2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 **010032**

參展科別 **數學**

作品名稱 **從 A 到 B 再到 C**

—從組合數學觀點及生成函數來看 Avoid 數列及其多項式組合係數 B

得獎獎項 **大會獎：三等獎**

就讀學校 國立南科國際實驗高級中學

指導教師 王志誦

作者姓名 郭競友

關鍵字 排列組合、生成函數、數據分析

作者簡介

我是郭競友，就讀國立南科國際實驗高級中學三年級數理實驗班，因為國中時很崇拜參加數學競賽的學長姐們，因此高一時選擇加入數學科專題研究，也擔任過數學研究社社長，常常因為同學提了一個問題而聚集在一起討論，也很熱愛研究，因此選擇在學測將近時，依然堅持著研究。我平常喜歡聽音樂，尤其是蕭敬騰，沒事也喜歡演奏大提琴和曼陀林，偶爾也喜歡畫畫和看金光布袋戲，除了數學，我也喜歡物理和歷史。

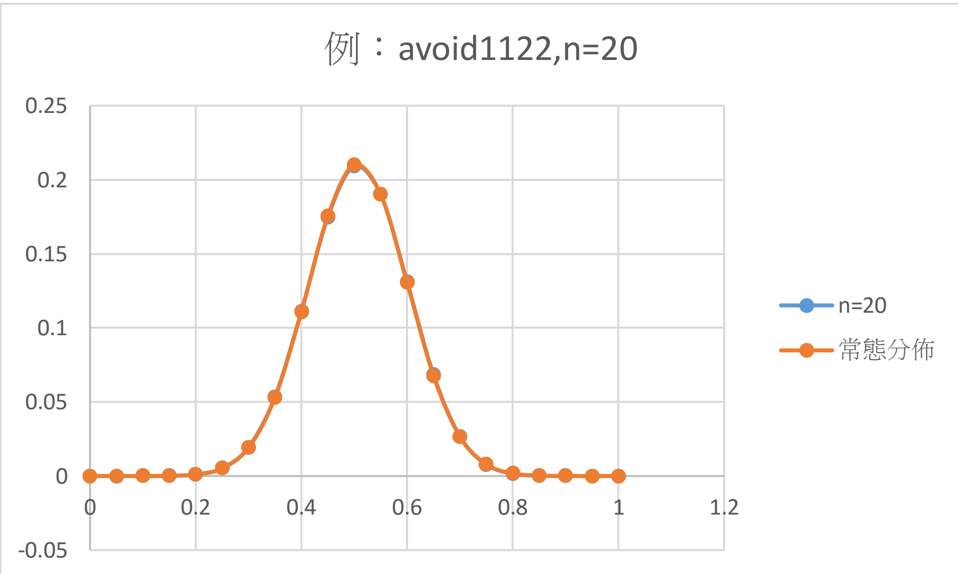
摘要

對於排列組合數學中避免特定序列的方法，是一個已經提出很久的問題，而對於長度為 n，避免同一物連續出現兩次的方法，俄國學者 Tanya Khovanova [1]提出一遞迴式。既然知道避免同一物連續出現兩次的方法數，那避免同一物連續出現 m 次的方法為何呢?

在去年的臺灣國際科展「從 *Avoid* 數列到類巴斯卡三角形」我令其方法數為 A，計算其遞迴關係，並寫成以 B 為係數的多項式，計算 B 的遞迴關係。

為了計算 B 的一般式，今年我的研究過程：

1. 今年不同於去年的臺灣國際科展，**重新**以較直接且簡單的**排列組合**證明避免同一物連續出現 m 次數的方法數 A 之遞迴式
2. 同 1.，**重新**以**排列組合**證明 B 的遞迴式，並找出選取個數小於 m 時之一般式
3. 以**生成函數**計算 B 及 A，並計算 B 的一般式
4. 發現 B 的大小隨著選取個數接近**常態分佈**



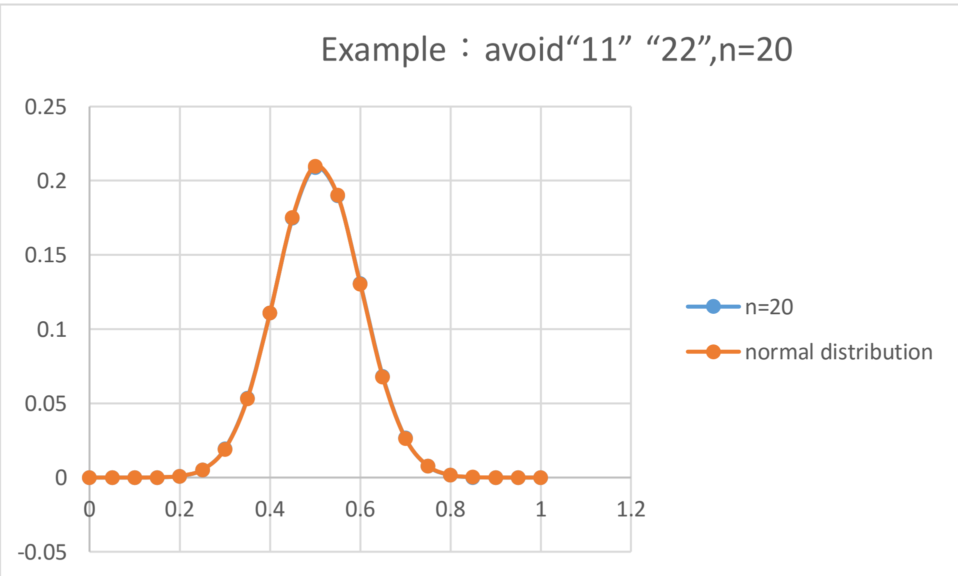
Abstract

The ways of avoiding specific sequence is a long-discussed question in Combination Mathematics. For the ways of avoiding the same element appearing two times continuously, Russian scholar Tanya Khovanova [1] proposed the recursive formula. Since we know the number of ways to avoid the same element appearing two times continuously, then how many ways are there to avoid the same element appearing *m* times in a row?

In last year's Taiwan International Science Fair "Avoiding consecutive χ and pascal-like's triangle method," I let *A* be the number of ways, and calculated its recursive formula, transformed *A* into polynomial with coefficient *B*, and calculated recursive formula of *B*.

This year, in order to calculate *B*, my research process is as follows:

1. I proved the recursive formula of *A*, which is the number of ways to avoid the same element appearing *m* times continuously by Combination Mathematics in an easier way.
2. I proved the recursive formula of *B* by Combination Mathematics in an easier way, and find out the formula of B when the number I chose was less then *m*.
3. I calculated *B* and *A* by generating function, and calculated the formula of *B*.
4. I found out the number of *B* was close to normal distribution with the number I chose.



壹、 問題與名詞定義

問題：

一、 *A(t,n,m,j)*表示

在 t 類不同物 $\{x_1, x_2, x_3,..,x_t\}$ 中選取 n 個並做排列，避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 出現的**方法數**。

二、 *B(n,m,j,i)* 表示

在 j 類不同物 $\{x_1, x_2, x_3,..,x_j\}$ 中選取 i 個並和 $n-i$ 個**空格**做排列，並避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 出現的**方法數**。

名詞定義：

一、 *t* 類不同物

有 $\{x_1, x_2, x_3,..,x_t\}$ 共 t 類不同物，每一類都無限多個，其中：

(一) $\{x_1, x_2, x_3,..,x_j\}$ 共 j 類，被歸類為**有條件限制之元素**

(二) $\{x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3},..,x_t\}$ 共 $t-j$ 類，被歸類為**沒有條件限制之元素**

二、 選取 *i* 有條件限制之元素

在一種只有**空格**和**有條件限制之元素**排列的情況中，**有條件限制之元素**的總個數為 i 個。

Example.
假設 a 和 b 都是**有條件限制之元素**，則：
a _ b _ _ a、a a b _、a _ _ _ _ _ _ b b 都是 $i=3$ 的其中一種例子。

三、 避免長度 m

指**有條件限制之元素**，所要避免的最短連續重複出現次數 m。

Example.
a 是**有條件限制之元素**，而 $m=3$，則：
允許 a 或 aa 出現；
但不允許 aaa、aaaa 或者 aaaaa 等更長的連續出現。

四、 超長連續狀況

若是**有條件限制之元素**出現**不小於**所要避免的最短連續重複出現次數 m，則稱之為「**超長連續狀況**」。
例如：當 m=2 時，出現 aa、aaa、aaaa 稱之。

五、 第 k 個位置 X_k

X_k 表示第 k 個位置

(一) $X_k=0$ 表示是空格

(二) $X_k=X_l$ 表示第 k 個位置和第 l 個位置所填的元素相同，或皆為空格

六、 $F(k)$ 為**費氏數列**第 k 項

貳、 研究動機與文獻探討

在高中數學排列組合中，重複組合和重複排列都是經典考題，而在重複排列之中避免特定連續的問題也是常出現的題目。如同另一種排列組合「走樓梯」的問題，「重複排列之中避免特定連續」一樣也可以寫出它的遞迴關係式，上網查了資料後，可發現俄國學者 Tanya Khovanova [1]已於 2007 年提出了避免 aa,bb,cc……連續出現(m=2)的遞迴式[1]：$A(t,n,2,j)=(t-1)A(t,n-1,2,j)+(t-j)A(t,n-2,2,j)$。而我也就好奇，若將避免特定連續長度推廣至 m 時，會發生什麼事？因此投入了這個研究中，並在研究過程中，發現「**重複排列之中避免同一物 m 次連續**」方法數 $A(t,n,m,j)$ 的遞迴式[4]，且 $A(t,n,m,j)$ 可寫成「**重複排列**(加入空格)**之中全部**(除了空格)**避免同一物 m 次連續**」方法數 $B(n,m,j,i)$ 的展開式[4]，在 **2015 臺灣國際科展**[4]時有評審教授提問：「能不能直接算出 $B(n,m,j,i)$ ？」因此將問題重心移至 $B(n,m,j,i)$ 上，想知道它的值以及其他有趣的事。

