} = \overline{T_k}$. 當 $p = k+2$ 時, 依據方程式(1)我們會有 $T_{k+2} = T_{k+1}\overline{T_{k+1}} = T_k\overline{T_k}\overline{T_k}T_k$. 因此,

$$\overleftarrow{T_{k+2}} = \overleftarrow{T_k\overline{T_k}\overline{T_k}T_k} = \overleftarrow{T_k}\,\overleftarrow{\overline{T_k}}\,\overleftarrow{\overline{T_k}}\,\overleftarrow{T_k} = \overline{T_k}T_kT_k\overline{T_k} = \overline{T_k\overline{T_k}\overline{T_k}T_k} = \overline{T_{k+2}}$$

p 是偶數的情況：
若 $p = 2$ 則 $T_2 = 1001$, $\overleftarrow{T_2} = 1001$, 所以 $\overleftarrow{\overline{T_2}} = 0110 = T_2$. 假設 $p = k$, k 是偶數時成立, 也就是說 $\overleftarrow{T_k} = T_k$. 當 $p = k+2$ 時,

$$\overleftarrow{T_{k+2}} = \overleftarrow{T_k\overline{T_k}\overline{T_k}T_k} = \overleftarrow{T_k}\,\overleftarrow{\overline{T_k}}\,\overleftarrow{\overline{T_k}}\,\overleftarrow{T_k} = T_k\overline{T_k}\overline{T_k}T_k = T_{k+2}$$

□

接下來, 為了數出相同顏色出現在 3 個間隔一樣的位置, 也就是 1 或 0 出現在 3 個間隔一樣的位置, 定義如下

定義 十四 (3-AP). 假設 $B = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$, 如果序對 $(i, i+d, i+2d)$ 滿足 $b_i = b_{i+d} = b_{i+2d}$, 那麼我們稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 B 的一個同色 3-AP.

我們將一個雙色字串 B 符合上述條件的序對收集起來, 並定義 $AP_3(B)$ 這個函數為計算 B 中的 3-AP 總數:

定義 十五 (計算 B 中 3-AP 總數的函數 $AP_3(\cdot)$). 假設 $B = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$,

$$AP_3(B) = \#\{(i, i+d, i+2d) \,|\, b_i = b_{i+d} = b_{i+2d}, i, d \in \mathbb{N}\}, \tag{3}$$

關於計算 $AP_3(B)$, 我們有以下的定理:

定理 十六 (互補, 逆寫之 3-AP 總數相同). $AP_3(B) = AP_3(\bar{B}) = AP_3(\overleftarrow{B})$

Proof. 我們將構造集合間元素的 1-1 對應關係來證明這三個集合的個數相同. 如果 $(i, i+d, i+2d)$ 是一個 B 的 3-AP, 假設 $b_i = b_{i+d} = b_{i+2d} = s$, 那麼 $\bar{b}_i = \bar{b}_{i+d} = \bar{b}_{i+2d} = \bar{s}$, 所以 $(i, i+d, i+2d)$ 會是 $\bar{B}$ 的 3-AP, 反之亦然. 所以 $AP_3(B) = AP_3(\bar{B})$.
令 $A = \overleftarrow{B} = a_1 a_2 \cdots a_n$, 我們有 $a_j = b_{n+1-j}$, 如果 $(i, i+d, i+2d)$ 是 B 的 3-AP, 那麼我們會有 $(n+1-i-2d, n+1-i-d, n+1-i)$ 是 $\overleftarrow{B}$ 的 3-AP, 反之亦然. 因此, $AP_3(B)| = AP_3(\overleftarrow{B})$. □

此外, 因為接下來在分類的過程中, 常常需要分區計算 3-AP, 為了明確表示跨區的 3-AP, 所以我們定義若 $AP_3(\cdot|\cdot)$ 這個函數為計算跨 $|$ 分隔符號兩邊的跨區 3-AP 總數:

定義 十七 (計算跨區的 3-AP 函數 $AP_3(\cdot|\cdot)$). 假設 $A = a_1 a_2 \cdots a_m$, $B = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$, $C = AB = c_1 c_2 \cdots c_{m+n}$. 定義

$$AP_3(A|B) = \#\{(i, i+d, i+2d) \,|\, c_i = c_{i+d} = c_{i+2d}, i, d \in \mathbb{N}, i \le m, m < i+2d \le n\}, \tag{4}$$

而計對這個跨區的 3-AP 總數, 我們會有以下的引理:

引理 十八 (跨區計算).

$$AP_3(AB) = AP_3(A) + AP_3(B) + AP_3(A|B) \tag{5}$$

(二) 之前成果與本作品成果摘要

在先前的 2016 年國際科展研究中, 對於 T_p 的同色 3-AP 個數進行計算, 得出定理十九

定理 十九 (T_p 的 3-AP 總數).

$$AP_3(T_p) = 4^{p-2} - 2^{p-2} = \frac{1}{16}\left(n^2 - 4n\right), \tag{6}$$

其中 $n = 2^p$ 為 T_p 的字串長度. 證明已於前作 [7] 完成. 在 Preliminary 中也會重新說明一次. 之後延續到丘成桐中學競賽中, 我計算了拿走 T_p 前 2^q 個位置的新字串 $T_{p,q}$ 的 3-AP 個數,

定理 二十 ($T_{p,q} = T_p(2^q+1, 2^p)$ 的 3-AP 總數).

$$AP_3(T_{p,0}) = 4^{p-2} - 2 \cdot 2^{p-2} + 1, \tag{7}$$

$$AP_3(T_{p,1}) = 4^{p-2} - \frac{8}{3} \cdot 2^{p-2} + \frac{1}{6}(9 + (-1)^p), \tag{8}$$

$$AP_3(T_{p,q}) = 4^{p-2} - \frac{3 \cdot 2^{q-1} + 5}{3} \cdot 2^{p-2} + 4^{q-2} + \frac{6 - (-1)^{p+q}}{3} 2^{q-2}, 2 \le q < p. \tag{9}$$

我們將其整理成一個式子:

推論 二十一 ($T_{p,q}=T_p(2^q+1,2^p)$ 的 3-AP 總數一般式).

$$\begin{aligned} & AP_3(T_{p,q}) \\ = \ & 4^{p-2}-\frac{5+[3\cdot 2^{q-1}]}{3}\cdot 2^{p-2}+[4^{q-2}]+\frac{6+3\cdot[2^{1-q}]-(1-[2^{-q}])(-1)^{p+q}}{3}2^{q-2} \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $[\cdot]$ 是高斯符號, $0\le q<p$.

這個成果在丘成桐中學競賽時已有半成品, 而後在青培計畫中陸續完成.

而本作品的重要突破, 是我們改變 Thue-Morse 一開始起始字串, 從原本以 1 作為起始字串, 變成以一般的字串 B 起始字串, 再利用 Thue-Morse 遞迴關係, 我們就可以建構出長度為 $|B|\cdot 2^p$ 的一般化 Thue-Morse 字串 $M_p(B)$. 我們透過觀察不同的 B, 並針對其中同色 3-AP 個數的遞迴關係給出一個通式

定理 二十二 (一般化的 $M_p(B)$ 的 3-AP 總數遞迴). *對於任意的B,*

$$AP_3(M_p(B))=2AP_3(M_{p-1}(B))+2^{2p-5}|B|^2,\ for\ p\ge 3, \tag{11}$$

其中 $|B|$ 為 B 的字串長度.

透過該定理我們會得到

定理 二十三 (一般化的 Thue-Morse$M_p(B)$ 中的 3-AP 總數). *對於任意 $p\ge 3$, 我們有*

$$\begin{aligned} AP_3(M_p(B)) &= 4^{p-2}|B|^2-(|B|^2-|AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)|)2^{p-2} \quad (12) \\ &= \frac{1}{16}\left(|M_p(B)|^2-4\left(|B|-\frac{|AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)|}{|B|}\right)|M_p(B)|\right) \quad (13) \end{aligned}$$

最後, 在交初審件後, 我仿照 $T_{p,q}$ 的方式, 把一般化截斷 Thue-Morse 字串 $M_{p,q}(B)$ 中的 3-AP 總數也做出了:

定理 二十四 (一般化截斷 Thue-Morse 字串中的 3-AP 總數). *若我們定義*

$$\begin{aligned} & F(n,m,p,q) \quad (14) \\ = \ & ((2^{p-2}-2^{q-2})n)^2+2^{q-1}n+\frac{1}{3}\left((m-n(n+4))\cdot 2^{p-2}+(n(n-2)-m)\cdot(-1)^{p+q}\cdot 2^{q-2}\right) \end{aligned}$$

對於 $2\le q<p$, 我們有

$$AP_3(M_{p,q}(B))=F(|B|,AP_3(B\bar{B}\bar{B}B),p,q) \tag{15}$$

而 $q=1$, 3-AP 總數會有一修正項:

$$AP_3(M_{p,1}(B))=F(|B|,AP_3(B\bar{B}\bar{B}B),p,q)-\frac{1}{2}\left(AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)-2\cdot AP_3(B\bar{B})-\frac{1}{2}|B|^2\right) \tag{16}$$

最後在 $q=0<p$ 時, 目前只能用前三項 $a_1=AP_3(B)=AP_3(M_{1,0}(B))$, $a_2=AP_3(BB\bar{B})=AP_3(M_{2,0}(B))$ 及 $a_3=AP_3(BB\bar{B}B\bar{B}\bar{B}B)=AP_3(M_{3,0}(B))$ 來推導出公式:

$$\begin{aligned} & AP_3(M_{p,0}(B)) \\ = \ & 4^{p-2}|B|^2+\frac{1}{6}(4a_3-4a_1+15|B|)2^{p-2}+\frac{1}{4}(5|B|+4a_1+2a_2-2a_3) \\ & +\frac{1}{12}(3|B|-4a_1+6a_2-2a_3)(-1)^p \end{aligned} \tag{17}$$

特別的是, 若令 $B=1$, 即 $M_p(B)=T_p$, 此時定理二十四就會得到 $T_{p,q}$ 的公式, 也就是定理二十.

二 Preliminary

由於 Thue-Morse 字串 T_p 的對稱性, $AP_3(T_p)$ 中的元素個數, 可以依其中心位置 2^{p-1} 做一分類.

定義 二十五. 在集合 $AP_3(T_p)$ 中, 我們對裡面的 $3-AP$, $(i, i+d, i+2d)$ 做以下的分類

- 在前半部: 即 $i+2d \le 2^{p-1}$, 則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_p 的第 I 類同色 $3-AP$. 表示這個 $3-AP$ 是落在 T_{p-1} 中的. 此類型個數為 $AP_3(T_{p-1})$.
- 在後半部: 即 $2^{p-1} < i$, 則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_p 的第 II 類同色 $3-AP$. 表示這個 $3-AP$ 是落在 $\overline{T_{p-1}}$ 中的. 由引理十二得知此類型個數也是 $AP_3(T_{p-1})$
- 兩個在前半部, 一個在後半部: 即 $i+d \le 2^{p-1} < i+2d$, 則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_p 的第 III 類同色 $3-AP$. 直觀來看, 表示這個 $3-AP$ 的前兩個是落在 T_{p-1} 中的, 最後一個是落在 $\overline{T_{p-1}}$ 中.
- 一個在前半部, 兩個在後半部: 若 $i \le 2^{p-1} < i+d$, 則稱 $(i, i+d, i+2d)$ 為 T_p 的第 IV 類同色 $3-AP$. 直觀來看, 表示這個 $3-AP$ 的第一個是落在 T_{p-1} 中的, 最後兩個是落在 $\overline{T_{p-1}}$ 中. 由於 $\overleftarrow{T_p} = T_p$ 或 $\overline{T_p}$. 所以第 IV 類型的 3-AP 數目會與第 III 類型的 3-AP 數目相同.

