

2016 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160001

參展科別 物理與天文學

作品名稱 正多面體之皂膜最小表面能之探討

得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 臺北市私立泰北高級中學

指導教師 藍邦偉、王建彬

作者姓名 周昕諭

關鍵字 皂膜痕跡、浦拉托問題、正多面體

作者簡介



我是周昕諭，我們家有四個人，家庭成員分別有父親、母親、哥哥和我。自小我就生活在一個幸福和諧的環境中。父母親從小就培養我獨立自主，並且常常督促我一些待人處事的道理，寬嚴並濟的教育下對我很大的影響，也造就了現在的我。

哥哥對我而言也是非常重要的人，從小到大有了他的陪伴讓我度過歡樂的童年，雖然時常有爭執，但是也因為這樣，我們的感情更加要好。在遇到困難時，我們也會互相幫忙解決。

從小我對科學及實驗有濃厚的興趣，在我的作品中剛好需要大量的實驗，而且也運用了我最喜歡的高積木，這讓我每次在操作實驗時都樂在其中。我很榮幸能參加這次的國際科展，藉由我喜歡的這些興趣去開拓視野。

My name is Sandy Chou. There are 4 people in my family, including my father, my mother, my brother and me. I am lucky to live in harmony with my family. My parents always cultivate me to be independent and teach me how to get along with people. It is such education that has had a significant influence on me.

Besides my parents, my elder brother is also important for me. Because of his instructions, I learned never to give up and be eager to solve the problems when confronting difficulties.

Since I was young, I have taken a great interest in science and experiments. In my project, I conducted the experiments and used my favorite LEGO to complete this rewarding task. And I am proud of taking part in Taiwan International Science Fair. It is such a delight to broaden my horizons by doing what I like!

I am confident that I would be the asset to your team and would like to explore the possibility further.

摘要

本研究旨在探討肥皂泡膜在正立方體所產生之皂膜形狀，以物理表面張力及數學最小曲面來作分析。在皂膜實驗中，我們分別控制模型大小、溫度、皂液濃度及傾角來觀察皂膜形狀的形成時間及現象。在數學論證當中，我們利用數學軟體 Geogebra 5.0 幫助我們進行皂膜最小表面積的計算及模擬。最後提出現象解釋及應用。

本研究創新之處在於以數學動態軟體模擬並解析物理實驗，以更精準地計算進行皂膜形成的力圖分析。並解釋先前數學理論研究[3]與物理實驗及現象之間的差異。此外，我們亦將進一步改進實驗技巧，以利實驗與理論的對照與分析。

Abstract

In this project, we propose to study the shape of the soap film created by dipping a cubic wireframe into soapy water then lifting it up, both experimentally and theoretically. In the soap film experiment, we record the duration of film formation and vary several pertinent factors such as the temperature and density of the soapy water, and the tilting angle of the wireframe. The experiment data are analyzed using GeoGebra 5.0, a free math package, and then compared and validated with the theory of minimal surfaces. We also stress on the possible difference between observations and theory.

One merit of our approach is that our analysis can be made more precise and the analysis rendered easier from the use of GeoGebra. Furthermore, differences between observations and theoretical analysis also point out experimental subtleties previously not realized. Improvements on the experiments and more advanced theoretical analysis are underway.

壹、前言

一、研究動機

本研究初期乃進行皂膜在空間的形狀之探討，及其在銅線模型上成形的各種現象。並透過物理上對於力平衡與最小能量的分析，及利用數學所繪出的最小面積模型，得到一個穩定的立體結構。之所以進行此研究主題乃由於對肥皂泡膜的多樣性變化感到興趣，進而著手研究。本研究首先參考了幾篇論文及以前的科展做為文獻參考資料。當中我發現一個有趣的問題。因為有許多研究表示，利用泡膜在空間立體模型上成像，好像以數學和物理的角度解釋都不同[1]、[3-5]。綜合物理上對於力平衡與最小能量的探討，本研究利用數學軟體 GeoGebra 所繪出的皂膜模型來對皂膜形狀進行分析。我們發現到一個最穩定、最平衡的立體結構[8]。

在數學上定義的『史坦納樹』是指在 n 邊形中加入若干個點，使這些點到各頂點的路徑形成一個樹狀結構，並且有著最小的距離和，而這些點就稱為史坦納點[3][6][9]。

有許多物理實驗的研究顯示，在非常特殊的條件下，利用肥皂泡膜在立體模型上成形的穩定現象，可用來來觀察史坦納樹的數學模型[1-5]。但上述文獻絕大多數皆以物理的現象去解釋並未提出有力的數學論證[4][5]。然就以數學相關文獻來說，儘管有文獻中已提及許多史坦納樹的幾何性質，但也僅限於平面，鮮少有文獻提到空間中史坦納樹及其分析。

由於皂膜有使面積縮到最小的特性，因此，在三度空間中利用物理實驗形成的肥皂泡膜痕跡一般和史坦納樹是沒有關係的。倘若不是，那麼肥皂泡膜形狀是什麼樣的圖形？除此之外，皂膜形狀的形成現象與變換與皂液濃度、溫度及拉出肥皂液時的傾角之關聯性又是如何？

因此本研究決定利用自製模型及實用數學軟體，找出正立方體中形成的皂膜形狀，並利用理論分析來解釋實驗現象。在我們的初期實驗中，已經發現一些原來沒有預期到的現象。在此計畫中，我們打算進一步深入研究。

二、研究目的

基於以上研究動機，本研究的目的主要利用肥皂泡膜實驗來分析皂膜痕跡的形成現象與皂液濃度、溫度及傾角之關聯性，然後搭配理論分析去全市一些觀測到的實驗現象。

(一) 研究問題

1. 利用物理實驗形成的肥皂泡膜研究它是什麼樣的圖形？
2. 皂膜痕跡的形成現象與變換與皂液濃度、溫度及傾角之關聯性。
3. 肥皂泡膜在立體模型中能量的穩定性。

(二) 實驗分析

1. 找尋正立方體銅線模型的皂膜痕跡與最小曲面的關係。
2. 觀察溫度、濃度對皂膜痕跡的影響。
3. 利用數學工具模擬、觀察和推測。

三、研究工具及流程

(一) 實驗設備及器材

- (1) 以銅線、焊錫、烙鐵製作而成的正四面體、正立方體、正八面體、長方柱體之模型，如圖 1 所示。
- (2) 紙、筆、黑板、量角器、棉線、筆記型電腦、幾何軟體 GeoGebra。洗手乳、水、甘油、燒杯、量筒、溫度計、玻璃棒、透明水箱、冰塊、加溫棒、水彩筆、食鹽。
- (3) 高速攝影機(觀察皂膜)



圖 1：本研究自製多面體模型

(二) 研究流程

以下是本研究實驗的流程與分析方法

正四面體, 正立方體, 正八面體
研究傾角 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$
改變溶液成份比例 洗手乳 : 水 : 甘油
為 $1 : 6 : 0$ 或 $1 : 6 : 1$

正立方體 固定傾角 (垂直)
升高溫度 $15^\circ\text{C}, 25^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}$