而後，在學校上課時，正好學到「白努利試驗之二項分布」，給了我一個靈感，於是我開始分析 $B(n,m,j,i)$ 的值，從中發現 $B(n,m,j,i)$ 也呈現一個常態分佈圖形，開啟了另一個領域。

參、 研究目的

一、 以排列組合證明 $A(t,n,m,j)$ 之遞迴

藉由排列組合證明：t 類不同物 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ 選取 n 個做排列，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$（避免**超長連續狀況**）的組合數之遞迴

二、 以排列組合證明 $B(n,m,j,i)$ 之遞迴

藉由排列組合證明：j 類不同物 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$ 選取 i 個，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$（避免**超長連續狀況**），並與 $n-i$ 個空格之排列方法數

(一) 雙變數遞迴：改變選取個數 i 和總長度 n

(二) 單變數遞迴：固定選取個數 i，改變總長度 n

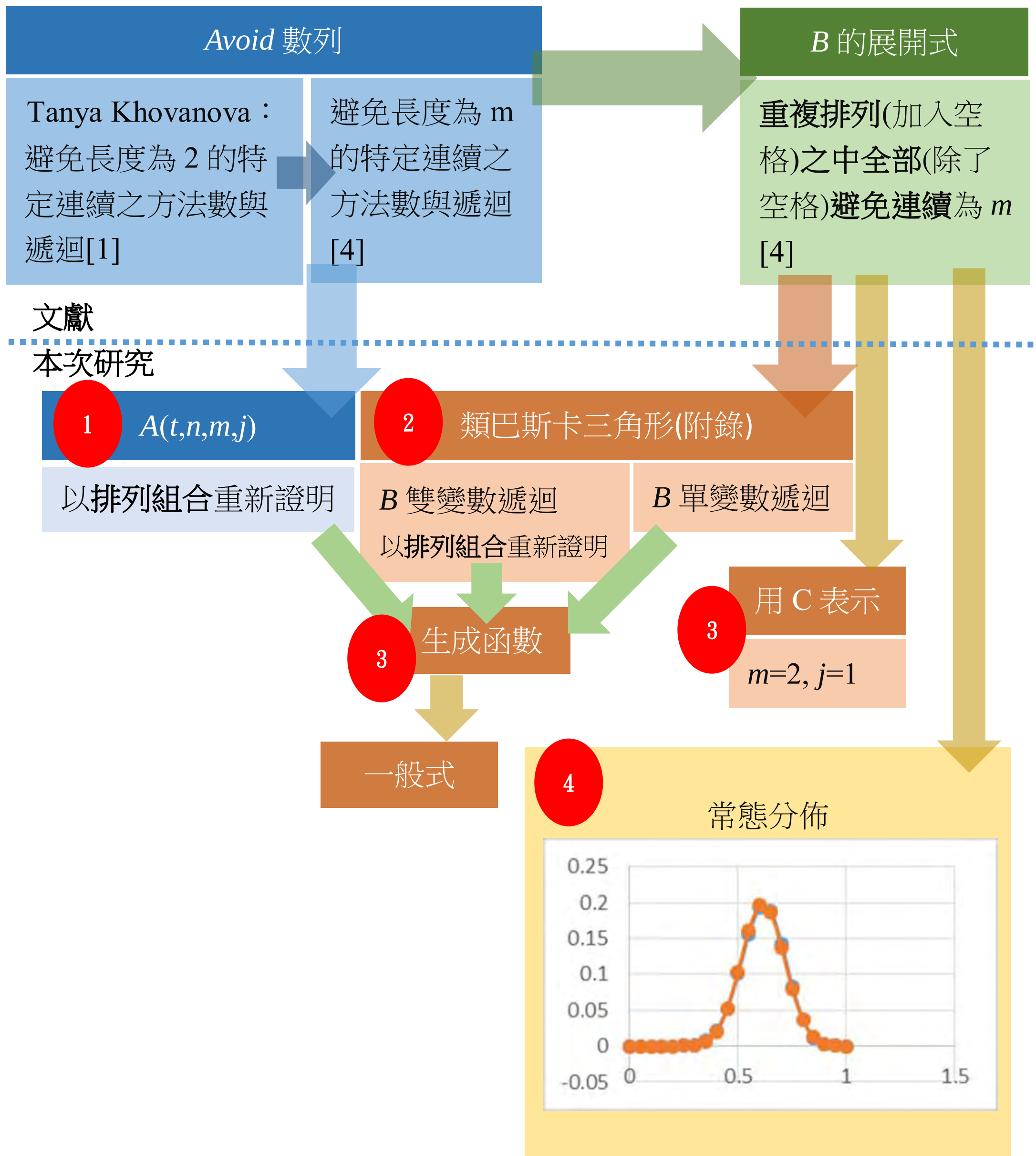
三、 計算 $A(t,n,m,j)$ 和 $B(n,m,j,i)$ 之生成函數及 $B(n,m,j,i)$ 用 C 表示的一般式

利用遞迴關係計算其生成函數

四、 $B(n,m,j,i)$ 的常態分佈

將 B 隨著選取個數 i 改變而變化的值繪製成圖，並繪製 B 的常態分佈曲線，觀察兩者之誤差值，及其平均數和變異數之變化。

流程圖：


Avoid 數列
Tanya Khovanova：避免長度為 2 的特定連續之方法數與遞迴[1]
避免長度為 m 的特定連續之方法數與遞迴[4]
B 的展開式
重複排列(加入空格)之中全部(除了空格)避免連續為 m [4]
文獻
本次研究
1
A(t,n,m,j)
以排列組合重新證明
2
類巴斯卡三角形(附錄)
B 雙變數遞迴
以排列組合重新證明
B 單變數遞迴
3
用 C 表示
m=2, j=1
3
生成函數
一般式
4
常態分佈
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
0
0.5
1
1.5

肆、　研究過程及內容

一、　證明 $A(t,n,m,j)$ 的遞迴

對於避免長度為 2 時(m=2)，A 的遞迴已被證明[1]；而避免長度推廣到 m 的證明也已完成[4]，但相當冗長繁複。

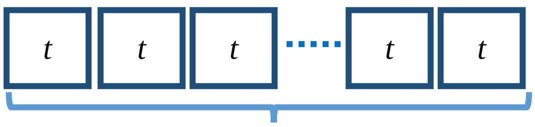
這次我用了更簡單的方式重新證明 $A(t,n,m,j)$ 的遞迴。

> 定理一(重新證明[4]中定理一)
>
> $A(t,n,m,j)$ 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、…、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$（避免**超長連續狀況**）的組合數。
>
> 證明
>
> (一) $n<m$，$A(t,n,m,j)=t^n$
>
> (二) $n=m$，$A(t,n,m,j)=t^n-j$
>
> (三) $n>m$，$A(t,n,m,j)=(t-1)\sum_{k=0}^{m-2}A(t,n-1-k,m,j)+(t-j)A(t,n-m,m,j)$

Proof:

(一)　選取長度小於避免連續長度($n<m$)：

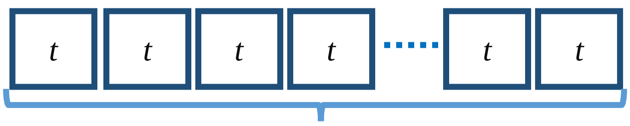
在 n 個位子填入 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$，因為不可能發生 m 個 x_j 連續，每個位子有 t 種選擇，n 個位子有 t^n 種選擇，則 $A(t,n,m,j)=t^n$。



n 個

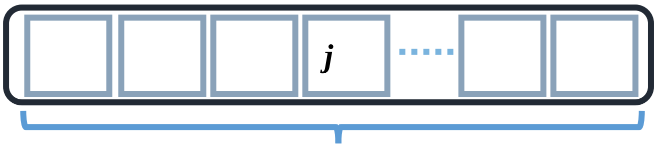
(二)　選取長度等於避免連續長度($n=m$)：

在 n 個位子填入 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$，由上述可知有 t^n 種選擇，但要避免**超長連續狀況**，因此要減去 j 種情況，則 $A(t,n,m,j)=t^n-j$。