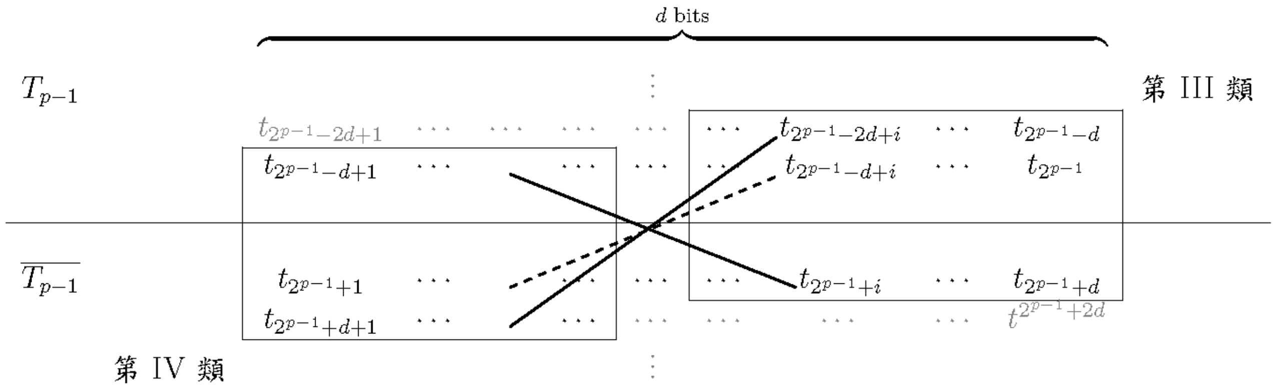
從以上的定義中, 我們可以得到以下的遞迴式

$$\begin{aligned} & AP_3(T_p) \\ = \ & AP_3(T_{p-1}) + AP_3(\overline{T_{p-1}}) + AP_3(T_{p-1}|\overline{T_{p-1}}) \\ = \ & 2AP_3(T_{p-1}) + 2 \cdot (\text{第 III 類同色 3-AP 數目}) \end{aligned} \tag{18}$$

數出第 III 類同色的 3-AP 數目是關鍵. 在此, 我透過自創的 d 中心排列矩陣來計算它.

(一) d-中心排列

為了計算 $AP_3(T_p)$ 中第 III 類同色, 我們將 $AP_3(T_p)$ 中的元素在中心線 (2^{p-1} 與 $2^{p-1}+1$ 兩位置中間的假想中心線) 切開, 並用它的公差 d 做分類. 也就是給定一個固定 d, $1 \le d \le 2^{p-1}$, 我們將 T_p 按下列方式排列: 位於前半 T_{p-1} 由下到上由右到左在中心線以上排列；位於後半 $\overline{T_{p-1}}$ 由上到下由左到右在中心線以下排列. 由於每 d 個字元一列, 連續三列同行位置出現相同字元時, 即出現一組公差為 d 的同色 3-AP. 由於本排列方法以假想字串中心線為界, 並以公差 d 為每列字元數排列, 稱之為 d-中心排列.



但因為字串長度有限, 不同的 d, 不一定能排滿一列 d 個字元. 其數學上精確的定義方式如下:

定義 二十六 (d-中心排列). 對於 T_p 這個雙色字串, 它的 d-中心排列我們定義成 $C(p,d)$ 這個字串矩陣:

$$C(p,d)=\begin{bmatrix} T_p(\max\{1,2^{p-1}-2d+1\},2^{p-1}-d) \\ T_p(\max\{1,2^{p-1}-2d+1\}+d,2^{p-1}) \\ T_p(\max\{1,2^{p-1}-2d+1\}+2d,2^{p-1}+d) \end{bmatrix} \tag{19}$$

為了算出 $AP_3(T_p)$ 的第三類同色 3-AP, 等價於找出每一個 $C(p,d)$ 矩陣中全 1 或全 0 的行數 $N(C(p,d))$, 其中 $N(\cdot)$ 這個函數就是找出矩陣中全 1 或 0 的行數. 我們對於 $N(\cdot)$ 這個函數有以下的引理

引理 二十七. *d 中心排列互補、逆寫時, 矩陣中全 1 或 0 的行數相同:* $N(C(p,d))=N(\overline{C(p,d)})=N(\overleftarrow{C(p,d)})$.

引理 二十八. *如果 $\tilde{C}(p,d)$ 是 $C(p,d)$ 中任兩列互換, 則* $N(C(p,d))=N(\tilde{C}(p,d))$.

這兩個引理很簡單, 而且前作品有證明, 本作品就不再贅述. 很顯然 T_p 中第 III 類 3-AP 總數, 即考慮所有的公差 d 並加總:

$$\text{第 III 類同色 3-AP 數目}=\sum_{d=1}^{2^{p-1}-1} N(C(p,d)) \tag{20}$$

但 $N(C(p,d))$ 不是那麼容易可以求出. 在這裡, 因為 Thue-Morse 字串的構造方式, 我們採取以 2 的冪次來分類 d. 假設 $d=2^k-s$, $1\le s\le 2^{k-1}$, 方程式(20)就可以分開成 k 方向的加總以及 s 方向的加總

$$\text{第 III 類同色 3-AP 數目}=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(C(p,2^k-s)) \tag{21}$$

在這裡, 我們要對不同的 k 及 s, 去計算 $N(C(p,2^k-s))$. 我們之所以能夠算出 3-AP 的總數, 原因在於看出了 $C(p,2^k-s)$ 的遞迴結構: 八個基本遞迴矩陣.

(二) 八個基本遞迴矩陣

在遞迴的過程中, 我們會用到八個基本矩陣, 我們將其定義在表格 1.

這八個遞迴矩陣是怎麼找出來的呢? 本篇僅針對 $k=p-1$ 時的情況做說明, 如有興趣的讀者請參考前作. 在之前的我們將 d 中心排列以 $d=2^k-s$ 做分類. 當 $k=p-1$, $1\le s\le 2^{p-2}=2^{k-1}$ 時, 其 d 中心排列矩陣為

$$\begin{aligned} N(C(p,2^k-s)) &= N\left(\begin{bmatrix} T_p(\max\{2^k-2d+1,1\},2^k-d) \\ T_p(\max\{2^k-2d+1,1\}+d,2^k) \\ T_p(\max\{2^k-2d+1,1\}+2d,2^k+d) \end{bmatrix}\right) && (22)\\ &= N\left(\begin{bmatrix} T_k(1,s) \\ T_k(2^k-s+1,2^k) \\ \overline{T_k}(2^k-2s+1,2^k-s) \end{bmatrix}\right) && (23)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ABB(k,s) &= \begin{bmatrix} T_k(s+1,2s) \\ \overline{T_k}(1,s) \\ \overline{T_k}(2^k-s+1,2^k) \end{bmatrix} & ABB'(k-1,s) &= \begin{bmatrix} T_{k-1}(2s+1,2^{k-1}) \\ \overline{T_{k-1}}(s+1,2^{k-1}-s) \\ \overline{T_{k-1}}(1,2^{k-1}-2s) \end{bmatrix} \\
AAB(k,s) &= \begin{bmatrix} T_k(s+1,2s) \\ T_k(1,s) \\ \overline{T_k}(2^k-s+1,2^k) \end{bmatrix} & AAB'(k-1,s) &= \begin{bmatrix} T_{k-1}(2s+1,2^{k-1}) \\ T_{k-1}(s+1,2^{k-1}-s) \\ \overline{T_{k-1}}(1,2^{k-1}-2s) \end{bmatrix} \\
AAA(k,s) &= \begin{bmatrix} T_k(s+1,2s) \\ T_k(1,s) \\ T_k(2^k-s+1,2^k) \end{bmatrix} & AAA'(k-1,s) &= \begin{bmatrix} T_{k-1}(2s+1,2^{k-1}) \\ T_{k-1}(s+1,2^{k-1}-s) \\ T_{k-1}(1,2^{k-1}-2s) \end{bmatrix} \\
ABA(k,s) &= \begin{bmatrix} T_k(s+1,2s) \\ \overline{T_k}(1,s) \\ T_k(2^k-s+1,2^k) \end{bmatrix} & ABA'(k-1,s) &= \begin{bmatrix} T_{k-1}(2s+1,2^{k-1}) \\ \overline{T_{k-1}}(s+1,2^{k-1}-s) \\ T_{k-1}(1,2^{k-1}-2s) \end{bmatrix} \\
ABB(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(ABB(k,s)) & ABB'(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(ABB'(k,s)) \\
AAB(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(AAB(k,s)) & AAB'(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(AAB'(k,s)) \\
AAA(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(AAA(k,s)) & AAA'(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(AAA'(k,s)) \\
ABA(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(ABA(k,s)) & ABA'(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(ABA'(k,s))
\end{aligned}
$$

表格 1: 八個基本遞迴矩陣及其全 1 或 0 的行數總和. 命名規則: 由上而下, 沒取補數的為 A, 有取補數的為 B, 加了 $'$ 指的是取的位置不同. 沒有 s 的表示已經將所有 s 中的全 1 或 0 的行數加總. (注意本篇為了改善符號邏輯, 將前作的 $\gamma, \theta, \phi, \delta$ 等符號用 ABB', AAB', AAA', ABA' 取代)

由定理十三及引理二十七我們得知

$$N\left(\left[\begin{array}{c} T_k(1,s) \\ T_k(2^k-s+1,2^k) \\ \overline{T_k}(2^k-2s+1,2^k-s) \end{array}\right]\right) = N\left(\left[\begin{array}{c} \overline{T_k}(2^k-s+1,2^k) \\ \overline{T_k}(1,s) \\ T_k(s+1,2s) \end{array}\right]\right) \tag{24}$$

$$= N\left(\left[\begin{array}{c} T_k(s+1,2s) \\ \overline{T_k}(1,s) \\ \overline{T_k}(2^k-s+1,2^k) \end{array}\right]\right) \tag{25}$$

在這裡我們定義

$$ABB(k,s) = \left[\begin{array}{c} T_k(s+1,2s) \\ \overline{T_k}(1,s) \\ \overline{T_k}(2^k-s+1,2^k) \end{array}\right].$$

也就是八個矩陣中的第一個. 而在加總所有 s 時, 當 $s<2^{k-2}$, 我們可以將 T_k 用 T_{k-1} 來替換, 但第三列因為 $s<2^{k-2}$, 可以用前半部 T_{k-1} 的 $\overline{T_{k-1}}$ 來表示, 代入後就得到了第二個遞迴矩陣

$$ABA(k-1,s) = \left[\begin{array}{c} T_{k-1}(s+1,2s) \\ \overline{T_{k-1}}(1,s) \\ T_{k-1}(2^{k-1}-s+1,2^{k-1}) \end{array}\right].$$

而 $s=2^{k-2}$ 時, 可以得到

$$ABB(k,2^{k-2}) = \left[\begin{array}{c} \overline{T_{k-2}} \\ \overline{T_{k-2}} \\ \overline{T_{k-2}} \end{array}\right] \Rightarrow N\left(ABB(k,2^{k-2})\right) = 2^{k-2}.$$

當 $2^{k-2}<s<2^{k-1}$ 時, 我們令 $s=2^{k-2}+s'$. 此時將 $ABB(k,s)$ 中的 T_k 用 T_{k-1} 可以拆解出 $ABA(k-1,s')$ 的部分, 以及剩餘的部分

$$ABB'(k-1,s') = \left[\begin{array}{c} T_{k-1}(2s'+1,2^{k-1}) \\ \overline{T_{k-1}}(s'+1,2^{k-1}-s') \\ \overline{T_{k-1}}(1,2^{k-1}-2s') \end{array}\right].$$

接下來, 我們將上述基本矩陣的 $ABB(k,s)$ 中全 1 或 0 的行數加起來, 以符號 $ABB(k)$ 來表示. 從之前的拆解, 我們可以得到 $ABB(k)$ 的遞迴式:

$$\begin{aligned} ABB(k) &= \sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(ABB(k,s)) \\ &= \sum_{s=1}^{2^{k-2}} N(ABB(k,s)) + N(ABB(k,2^{k-2})) + \sum_{s=1}^{2^{k-2}} N(ABB(k,2^{k-2}-s)) \\ &= \sum_{s=1}^{2^{k-2}} N(ABA(k-1,s)) + 2^{k-2} + \sum_{s=1}^{2^{k-2}} N(ABA(k-1,s)) + N(ABB'(k-1,s)) \\ &= 2ABA(k-1) + ABB'(k-1) + 2^{k-2} \end{aligned}$$

剩下的幾個遞迴矩陣會在不同的 k 時出現, 當 $k = p - 2k$, $k \in \mathbb{N}$. 我們要加總 d 中心矩陣的全 1 或 0 的行數就會得到:

$$\begin{aligned} N(C(p, 2^k - s)) &= N\left(\begin{bmatrix} T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\}, 2^k - d) \\ T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\} + d, 2^k) \\ T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\} + 2d, 2^k + d) \end{bmatrix}\right) && (26) \\ &= N\left(\begin{bmatrix} T_k(1, s) \\ T_k(2^k - s + 1, 2^k) \\ \overline{T_k}(2^k - 2s + 1, 2^k - s) \end{bmatrix}\right) && (27) \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(C(p, 2^k - s)) = AAA(k) + ABA'(k)$$