改變模型大小
 10cm 與 20cm 正立方體

降低溫度 $0^\circ\text{C}, -3^\circ\text{C}$
模型直徑 1.5mm 與 0.4mm

由中央正方形邊長計算
1個正方形, 4個三角形
與8個梯形的面積和

考慮中央正方形為達
力平衡所產生的弧線
以二次近似計算曲率

測量並計算中央正方形所在平面
與相鄰兩梯形所在平面的夾角

貳、研究方法

一、前期實驗

起初我的實驗設計是考慮從正立方體開始做。實驗設計如下：

1. 使用量角器測量角度後以棉線固定各角度，有 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75° 、 90°
2. 控制水溫分別為 15°C 、 25°C 及 35°C
3. 控制洗手乳與水的比例為 1：6。我們配製 2000ml 的水與 333ml 洗手乳成肥皂水。
4. 使用直徑為 0.4 mm，邊長 10 公分(小)與 20 公分(大)的正立方體模型。
5. 將模型浸入肥皂水，沿著傾角拉出水面。
6. 紀錄皂膜穩定時的溫度及觀察皂膜痕跡。

我們不確定拉起時的角度是否會影響泡膜，我們將正立方體拉出水面時，正立方體對稱軸的高會與水平面有一個夾角，我們稱這個夾角為傾角，我們希望觀察出此傾角與皂膜痕跡現象之關係，此時溶液溫度為攝氏 15 度，因此實驗步驟如下圖 2 至圖 4：



圖 2 正立方體傾角 30°



圖 3 正立方體傾角 45°



圖 4 正立方體傾角 60°



圖 5 正立方體傾角 75°

我們重複實驗，發現相同傾角可能作出大小不一的正方形。接著我們開始用加熱棒開始

加熱至攝氏 25 度，重複上述實驗，發現皂膜形成結果與攝氏 15 度時結果相同。最後再加熱至攝氏 35 度，重複上述實驗，發現皂膜形成結果與之前結果也相同。所以我們認為溫度對皂膜也沒有影響。

在不確定張力是否會影響，所以做了邊長為 10 公分與邊長為 20 公分的銅線模型。而以鉛直與 45° 兩種角度抽離皂膜，重複實驗 10 次，發現所得皂膜痕跡類似，也是中間一個正方形，4 個三角形與 8 個梯形；也就是說模型大小也與皂膜痕跡無關。但我們好奇的是為什麼中央正方形有時大，有時小？皂膜觀察到的結果如照片(下圖)所示。最後我們借了學校的攝影棚進行實驗拍攝，希望看得更清楚。如圖 6 至圖 9。

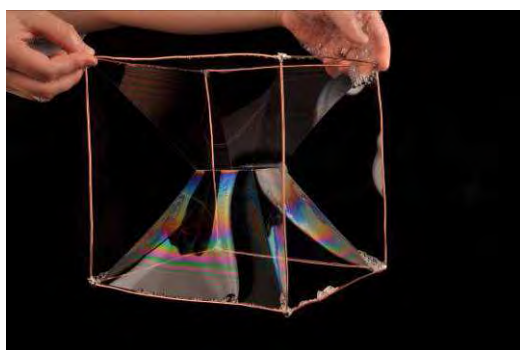


圖 6 大正立方體模型皂膜成像



圖 7 大、小正立方體模型的比例

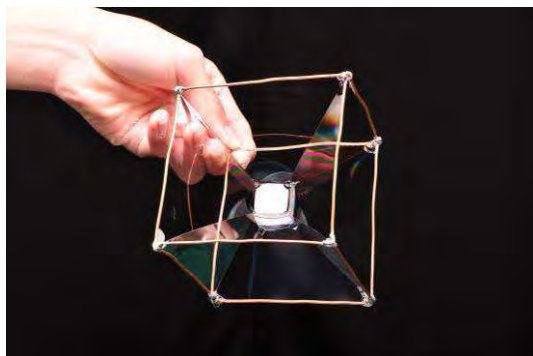


圖 8 小正立方體模型皂膜成像 I



圖 9 小正立方體模型皂膜成像 II

在前期的實驗我們控制了以下的變因：

- (1)改變不同的傾角 (15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°)
- (2)升高溫度 (15°C, 25°C, 35°C)
- (3)模型大、小正立方體 (正立方體邊長 10cm, 20cm)

發現似乎對於所形成的皂模均無影響，因為每一次的實驗都可能造成大小不一的中央正方形。

二、實驗過程

接著我們考慮是否溫度會影響皂膜痕跡。一開始從 15°C 開始做正四面體、正立方體與正八面體，然後用加溫棒提高溫度至 25°C 與 35°C ，觀察皂膜痕跡，如圖 10 至圖 12。



圖 10 正四面體皂模成像



圖 11 正八面體皂模成像



圖 12 正立方體皂模成像

研究發現溫度越高皂膜振盪時振幅越大，應該是能量越不穩定。所以反過來我們考慮降低溫度。因為相同模型、相同溫度、相同傾角做出的皂膜痕跡差異很大，所以本研究先考慮討論正立方體情形。表 1 與圖 12 及圖 13 是我們將冰塊與食鹽混合時降低溫度的變化記錄情形。

表 1：冰塊與食鹽混合降低溫度的記錄情形

時間	溫度	時間	溫度
14:27	18°C	14:52	5°C
14:30	16°C	14:54	4°C
14:31	15°C	14:59	3°C
14:33	14°C	15:02	2°C
14:34	13°C	15:05	2°C
14:38	12°C	15:08	1°C
14:40	11°C	15:18	0°C
14:44	10°C	15:23	-1°C
14:46	9°C	15:33	-1°C
14:48	7°C	15:39	-2°C
14:50	6°C	16:14	-3°C

下圖是我們為了降低溫度的實驗裝置。



圖 12 冰塊與食鹽混合降低溫度的記錄情形

我們記錄了多次直徑 0.4mm 與 1.5mm 模型的皂膜情形，皂膜的振盪幅度較小，但是相同變因下，中央正方形還是做出了不同大小。



圖 13:冰塊與食鹽混合降低溫度時產生的泡沫情形

三、正立方體形成皂膜的結構分析

研究發現在正立方體中，在以下幾個變因中：傾角、溫度、溶液成份比例、模型大小、模型直徑，我們分別改變其中一個，都會得到大小不同的中央正方形。我們曾經懷疑實驗是否失敗了?為何中央正方形以肉眼看都看得出來有時大有時小?我也重複了很多次實驗，所以我很好奇為什麼會有這種情形。所以在後續的實驗中，本研究鎖定了正立方體來研究。