m 個

減去



m 個

(三)　選取長度大於避免連續長度($n > m$)：

x_k 表示第 k 個位子所填的元素

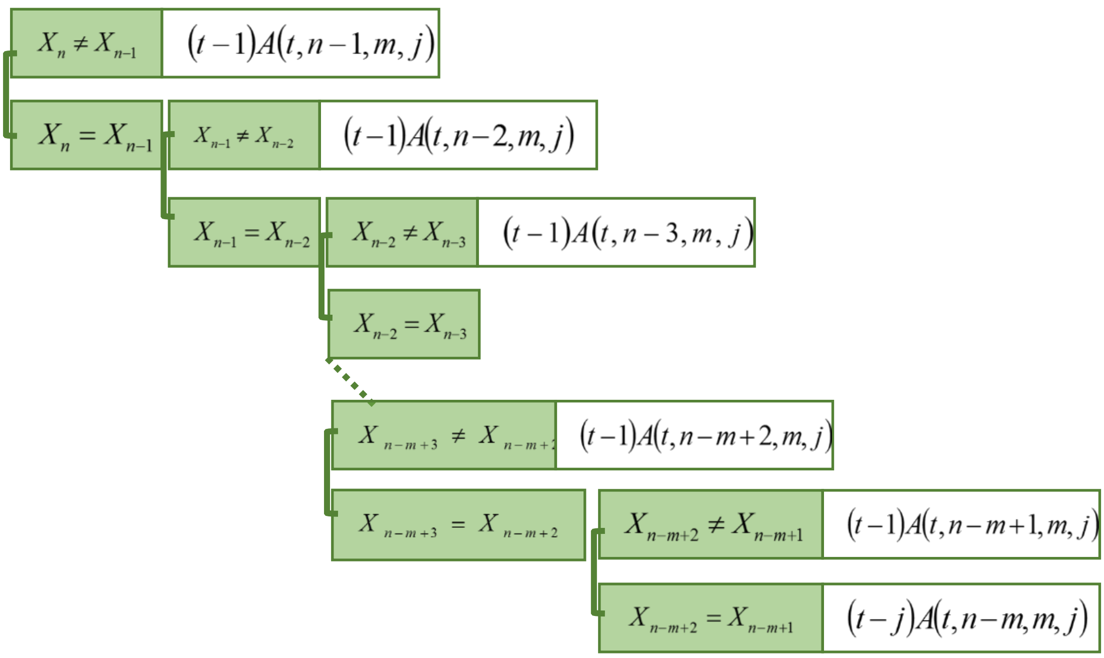
1. $x_n \neq x_{n-1}$ ， x_n 有 $t-1$ 種選擇，因此有 $(t-1)A(t,n-1,m,j)$ 種方法。
2. $x_n = x_{n-1}$ 且 $x_{n-1} \neq x_{n-2}$ ， x_n 和 x_{n-1} 共有 $t-1$ 種選擇，因此有 $(t-1)A(t,n-2,m,j)$ 種方法。
3. $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$ 且 $x_{n-2} \neq x_{n-3}$ ， x_n 、 x_{n-1} 和 x_{n-2} 共有 $t-1$ 種選擇，因此有 $(t-1)A(t,n-3,m,j)$ 種方法。

……

4. $x_n = \ldots = x_{n-m+2}$ 且 $x_{n-m+2} \neq x_{n-m+1}$ ， x_n 、 x_{n-1} 、…和 x_{n-m+2} 共有 $t-1$ 種選擇，因此有 $(t-1)A(t,n-m+1,m,j)$ 種方法。
5. $x_n = \ldots = x_{n-m+1}$ ，且要避免**超長連續狀況**， x_n 、 x_{n-1} 、…和 x_{n-m+1} 共有 $t-j$ 種選擇，因此有 $(t-j)A(t,n-m,m,j)$ 種方法。

因此產生遞迴關係：

$$A(t,n,m,j) = (t-1)\sum_{k=0}^{m-2} A(t,n-1-k,m,j) + (t-j)A(t,n-m,m,j)$$



Q.E.D.

二、 $A(t,n,m,j)$的生成函數

為了計算 $A(t,n,m,j)$，所以我開始尋找其生成函數。

令 $R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A(t,n,m,j)x^{n}$ ，則：

$$R_{m,j}^{t}(x)=\left(1-x^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(tx-(j-1)x^{m}-(t-j)x^{m+1}\right)^{k}\right)$$

Proof:

令函數 $R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A(t,n,m,j)x^{n}$ ，且為了方便計算，將其簡化為 $R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A(n)x^{n}$

並利用定理一 $A(t,n,m,j)=(t-1)\sum_{k=0}^{m-2}A(t,n-1-k,m,j)+(t-j)A(t,n-m,m,j)$ 計算：

$$R_{m,j}^{t}(x)=A(0)+A(1)x+\ldots+A(m)x^{m}+\ldots$$
$$(t-1)xR_{m,j}^{t}(x)=(t-1)A(0)x+\ldots+(t-1)A(m-1)x^{m}+\ldots$$
$$\ldots$$
$$(t-1)x^{m-1}R_{m,j}^{t}(x)=(t-1)A(0)x^{m-1}+(t-1)A(1)x^{m}+\ldots$$
$$(t-j)x^{m}R_{m,j}^{t}(x)=(t-j)A(0)x^{m}+\ldots$$

相減後

由於當 $n<m$ 時 $A(t,n,m,j)=t^{n}$

所以

$$R_{m,j}^{t}(x)=\frac{1+\left(t-(t-1)\right)x+\left(t^{2}-(t-1)(t+1)\right)x^{2}+\left(t^{3}-(t-1)\left(t^{2}+t+1\right)\right)x^{3}+\ldots}{t-(t-1)\sum_{k=0}^{m-1}x^{k}-(t-j)x^{m}}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}x^{k}}{t-(t-1)\sum_{k=0}^{m-1}x^{k}-(t-j)x^{m}}=\frac{1-x^{m}}{1-\left(tx-(j-1)x^{m}-(t-j)x^{m+1}\right)}$$

$$=\left(1-x^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(tx-(j-1)x^{m}-(t-j)x^{m+1}\right)^{k}\right)$$

Q.E.D.

三、 $A(t,n,m,j)$與$B(n,m,j,i)$轉換

在計算$A(t,n,m,j)$的一般式時，發現$A(t,n,m,j)$可以寫成$B(n,m,j,i)$的展開式[4]。

以下的研究將著重於$B(n,m,j,i)$之探討。

引理一 $A(t,n,m,j)=\sum_{i=0}^{n} B(n,m,j,i)\times(t-j)^{n-i}$

Proof:

$A(t,n,m,j)$組成的元素$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$分成：

(一) 需要避免**超長連續狀況**(有條件限制)的元素$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$

(二) 沒有條件限制之元素$\{x_{j+1},x_2,x_3,..,x_t\}$

$B(n,m,j,i)$的定義為需要避免**超長連續狀況**的元素$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$選i (i 從 0 到 n)個並和

$n-i$個空格做排列，若將這些空格隨機填上沒有限制的元素$\{x_{j+1},x_2,x_3,..,x_t\}$，將形成

$A(t,n,m,j)$。

$n\backslash i$	0	1	2	sum
0	$B(0,m,j,0)$			$A(t,0,m,j)$
1	$B(1,m,j,0)\times(t-j)$	$B(1,m,j,1)$		$A(t,1,m,j)$
2	$B(2,m,j,0)\times(t-j)^2$	$B(2,m,j,1)\times(t-j)$	$B(2,m,j,2)$	$A(t,2,m,j)$

Q.E.D.

討論完$A(t,n,m,j)$後，我將研究方向從$B(n,m,j,i)$切入，研究$B(n,m,j,i)$的遞迴關係、值的變化……等等。

四、 $B(n,m,j,i)$ 的雙變數遞迴

對於 $B(n,m,j,i)$的雙變數遞迴證明已完成[4]，但方式是用 $A(t,n,m,j)$的遞迴關係以及 $A(t,n,m,j)$和 $B(n,m,j,i)$的轉換。

我用另一種方式**直接證明** $B(n,m,j,i)$的遞迴。

定理二(重新證明[4]之定理二)

$B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、⋯、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**），並與$n-i$個空格之排列方法數。

定義

(一) $i=0$，$B(n,m,j,0)=1$

(二) $i=n$，$B(n,m,j,n)=A(j,n,m,j)$

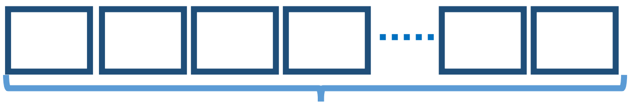
(三) $i<0$或$i>n$，$B(n,m,j,i)=0$

證明

(四) $0\le i<n$，$B(n,m,j,i)=\sum_{k=0}^{m-1}B(n-1-k,m,j,i-k)+(j-1)\sum_{k=1}^{m-1}B(n-k,m,j,i-k)$

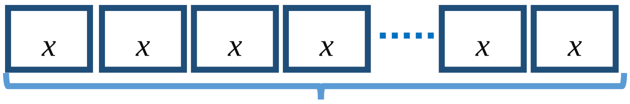
Proof:

(一) 選取0個元素$(i=0)$，並與n個空格排列$(n-i=n)$，共有1種方法，$B(n,m,j,0)=1$。



n 個

(二) 選取n個元素$(i=n)$，並與0個空格排列$(n-i=0)$，並避免**超長連續狀況**，相當於$A(t,n,m,j)$在$t=j$時的情況，因此$B(n,m,j,n)=A(j,m,n,j)$。



n 個

(三) 選取少於0個元素$(i<0)$，或者和少於0個空格做排列$(n-i<0)$無意義，因此$B(n,m,j,i)=0$。

(四) 選取的元素數量界在0到全部填滿之間$(0\le i<n)$：
X_k表示第k個位子所填的元素

1. X_n是空格，X_n只有1種選擇，因此有$B(n-1,m,j,i)$種方法。

2. X_n不是空格且$X_n\ne X_{n-1}$：

(1) X_{n-1}不是空格，有$B(n-1,m,j,i-1)-B(n-2,m,j,i-1)$種方法，$X_n$有$j-1$種選擇。

(2) X_{n-1}是空格，有$B(n-2,m,j,i-1)$種方法，X_n有j種選擇。

3. X_n不是空格且$X_n = X_{n-1} \neq X_{n-2}$：

(1) X_{n-2}不是空格，有$B(n-2,m,j,i-2)-B(n-3,m,j,i-2)$種方法，$X_n$和$X_{n-1}$共有$j-1$種選擇。

(2) X_{n-2}是空格，有$B(n-3,m,j,i-2)$種方法，X_n和X_{n-1}共有j種選擇。

……

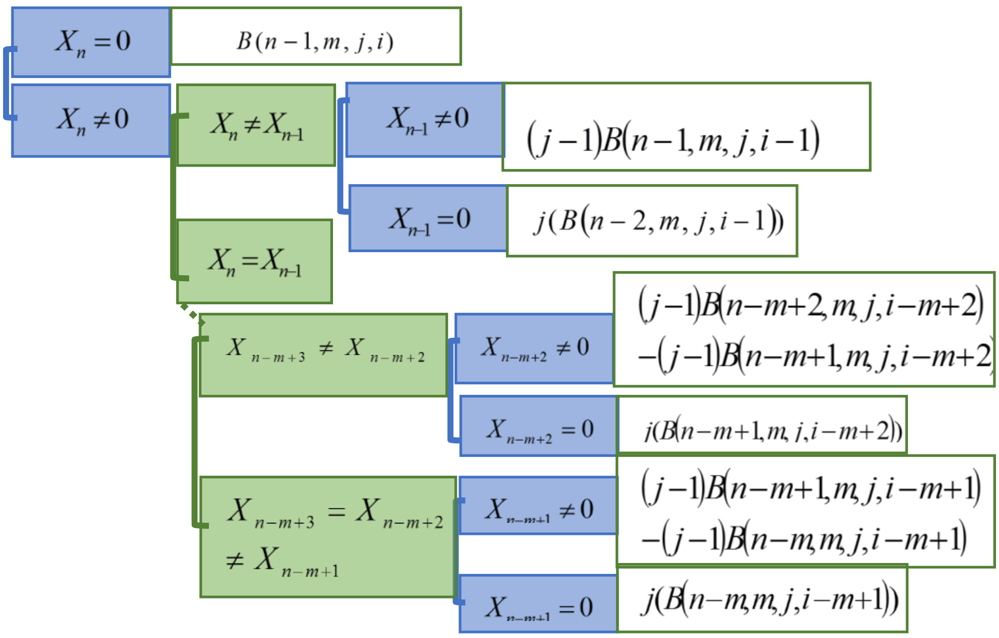
4. X_n不是空格且$X_n = X_{n-1} = \ldots = X_{n-m+2} \neq X_{n-m+1}$：

(1) X_{n-m+1}不是空格，有$B(n-m+1,m,j,i-m+1)-B(n-m,m,j,i-m+1)$種方法，$X_n$、$X_{n-1}$、…和$X_{n-m+2}$共有$j-1$種選擇。

(2) X_{n-m+1}是空格，有$B(n-m,m,j,i-m+1)$種方法，X_n、X_{n-1}、…和X_{n-m+2}共有j種選擇。

由此產生遞迴關係：

$$B(n,m,j,i)=\sum_{k=0}^{m-1}B(n-1-k,m,j,i-k)+(j-1)\sum_{k=1}^{m-1}B(n-k,m,j,i-k)$$



Q.E.D.

除了 $A(t,n,m,j)$**之生成函數**，以上是我用**新的方法重新整理**文獻[4]的內容：

(小回顧~)

$A(t,n,m,j)$表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、…、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**）之方法數；

$B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、…、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**），並與$n-i$個空格之排列方法數，則：

(一) $A(t,n,m,j)$的遞迴關係：$A(t,n,m,j)=(t-1)\sum_{k=0}^{m-2}A(t,n-1-k,m,j)+(t-j)A(t,n-m,m,j)$

(二) **新增**：$R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n}A(t,n,m,j)x^n=\left(1-x^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(tx-(j-1)x^m-(t-j)x^{m+1}\right)^k\right)$

(三) $A(t,n,m,j)$及$B(n,m,j,i)$的關係式：$A(t,n,m,j)=\sum_{i=0}^{n}B(n,m,j,i)\times(t-j)^{n-i}$

(四) $B(n,m,j,i)$的遞迴關係：

$$B(n,m,j,i)=\sum_{k=0}^{m-1}B(n-1-k,m,j,i-k)+(j-1)\sum_{k=1}^{m-1}B(n-k,m,j,i-k)$$

接下來是我關於 $B(n,m,j,i)$**研究內容：**

五、 $B(n,m,j,i)$的生成函數

由於前面**定理二**提到$B(n,m,j,i)$有一遞迴關係

$B(n,m,j,i)=\sum_{k=0}^{m-1}B(n-1-k,m,j,i-k)+(j-1)\sum_{k=1}^{m-1}B(n-k,m,j,i-k)$，因此可以利用生成函數計算$B(n,m,j,i)$。

> 定理三
>
> $B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、…、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**），並與$n-i$個空格之排列方法數。
>
> 令函數$G_{m,j}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,m,j,i)x^n y^i=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,i)x^n y^i$
>
> 其中因為$i<0$或$i>n$，$B(n,m,j,i)=0$，所以$n\geq i$
>
> 則：
>
> $$G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^m\right)^k\right)$$

Proof:

令函數$G_{m,j}(x,y)=\sum_{n,i}B(n,m,j,i)x^n y^i$

且已知$B(n,m,j,i)=\sum_{k=0}^{m-1}B(n-1-k,m,j,i-k)+(j-1)\sum_{k=1}^{m-1}B(n-k,m,j,i-k)$

為了書寫方便，將$G_{m,j}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,m,j,i)x^n y^i$ 簡化為$G_{m,j}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,i)x^n y^i$ 。

計算過程：

$$
\begin{aligned}
G_{m,j}(x,y) = {} & B(0,0)+B(1,0)x+B(1,1)xy\ +B(2,0)x^2+B(2,1)x^2y+B(2,2)x^2y^2 \\
& +B(3,0)x^3+B(3,1)x^3y+B(3,2)x^3y^2+B(3,3)x^3y^3+\ldots+ \\
& B(m-1,m-1)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+B(m,m-1)x^my^{m-1}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xG_{m,j}(x,y) = {} & B(0,0)x+B(1,0)x^2+B(1,1)x^2y+B(2,0)x^3+B(2,1)x^3y+ \\
& B(2,2)x^3y^2+\ldots+B(m-2,m-1)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+ \\
& B(m-1,m-1)x^my^{m-1}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2yG_{m,j}(x,y) = {} & B(0,0)x^2y+B(1,0)x^3y+B(1,1)x^3y^2+\ldots+ \\
& B(m-3,m-2)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+B(m-2,m-2)x^my^{m-1}+\ldots
\end{aligned}
$$

$\ldots$

$$
x^my^{m-1}G_{m,j}(x,y)=B(0,0)x^my^{m-1}+\ldots
$$

$$
\begin{aligned}
(j-1)xyG_{m,j}(x,y) = {} & (j-1)B(0,0)xy+(j-1)B(1,0)x^2y+(j-1)B(1,1)x^2y^2 \\
& +(j-1)B(2,0)x^3y+(j-1)B(2,1)x^3y^2+(j-1)B(2,2)x^3y^3 \\
& +\ldots+(j-1)B(m-2,m-2)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+ \\
& (j-1)B(m-1,m-2)x^my^{m-1}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(j-1)x^2y^2G_{m,j}(x,y) = {} & (j-1)B(0,0)x^2y^2+(j-1)B(1,0)x^3y^2+(j-1)B(1,1)x^3y^3 \\
& +\ldots\ +(j-1)B(m-3,m-3)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+ \\
& (j-1)B(m-2,m-3)x^my^{m-1}+\ldots
\end{aligned}
$$

$\ldots$

$$
(j-1)x^{m-1}y^{m-1}G_{m,j}(x,y)=(j-1)B(0,0)x^{m-1}y^{m-1}+\ldots+(j-1)B(1,0)x^my^{m-1}+\ldots
$$

相減後得到

$$G_{m,j}(x,y)=\frac{B(0,0)+[B(1,1)-(j-1)B(0,0)]xy+..+\{B(m-1,m-1)-(j-1)[B(m-2,m-2)+..+B(0,0)]\}x^{m-1}y^{m-1}}{1-(x+x^2y+x^3y^2+...+x^my^{m-1})-(j-1)(xy+x^2y^2+x^3y^3+...+x^{m-1}y^{m-1})}$$

$$=\frac{1+[j-(j-1)]xy+[j^2-(j-1)(j+1)]x^2y^2+...+[j^{m-1}-(j-1)(j^{m-2}+...+j+1)]x^{m-1}y^{m-1}}{1-(x+x^2y+x^3y^2+...+x^my^{m-1})-(j-1)(xy+x^2y^2+x^3y^3+...+x^{m-1}y^{m-1})}$$

$$=\frac{1+xy+x^2y^2+...+x^{m-1}y^{m-1}}{1-(x+x^2y+x^3y^2+...+x^my^{m-1})-(j-1)(xy+x^2y^2+x^3y^3+...+x^{m-1}y^{m-1})}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}x^ky^k}{1-\sum_{k=0}^{m-1}x^{k+1}y^k-(j-1)\left[\sum_{k=0}^{m-1}x^ky^k-1\right]}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}x^ky^k}{j-\sum_{k=0}^{m-1}x^{k+1}y^k-(j-1)\sum_{k=0}^{m-1}x^ky^k}$$

$$=\frac{1-(xy)^m}{j(1-xy)-(j-1+x)(1-(xy)^m)}$$

$$=(1-(xy)^m)\left(\sum_{k=0}^{\infty}((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^m)^k\right)$$

Q.E.D.