而在 $k = p - 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ 時, 我們會有

$$\begin{aligned} N(C(p, 2^k - s)) &= N\left(\begin{bmatrix} T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\}, 2^k - d) \\ T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\} + d, 2^k) \\ T_p(\max\{2^k - 2d + 1, 1\} + 2d, 2^k + d) \end{bmatrix}\right) && (28) \\ &= N\left(\begin{bmatrix} T_k(1, s) \\ T_k(2^k - s + 1, 2^k) \\ \overline{T_k}(2^k - 2s + 1, 2^k - s) \end{bmatrix}\right) && (29) \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^{2^{k-1}} N(C(p, 2^k - s)) = ABB(k) + AAA'(k)$$

因此, 要數出 3-AP 的個數就是算出這八個基本矩陣全 1 或 0 行數和. 經過整理過後, 我們得到了以下的公式:

定理 二十九 (八個基本矩陣全 1 或 0 行數和遞迴公式).

$$\begin{bmatrix} ABB(k) \\ AAB(k) \\ ABA(k) \\ AAA(k) \\ ABB'(k) \\ AAB'(k) \\ ABA'(k) \\ AAA'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ABB(k-1) \\ AAB(k-1) \\ ABA(k-1) \\ AAA(k-1) \\ ABB'(k-1) \\ AAB'(k-1) \\ ABA'(k-1) \\ AAA'(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^{k-2} \\ 2^{k-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

這個遞迴式在前作中以非常巧妙的方式, 配合 $k = 3$ 的答案 ($ABB(3) = 1$, $AAB(3) = 0$, $ABA(3) = 0$, $AAA(3) = 0$, $ABB'(3) = 1$, $AAB'(3) = 1$, $ABA'(3) = 0$, $AAA'(3) = 0$) 我們找到了這八個基本矩陣全 1 或 0 行數和的一般式:

定理 三十 (八個基本矩陣全 1 或 0 行數和).

$$\begin{aligned} ABB(k) &= 2 \cdot 4^{k-3} + 2^{k-3}, & AAB(k) &= 2 \cdot 4^{k-3} - 2^{k-3}, \\ ABA(k) &= 2 \cdot 4^{k-3} - 2^{k-3}, & AAA(k) &= 2 \cdot 4^{k-3} - 2^{k-3}, \\ ABB'(k) &= 4^{k-2}, & AAB'(k) &= 4^{k-2}, \\ ABA'(k) &= 4^{k-2} - 2^{k-2}, & AAA'(k) &= 4^{k-2} - 2^{k-2}. \end{aligned} \tag{31}$$

最後, 我們得到了

定理 三十一 (T_p 的第 III 類同色 3-AP 數目).

$$T_p\text{的第 III 類同色 3-AP 數目} = 4^{p-3} \tag{32}$$

從定理三十一可以推得

$$AP_3(T_p) = 2AP_3(T_{p-1}) + 2 \cdot 4^{p-3} \tag{33}$$

改寫上式為

$$(AP_3(T_p) - 4^{p-2}) = 2(AP_3(T_{p-1}) - 4^{p-3}).$$

將上式遞迴到 $p = 2$, 再算出 $AP_3(T_3) = 2$, 我們就可以得到

$$AP_3(T_p) - 4^{p-2} = -2^{p-2} \Rightarrow AP_3(T_p) = 4^{p-2} - 2^{p-2}.$$

因此, 我們證出了定理十九.

三 研究方法或過程

對於長度為 2^p 的 Thue-Morse 字串, 因具備遞迴結構 (也就是說 $T_p = T_{p-1}\overline{T_{p-1}}$), 所以具有完整的對稱性質. 我們已經在前面的章節交待清楚. 本章節重點將置於截斷 T_p 前方 2^q 位置的 $T_{p,q}$ 字串的 3-AP 總數以及一般化的 Thue-Morse 字串 $M_p(B)$ 遞迴公式運算.

(一) $T_{p,q}$ 字串的 3-AP 總數

字串 $T_{p,q}$, 是將完整長度 2^p 的 Thue-Morse 字串截掉長度 2^q 的 Thue-Morse 字串所形成的新字串. 這類型的字串中, 因為不具有字串結構的對稱性也不具有遞迴特性, 所以計算上需要更多的技巧和不同的分類方法去計算不同公差的同色 3-AP. 最主要的關鍵, 是要數出有哪些 3-AP, $(i, i+d, i+2d) \in AP_3(T_p)$, 它會有部分在前面的 2^q 位置. 所以, 我們先做 3-AP 做以下的分類:

(i) 第 (i) 類即三個位置都在前面 2^q 中, 也就是 $i + 2d \leq 2^q$, 此類會有 $AP_3(T_q) = 4^{q-2} - 2^{q-2}$ 個.

(ii) 第 (ii) 類及三個位置都在後面 $2^p - 2^q$ 中, 也就是我們要計算的 $AP_3(T_{p,q})$ 個.

(iii) 第 (iii) 類分兩種情況, 第一種是: 第一、第二個在 2^q 中, 第三個位置在 2^q 到 2^{q+1} 裡, 也就是 $i < i + d \leq 2^q$, $2^q < i + 2d \leq 2^{q+1}$. 這一類個數是字串 T_{q+1} 中的第 III 類. 第二種是: 第一個在 2^q 中, 第二、三個位置在 2^q 到 2^{q+1} 裡, 也就是 $i \leq 2^q$, $2^q \leq i + d < i + 2d \leq 2^{q+1}$. 這一類個數是字串 T_{q+1} 中的第 IV 類. 從定理三十一中可以求得這兩部分的總數為 $2 \cdot \cdot 4^{q+1-3} = 2 \cdot \cdot 4^{q-2}$

(iv) 第 (iv) 類是第一個在 2^q 中, 且第二、三個都在後面 $2^p - 2^{q+1}$ 中, 也就是 $i \leq 2^q$, $2^{q+1} < i + d < i + 2d \leq 2^p$. 注意到這一類的公差 d 會有 $2^q < d < 2^{p-1}$.

所以最關鍵的地方, 就是數出第 (iv) 類的 3-AP. 為了數出第 (iv) 類的 3-AP, 受到先前研究啟發, 我設計了 d-偏心排列, 是將原本以中心線作為矩陣分類的基準改以截線 (第 2^q 個字元和第 $2^q + 1$ 個字元中間的假想截線) 作為矩陣分類的基準, 改以 2^q 及 $2^q + 1$ 的中心做矩陣的基準.

(二) 第 (iv) 類同色 3-AP 個數

定義 三十二 (d-偏心排列). 針對 T_p 這個字串, 我們定義它的 d-偏心排列為

$$\hat{C}(p,q,d) = \begin{bmatrix} T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\}, 2^q) \\ T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\} + d, 2^q + d) \\ T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\} + 2d, 2^q + 2d) \end{bmatrix} \tag{34}$$

我們將公差分解為

$$d = k \cdot 2^q - s$$

其中 $1 \leq s \leq 2^q$, $1 \leq k \leq 2^{p-q-1}$. 依據 $s \leq 2^{q-1}$ 或 $s > 2^{q-1}$ 我們可將 d-偏心矩陣在 $d > 2^{q-1}$ 的情形進行分類. 注意到為了表示方便, 我們將各區間所有的 s 進行累加後再進行計數. 為了配合上述的公差分解來化簡 T_p, 我們把 T_p 每隔 2^q 拆開且用 T_q 來表示:

定義 三十三 (T_p 的 T_q 分解 T_q^k). 假設 $T_p = t_1 t_2 \cdots t_{2^p}$, 則我們定義 T_q^k 如下:

$$T_q^k = T_p((k-1)\cdot 2^q + 1, k \cdot 2^q) = \begin{cases} T_q & \text{如果} t_k = 1 \\ \overline{T_q} & \text{如果} t_k = 0 \end{cases}$$

用一般化的 Thue-Morse 字串來表示的話就是 $T_p = M_{p-q}(T_q)$.

我再將 d-偏心排列矩陣拆開如下:

Case1: $s \leq 2^{q-1}$, $k = 1$, $d = 2^q - s$. 在這一類裡, 由引理三十三我們會有 $T_p(2^q+1, 2^{q+1}) = \overline{T_q}$,$\overline{T_p}(2^q+1, 2^{q+1}) = T_q$ 因此, 它的 d 偏心排列可以化簡為

$$\begin{aligned}
\hat{C}(p,q,d) &= \begin{bmatrix} T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\}, 2^q) \\ T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\} + d, 2^q + d) \\ T_p(\max\{1, 2^q - d + 1\} + 2d, 2^q + 2d) \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} T_p(s+1, 2s) & T_p(2s+1, 2^q) \\ T_p(2^q+1, 2^q+s) & T_p(2^q+s+1, 2^q+d) \\ T_p(2^q+d+1, 2^q+d+s) & T_p(2^q+d+s+1, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} T_q(s+1, 2s) & T_q(2s+1, 2^q) \\ \overline{T_q}(1, s) & \overline{T_q}(s+1, d) \\ \overline{T_q}(d+1, d+s) & \overline{T_p}(2^{q+1}+1, 2^{q+1}+2^q-2s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} T_q(s+1, 2s) & T_q(2s+1, 2^q) \\ \overline{T_q}(1, s) & \overline{T_q}(s+1, 2^q - s) \\ \overline{T_q}(2^q-s+1, 2^q) & \overline{T_q}(1, 2^q - 2s) \end{array}\right] \\
&= ABB(q,s) + ABB'(q,s)
\end{aligned}$$

所以我們有

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{2^{q-1}} N(\tilde{C}(p,q,2^q - s)) &= \sum_{s=1}^{2^{q-1}} N(ABB(q,s)) + N(ABB'(q,s)) \\
&= ABB(q) + ABB'(q) \\
&= 6 \cdot 4^{q-3} + 2^{q-3}
\end{aligned} \tag{35}$$

Case2: $k>1$,$s\le 2^{q-1}$ 它的 d 偏心排列可以化簡為:

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c} T_p(1,2^q) \\ T_p(1+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
=&\left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\ T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
=&\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{R} \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{36}
$$

其中 $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$ 為:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ T_p(k\cdot 2^q-s+1,k\cdot 2^q) \\ T_p(k\cdot 2^{q+1}-2s+1,k\cdot 2^{q+1}-s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^k}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(s+1,2s) \end{array}\right] \\
\mathbf{M} &= \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_p(k\cdot 2^q+1,k\cdot 2^q+s) \\ T_p(k\cdot 2^{q+1}-s+1,k\cdot 2^{q+1}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(1,s) \end{array}\right] \\
\mathbf{R} &= \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_p(k\cdot 2^q+s+1,k\cdot 2^{q+1}-s) \\ T_p(k\cdot 2^{q+1}+1,k\cdot 2^{q+1}+2^q-2s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_q^{k+1}(s+1,2^q-s) \\ T_q^{k+1}(1,2^q-2s) \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{37}
$$

依據 q 的奇偶, Case2 可以分成以下幾 2 種情形:
若 q 為偶數,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^k}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(s+1,2s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ T_q^k(1,s) \\ T_q^{k+1}(s+1,2s) \end{array}\right] \\
\mathbf{M} &= \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(1,s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \end{array}\right] \\
\mathbf{R} &= \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_q^{k+1}(s+1,2^q-s) \\ T_q^{k+1}(1,2^q-2s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_q^{k+1}(s+1,2^q-s) \\ T_q^{k+1}(1,2^q-2s) \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{38}
$$

若 q 為奇數,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^k}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(s+1,2s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(1,s) \\ \overline{T_q^k}(1,s) \\ \overline{T_q^{k+1}}(s+1,2s) \end{array}\right] \\
\mathbf{M} &= \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \\ \overleftarrow{T_q^{k+1}}(1,s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(s+1,2s) \\ T_q^{k+1}(1,s) \\ \overline{T_q^{k+1}}(1,s) \end{array}\right] \\
\mathbf{R} &= \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_q^{k+1}(s+1,2^q-s) \\ T_q^{k+1}(1,2^q-2s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T_q(2s+1,2^q) \\ T_q^{k+1}(s+1,2^q-s) \\ T_q^{k+1}(1,2^q-2s) \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{39}
$$

由此依據 $t_k = 1$ 或 $t_k = 0$ 代入 **L**、**M**、**R** 即可推得 $k > 1, s \leq 2^{q-1}$ 所有矩陣的內容.
例如 q 是偶數時,$1 < k \leq 8$ 的矩陣如下:(最後已累加所有符合條件的 s)

- for $k = 2$

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\ T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= &\left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,s) & \overline{T_p}(1+s,2^q-s) \\ T_q(2^q-2s+1,2^q-s) & T_q(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,2^q-2s) \end{array}\right] \\
\to \quad & [ABA(q,s)|ABA(q,s)|ABB'(q,s)] \\
\to \quad & 2 \cdot ABA(q) + ABB'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 3$