因此我先測量中央正方形邊長。仿此陸續算出每一個正方形、四個三角形與八個梯形的面積和。所以本研究設計以下方法：並重複操作求出每次實驗的照片。

(一) 求出中央正方形邊長

正方形是泡膜形成，所以不易測邊長，本研究利用照片與數學軟體模擬直接進行計算。

研究設計方法如下：

1. 把照片放到數學軟體中，固定照片下方兩端點在 A,B 兩點上，如圖 14。

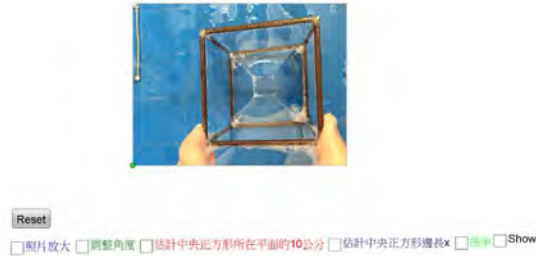


圖 14 測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 1

2. 拉動滑竿 r 放大照片以利觀察，如下圖 15。



圖 15:測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 2

3. 調整角度，使得皂膜正方形的邊確定在一水平線上，如圖 16。

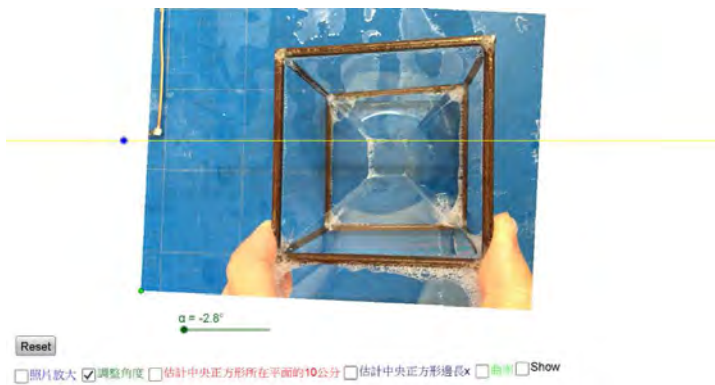


圖 16:測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 3

4. 定位單位正方形面積，我們把正立方體的八個頂點標出，如圖中黃點，再取中點，即紅點，因為模型製作上可能有誤差，我們取黃色四點構成的四邊形應該是正方形，但我們取這四邊的平均數為當作中央正方形所在平面的邊長 10；如圖 17。

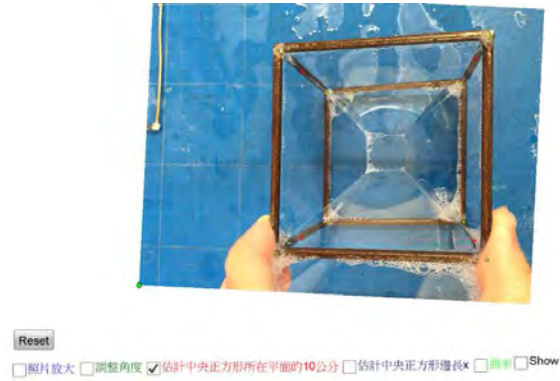


圖 17:測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 4

5. 控制中央綠色正方形左下角的頂點，使其與照片中的正方形左下角重合，在拉動滑竿 h ，使得綠色正方形與中央正方形重合，如下圖 18 左。

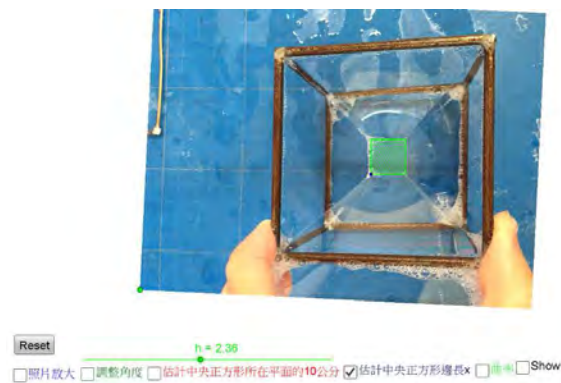


圖 18:測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 5

6. 我們可以算出綠色正方形與第(4)步決定的邊長比，如圖 19 左，經過計算，這張正方形的中央正方形邊長近似 0.80 公分。

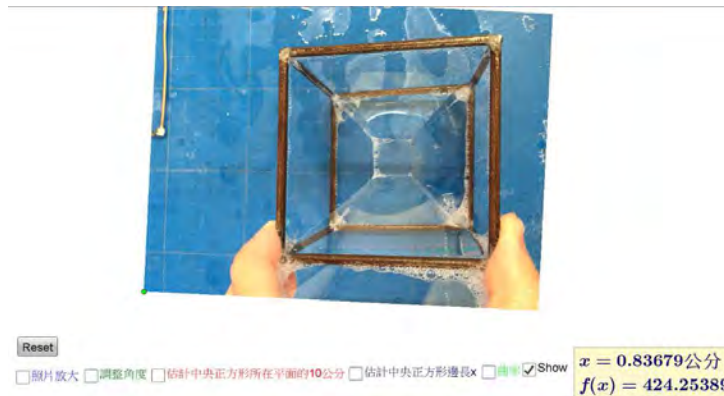


圖 19:測量正立方體的中央正方形邊長實驗操作 6

(二) 計算中央正方形面積

在以下的研究中，我們考慮單位正立方體，也就是它的邊長為 1，而且中央正方形的邊長為 x ，我們可以算出一個中央正方形，四個三角形與八個梯形的面積和為 $f(x) = x^2 + 2(x+1)\sqrt{1+(1-x)^2} + \sqrt{2}(1-x)$ ，所以我們設計了軟體模擬，改變 x 的值，來觀察面積和，因為當面積為最小時，能量會最穩定，所以我們想先求出 x 的最小值。當然如果換算成邊長為 10 公分的模型時，中央正方形的邊長為 $10x$ 公分，面積和為 $100f(x)$ 。

1. 當 $x=0$ 時， $f(x)=4.24$ ，如圖 20。

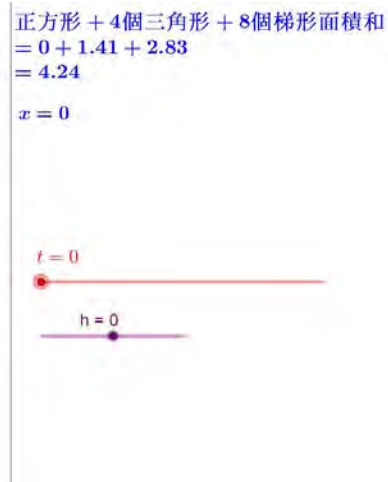
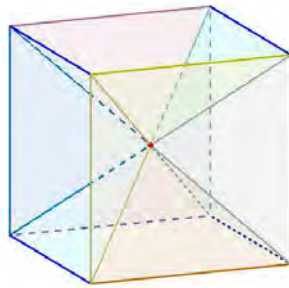


圖 20:

2. 當 $x=0.19$ 時， $f(x)=4.24$ ，如圖 21。

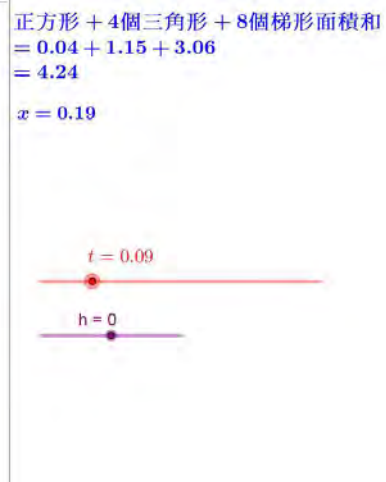
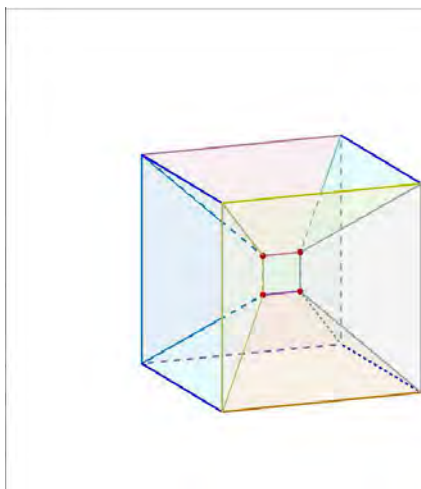