六、 $B(n,m,j,i)$的單變數遞迴

在定理二已經提出 $B(n,m,j,i)$的雙變數遞迴，但是因為計算繁複而不便使用，為了解決此問題，因此我開始研究 $B(n,m,j,i)$的單變數遞迴。我發現，若固定選取元素之數量(i)，改變總長度(n)會產生一遞迴關係。

為了證明定理四，我先推出引理二。

> 引理二
>
> $B(n,m,j,i)$ 表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、⋯、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**），並與$n-i$個空格之排列方法數。
>
> 當$i<m$時，則：
>
> $$1\le k\le i,\sum_{l=0}^{i-k}(-1)^l\binom{i}{l}B(2i-k-l,m,j,i)=j^i$$

Proof:

由於$i<m$，所以$B(n,m,j,i)=\binom{n}{i}j^i$

因此$1\le k\le i,\sum_{l=0}^{i-k}(-1)^l\binom{i}{l}B(2i-k-l,m,j,i)$可以簡化成$1\le k\le i,\sum_{l=0}^{i-k}(-1)^l\binom{i}{l}\binom{2i-k-l}{i}j^i$

$\Leftrightarrow 1\le k\le i,\sum_{l=0}^{i-k}(-1)^l\binom{i}{l}\binom{2i-k-l}{i}=1$因此$1\le k\le i,\sum_{l=0}^{i-k}(-1)^l\binom{i}{l}B(2i-k-l,m,j,i)=j^i$

Q.E.D.

定理四

$B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續

(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、⋯、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免**超長連續狀況**），並與$n-i$個空格之排列方法數。

證明

$$B(n,m,j,i)=j^i+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$$

Proof:

令函數$P_{m,j}^i(x)=\sum_{n=i}^{\infty}B(n,i)x^n$其中因$n<i$時$B(n,m,j,i)$根據定義為 0，$n\ge i$

$$P_{m,j}^i(x)=B(i,i)x^i+B(i+1,i)x^{i+1}+\ldots+B(2i,i)x^{2i}+\ldots$$

$$-\binom{i}{1}xP_{m,j}^i(x)=-\binom{i}{1}B(i,i)x^{i+1}-\ldots-\binom{i}{1}B(2i-1,i)x^{2i}+\ldots$$

......

$$(-1)^i x^i P_{m,j}^i(x)=(-1)^i B(i,i)x^{2i}+\ldots$$

$$-j^i x^{2i}\left(\frac{1}{1-x}\right)=-j^i x^{2i}-j^i x^{2i+1}-\ldots$$

其中若$i=0$則$-j^i x^{2i}\left(\frac{1}{1-x}\right)$須改為$-j^0x^1\left(\frac{1}{1-x}\right)$

相加後，根據引理二可得到

$$P_{m,j}^i(x)=\begin{cases} i<m,\ j^i x^i\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1} \\ i\ge m,\left(\frac{1}{1-x}\right)^i\sum_{q=0}^{i-2}\left(x^{i+q}\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{i}{k}B(i+q-k,i)\right)+j^i x^{2i-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}\end{cases}$$

因此我們還得到當$i<m$時，$P_{m,j}^i(x)=j^i x^i\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}=\sum_{n=i}^{\infty}(-1)^{n-i}j^i\binom{-i-1}{n-i}x^n$

另外根據定理三 $G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^m\right)^k\right)$

當 $i<m$ 時 $G_{m,j}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+jy)^n x^n=\sum_{i=o}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}j^i\binom{n}{i}x^n y^i$

另外 $(-1)^{n-i}\binom{-i-1}{n-i}=\left((-1)^{n-i}\right)^2\frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+n-i)}{(n-i)!}=\binom{n}{i}$

可得到 $G_{m,j}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+jy)^n x^n=\sum_{i=o}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}j^i\binom{n}{i}x^n y^i=\sum_{i=0}^{\infty}y^i P_{m,j}^i(x)$

因為生成函數恆等

故在 $i<m$ 時 $B(n,m,j,i)=j^i+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$ **得證**

Q.E.D.

目前 $i\geq m$ 之證明尚未完成，但因為在 $i<m$ 時皆成立，且 $i\geq m$ 時數據相輔，因此我推測 $i\geq m$ 時 $B(n,m,j,i)=j^i+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$ 應成立，只是證明未完成。

在證明中計算 B 之生成函數時，可明顯的發現**定理三**生成函數 $G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^m\right)^k\right)$ 與變數 m 有關，但生成函數 $P_{m,j}^i(x)=j^i x^i\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}$ 卻與 m 無關，因此筆者認為，在 $i<m$ 時之遞迴關係皆與 m 無關，而當 $i\geq m$ 時 $P_{m,j}^i(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^i\sum_{q=0}^{i-2}\left(x^{i+q}\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{i}{k}B(i+q-k,i)\right)+j^i x^{2i-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{i+1}$ 就與 m 有相關性。

有了定理四(單變數遞迴)，在運算 $B(n,m,j,i)$上我只要看某一行的遞迴，如 $i=3$

$m=3$, $j=2$								
n / i	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	2						
2	1	4	4					
3		6	12	6				
4			24	28				
5				74				
6				152				
7				270				
8				436				
9				658				
10				944				
11				1302				
12				1740				
13				2266				
14				2888				

七、 $B(n,m,j,i)$的運算

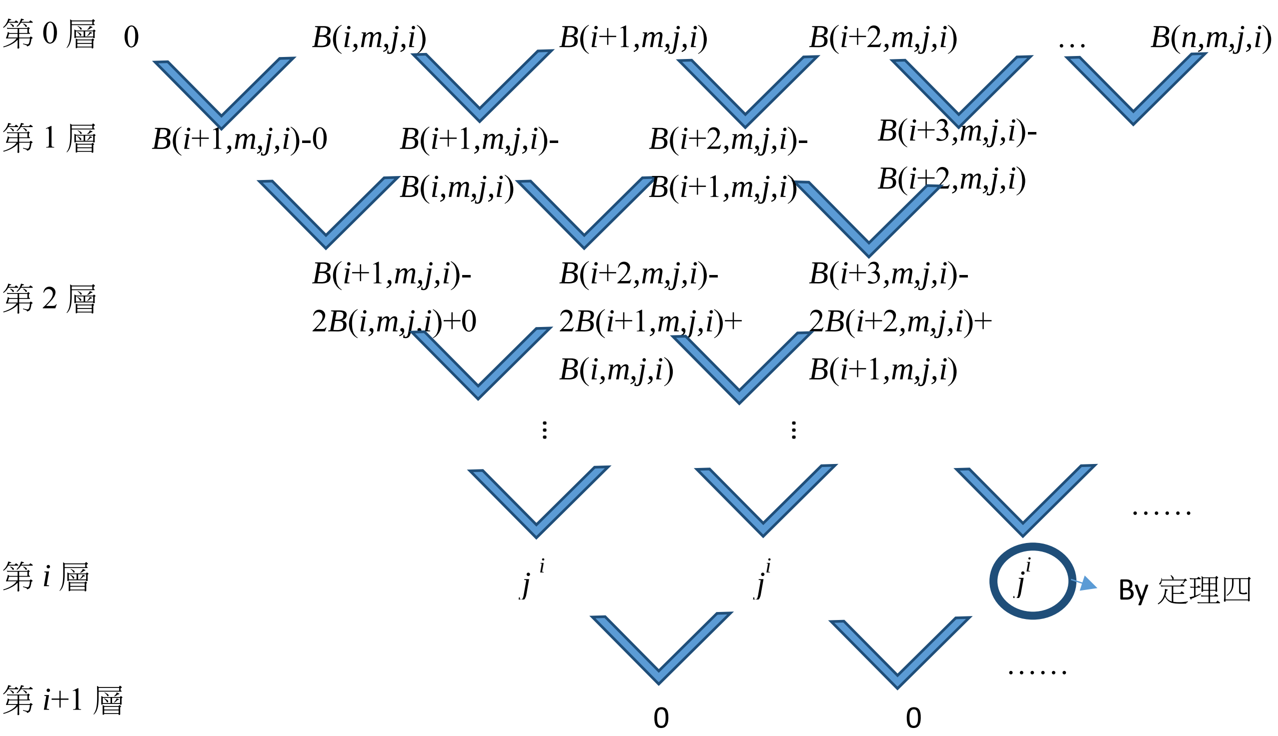
因為定理二的遞迴式計算冗長，因此我證明了 $B(n,m,j,i)$的單變數遞迴(定理四)，接下來就是要運用定理四，進行 $B(n,m,j,i)$的運算。

> 定理五
>
> 已知 $B(i,m,j,i)$, …, $B(2i\text{-}1,m,j,i)$共 i 個值
>
> $$y_k=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{k}{l}B(i+k-l-1,m,j,i)$$
>
> 則： $B(n,m,j,i)=\sum_{r=1}^{i}y_r\binom{n-i+1}{r}$

Proof:

用差分法得下圖，又由定理四 $B(n,m,j,i)=j^i+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$ 可以得到

$\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)=j^i$ 因此第 i 層皆為 “j^i”



因此得到 $B(n,m,j,i)=\sum_{r=1}^{i}y_r\binom{n-i+1}{r}$ 其中 $y_k=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{k}{l}B(i+k-l-1,m,j,i)$

Q.E.D.