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\ T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= &\left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,s) & T_p(1+s,2^q-s) \\ T_q(2^q-2s+1,2^q-s) & T_q(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s) \end{array}\right] \\
\to \quad & [ABA(q,s)|AAA(q,s)|AAA'(q,s)] \\
\to \quad & ABA(q) + AAA(q) + AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 4$

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\ T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= &\left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\ T_q(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,s) & \overline{T_p}(1+s,2^q-s) \\ \overline{T_q}(2^q-2s+1,2^q-s) & \overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,2^q-2s) \end{array}\right] \\
\to \quad & [ABB(q,s)|ABB(q,s)|ABB'(q,s)] \\
\to \quad & 2 \cdot ABB(q) + ABB'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 5$

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\ T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= &\left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,s) & T_p(1+s,2^q-s) \\ T_q(2^q-2s+1,2^q-s) & T_q(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s) \end{array}\right] \\
\to \quad & [ABA(q,s)|AAA(q,s)|AAA'(q,s)] \\
\to \quad & ABA(q) + AAA(q) + AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k=6$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c}
T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\
T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\
T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d)
\end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c}
T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\
T_q(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,s) & T_p(1+s,2^q-s) \\
\overline{T_q}(2^q-2s+1,2^q-s) & \overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s)
\end{array}\right] \\
\rightarrow & \; [ABB(q,s)|AAB(q,s)|AAA'(q,s)] \\
\rightarrow & \; ABB(q)+AAB(q)+AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k=7$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c}
T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\
T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\
T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d)
\end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c}
T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\
\overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,s) & T_p(1+s,2^q-s) \\
T_q(2^q-2s+1,2^q-s) & T_q(2^q-s+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s)
\end{array}\right] \\
\rightarrow & \; [ABB(q,s)|AAB(q,s)|AAA'(q,s)] \\
\rightarrow & \; ABB(q)+AAB(q)+AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k=8$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c}
T_p(1,s) & T_p(s+1,2s) & T_p(2s+1,2^q) \\
T_p(1+d,s+d) & T_p(1+s+d,2s+d) & T_p(1+2s+d,2^q+d) \\
T_p(1+2d,s+2d) & T_p(1+s+2d,2s+2d) & T_p(1+2s+2d,2^q+2d)
\end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c}
T_q(1,s) & T_q(s+1,2s) & T_q(2s+1,2^q) \\
\overline{T_q}(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,s) & \overline{T_p}(1+s,2^q-s) \\
T_q(2^q-2s+1,2^q-s) & T_q(2^q-s+1,2^q) & \overline{T_q}(1,2^q-2s)
\end{array}\right] \\
\rightarrow & \; [ABA(q,s)|ABA(q,s)|ABB'(q,s)] \\
\rightarrow & \; 2\cdot ABA(q)+ABB'(q)
\end{aligned}
$$

統整上述範例我們得到: 當 q 為偶數, $1<k\leq 8$ 時, $T_{p,q}$ 第 (iv) 類總數為

$$
\left\{\begin{array}{rlll}
2\cdot ABA(q)+ABB'(q) & \text{for} & k=2 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
ABA(q)+AAA(q)+AAA'(q) & \text{for} & k=3 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
2\cdot ABB(q)+ABB'(q) & \text{for} & k=4 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
ABA(q)+AAA(q)+AAA'(q) & \text{for} & k=5 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
ABB(q)+AAB(q)+AAA'(q) & \text{for} & k=6 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
2\cdot ABB(q)+ABB'(q) & \text{for} & k=7 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1} \\
2\cdot ABA(q)+ABB'(q) & \text{for} & k=8 & \text{and} \quad s\leq 2^{q-1}
\end{array}\right. \tag{40}
$$

Case3: $k > 1$, $2^{q-1} < s \leq 2^q$. 在這裡我們改寫 $s = (2^{q-1} + s')$, 以配合加總時要從 1 加到 2^{q-1}. 然後把它的 d 偏心排列拆開為:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c} T_p(1, 2^q) \\ T_p(1+d, 2^q+d) \\ T_p(1+2d, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1, s') & T_p(s'+1, 2s) & T_p(2s'+1, 2^q) \\ T_p(1+d, s'+d) & T_p(1+d+s', 2s'+d) & T_p(1+2's+d, 2^q+d) \\ T_p(1+2d, s'+2d) & T_p(1+2d+s', 2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\ \dot{\mathbf{L}} \mid \dot{\mathbf{M}} \mid \dot{\mathbf{R}}\ \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

以下我們給出 $1 < k \leq 8$ 時的答案:

- for $k = 2$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1, s') & T_p(s'+1, 2s') & T_p(2s'+1, 2^q) \\ T_p(1+d, s'+d) & T_p(1+s'+d, 2s'+d) & T_p(1+2s'+d, 2^q+d) \\ T_p(1+2d, s'+2d) & T_p(1+s'+2d, 2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1, s') & T_q(s'+1, 2s') & T_q(2s'+1, 2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s'+1, 2^q) & \overline{T_q}(1, s') & \overline{T_q}(1+s', 2^q-s') \\ \overline{T_q}(2^q-2s'+1, 2^q-s') & T_q(2^q-s'+1, 2^q) & T_q(1, 2^q-2s') \end{array}\right] \\
\to & \ [ABA(q, s')|ABA(q, s')|ABB'(q, s')] \\
\to & \ 2 \cdot ABA(q) + ABB'(q)
\end{aligned}$$

- for $k = 3$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1, s') & T_p(s'+1, 2s') & T_p(2s'+1, 2^q) \\ T_p(1+d, s'+d) & T_p(1+s'+d, 2s'+d) & T_p(1+2s'+d, 2^q+d) \\ T_p(1+2d, s'+2d) & T_p(1+s'+2d, 2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1, s') & T_q(s'+1, 2s') & T_q(2s'+1, 2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s'+1, 2^q) & \overline{T_q}(1, s') & T_q(1+s', 2^q-s') \\ \overline{T_q}(2^q-2s'+1, 2^q-s') & T_q(2^q-s'+1, 2^q) & T_q(1, 2^q-2s') \end{array}\right] \\
\to & \ [ABA(q, s')|AAA(q, s')|ABB'(q, s')] \\
\to & \ ABA(q) + AAA(q) + ABB'(q)
\end{aligned}$$

- for $k = 4$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1, s') & T_p(s'+1, 2s') & T_p(2s'+1, 2^q) \\ T_p(1+d, s'+d) & T_p(1+s'+d, 2s'+d) & T_p(1+2s'+d, 2^q+d) \\ T_p(1+2d, s'+2d) & T_p(1+s'+2d, 2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d, 2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1, s') & T_q(s'+1, 2s') & T_q(2s'+1, 2^q) \\ T_q(2^q-s'+1, 2^q) & T_q(1, s') & \overline{T_q}(1+s', 2^q-s') \\ T_q(2^q-2s'+1, 2^q-s') & \overline{T_q}(2^q-s'+1, 2^q) & \overline{T_q}(1, 2^q-2s') \end{array}\right] \\
\to & \ [AAA(q, s')|AAA(q, s')|AAA'(q, s')] \\
\to & \ 2 \cdot AAB(q) + AAA'(q)
\end{aligned}$$

- for $k = 5$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s') & T_p(s'+1,2s') & T_p(2s'+1,2^q) \\ T_p(1+d,s'+d) & T_p(1+s'+d,2s'+d) & T_p(1+2s'+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s'+2d) & T_p(1+s'+2d,2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s') & T_q(s'+1,2s') & T_q(2s'+1,2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s'+1,2^q) & \overline{T_q}(1,s') & T_q(1+s',2^q-s') \\ \overline{T_q}(2^q-2s'+1,2^q-s') & T-q(2^q-s'+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s') \end{array}\right] \\
\rightarrow & \ [ABA(q,s')|AAA(q,s')|ABB'(q,s')] \\
\rightarrow & \ ABA(q) + AAA(q) + ABB'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 6$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s') & T_p(s'+1,2s') & T_p(2s'+1,2^q) \\ T_p(1+d,s'+d) & T_p(1+s'+d,2s'+d) & T_p(1+2s'+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s'+2d) & T_p(1+s'+2d,2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s') & T_q(s'+1,2s') & T_q(2s'+1,2^q) \\ T_q(2^q-s'+1,2^q) & T_q(1,s') & T_q(1+s',2^q-s') \\ T_q(2^q-2s'+1,2^q-s') & \overline{T_q}(2^q-s'+1,2^q) & \overline{T_q}(1,2^q-2s') \end{array}\right] \\
\rightarrow & \ [ABB(q,s')|AAB(q,s')|AAA'(q,s')] \\
\rightarrow & \ ABB(q) + AAB(q) + AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 7$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s') & T_p(s'+1,2s') & T_p(2s'+1,2^q) \\ T_p(1+d,s'+d) & T_p(1+s'+d,2s'+d) & T_p(1+2s'+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s'+2d) & T_p(1+s'+2d,2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s') & T_q(s'+1,2s') & T_q(2s'+1,2^q) \\ T_q(2^q-s'+1,2^q) & T_q(1,s') & \overline{T_q}(1+s',2^q-s') \\ T_q(2^q-2s'+1,2^q-s') & \overline{T_q}(2^q-s'+1,2^q) & \overline{T_q}(1,2^q-2s') \end{array}\right] \\
\rightarrow & \ [AAB(q,s')|AAB(q,s')|AAA'(q,s')] \\
\rightarrow & \ 2 \cdot AAB(q) + AAA'(q)
\end{aligned}
$$

- for $k = 8$

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c|c} T_p(1,s') & T_p(s'+1,2s') & T_p(2s'+1,2^q) \\ T_p(1+d,s'+d) & T_p(1+s'+d,2s'+d) & T_p(1+2s'+d,2^q+d) \\ T_p(1+2d,s'+2d) & T_p(1+s'+2d,2s'+2d) & T_p(1+2s'+2d,2^q+2d) \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{c|c|c} T_q(1,s') & T_q(s'+1,2s') & T_q(2s'+1,2^q) \\ \overline{T_q}(2^q-s'+1,2^q) & \overline{T_q}(1,s') & \overline{T_q}(1+s',2^q-s') \\ \overline{T_q}(2^q-2s'+1,2^q-s') & T_q(2^q-s'+1,2^q) & T_q(1,2^q-2s') \end{array}\right] \\
\rightarrow & \ [ABA(q,s')|ABA(q,s')|ABB'(q,s')] \\
\rightarrow & \ 2 \cdot ABA(q) + ABB'(q)
\end{aligned}
$$

統整上述範例我們得到:

當 q 為偶數,$AP_3(T_{p,q})$ 在不同的 k 時, 第 iii 類的個數為

$$\begin{cases} 2\cdot ABA(q)+ABB'(q) & \text{for } k=2 \text{ and } s>2^{q-1} \\ ABA(q)+AAA(q)+ABB'(q) & \text{for } k=3 \text{ and } s>2^{q-1} \\ 2\cdot AAB(q)+AAA'(q) & \text{for } k=4 \text{ and } s>2^{q-1} \\ ABA(q)+AAA(q)+ABB'(q) & \text{for } k=5 \text{ and } s>2^{q-1} \\ ABB(q)+AAB(q)+AAA'(q) & \text{for } k=6 \text{ and } s>2^{q-1} \\ 2\cdot AAB(q)+AAA'(q) & \text{for } k=7 \text{ and } s>2^{q-1} \\ 2\cdot ABA(q)+ABB'(q) & \text{for } k=8 \text{ and } s>2^{q-1} \end{cases}$$

與前面的 $s\le 2^q$ 有些許不同.