圖 21:

3. 我們發現從 $x=0$ 到 $x=0.19$ ，面積既然都沒改變，所以我們考慮增加有效數字，當有效數字增加到小數點後四位時，其實函數值都沒改變。所以我們增加有效數字到小數點後第五位時，我們模擬後發現，前述當 $x=0$ 時， $f(0)=4.24264$ ，當 $x=0.19$ 時， $f(0.19)=4.24442$ 。而當 $x=0.0644$ 到 $x=0.08076$ 時， $f(x)$ 有相對極小值 4.24253。如圖 22 至 23。

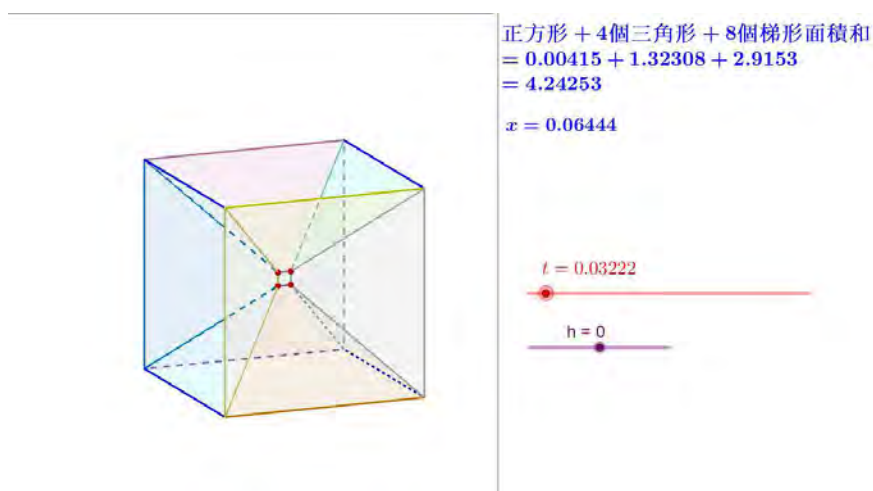


圖 22:

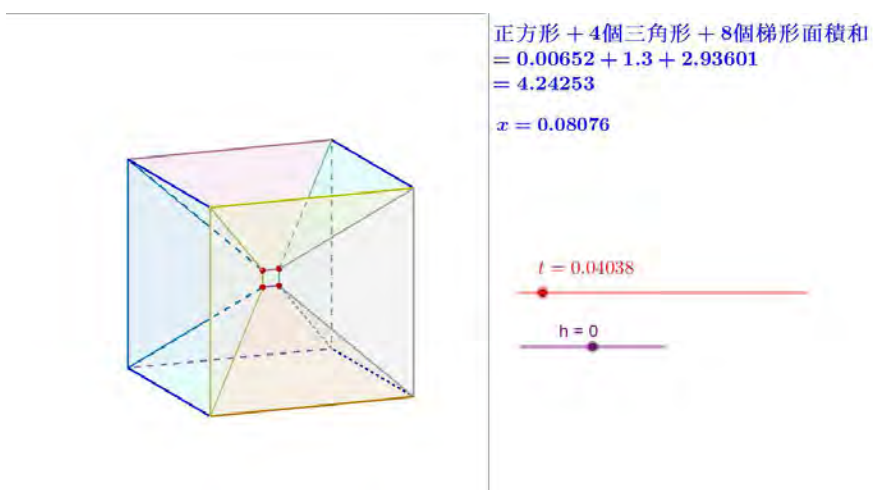
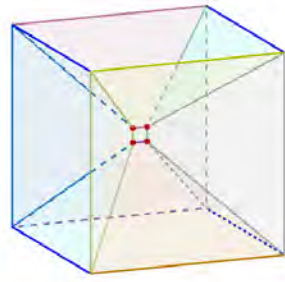


圖 23:

4. 我們接著模擬皂膜拉出肥皂水面時的情形，以下圖為例，因為能量還沒穩定時，中央正方形會前後振盪，我們在數學模擬中，設定前後振盪的距離為 h ，利用控制 h 的大小來模擬面積和，發現 h 的改變與面積和影響不大。如圖 24 至 25。



正方形 + 4個三角形 + 8個梯形面積和
 $= 0.00532 + 1.3111 + 2.9431$
 $= 4.25952$

$x = 0.07291$

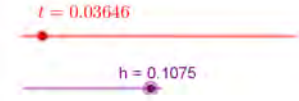
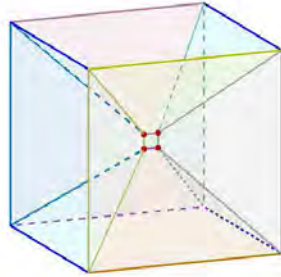


圖 24:



正方形 + 4個三角形 + 8個梯形面積和
 $= 0.00532 + 1.3111 + 2.93205$
 $= 4.24846$

$x = 0.07291$

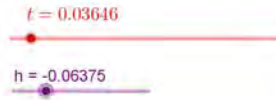
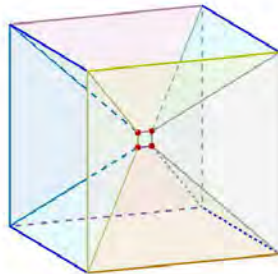


圖 25:

5. 經過計算，我們發現當 $x = 0.07291$ 時， $f(x)$ 有最小值 4.24253



正方形 + 4個三角形 + 8個梯形面積和
 $= 0.00532 + 1.3111 + 2.92611$
 $= 4.24253$

$x = 0.07291$



圖 26 :

(三) 函數圖形

在之前的實驗中，我們使用兩種成份比例，固定溫度、模型直徑，重複十次。發現同一個溫度可以作出大小不同的正方形，也就是說同一個大小的正方形，可能是在不同變因下做出來的！如圖 27。

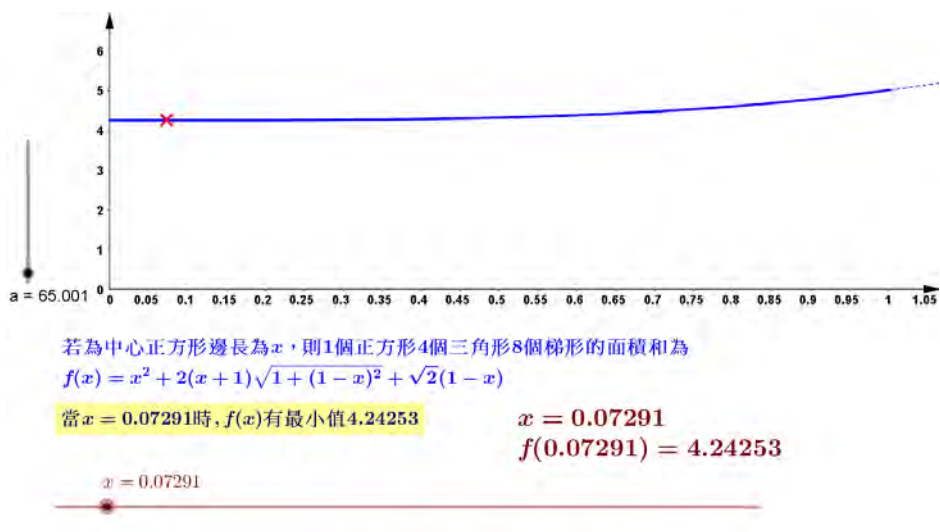


圖 27:

也就是說，在我們每次改變某一個變量，重複多次實驗，照相，放到寫好的程式中估計總面積和。測量出來了很多 x ，代入我們模擬的程式中，得到的面積和都是4.23到4.25。而把有效位數開到小數點後五位時，我們才看到它的差異。但是在模型的誤差、實驗或軟體模擬的過程中，只要有一點偏差，它的誤差遠大於我們的五位小數。但是目前我們還沒想到克服的方法。

在研究的初期本來研究者以為實驗失敗，後來經電腦模擬後發現，原來在 $x = 0.0644$ 到 $x = 0.08076$ 時，都發生最小面積，也就是說邊長在這附近時皂膜本身的能量都很接近，只要有一點點變因，例如模型從 0°C 的溶液抽出，接觸到室溫的空氣，它可能就會有不同的邊長。而且模型在抽出溶液振盪時的總面積改變也很小。這解釋了本研究在相同條件下，為何會做出不同的結果。

為了解釋上述情形更清楚，我們繪製以下函數圖形。我們放大了最小值附近的函數圖形觀察，已確定最小值發生的位置。

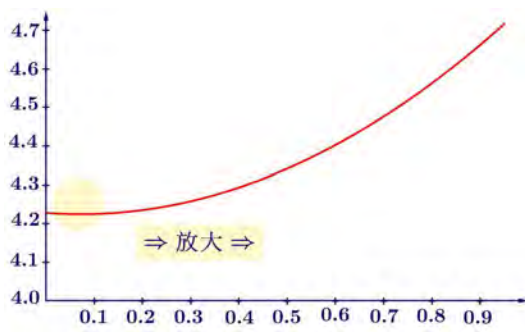


圖 28:

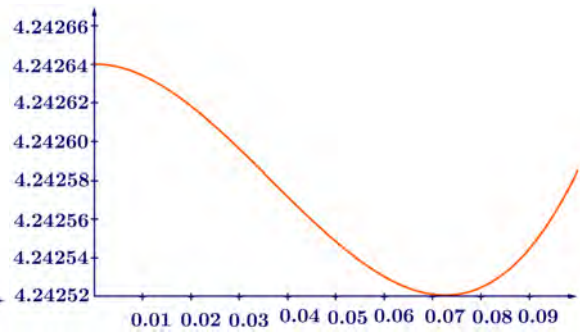


圖 29:

(四) 中央正方形臨界條件分析

事實上兩個梯形與相鄰正方形所在平面並不是成兩兩相交成為 120° 。我們知道三力共點平衡時，兩兩相交成為 120° ，而且類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形，所以我們做了以下的示意圖與表面張力的力圖分析。

1. 圖 30 至圖 31 為梯形與正方形，右圖為放大圖，很明顯三個平面並未兩兩夾 120° 。

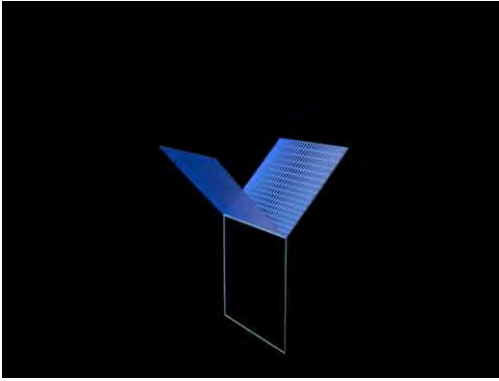


圖 30:

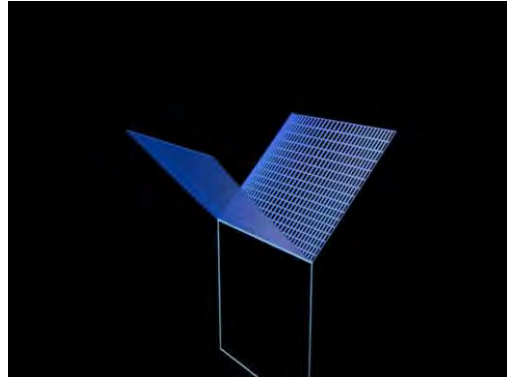


圖 31:

2. 為了達到力平衡，中央正方形的邊會被拉高，變成一個弧。

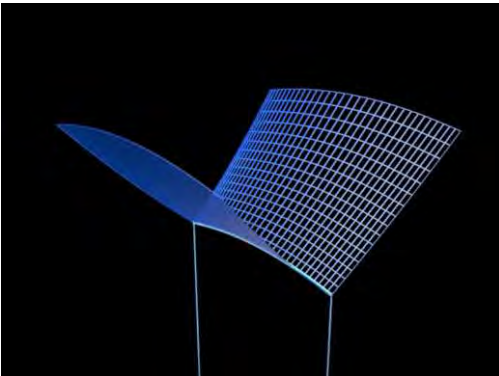


圖 32:



圖 33:

3. 換個角度觀察。



圖 34:

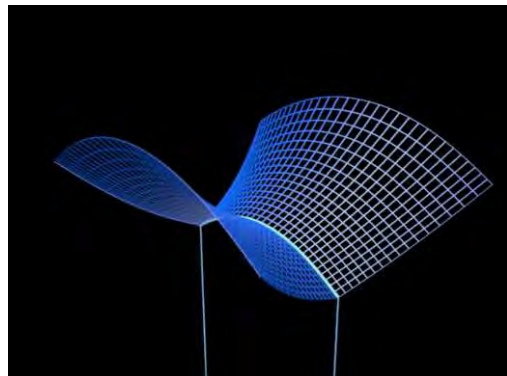


圖 35:

4. 此時達到力平衡，共點的三力兩兩成 120°

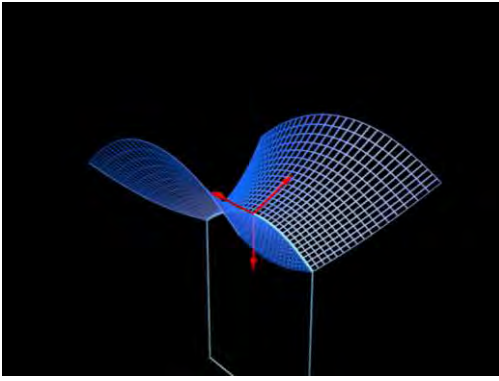


圖 35:

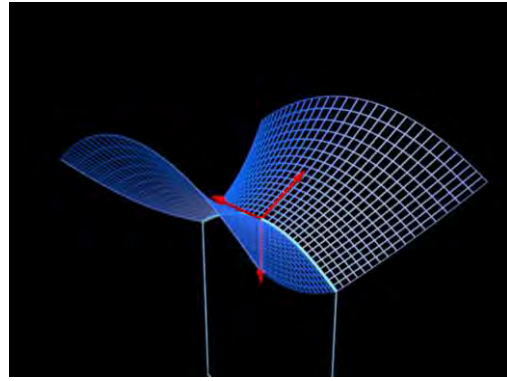


圖 36:

5. 換個角度觀察。

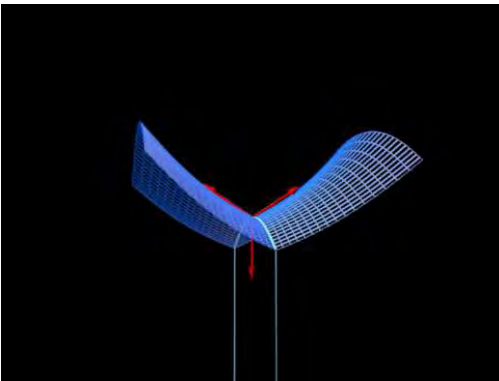


圖 37:

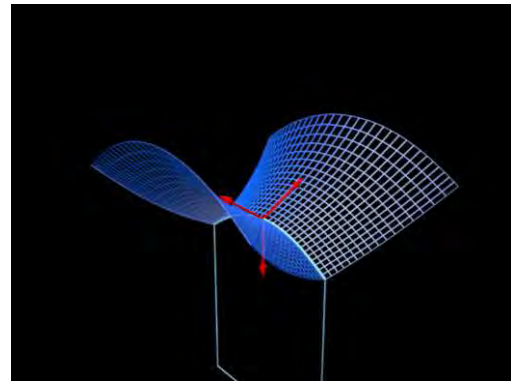


圖 38:

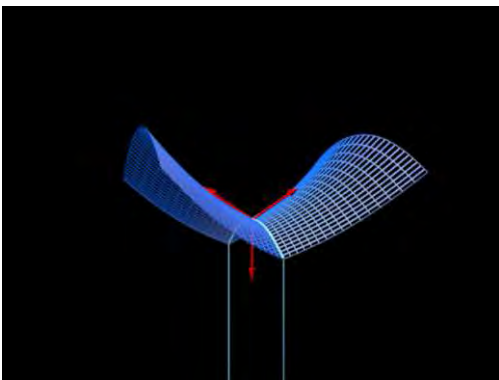


圖 39:

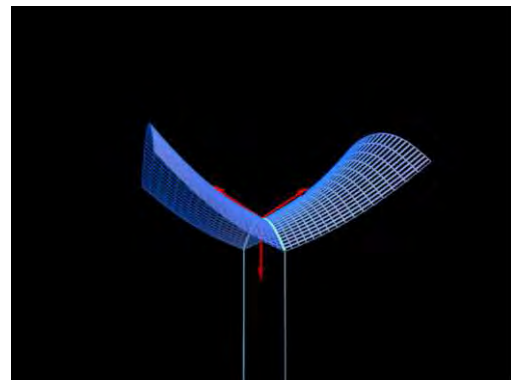


圖 39:

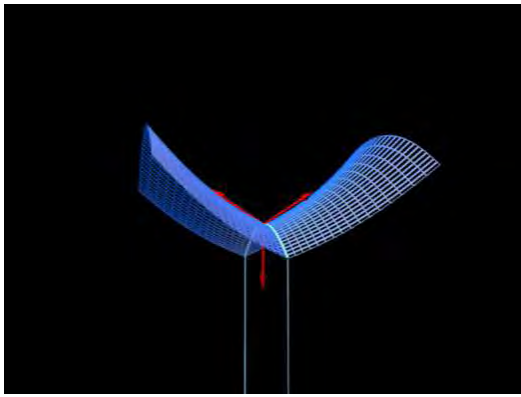


圖 40:

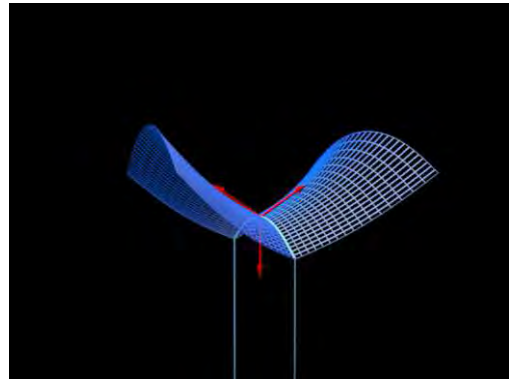


圖 41:

(五) 完整力圖分析

1. 在中央類正方形的邊緣靠近頂點處，表面張力為達力平衡，被拉起一點

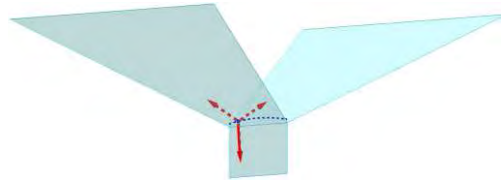


圖 42:

2. 表面張力在在中央類正方形的邊緣頂點與中點間示意圖。

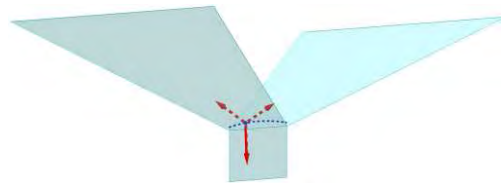


圖 43:

3. 在中央類正方形的邊緣中點上，表面張力為達力平衡，被拉到最高。

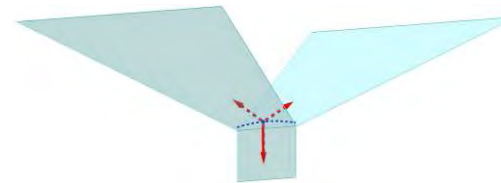


圖 44:

(六) 估計中央正方形曲率

接著我們想研究曲率跟最小能量的關係。我們先用直徑 0.4mm 的正立方體模型。

1. 直徑 0.4mm 的正立方體模型

(1) 我們沿用圖 19 的程式，再放大相片以方便觀察。

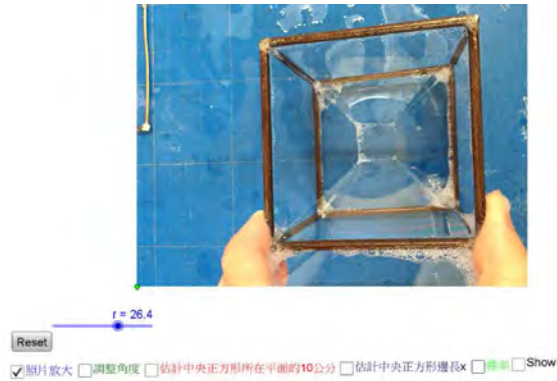


圖 45:

(2) 在中央類正方形，上方的邊界，選擇四個紅點做二次近似。

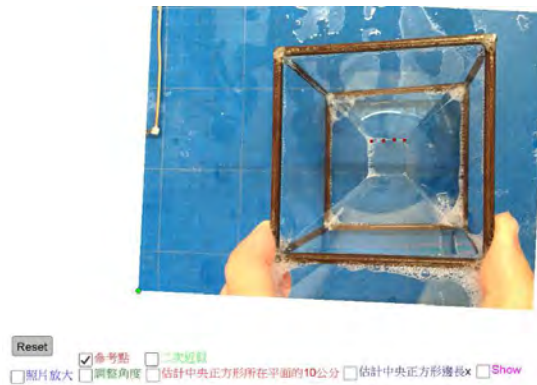


圖 46:

(3) 得到二次近似的拋物線 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 。



圖 47:

(4) 一階導數得 $g'(x) = 2ax + b$ ，兩階導數得 $g''(x) = 2a$ 即曲率。

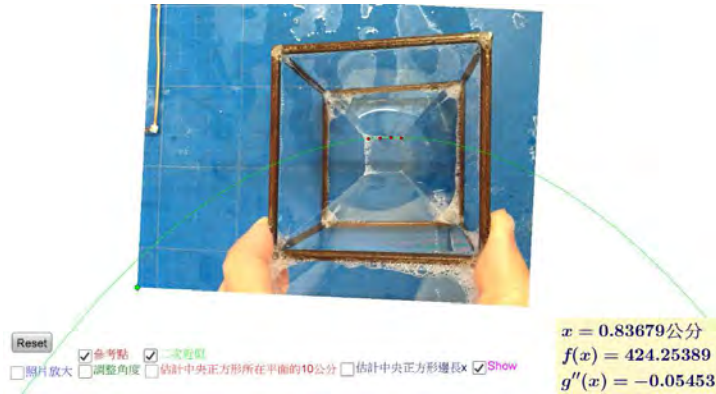


圖 48:

2. 再使用直徑 0.15mm 的正立方體模型。

(1) 先插入相片在程式中。

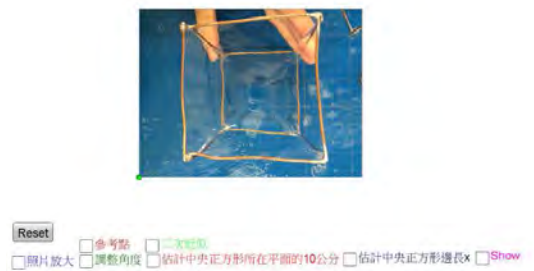


圖 49:

(2) 放大相片以方便觀察。

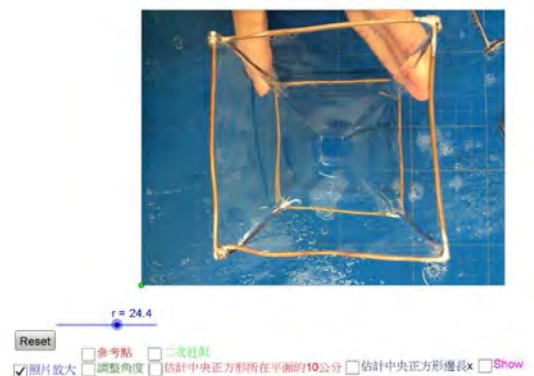


圖 50:

(3) 利用參考線，調整相片角度，使得中央類正方形上方的兩端點為水平。

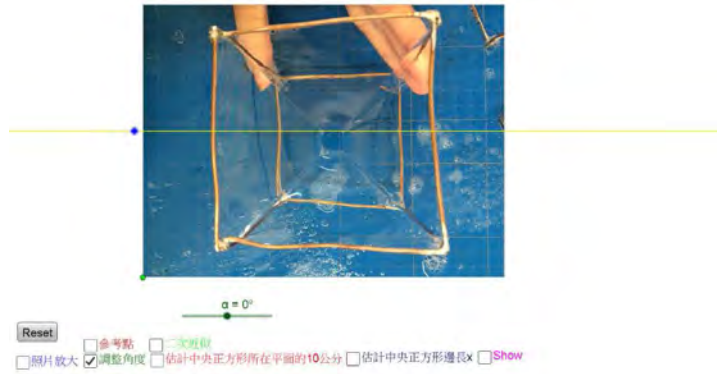


圖 51:

(4) 在中央類正方形，上方的邊界，選擇四個紅點做二次近似。

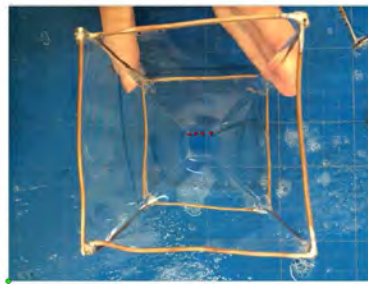


圖 52:

(5) 得到二次近似的拋物線 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 。

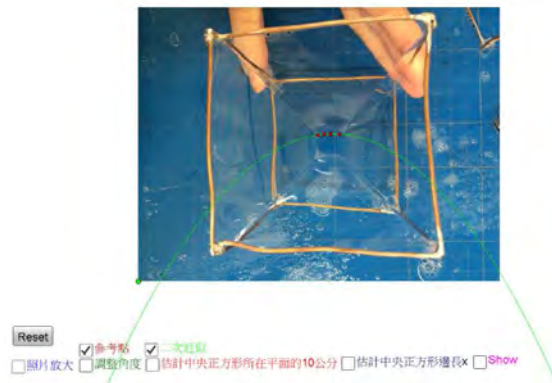


圖 53:

(6) 一階導數得 $g'(x) = 2ax + b$ ，兩階導數得 $g''(x) = 2a$ 即曲率。

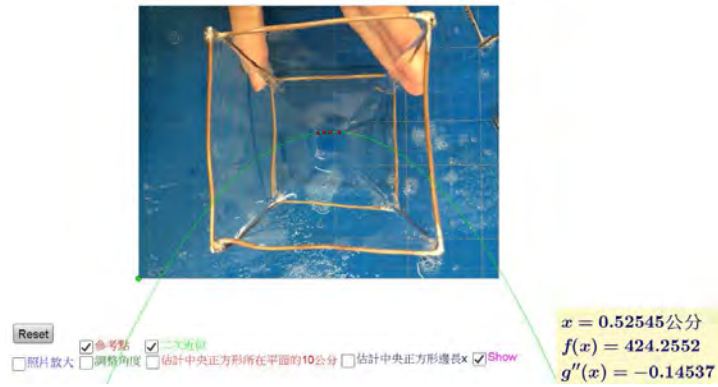








圖 54:



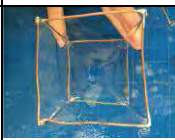
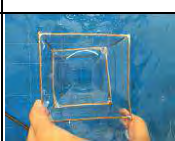


我們將上述實驗相關部份數據整理如下：室溫、溶液成份比 1:6、模型直徑 0.4cm、模型邊長 10 公分，中央正方形邊長、總面積和與曲率關係如表 2。

表 2

編號	照片	正方形邊長	總面積	曲率
1		0.81	424.25	-0.16
2		0.84	424.25	-0.05
3		0.78	424.25	-0.14
4		0.78	424.25	-0.11
5		0.73	424.25	-0.15
6		0.69	424.25	-0.11

室溫、溶液成份比 1:6、模型直徑 0.15cm、模型邊長 10 公分，中央正方形邊長、總面積和與曲率關係如表 3。

表 3

編號	照片	正方形邊長	總面積	曲率
1		0.69	424.25	-0.16
2		0.76	424.25	-0.16
3		0.83	424.25	-0.15
4		0.88	424.25	-0.16
5		0.86	424.25	-0.14
6		0.86	424.25	-0.12

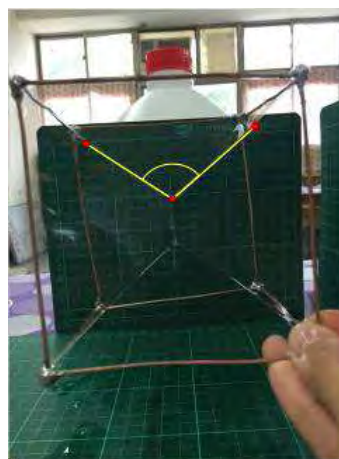
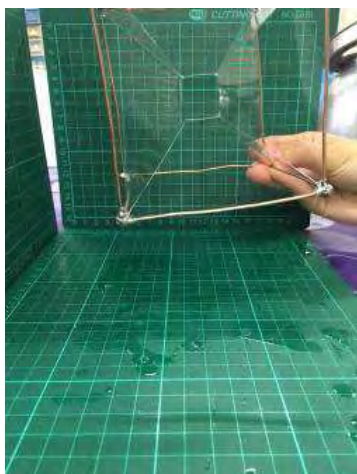
(七) 討論中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角關係