定理一的計算冗長，因此我運用定理四推出了定理五來加快 $B(n,m,j,i)$的運算，在和定理一的算法進行比較，可以發現運算過程明顯減少。

例如：求 $B(21,3,2,3)$?(雖然定理四在 $i=m$ 時的證明尚未完成，但在數據顯示是正確的)

＜方法一＞定理一

(1) $B(n,3,2,0)=1$, $B(1,3,2,1)=2$, $B(2,3,2,2)=4$

(2) 根據遞迴關係：

$$B(2,3,2,1)=B(0,3,2,0)+B(1,3,2,0)$$
$$+B(1,3,2,1)=4$$
$$B(3,3,2,1)=B(1,3,2,0)+B(2,3,2,0)$$
$$+B(2,3,2,1)=6$$
$$B(3,3,2,2)=B(0,3,2,0)+B(1,3,2,0)+B(1,3,2,1)$$
$$+B(2,3,2,1)+B(2,3,2,2)=12$$
$$B(3,3,2,3)=B(1,3,2,1)+B(2,3,2,2)=6$$

依此類推

$$1+1+6=B(4,3,2,1)=8$$
$$1+1+4+6+12=B(4,3,2,2)=24$$
$$2+4+4+12+6=B(4,3,2,3)=28$$
$$1+1+8=B(5,3,2,1)=10$$
$$1+1+6+8+24=B(5,3,2,2)40$$
$$4+6+12+24+28=B(5,3,2,3)=74$$
$$1+1+10=B(6,3,2,1)=12$$
$$1+1+8+10+40=B(6,3,2,2)=60$$
$$6+8+24+40+74=B(6,3,2,3)=152$$

.

.

.

.

.

.

$$34+36+612+684+7718=B(20,3,2,3)=9084$$
$$36+38+684+760+9084=B(21,3,2,3)=10602$$

(3) 所得 $B(21,3,2,3)=10602$**(計算繁複！)**

＜方法二＞由定理五可以得到快速的解法

(1) $B(n,3,2,0)=1$,　$B(1,3,2,1)=2$, $B(2,3,2,2)=4$

(2) 根據遞迴關係：

$$B(2,3,2,1)=B(0,3,2,0)+B(1,3,2,0)$$
$$+B(1,3,2,1)=4$$
$$B(3,3,2,1)=B(1,3,2,0)+B(2,3,2,0)$$
$$+B(2,3,2,1)=6$$
$$B(3,3,2,2)=B(0,3,2,0)+B(1,3,2,0)+B(1,3,2,1)$$
$$+B(2,3,2,1)+B(2,3,2,2)=12$$
$$B(3,3,2,3)=B(1,3,2,1)+B(2,3,2,2)=6$$

依此類推

$$1+1+4+6+12=B(4,3,2,2)=24$$
$$2+4+4+12+6=B(4,3,2,3)=28$$
$$4+6+12+24+28=B(5,3,2,3)=74$$

(3) 得到

$$B(3,3,2,3)=6,\ B(4,3,2,3)=28,\ B(5,3,2,3)=74$$

$$\because\ B(4,3,2,3)-\binom{2}{1}B(3,3,2,3)=16$$

$$B(5,3,2,3)-\binom{3}{1}B(4,3,2,3)+\binom{3}{2}B(3,3,2,3)=8$$

$$\therefore\ B(21,3,2,3)=6\binom{19}{1}+16\binom{19}{2}+8\binom{19}{3}=10602$$

(4) 所得 $B(21,3,2,3)=10602$**(超快的)**

由上述例子知：在 $i=3$ 的情況下，只要知道 $B(3,3,2,3)$，$B(4,3,2,3)$和 $B(5,3,2,3)$就可以快速求得 $B(n,3,2,3)$。如 $B(2016,3,2,3)=6\binom{2014}{1}+16\binom{2014}{2}+8\binom{2014}{3}$

八、 當 $i\le m$ 時，$B(n,m,j,i)$的一般式

除了運用定理五的方式來計算 $B(n,m,j,i)$外，我還發現了在 $i\le m$ 時，可以用一般式直接算出 $B(n,m,j,i)$。

定理六 當 $i<m$ 時，則 $B(n,m,j,i)=(-1)^{n-i}j^i\binom{-i-1}{n-i}=j^i\binom{n}{i}$

Proof:

根據定理三 $G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^m\right)^k\right)$

當 $i<m$ 時 $G_{m,j}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+jy)^n x^n=\sum_{i=o}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}j^i\binom{n}{i}x^n y^i$

可以得到 $B(n,m,j,i)=j^i\binom{n}{i}$

Q.E.D.

九、 $m=2, j=1$ 時 $B(n,m,j,i)$之一般式

我還發現，在 $m=2, j=1$ 時，可以直接寫出 $B(n,m,j,i)$的一般式。

> 定理七
>
> $B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、⋯、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免狀況一），並與$n-i$個空格之排列方法數。
>
> $F(k)$**費氏數列**第 k 項。
>
> 則當$m=2, j=1$時：$B(n,2,1,i)=\binom{n-i+1}{i}$且$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\binom{n-i+1}{i}=F(n+2)$

Proof:

因為$m=2, j=1$表示只有一種元素和空格排列，且元素不可連續排列。

則若有 n 個位置，放置 i 個元素，就會有$i-1$不能選。

因此$B(n,2,1,i)=\binom{n-i+1}{i}$，得證。

另外我還發現$B(n,2,1,i)$與費氏數列 F 有關：

根據引理一：$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\binom{n-i+1}{i}=A(2,n,2,1)$

由於定理一$A(t,n,m,j)=(t-1)\sum_{k=0}^{m-2}A(t,n-1-k,m,j)+(t-j)A(t,n-m,m,j)$

因此$A(2,n,2,1)=A(2,n-1,2,1)+A(2,n-2,2,1)$

又$A(2,0,2,1)=F(2), A(2,1,2,1)=F(3)$，因此$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\binom{n-i+1}{i}=F(n+2)$故得證。

Q.E.D.

> 另外針對$B(n,m,j,i)$之一般式，由於繁複不易整理，並未一一列出，其中某些例子，詳見附錄。

十、 $B(n,m,j,i)$的常態分佈

在學校上課時，教到常態分佈，給了我靈感，進而發現 $B(n,m,j,i)$的常態分佈。

> 猜想一
>
> $B(n,m,j,i)$表示在$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$(可重複選取)選取i個，並避免$x_1\cdots x_1$連續(m個x_1)、避免$x_2\cdots x_2$連續(m個x_2)、⋯、避免$x_j\cdots x_j$連續(m個x_j)（避免狀況一），並與$n-i$個空格之排列方法數。

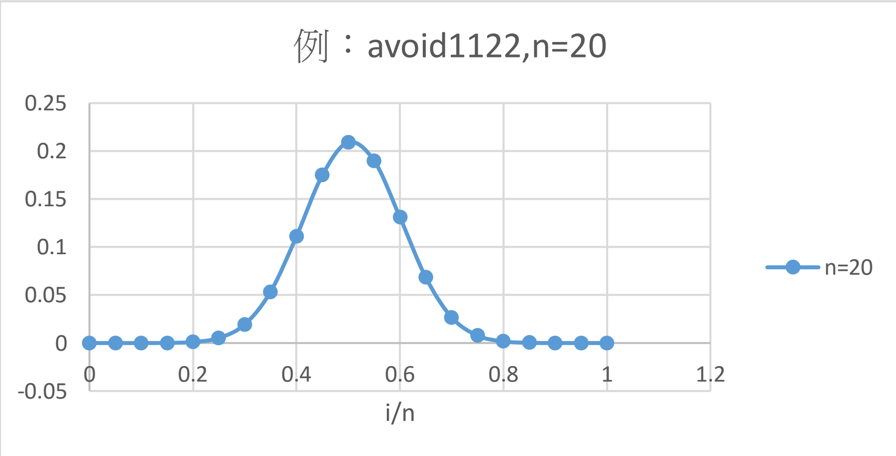
則固定 m 和 j，觀察 $B(n,m,j,i)$ 隨著 n、i 變化：
(一) 可發現在同一 n 時，隨著 i 從 0 到 n， $B(n,m,j,i)$ 呈常態分佈
(二) 平均數 μ ，隨著n改變，可發現平均數趨近於一值
(三) 變異數 σ^2 ，隨著n改變，乘上n後也趨近於一值

Explanation:

(一)　常態分佈：

令函數 $f_{m,j}^{n}(i)=B(n,m,j,i)$

為了方便比較數據，將 $f_{m,j}^{n}(i)=B(n,m,j,i)$ 改成 $f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$ 並繪製圖表。