由於將上述答案一一加總非常複雜. 在加總的過程中, 我想到了另一種找到答案的方法. 因為每次加總時, 都是加上之前的八個基本矩陣, 所以, 它的形式一定都是類似於 4^q 及 2^q 的組合. 而 k 需要加總到 2^{p-q-1}, 也就是上述組合會累加 2^{p-q-1} 這麼多次. 因此, 兩者相乘後, 最後的答案會有類似 2^p,2^{p+q},4^q,2^q 再乘上某些常數加起來的結果. 所以我們可以大膽地猜測以下的形式:

$$AP_3(T_{p,q})=4^{p-2}+c_12^{p-2}+c_22^{p+q-4}+c_34^{q-2}+c_42^{q-2}$$

接下來我們在表格 2中給出一些 p,q 較小時的答案:

$q=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p=3$	1	0	0							
$p=4$	9	7	4	2						
$p=5$	49	44	38	26	12					
$p=6$	225	215	200	174	124	56				
$p=7$	961	940	910	850	740	536	240			
$p=8$	3969	3927	3864	3742	3500	3048	2224	992		
$p=9$	16129	16044	15918	15666	15172	14200	12368	9056	4032	
$p=10$	65025	64855	64600	64094	63084	61096	57200	49824	36544	16256

表格 2: $3\le p\le 10$, $0\le q\le p-1$ 的所有 $AP_3(T_{p,q})$

當我們直著看時, 很容易可以看出 $q=0$ 時, $AP_3(T_{p,q})=(2^{p-2}-1)^2$. 的確滿足我們的猜測. 而且當 $q=p-1$ 時,$AP_3(T_{p,q})=AP_3(T_{p,p-1})=AP_3(T_{p-1})=4^{p-3}-2^{p-3}$.

接下來, 我們看同一個 p 時, q 改變的差異, 也就是 $AP_3(T_{p,q})-AP_3(T_{p,q+1})$:

一開始, 我在這個表格中看出了很重要的關鍵, 就是如果我分 p 是奇數或偶數, 那麼我可以看到兩條直線. 舉例來說, 我拿 $p=3,5,7,9$, $q=0,1$ 去畫, 我會得到 $(1,0)$, $(5,6)$, $(21,30)$, $(85,126)$ 的直線 $y=\frac{3x-3}{2}$. 如果我拿偶數的 p 那麼我們會得到 $(2,3)$, $(10,15)$, $(42,63)$ 及 $(170,225)$ 這四個點, 它們都在 $y=\frac{3x}{2}$ 上面. 而拿連續的兩個 q 值, 再依 p 的奇偶性分類, 我們就會得到

- $q=0,1$, p 是奇數: $y=\frac{3x-3}{2}$.
- $q=0,1$, p 是偶數: $y=\frac{3x}{2}$.
- $q=1,2$, p 是奇數: $y=2x$.
- $q=1,2$, p 是偶數: $y=2x-4$.
- $q=2,3$, p 是奇數: $y=2x-10$.

$q=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p=3$	1	0							
$p=4$	2	3	2						
$p=5$	5	6	12	14					
$p=6$	10	15	26	50	68				
$p=7$	21	30	60	110	204	296			
$p=8$	42	63	122	242	452	824	1232		
$p=9$	85	126	252	494	972	1832	3312	5024	
$p=10$	170	255	506	1010	1988	3896	7376	13280	20288

表格 3: $3 \leq p \leq 10$, $0 \leq q \leq p-2$ 時的 $AP_3(T_{p,q}) - AP_3(T_{p,q+1})$

- $q = 2, 3$, p 是偶數: $y = 2x - 2$.
- $q = 3, 4$, p 是奇數: $y = 2x - 32$.
- $q = 3, 4$, p 是偶數: $y = 2x - 16$.
- $q = 4, 5$, p 是奇數: $y = 2x - 112$.
- $q = 4, 5$, p 是偶數: $y = 2x - 80$.

因此, 我發現, 從 $q \geq 1$ 開始, q 加 1 時, 它都會在 $y = 2x - c$ 的直線上. 這裡我一個一個把它們算出來

- $q = 0$, $AP_3(T_{p,0}) = 4^{p-2} - 2^{p-1} + 1$
- $q = 1$, p 是偶數, $AP_3(T_{p,1}) = 4^{p-2} - \frac{8}{3}2^{p-2} + \frac{5}{3}$.
- $q = 1$, p 是奇數, $AP_3(T_{p,1}) = 4^{p-2} - \frac{8}{3}2^{p-2} + \frac{4}{3}$.
- $q = 2$, p 是偶數, $AP_3(T_{p,2}) = 4^{p-2} - \frac{11}{3}2^{p-2} + \frac{8}{3}$.
- $q = 2$, p 是奇數, $AP_3(T_{p,2}) = 4^{p-2} - \frac{11}{3}2^{p-2} + \frac{10}{3}$.
- $q = 3$, p 是偶數, $AP_3(T_{p,3}) = 4^{p-2} - \frac{17}{3}2^{p-2} + \frac{26}{3}$.
- $q = 3$, p 是奇數, $AP_3(T_{p,3}) = 4^{p-2} - \frac{17}{3}2^{p-2} + \frac{22}{3}$.
- $q = 4$, p 是偶數, $AP_3(T_{p,4}) = 4^{p-2} - \frac{29}{3}2^{p-2} + \frac{68}{3}$.
- $q = 4$, p 是奇數, $AP_3(T_{p,4}) = 4^{p-2} - \frac{29}{3}2^{p-2} + \frac{76}{3}$.
- $q = 5$, p 是偶數, $AP_3(T_{p,5}) = 4^{p-2} - \frac{53}{3}2^{p-2} + \frac{249}{3}$.
- $q = 5$, p 是奇數, $AP_3(T_{p,5}) = 4^{p-2} - \frac{53}{3}2^{p-2} + \frac{233}{3}$.

最後, 再透過我們的猜測,

$$AP_3(T_{p,q}) = 4^{p-2} + c_1 2^{p-2} + c_2 2^{p+q-4} + c_3 4^{q-2} + c_4 2^{q-2}$$

可以發現 $q = 2$, $c_1 + c_2 = -\frac{11}{3}$. $q = 3$, $c_1 + 2c_2 = -\frac{17}{3}$. 因此, 可以解得 $c_1 = -\frac{5}{3}$, $c_2 = -2$. 而且, 代入 $q = 4, 5$ 檢驗均正確. 神奇的連 $q = 1$ 也是正確的.

最後, 最後面的常數項, 就是由 $c_3 4^{q-2}$ 跟 $c_4 2^{q-2}$ 造出來的. 在這裡由於我們觀察到它會按照 p 的奇偶數不同, 而且也會按照 q 的奇偶數不同而有大小互換的情況. 而在 $q=1$ 時, 我們可以將最後一項的 $\frac{5}{3}, \frac{4}{3}$ 變成它的中心 $\frac{3}{2}$ 再加上它的差距的一半 $\frac{1}{6}$. 而 p 是偶數是是加上去的, p 是奇數是減掉的. 所以這個答案會是

$$\frac{3}{2} + \frac{(-1)^p}{6}$$

所以, 我猜測 c_3 跟 c_4 一定不是常數, 會帶有 $(-1)^{p+q}$ 的式子在. 所以, 我假設最後的常數項是經由

$$(c_3 + c_3'(-1)^{p+q})4^{q-2} + (c_4 + c_4'(-1)^{p+q})2^{q-2}$$

所算出來的. 我們把 $\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{26}{3}, \frac{22}{3}$ 的情況代入求解.

$$\begin{aligned} (c_3 + c_3') + (c4 + c4') &= \frac{8}{3} && (42)\\ (c_3 - c_3') + (c4 - c4') &= \frac{10}{3} && (43)\\ 4(c_3 - c_3') + 2(c4 - c4') &= \frac{26}{3} && (44)\\ 4(c_3 + c_3') + 2(c4 + c4') &= \frac{22}{3} && (45) \end{aligned}$$

最後可以解出 $c_3 = 1, c_3' = 0, c_4 = 2, c_4' = -\frac{1}{3}$.

因此, 我們最後可以整理出下面的式子

$$\begin{aligned} AP_3(T_{p,0}) &= 4^{p-2} - 2 \cdot 2^{p-2} + 1, && (46)\\ AP_3(T_{p,1}) &= 4^{p-2} - \frac{8}{3} \cdot 2^{p-2} + \frac{1}{6}(9 + (-1)^p), && (47)\\ AP_3(T_{p,q}) &= 4^{p-2} - \frac{3 \cdot 2^{q-1} + 5}{3} \cdot 2^{p-2} + 4^{q-2} + \frac{6 - (-1)^{p+q}}{3} 2^{q-2}, 2 \le q < p. && (48) \end{aligned}$$

到此我們證明了定理二十.

(三) 一般化 Thue-Morse 字串 $M_p(B)$ 的 3-AP 總數

對於長度比 1 長的字串 B, 可經由 Thue-Morse Sequence 的遞迴關係式建構長度為 $|B| \cdot 2^p$ 的字串. 形成如 $M = B\bar{B}\bar{B}B...$ 的字串 M. 這類型的字串符合 $M_p = M_{p-1}\overline{M_{p-1}}$ 的關係, 可以視為以 B 取代 1、$\bar{B}$ 取代 0 所形成的新字串. 比較基本的 T_p, 兩字串間除了因長度不同而有不同的同色 3-AP 的公差範圍,1、0 個數的比例也因不同的 m 而有所不同, 所以由 1 所組成的同色 3-AP 個數不與 0 組成的同色 3-AP 個數相同.

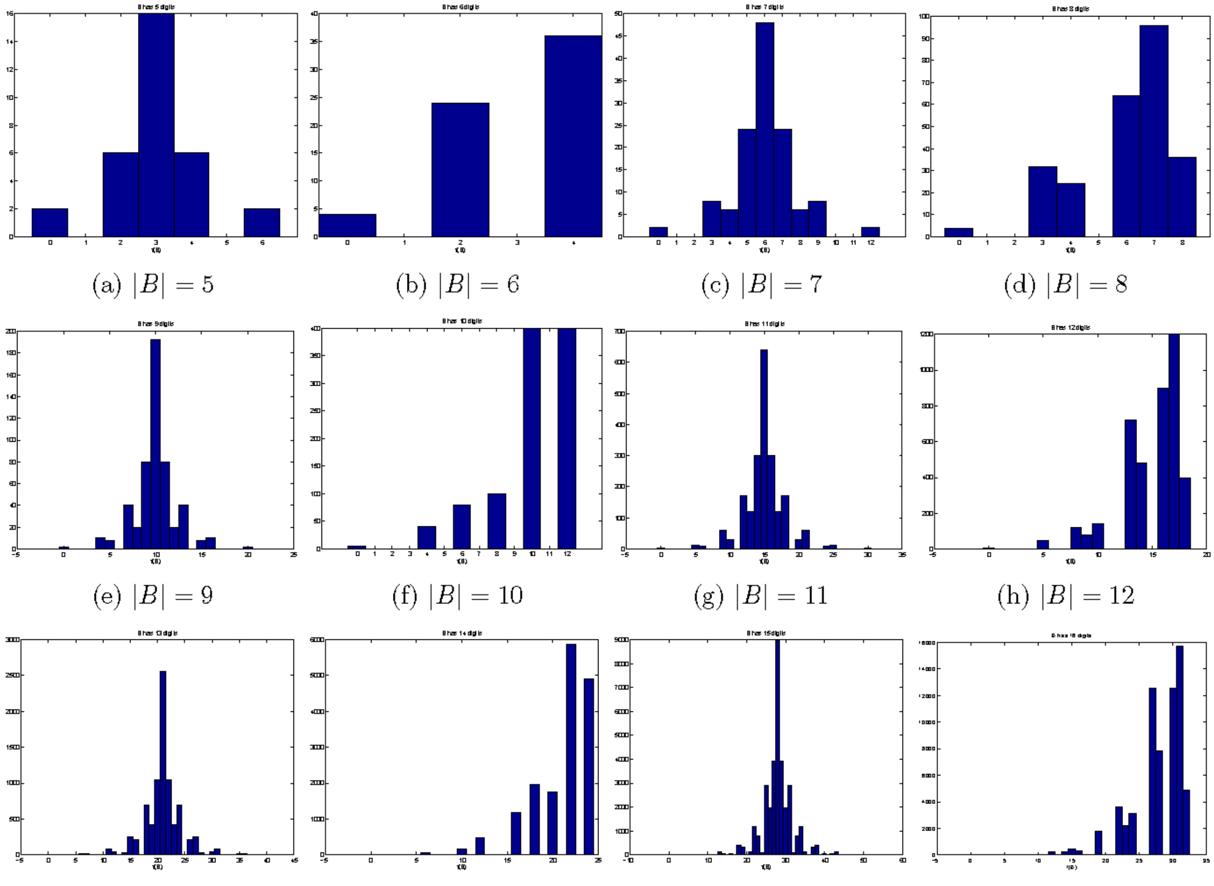
1 嘗試錯誤

由於總長為 $m \cdot 2^p$ 的字串中同色 3-AP 的公差範圍 $0 < d \le (m \cdot 2^{p-1} - 1)$, 其 $0 < d \le (m \cdot 2^3)$ 的同色 3-AP 在計算矩陣初始值就已經計算完成, 所以我們只要加總 $(m \cdot 2^3) < d \le (m \cdot 2^{p-1} - 1)$ 的同色 3-AP 個數即可藉由遞迴關係式累加出所有包含在長度 $m \cdot 2^p$ 字串內的同色 3-AP. 累加公差時, 我們結合先前 d-中心排列、d-偏心排列的技巧, 以 $m \cdot 2$ 的冪次為一單元, 將需計算的公差分為 $m \cdot 2^{p-1} \sim m \cdot 2^{p-2}$、$m \cdot 2^{p-3} \sim m \cdot 2^{p-4}$... 等單元. 透過 d-中心排列在跨越中心線的第 III 類、第 IV 類矩陣的計算之應用找出各單元內所包含的矩陣類別, 並且針對符合區間條件的 s 進行累加. 再應用 d-偏心排列對於公差 $k \cdot 2^p$ 計算的技巧累加每個單元內所有公差的矩陣中全 0/1 行個數, 針對符合區間條件的 k 進行累加,... 我們先討論簡單的情況

例子 1. *若 $B = 1101$ 我們為數 Thue-Morse 的方式遞迴成 $B_2 = 1101001000101101$, 其中第 III 類同色 3-AP 有 3 個, 而第 IV 類則有 5 個並不相同, 這代表先前 d-中心排列時使用到第 III 類同色 3-AP 個數 = 第 IV 類同色 3-AP 個數的情形已經不成立, 需要其他的方式去計數一般化字串中的同色 3-AP 個數.*

2 跨越字串中心線的同色 3-AP

根據之前的經驗, 我們想要算出 3-AP 總數, 需要算出第 III 類及第 IV 類跨越字串中心線的同色 3-AP. 但一直撞牆的點, 就是我一直試著要一般化 ABB,ABB' 等字串矩陣, 卻沒有注意到它最基本的性質在一般化的起始字串 B 時不成立, 也就是『第 III 類的 3-AP 總數不一定等於第 IV 類的 3-AP 總數』.