我們設計了以下的實驗裝置，以便同時可測得中央正方形邊長與相鄰兩平面之夾角。直徑 0.15cm 邊長 10 公分模型。



圖 55:

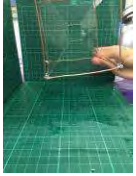

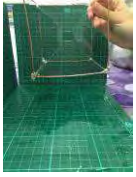
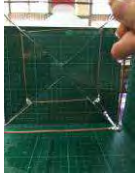

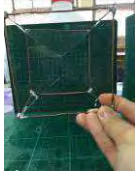
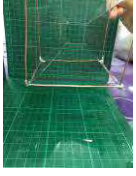
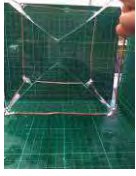
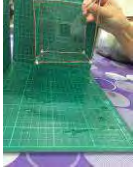
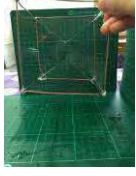

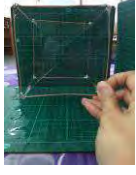
重複實驗同時照出互相垂直的兩個角度照片，再將照片放入軟體內分析，記錄數據於表 4。



$$\theta = 105.9^\circ$$

圖 56:

表 4

編號	正面照片	側面照片	x (cm)	$f(x)$ (cm ²)	Curvature	角度
1				424.25		105.9°
2				424.25		100°
3				424.25		105.2°
4				424.25		109.5°
5				424.25		105.7°
6				424.25		106.7°

參、研究結果與討論

一、研究結果

依據以上的實驗過程，我們得到以下的結果：

1. 從皂泡膜痕跡觀察，正立方體所形成的皂膜痕跡，中央的部分是一個類正方形的形狀。而兩個梯形與相鄰正方形所在平面並不是成兩兩相交成為 120° 。我們知道三力共點平衡時，兩兩相交成為 120° ，而且類正方形的邊並非直線，而是有一點弧形。我們利用數學函數擬合的方式，將此弧形近似為一拋物線，即為二次曲線以便計算其曲率。
2. 皂膜痕跡的形成現象與變換與皂液濃度、溫度及傾角之關聯性。

結果我們發現控制以下變因：

- (1)改變不同的傾角 ($15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$)
- (2)升高溫度 ($15^\circ C, 25^\circ C, 35^\circ C$)
- (3)模型大小 (正立方體邊長 $10cm, 20cm$)
- (4)模型直徑 ($0.4mm, 1.5mm$)
- (5)溫度降低 ($0^\circ C, -3^\circ C$)

在實驗的觀察中，似乎不影響正立方體中央類正方形的大小，並藉由計算梯形、及曲面及類正方形的面積，得到儘管不同大小的類正方形，但面積總和差異在小數點下四位。由此得知，類正方形邊常在一個範圍內會達到能量的穩定及平衡。

3. 肥皂泡膜在立體模型中能量的穩定與史坦納點之關聯性。

在皂膜的實驗觀察中，由中央正方形所在平面與相鄰兩平面夾角測量得知，中央正方形邊長與相鄰兩平面之夾角並非 120° ，可見得肥皂泡膜痕跡在每個點所受的力並非相同。由力圖分析得知，三力大小不一，因此痕跡才會形成有一點弧形。

二、討論：

1. 表面能相關研究探討

由研究中得知，正立方體肥皂泡膜痕跡中央類正方形是弧形，當我們得出中央類正方形的弧長與相鄰兩平面夾角的關係。我們比較先前研究[1][3]所提的史坦納樹，在數學研究及物理研究上不同的論點。在數學研究中，史坦納樹乃探討的是最短路徑的問題，而物理上的解釋則是能量平衡的問題，也就是總表面積必須是極小。這使得皂膜形狀不可能由單純的正方形或梯形組合而成。而這也是我們將進一步研究的目標之一。

2. 研究上的限制

由於模型浸泡在溶液中很快就壞了，我們訂製的 4mm 模型和手工製作的 3 個銅線模型都壞了，為了讓照片更正確，我們又另外訂製 3 個直徑不一的模型，接下來我會繼續這個實驗。而手工自製的模型到實驗後期發現真的有誤差，所以我們訂了新的、更精確的模型，繼續我們的實驗。除此之外，我們想到一個利用光學放大效果的方式來研究皂膜形狀。我們暫時利用家中樂高積木先做了一個實驗裝置，等新模型來後，並有適當經費去架設裝置，我們會再測量前述研究相當資料。

肆、結論與應用

本研究創新之處在於以數學動態軟體模擬並解析物理實驗，以更精準地計算進行皂膜形成的力圖分析。並解釋先前數學理論研究[3]與物理實驗及現象之間的差異。同時也更微觀地了解肥皂泡膜形成能量平衡原理。

雖然一時間看不到生活上的實際應用，但整個實驗與理論的研究過程讓我們真實體驗到做研究時的種種意想不到的情境，而為了解決各種困擾，也學到不少書本中沒提到的解決問題之道，收穫著實豐富。

伍、參考資料及其他

- [1] Dutta P., Khastgir S. K. & Roy, A.(2010). Steiner trees and spanning trees in six-pin soap films. American Association of Physics Teachers. **78**(2), 215-221. DOI:10.1119/1.3247982
- [2] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin (1994). *Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations*. N.W., Boca Raton, Florida.
- [3] 方姿文、林定軒(2014)。當柏拉圖遇上史坦納。第 47 屆臺北市中小學科學展覽會數學科佳作。
- [4] 李瑄儀、許庭瑄、龔治銓(2011)。「史」泡膜變心了-史坦那樹與泡膜研究。台北市 100 年度中等學校學生科學研究獎助計畫物理科一等獎。
- [5] 李瑄儀、龔治銓、謝仲凱(2013)—變形泡膜。國際科學展覽會物理與太空科學四等獎。
- [6] 邱嵩傑、謝仲凱(2012)。幾何世界中的史坦納。台北市 101 年度中等學校學生科學研究獎助計畫數學科佳作。
- [7] 單維章、鄭惟厚(2013)。普通高級中學數學第四冊。三民書局。
- [8] 魏孜昀、蘇澤明、饒文育、謝仲凱、邱嵩傑(2013)。數學泡泡屋—由數學分析探討建築結構。高瞻夢起飛全國高中職創作競賽。
- [9] 鄒宗辰、陳柏甫、葉俊逸、莊皓宇 (2006)。史坦納樹。第四十六屆中小學科學展覽會數學科第三名。

【評語】 160001

本作品探討正多面體皂膜應該成什麼樣的平面，藉由最小面的假設來試著解釋看到的現象。事實上，作者從拍攝的照片看到皂膜表面應該是曲面，而且球面是不錯的近似。因此使用球面模型而非平面模型是比較好的假設，因此如能在分析上做些修改，必能得到更好的結果。作者研究用心，分析方法也正確，若能有關鍵上的指點，必定會有更完整的結果呈現。