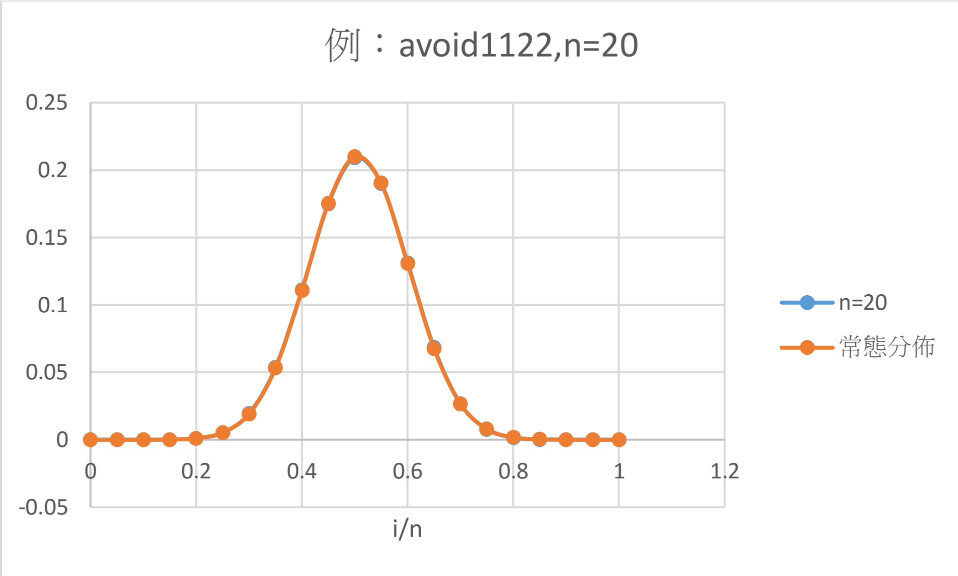
接著計算

$$\mu=\sum_{i}\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$$

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i}\left(\frac{i}{n}\right)^{2}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}-\left(\sum_{i}\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}\right)^{2}}$$

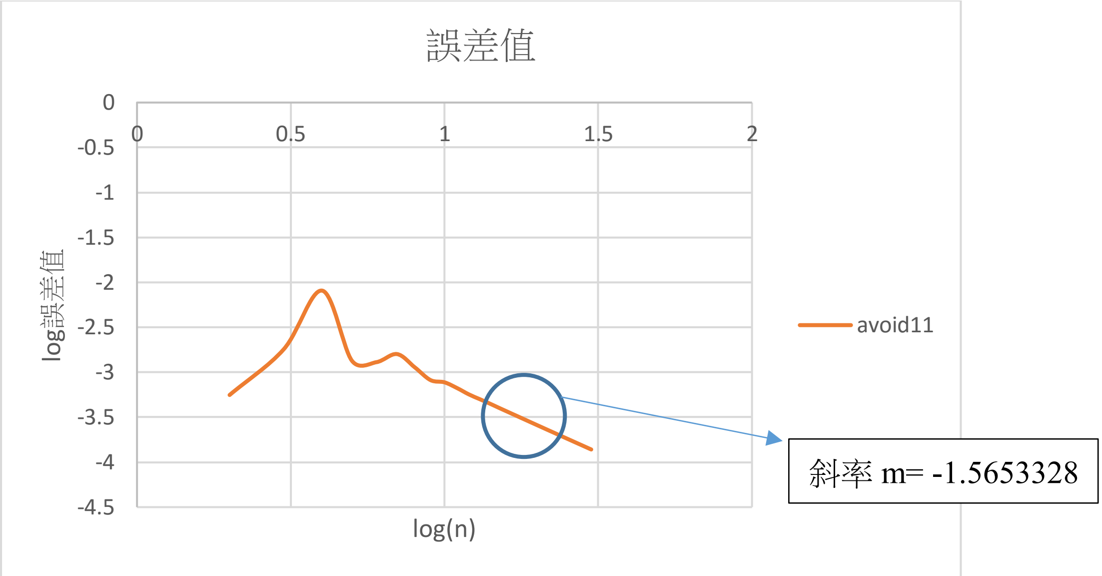
$$g\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{\sum_{i}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)-\mu}{\sigma}\right)^{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$$

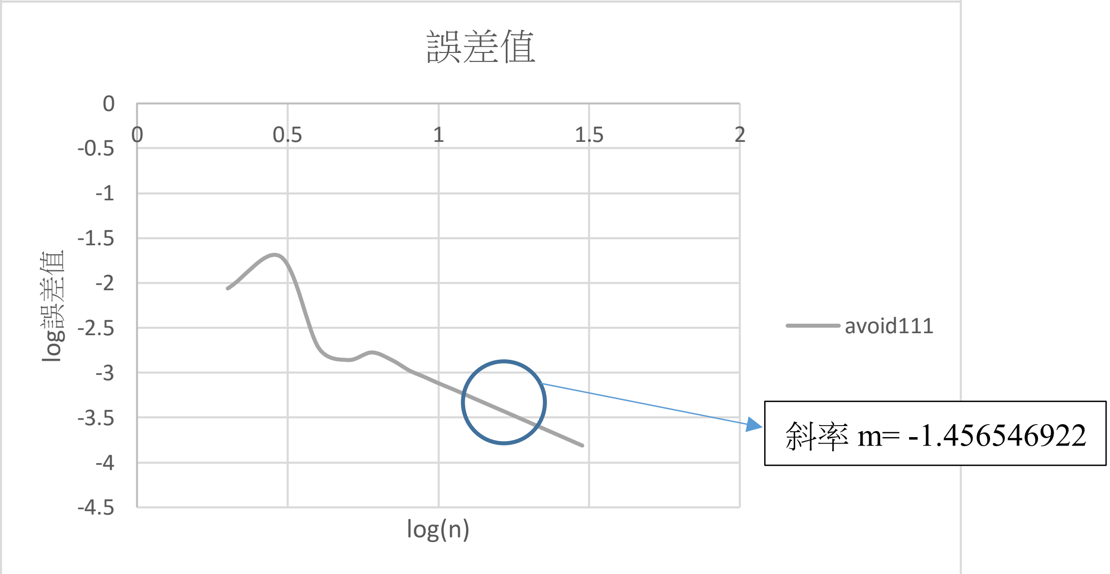
並繪製圖表，可發現 $f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)$ 及 $g\left(\frac{i}{n}\right)$ 圖形相當接近。

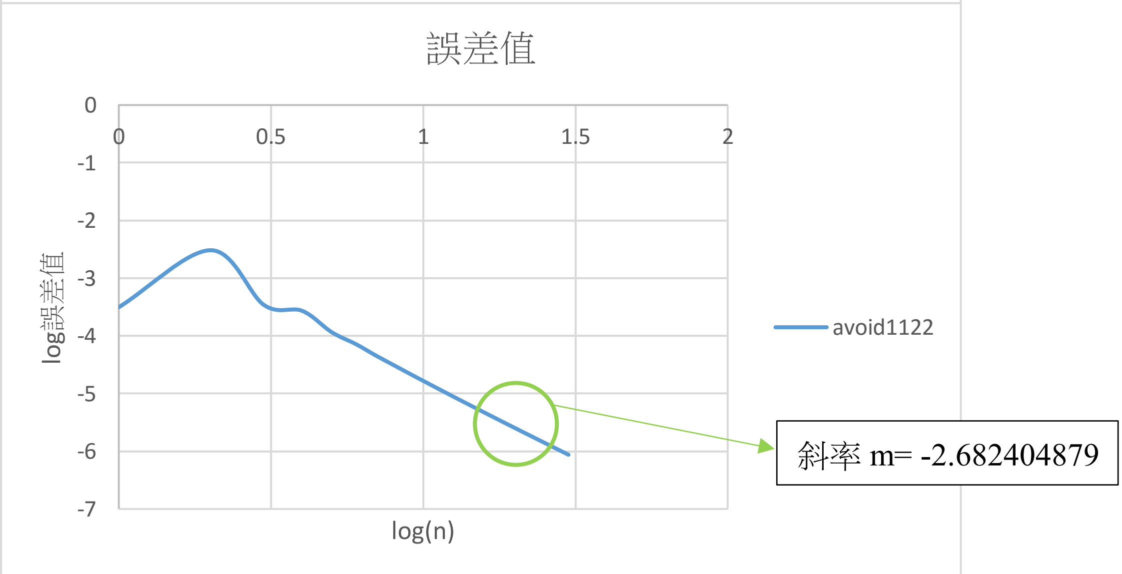


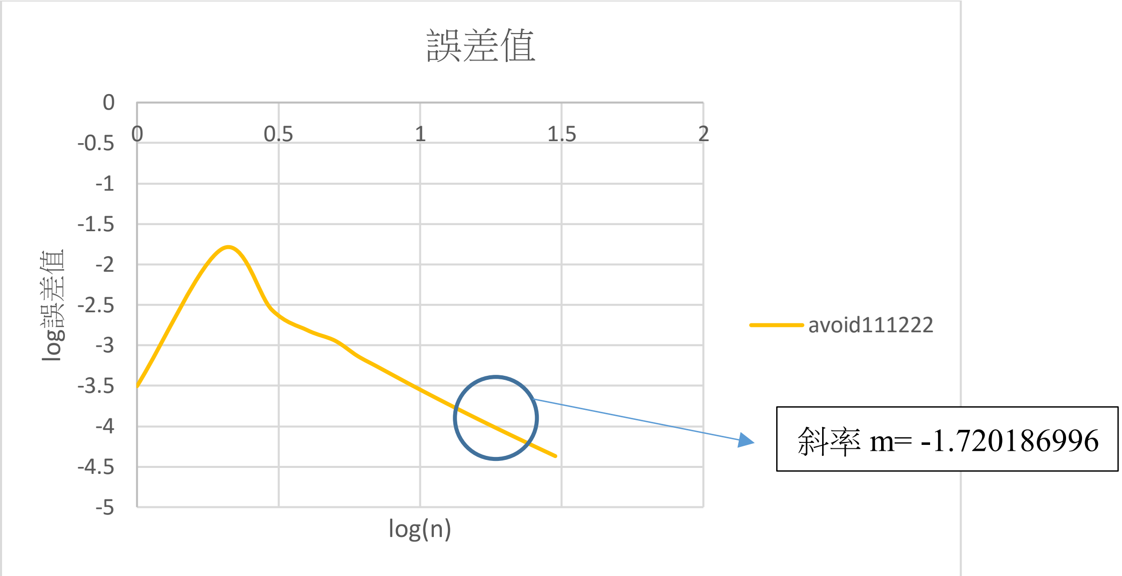
接下來觀察**誤差值** $\sum_i \left(g\left(\frac{i}{n}\right) - f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2$ 隨著 n 的變化。