(a) $|B| = 5$ (b) $|B| = 6$ (c) $|B| = 7$ (d) $|B| = 8$

(e) $|B| = 9$ (f) $|B| = 10$ (g) $|B| = 11$ (h) $|B| = 12$

(i) $|B| = 13$ (j) $|B| = 14$ (k) $|B| = 15$ (l) $|B| = 16$

圖 1: 不同位數時 $f(B)$ 的累積次數圖

因此, 我們開始考慮以下的函數, 也就是一般化字串 B 時, 第 III 類與第 IV 類的 3-AP 總數

$$f(B) = AP_3(B|\bar{B}) = AP_3(B\bar{B}) - 2AP_3(B).$$

如果 B 是一個 n 位的雙字, 總共會有 2^n 種可能. 那我們會得到 $f(B)$ 的次數分配圖如圖 1: 很明顯, 當 B 是奇位的時候, 這個分佈是對稱的. 而 B 是偶位數時, 這個分佈大致從左至右漸增.

引理 三十四 ($f(B)$ 的最大值). *藉由觀察上述圖表, 我們歸納出 $f(B)$ 最大值的通式, 因為奇偶不同, 最大值也有些微的不同:*

- 若 $|B|$ 是奇數, 則 $f(B)$ 的最大值為 $\frac{1}{4}(|B|^2-1)$;
- 若 $|B|=4k+2, k\in\mathbb{N}$, 則 $f(B)$ 的最大值為 $\frac{|B|^2-4}{8}$;
- 若 $|B|=4k, k\in\mathbb{N}$, 則 $f(B)$ 的最大值為 $\frac{|B|^2}{8}$.

接下來我們觀察不同的 B 的 $f(B)$, 以下我舉 $|B|=4$ 為例:

- 若 $B=0011, 0110, 1001, 1100$ 時, 則 $f(B)=2$ 是 $AP_3(B|\bar{B})$ 中最大的.
- 若 $B=0000, 0101, 1010, 1111$ 時, $f(B)=0$. 全無跨區的 3-AP.
- 不是上述情況, $f(B)=1$.

若 $|B|=6$ 時, 當 $B=000000, 010101, 101010$, 及 111111 時, $f(B)$ 也是 0. 因此, 我們可以得到

引理 三十五. *$B=b_1b_2b_3\cdots b_{2n}$, 若 $b_k=b_{k+2}, \forall k$, 則 $f(B)=0$.*

這個證明非常容易, 我們在此先略去.

(四) 兩個便當定理

一直到某一天, 我吃便當時看到電腦上播放的影片片段: 『一個便當吃不飽, 那可以吃兩個啊! 』這啟發了我! 一個 $f(B)$ 算不出來, 那可以看看 $f(B\bar{B})$ 啊! (其中 B 那一盒是打開的便當, $\bar{B}$ 那一盒是還沒開的). 果然神人啊! 一個 B 可以產生那麼多的變化, 但在 $|B|$ 是偶數時, $f(B\bar{B})$ 居然只剩下一個數字 $\frac{1}{2}|B|^2$! 真是嚇死寶寶了! 讓我不禁寫下這段文字

定理 三十六 (兩個便當定理). *如果 B 是偶數位雙色字串, 那麼不管 B 是什麼樣的雙色字串, 我們都有*

$$
\begin{aligned}
& f(B\bar{B}) && (49)\\
= \;& AP_3(B\bar{B}|\bar{B}B) \\
= \;& AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)-2AP_3(B\bar{B}) && (50)\\
= \;& \frac{1}{2}|B|^2 && (51)
\end{aligned}
$$

這是我第一次發現, 原來沒有知識也要看電腦, 生活中處處都是數學啊! 為了原汁原味呈現當時找到這個定理時的快感, 我決定尊稱這個定理為兩個便當定理. 為了證出這個定理, 我找了好久好久,

$|B|=2$　若字串長度為 2, 由於互補性, B 只可能有 $B=11$ 或 $B=10$ 兩種情形. 兩個情況都一樣. $B\bar{B}|\bar{B}B=b_1b_2\bar{b}_1\bar{b}_2|\bar{b}_1\bar{b}_2b_1b_2$ 中間有可能的 3-AP 是:$(b_1,\bar{b_2},b_1)$、$(\bar{b_1},\bar{b_2},\bar{b_1})$、$(b_2,\bar{b_1},b_2)$、$(\bar{b_2},b_1,\bar{b_2})$. 若 $b_1=b_2$ 即 $B=11/00$, 則會有 $(\bar{b_1},\bar{b_2},\bar{b_1})$、$(\bar{b_2},b_1,\bar{b_2})$ 兩個 3-AP. 若 $b_1\neq b_2$ 即 $B=10/01$, 則會有 $(b_1,\bar{b_2},b_1)$、$(b_2,\bar{b_1},b_2)$ 兩個 3-AP

$|B|=4$ 若 $B=b_1b_2b_3b_4$,$M_2(B)=b_1b_2b_3b_4\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4b_1b_2b_3b_4$. 整理它第 III 類及第 IV 類同色 3-AP 時, 它有可能出現 3-AP 的是:

- b_1: $(b_1,\bar{b}_3,b_1)$, $(\bar{b}_1,\bar{b}_3,\bar{b}_1)$.
- b_1, b_3: $(b_1,\bar{b}_2,b_3)$,$(b_1,\bar{b}_4,\bar{b}_3)$, $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,b_3)$,$(\bar{b}_1,\bar{b}_4,\bar{b}_3)$.
- b_2: $(b_2,\bar{b}_4,b_2)$, $(\bar{b}_2,\bar{b}_4,\bar{b}_2)$.
- b_2, b_4: $(b_2,\bar{b}_1,b_4)$, $(\bar{b}_2,\bar{b}_1,\bar{b}_4)$, $(b_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)$, $(\bar{b}_2,\bar{b}_3,b_4)$.
- b_3:$(b_3,\bar{b}_1,b_3)$, $(\bar{b}_3,\bar{b}_1,\bar{b}_3)$.
- b_3, b_1:$(b_3,\bar{b}_2,\bar{b}_1)$, $(b_3,\bar{b}_4,b_1)$, $(\bar{b}_3,\bar{b}_4,\bar{b}_1)$, $(\bar{b}_3,\bar{b}_2,b_1)$.
- b_4:$(b_4\bar{b}_2b_4$,$\bar{b}_4\bar{b}_2\bar{b}_4$.
- b_4, b_2:$b_4\bar{b}_3\bar{b}_2$, $b_4\bar{b}_1b_2$, $\bar{b}_4\bar{b}_1\bar{b}_2$, $\bar{b}_4\bar{b}_3b_2$.

若 $b_1=b_3$ 則 $(\bar{b}_1\bar{b}_3\bar{b}_1)$、$(\bar{b}_3\bar{b}_1\bar{b}_3)$ 兩組必為同色 $3-AP$, 且 $(b_1,\bar{b}_4,b_3)$、$(b_3,\bar{b}_4,b_1)$ 當 $b_3\neq b_4$ 時為兩組同色 3-AP,$(\bar{b}_1,\bar{b}_4,\bar{b}_3)$、$(\bar{b}_3,\bar{b}_4,\bar{b}_1)$ 當 $b_3=b_4$ 時為兩組同色 3-AP. 若 $b_1\neq b_3$ 則 $(b_1\bar{b}_3b_1)$、$(b_3\bar{b}_1b_3)$ 兩組必為同色 $3-AP$, 且 $(b_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$、$(\bar{b}_3,\bar{b}_2,b_1)$ 當 $b_1\neq b_2$ 時為兩組同色 3-AP,$(\bar{b}_1,\bar{b}_2,b_3)$、$(b_3,\bar{b}_2,\bar{b}_1)$ 當 $b_1=b_2$ 時為兩組同色 3-AP. 若 $b_2=b_4$ 則 $(\bar{b}_2\bar{b}_4\bar{b}_2)$、$(\bar{b}_4\bar{b}_2\bar{b}_4)$ 兩組必為同色 $3-AP$, 且 $(b_2,\bar{b}_1,b_4)$、$(b_4,\bar{b}_1,b_2)$ 當 $b_1\neq b_2$ 時為兩組同色 3-AP,$(\bar{b}_2,\bar{b}_1,\bar{b}_4)$、$(\bar{b}_4,\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ 當 $b_1=b_2$ 時為兩組同色 3-AP. 若 $b_2\neq b_4$ 則 $b_2\bar{b}_4b_2)$、$(b_4\bar{b}_2b_4)$ 兩組必為同色 $3-AP$, 且 $(\bar{b}_2,\bar{b}_3,b_4)$、$(b_4,\bar{b}_3,\bar{b}_2)$ 當 $b_3\neq b_4$ 時為兩組同色 3-AP,$(b_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4)$、$(\bar{b}_4,\bar{b}_3,b_2)$ 當 $b_3=b_4$ 時為兩組同色 3-AP. 我發現要檢查 b_1 跟 b_3 有沒有相等, b_2 跟 b_4 有沒有相等. 但是後來的結果是不論它們相不相等, 答案都一樣是 8 個.

$|B|=6$ 令 $M_2(B)=b_1b_2b_3b_4b_5b_6\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4\bar{b}_5\bar{b}_6\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4\bar{b}_5\bar{b}_6b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ 觀察所有第 III 類與第 IV 類同色 3-AP 個數, 仿照上面的整理方式, 我發現需要以 b_1 跟 b_3,b_5 是否相同, 就可以有一個 3-AP. 其他還有 b_2 跟 b_4, b_6. 我把需要觀察的位置, 紀錄成下面的表格: 1 表示要看, 0 表示不需要檢查.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	1	0	1	0	1	0
b_2	0	1	0	1	0	1
b_3	1	0	1	0	1	0
b_4	0	1	0	1	0	1
b_5	1	0	1	0	1	0
b_6	0	1	0	1	0	1

太神奇了! 居然剛好就是 $\frac{1}{2}|B|^2$. 所以, 應該就是要檢驗這些位置就一定會有一個 3-AP.

受到 $|B|=6$ 的啟發, 接下來我們要證明定理三十六:

Proof. 考慮一般 $B=b_1b_2b_3\cdot b_{2n}$, 在尋找 $B\bar{B}\bar{B}B=c_1c_2\cdots c_{8n}$ 中第 III 類及第 IV 類的 3-AP 時. 我們會在前半選取一個字元 c_j 或 c_{2n+j}, $1\leq j\leq 2n$, 後半選取一個 c_{4n+k} 或 c_{6n+k}, $1\leq k\leq 2n$. 如果它有等差中項, 那麼 $\frac{j+k}{2}$ 必須是偶數. 我們接下來就在 $j+k$ 是偶數而且都小於 $2n$ 的情況, 將上述配對, 我們會找到

- 情況 1:

$$(c_j, c_{\frac{j+k}{2}+2n}, c_{4n+k}) = (b_j, \bar{b}_{\frac{j+k}{2}}, \bar{b}_k);$$

以及

$$(c_{2n+j}, c_{\frac{j+k}{2}+4n}, c_{6n+k}) = (\bar{b}_j, \bar{b}_{\frac{j+k}{2}}, b_k)$$

這告訴我們, $b_j \neq b_k$ 時, 上述兩個一定會有, 而且只有一個是 3-AP. 再來我們考慮

- 情況 2:

$$(c_{2n+j}, c_{\frac{j+k}{2}+3n}, c_{4n+k}) = (\bar{b_j}, c_{\frac{j+k}{2}+3n}, \bar{b_k});$$

以及

$$(c_j, c_{\frac{j+k}{2}+3n}, c_{6n+k}) = (b_j, c_{\frac{j+k}{2}+3n}, b_k);$$

這兩個也告訴我們, 當 $b_j = b_k$ 時, 上述兩個也一定會有, 而且只有一個是 3-AP.

因為 b_j 跟 b_k 只有相等或不相等, 所以上述兩種情況必有只有一個成立. 也就是最後一定會有一個 3-AP. 在 $1 \leq j \leq 2n$, $1 \leq k \leq 2n$, 而且 $j+k$ 是偶數就會有一個 3-AP. 所以, 總數是

$$\frac{1}{2}(2n)^2 = \frac{1}{2}|B|^2$$

□

如果 $M_{p-2}(B)$ 是一個偶數位的字串, 我們就會有:

$$\begin{aligned} & AP_3(M_p(B)) - 2AP_3(M_{p-1}(B)) \\ = \;& f(M_{p-1}(B)) \\ = \;& f(M_{p-2}(B)\overline{M_{p-2}(B)}) \\ = \;& \tfrac{1}{2}|M_{p-2}(B)|^2, \\ = \;& 2^{2p-5}|B|^2. \end{aligned} \tag{52}$$

不論起始字串 $|B|$ 是奇數還是偶數, 只要 $p \geq 3$, $|M_{p-2}(B)|$ 一定會是偶數, 將上式改寫為

$$AP_3(M_p(B)) - 2^{2p-4}|B|^2 = 2(AP_3(M_{p-1}(B)) - 2^{2p-6}|B|^2), p \geq 3 \tag{53}$$

透過上式遞迴到 $p = 3$, 再把當時的 $AP_3(M_2(B))$ 算出來, 我們就可以得到定理二十. 也就是對於任意 $p \geq 3$, 我們有

$$\begin{aligned} AP_3(M_p(B)) &= 4^{p-2}|B|^2 - (|B|^2 - |AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)|)2^{p-2} & (54) \\ &= \frac{1}{16}|M_p(B)|^2 - \frac{1}{4}\left(|B| - \frac{AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)}{|B|}\right)|M_p(B)| & (55) \end{aligned}$$

特別的, 如果 $|B|$ 一開始就是偶數, 那我們可以遞迴到 $p = 2$, 然以再去算 $AP_3(M_1(B)$, 就可以得到偶數版本的答案:

定理 三十七 (一般化的 Thue-Morse 中的 3-AP 個數之偶數版). *對於任意 $p \geq 2$, 且 $|B|$ 是偶數, 我們有*

$$\begin{aligned} AP_3(M_p(B)) &= 4^{p-2}|B|^2 - \left(\frac{1}{4}|B|^2 - |AP_3(B\bar{B})|\right)2^{p-1} & (56) \\ &= \frac{1}{16}|M_p(B)|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|B| - \frac{AP_3(B\bar{B})}{|B|}\right)|M_p(B)| & (57) \end{aligned}$$

(五) 一般化截斷 Thue-Morse 字串 $M_{p,q}(B)$ 中的 3-AP 總數

由於我們有之前處理 $T_{p,q}$ 的經驗, 我們可以用類似的方式推得下面一般化截斷 Thue-Morse 字串 $M_{p,q}(B)$ 中的 3-AP 個數, 接著我就要證明定理二十四.

$q=$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p=1$	1							
$p=2$	7	3						
$p=3$	41	27	14					
$p=4$	205	177	126	60				
$p=5$	917	855	746	540	248			
$p=6$	3877	3753	3510	3060	2232	1008		
$p=7$	15941	15687	15194	14220	12392	9072	4064	
$p=8$	64645	64137	63126	61140	57240	49872	36576	16320
$p=9$	260357	259335	257306	253260	245288	229680	200096	146880
$p=10$	1044997	1042953	1038870	1030740	1014552	982608	920160	801600

表格 4: $1 \leq p \leq 9$, $0 \leq q \leq 7$ 的 $AP_3(M_{p,q}(0001))$

$q=$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p=1$	0							
$p=2$	6	1						
$p=3$	38	25	10					
$p=4$	200	171	122	52				
$p=5$	906	845	734	532	232			
$p=6$	3856	3731	3490	3036	2216	976		
$p=7$	15898	15645	15150	14180	12344	9040	4000	
$p=8$	64560	64051	63042	61052	57160	49776	36512	16192
$p=9$	260186	259165	257134	253092	245112	229520	199904	146752
$p=10$	104456	1042611	1038530	1030396	1014216	982256	919840	801216

表格 5: $1 \leq p \leq 9$, $0 \leq q \leq 7$ 的 $AP_3(M_{p,q}(0010))$

Proof. 透過之前計算 $T_{p,q}$ 的經驗我們猜測,

$$AP_3(M_{p,q}(B)) = c_0 4^{p-2} + c_1 2^{p-2} + c_2 2^{p+q-4} + c_3 4^{q-2} + c_4 2^{q-2} + c_5 (-1)^{p+q} 2^{q-2}$$

由於遞迴之後 4^{p-2} 的係數無法被其他後面 2^p 或是 2^q 的累加所影響, 我們可以由二十三得知 4^{p-2} 的係數 c_0 應為 $|B|^2$. 取 (p,q) 為 $(3,2)$、$(4,2)$、$(5,2)$、$(5,3)$、$(7,4)$ 則 $B = 0001$ 時可以從表格 4中得出以下式子

$$\begin{aligned}
64 + 2c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 - c_5 &= 14 \\
256 + 4c_1 + 4c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 126 \\
1024 + 8c_1 + 8c_2 + c_3 + c_4 - c_5 &= 746 \\
1024 + 8c_1 + 16c_2 + 4c_3 + 2c_4 + 2c_5 &= 540 \\
16384 + 32c_1 + 128c_2 + 16c_3 + 4c_4 - 4c_5 &= 12392
\end{aligned}$$

求聯立方程組的解可以得到

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-6, -32, 16, 8, -2)$$

取 (p, q) 為 $(3, 2)$、$(4, 2)$、$(5, 2)$、$(5, 3)$、$(7, 4)$ 則 $B = 0010$ 時可以從表格 5得出以下式子

$$\begin{aligned}
64 + 2c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 - c_5 &= 10 \\
256 + 4c_1 + 4c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 122 \\
1024 + 8c_1 + 8c_2 + c_3 + c_4 - c_5 &= 734 \\
1024 + 8c_1 + 16c_2 + 4c_3 + 2c_4 + 2c_5 &= 532 \\
16384 + 32c_1 + 128c_2 + 16c_3 + 4c_4 - 4c_5 &= 12344
\end{aligned}$$

求聯立方程組的解可以得到

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{22}{3}, -32, 16, 8, -\frac{2}{3})$$

我們用類似的手法解出 $2 \leq q < p$ 在不同 $|B|$ 時的解, 得到

- $|B| = 2$

$$B = 00, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{10}{3}, -8, 4, 4, -\frac{2}{3}) \tag{58}$$

$$B = 01, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{10}{3}, -8, 4, 4, -\frac{2}{3}) \tag{59}$$

- $|B| = 3$

$$B = 000, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{13}{3}, -18, 9, 6, -\frac{5}{3}) \tag{60}$$

$$B = 001, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-5, -18, 9, 6, -1)$$

$$B = 010, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{17}{3}, -18, 9, 6, -\frac{1}{3}) \tag{61}$$

$$B = 011, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-5, -18, 9, 6, -1)$$

- $|B| = 4$

$$B = 0001, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-6, -32, 16, 8, -2) \tag{62}$$

$$B = 0010, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{22}{3}, -32, 16, 8, -\frac{2}{3}) \tag{63}$$

$$B = 0111, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-6, -32, 16, 8, -2) \tag{64}$$

$$B = 0100, (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-\frac{22}{3}, -32, 16, 8, -\frac{2}{3}) \tag{65}$$

由 $|B| = 2$、$|B| = 3$ 我們可以推測 $c_2 = -2|B|^2$、$c_3 = |B|^2$、$c_4 = 2|B|$ 代入 $|B| = 4$ 以及其他字串長度的情形發現都符合. 我們觀察 59、59以及更長的字串 c_1、c_5 與字串長度間的關係, 發現如 63、65以及 64、65, 他們在 $2 \leq q < p$ 時若 $AP_3(M_{3,2}(B))$ 相同, 則推得的 c_1、c_5 會相同. 所以我們假設 $c_1(B)$、$c_5(B)$ 是兩個與 $AP_3(M_{3,2}(B))$ 也就是 $AP_3(M_2(B))$ 相關的函數. 若我們將 $AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)$ 設為 x, $c_1(B)$ 令為 y, $c_5(B)$ 令為 z, 一樣依據字串長度 $|B|$ 分別討論

- $|B|=2$

$$B=00, x=2, y=-\frac{10}{3}, z=-\frac{2}{3}$$
$$B=01, x=2, y=-\frac{10}{3}, z=-\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}(x-12), z=\frac{1}{3}(-x)$$

- $|B|=3$

$$B=000, x=8, y=-\frac{13}{3}, z=-\frac{5}{3}$$
$$B=001, x=6, y=-5, z=-1$$
$$B=010, x=4, y=-\frac{17}{3}, z=-\frac{1}{3}$$
$$B=011, x=6, y=-5, z=-1$$

$$y=\frac{1}{3}(x-21), z=\frac{1}{3}(3-x)$$

- $|B|=4$

$$B=0001, x=14, y=-6, z=-1$$
$$B=0010, x=10, y=-\frac{22}{3}, z=-\frac{2}{3}$$
$$B=0101, x=8, y=-8, z=0$$
$$B=0011, x=12, y=-\frac{20}{3}, z=-\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}(x-32), z=\frac{1}{3}(8-x)$$

- $|B|=5$: 仿照上述做法可以得到

$$y=\frac{1}{3}(x-45), z=\frac{1}{3}(15-x)$$

- $|B|=6$: 仿照上述做法可以得到

$$y=\frac{1}{3}(x-60), z=\frac{1}{3}(24-x)$$

由以上幾個式子可以推得 y 和 z 的一般式, 首先, 我們發現 y 跟 z 都是 x 的線性函數. 而最後的常數項, 在 $|B|=2,3,4,5,6$ 時是 $-\frac{12}{3}, -\frac{21}{3}, -\frac{32}{3}, -\frac{45}{3}, -\frac{60}{3}$, 兩兩相減之後是等差數列, 所以我們可以推得 $y=\frac{1}{3}(x-|B|(|B|+4))$. 類似的方法我們可以找到 $z=\frac{1}{3}(|B|(|B|-2)-x)$ 也就是

$$c_1(B)=\frac{1}{3}(AP_3(B\bar{B}\bar{B}B)-|B|(|B|+4))$$

、

$$c_5(B)=\frac{1}{3}(|B|(|B|-2)-AP_3(B\bar{B}\bar{B}B))$$

我們也可以由此推得 14在 $2\leq q<p$ 時的 $3-AP$ 總數. $\square$

四　研究結果與討論

對於兩個便當定理的討論, 我試了許多不同形式的跨區 3-AP, 我發現在下面的情況時, 也有類似的現象.

定理 三十八 (四個便當定理).

$$AP_3(B\bar{B}B\bar{B}|B\bar{B}B\bar{B}) = \frac{1}{2}|B\bar{B}|^2 \tag{66}$$

為了以下討論方便, 我們對一長度為 $4n$ 的字串 $B = b_1b_2...b_{4n}$, 定義它的中間 $2n$ 的符號為 $[B] = B(2n+1, 3n)$.

接下來對於 $M_{p,q}(B)$ 我們會有以下的遞迴式:

引理 三十九 ($M_{p,q}(B)$ 的遞迴式).

$$\begin{aligned} M_{p,q}(B) &= M_{p-1,q}(B)\overline{M_{q-1}(B)}M_{q-1}(B)\overline{M_{p-1,q}(B)} \\ &= M_{p-1,q}(B)\overline{M_q(B)M_{p-1,q}(B)} \\ &= M_{p-1,q}(B)\overline{M_{q-1}(B)M_{p-1,q-1}(B)} \end{aligned} \tag{67}$$

從 $F(n,m,p,q)$ 的形式中, 我們可以得到

定理 四十 ($M_{p,q}$ 第一類型遞迴式).

$$AP_3(M_{p+1,q+1}(B)) - 2AP_3(M_{p,q}(B)) = \frac{1}{2}|M_{p-1,q-1}(B)|^2 \tag{68}$$

這個定理在 $q = p-1$ 時, 假設 $M_{p-1,q-1} = M_{p-1,p-2} = \overline{M_{p-2}} = K$, 那麼 $M_{p,q} = M_{p,p-1} = \overline{M_{p-1}} = K\bar{K}$,$M_{p+1,q+1} = M_{p+1,p} = \overline{M_p} = K\bar{K}\bar{K}K$, 所以可以直接套用兩個便當定理得證. 接下來我們要想辦法證明 $q < p-1$ 時的答案. 假設 $q = p-2$ 時, 假設 $\overline{M_{p-3}} = B$, 那麼我們會有

$$\begin{aligned} M_{p-1,p-3}(B) &= \bar{B}\bar{B}B, \\ M_{p,p-2}(B) &= \bar{B}B\bar{B}BB\bar{B}, \\ M_{p,p-1}(B) &= \bar{B}BB\bar{B}\bar{B}BB\bar{B}B\bar{B}\bar{B}B \end{aligned}$$

讓我們將 $M_{p,p-2}(B)$ 看成兩區 $\bar{B}B|\bar{B}BB\bar{B} = L|R$, 所以,$AP_3(M_{p,p-2}(B)) = AP_3(L) + AP_3(R) + AP_3(L|R)$, 則 $M_{p+1,p-1}(B) = RL\bar{L}\bar{R}$. 所以,$AP_3(M_{p+1,p-1}(B)) = AP_3(RL){+}AP_3(\bar{L}\bar{R}){+}AP_3(RL|\bar{L}\bar{R})$. 因為 $AP_3(\bar{L}\bar{R}) = AP_3(M_{p,p-2}(B))$ 所以

$$\begin{aligned} & AP_3(M_{p+1,p-1}(B)) - 2AP_3(M_{p,p-2}(B)) \\ = \;& AP_3(RL) + AP_3(RL|\bar{L}\bar{R}) - AP_3(L) - AP_3(R) - AP_3(L|R) \\ = \;& AP_3(R|L) - AP_3(L|R) + AP_3(RL|\bar{L}\bar{R}) \\ = \;& AP_3(\bar{B}BB\bar{B}|\bar{B}B) - AP_3(\bar{B}B|\bar{B}BB\bar{B}) + AP_3(RL|\bar{L}\bar{R}) \end{aligned}$$

在表格 6及表格 7中詳列了 $AP_3(R|L) = AP_3(\bar{B}BB\bar{B}|\bar{B}B)$、$AP_3(L|R) = AP_3(\bar{B}B|\bar{B}BB\bar{B})$ 及 $AP_3(RL|\bar{L}\bar{R}) = AP_3(\bar{B}BB\bar{B}\bar{B}B|B\bar{B}B\bar{B}\bar{B}B)$ 中的所有 3-AP 的形式. 透過整理可以發現總共有九個 $\frac{1}{2}|B|^2$. 所以

$$AP_3(M_{p+1,p-1}(B)) - 2AP_3(M_{p,p-2}(B)) = \frac{9}{2}|B|^2 = \frac{1}{2}|M_{p-1,p-3}(B)|^2$$

我們討論的問題便是在不論起始字串 $|B|$ 是奇數還是偶數, 只要 $p \geq 3$、$q \geq 2$, 將上式改寫為

$$AP_3(M_{p,q}(B)) - \frac{1}{2}\cdot(2^{p-2} - 2^{q-2})^2|B|^2 = 2(AP_3(M_{p-1,q-1}(B)), p \geq 3, q \geq 2. \tag{69}$$

$AP_3(\bar{B}BB\bar{B}\mid\bar{B}B)$		$AP_3(\bar{B}B\mid\bar{B}BB\bar{B})$	
(x)$\bar{B}B\bar{B}$	(+)$\bar{B}[B\bar{B}]B$	(x)$\bar{B}B\bar{B}$	(-)$\bar{B}[B\bar{B}]B$
(+)$B[B\bar{B}]\bar{B}$	(x)$B\bar{B}B$	(x)$\bar{B}\bar{B}B$	(-)$\bar{B}[\bar{B}B]\bar{B}$
(9)$B\bar{B}\bar{B}$	(+)$B[\bar{B}\bar{B}]B$	(-)$B\bar{B}$	(x)$B\bar{B}B$
(+)$\bar{B}\bar{B}$	(x) $\bar{B}\bar{B}B$	(-)$B[\bar{B}B]B$	(*)$BB\bar{B}$.

表格 6: $AP_3(\bar{B}BB\bar{B}|\bar{B}B)$ 及 $AP_3(\bar{B}B|\bar{B}BB\bar{B})$ 中所包含的 3-AP

(1)$\bar{B}\bar{B}B$	(1)$\bar{B}[\bar{B}\bar{B}]\bar{B}$	(2) $\bar{B}\bar{B}B$	(2) $\bar{B}[\bar{B}B]\bar{B}$	(3) $\bar{B}B\bar{B}$	(3)$\bar{B}[BB]B$
(1)$B[\bar{B}\bar{B}]B$	(1)$B\bar{B}\bar{B}$	(2)$B[\bar{B}B]B$	(*)$BB\bar{B}$	(3) $B[BB]\bar{B}$	(3) BBB
(9) $B\bar{B}B$	(4)$B[\bar{B}B]\bar{B}$	(4) BBB	(8) $B[BB]\bar{B}$	(5)$BB\bar{B}$	(5)$B[B\bar{B}]B$
(6)$\bar{B}[\bar{B}B]B$	(4)$\bar{B}B\bar{B}$	(8)$\bar{B}[BB]B$	(8)$\bar{B}B\bar{B}$	(5) $\bar{B}[B\bar{B}]\bar{B}$	(9)$\bar{B}\bar{B}B$
(5)$\bar{B}BB$	(7)$\bar{B}[BB]\bar{B}$	(7)$\bar{B}BB$	(6) $\bar{B}[B\bar{B}]\bar{B}$	(9)$\bar{B}\bar{B}\bar{B}$	(4)$\bar{B}[\bar{B}B]B$
(7)BB	(7)$BB\bar{B}$	(6)$B[B\bar{B}]B$	(2)$B\bar{B}\bar{B}$	(6)$B[\bar{B}B]\bar{B}$	(8)BBB

表格 7: $AP_3(\bar{B}BB\bar{B}\bar{B}B|B\bar{B}B\bar{B}\bar{B}B)$ 中所包含的 3-AP

五 結論

本作品『翻轉塗色驚嘆號』討論用兩個顏色, 並以 Thue-Morse 遞迴着色, 其中每次遞迴時的『三個位置間隔相同而且同色格子』(3-AP) 的精確總數. 我們在本作品中除了以精確的數學語言重新詮釋中之前的作品外, 尚有兩個重要的突破. 第一個是我們推廣到對於任意起始字串 B 所產生的 $M_p(B)$, 我都能計算它的 3-AP 總數為

$$
\begin{aligned}
AP_3(M_p(B)) &= 4^{p-2}|B|^2 - \left(\frac{1}{4}|B|^2 - |AP_3(B\bar{B})|\right) 2^{p-1} \\
&= \frac{1}{16}|M_p(B)|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|B| - \frac{AP_3(B\bar{B})}{|B|}\right)|M_p(B)|
\end{aligned}
$$

這個重要的突破點在於觀察到了不同的 B 遞迴時候的共同性, 也就是兩個便當定理：

$$
AP_3(B\bar{B}|\bar{B}B) = \frac{1}{2}|B|^2
$$

這令人驚嘆的是, 遞迴兩次之後, 其 3-AP 增加的數目與 B 的內容無關, 只與 $|B|$ 有關. 此為本作之重要定理. 第二個重要的突破是, 我精確地數出一般化的截斷 Thue-Morse 字串 $M_{p,q}(B)$ 中的 3-AP 總數, 這個總數可以透過以下列函數來表示

$$
\begin{aligned}
&F(n,m,p,q) \\
= \;& ((2^{p-2} - 2^{q-2})n)^2 + 2^{q-1}n + \frac{1}{3}\left((m - n(n+4)) \cdot 2^{p-2} + (n(n-2) - m) \cdot (-1)^{p+q} \cdot 2^{q-2}\right)
\end{aligned}
$$

- $2 \leq q < p$:
$$
AP_3(M_{p,q}(B)) = F(|B|, AP_3(B\bar{B}\bar{B}B), p, q).
$$

- $1 = q < p$:
$$
AP_3(M_{p,1}(B)) = F(|B|, AP_3(B\bar{B}\bar{B}B), p, q) - \frac{1}{2}\left(AP_3(B\bar{B}\bar{B}B) - 2 \cdot AP_3(B\bar{B}) - \frac{1}{2}|B|^2\right).
$$

- $0 = q < p$:

$$\begin{aligned}
& AP_3(M_{p,0}(B)) \\
= \ & 4^{p-2}|B|^2 + \frac{1}{6}(4a_3 - 4a_1 + 15|B|)2^{p-2} + \frac{1}{4}(5|B| + 4a_1 + 2a_2 - 2a_3) \\
& + \frac{1}{12}(3|B| - 4a_1 + 6a_2 - 2a_3)(-1)^p,
\end{aligned}$$

其中 $a_1 = AP_3(B)$, $a_2 = AP_3(BB\bar{B})$ 及 $a_3 = AP_3(BB\bar{B}B\bar{B}\bar{B}B)$.

這個重要的突破是以偏心排列找出基底, 並以未定係數法將其 3-AP 總數公式找到並歸納出一般化公式. 而令人驚嘆的地方在於

$$F(|B|, m, p+1, q+1) - 2F(|B|, m, p, q) = \frac{1}{2}((2^{p-1} - 2^{q-1})|B|)^2$$

又再度是一個與 B 的內容無關, 只與 $|B|$ 的長度有關的式子, 表示同時遞迴增加長度並同時刪去前方遞迴的字串, 其 3-AP 增加的數目也與 B 的內容無關, 只會與 $|B|$ 有關. 但是阿這個想法到目前為止, 我只能稍微做出一點點證明. 算是個小遺憾ㄛ. 再給一點點時間, 或許我們能把它做出來.

這一般化結果雖然使得原先利用八個矩陣以及各種公差的累加顯得過於繁複而且繞了遠路, 然而數學的學習歷程本來就是這樣的, 一開始努力往山上爬, 很辛苦地爬到了山上. 最後到了山上, 有了高度, 視野遼闊, 才赫然發現, 原來還有一條可以開車上山的路啊! 但有汗水的顛頗山路, 才是最精彩的!

参考文獻

[1] Tom C. Brown and Bruce M. Landman. Monochromatic arithmetic progressions with large differences. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 60:21–35, 1999.

[2] Steve Butler, Ron Graham, and Linyuan Lu. Finding patterns avoiding many monochromatic constellations. *Experimental Mathematics*, 19:399–411, 2010.

[3] Steve Butler, Ron Graham, and Linyuan Lu. Unrolling residues to avoid progression. *Mathematics Magazine*, 87:83–94, 2014.

[4] Bruce M. Landman and Aaron Robertson. Avoiding monochromatic sequences with special gaps. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(3):794–801, 2007.

[5] Linyuan Lu and Xing Peng. Monochromatic 4-term arithmetic progressions in 2-colorings of zn. *J. Combin. Theory Ser.A*, 119(5):1048–1065, 2012.

[6] Aaron Robertson. A probabilistic threshold for monochromatic arithmetic progressions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 137:79 – 87, 2016.

[7] 莊沅蓉與林詩琪. 翻轉塗色. *臺灣國際科展*, 2016.

【評語】010005

本作品主要是研究經由 Thue-Morse 數列建構的(1,0)一字串中三個格相同而且同為 0 或 1 的總數。主要的工具是遞迴關係，從任意洽定的字串 B 進而求得 $M_{p,q}(B)$中 3-AP 總數公式,由於這個公式和 B 的形式無關,只和 B 中自述相關,結果相當優秀。

(0,1)一字串中是否存在比較多個(23)等距的 0(或 1)，是一個值得繼續研究的問題，提供參卓。