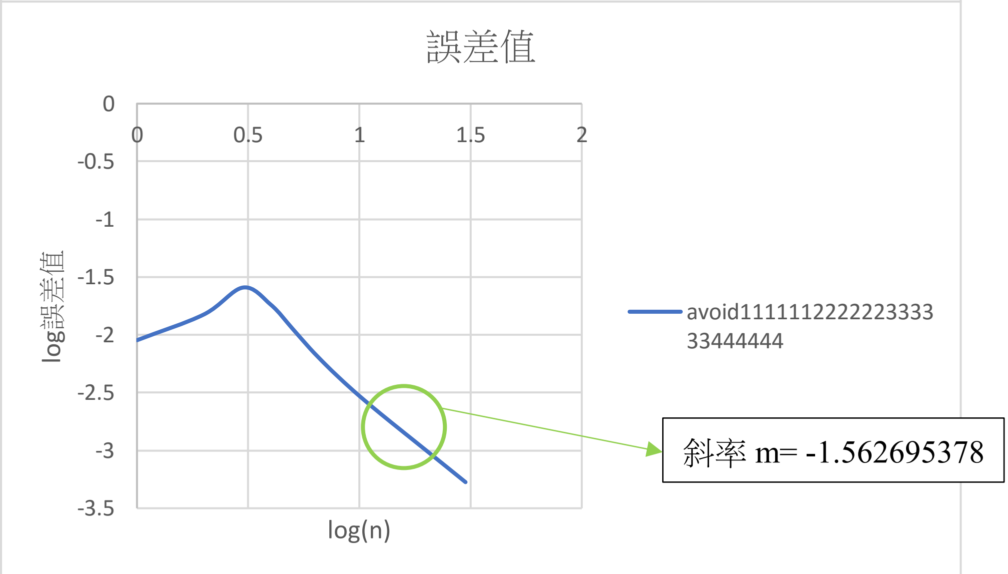
下圖為 $\log(n)$ 與 $\log\left(\sum_i \left(g\left(\frac{i}{n}\right) - f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2 \right)$ 圖


誤差值
log誤差值
log(n)
avoid11
斜率 m= -1.5653328


誤差值
log誤差值
log(n)
avoid111
斜率 m= -1.456546922


誤差值
log誤差值
log(n)
avoid1122
斜率 m= -2.682404879





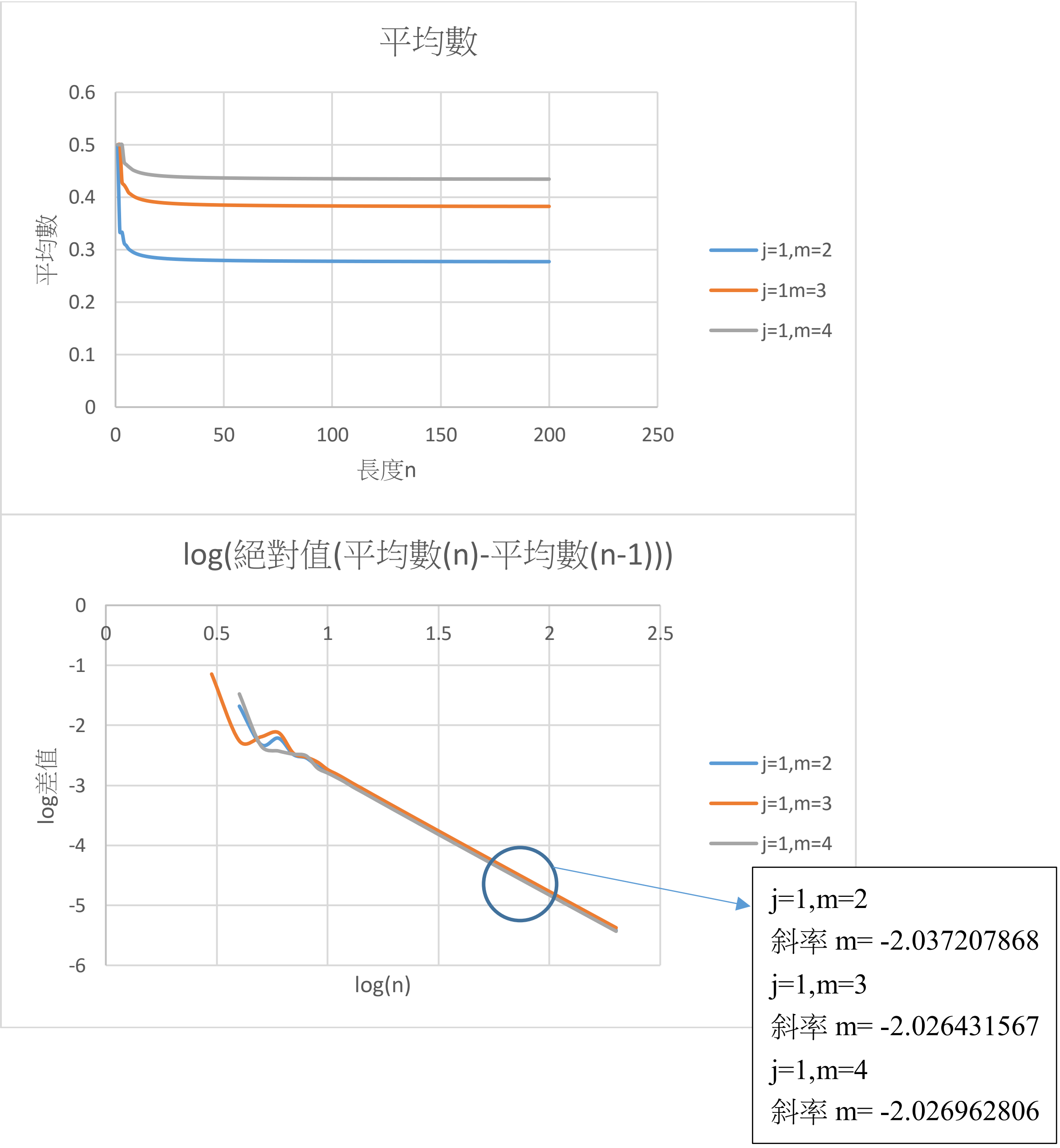
由上圖表發現，n 越大，誤差值呈遞減且趨近於零。

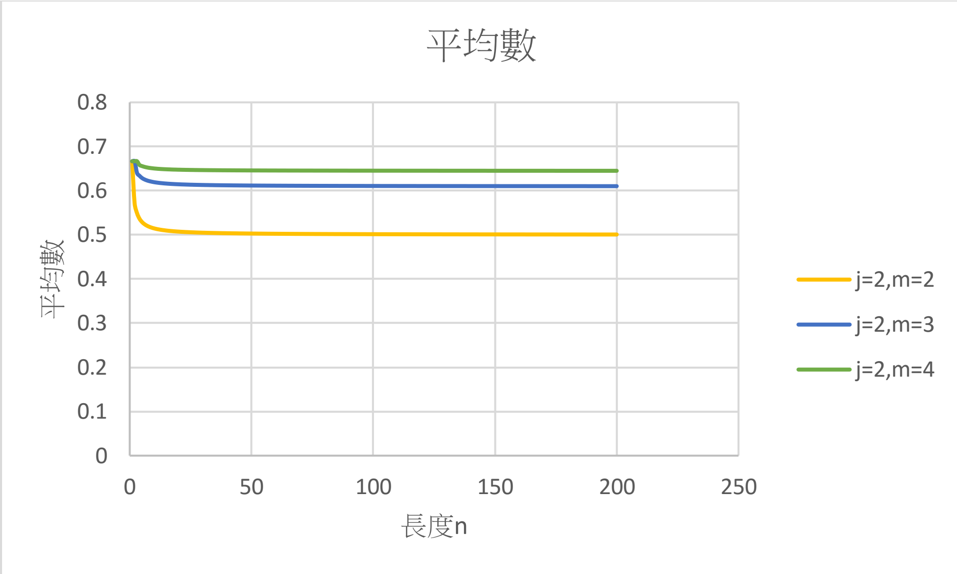
因此推測 $f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)$ 逼近常態分佈曲線 $g\left(\frac{i}{n}\right)$

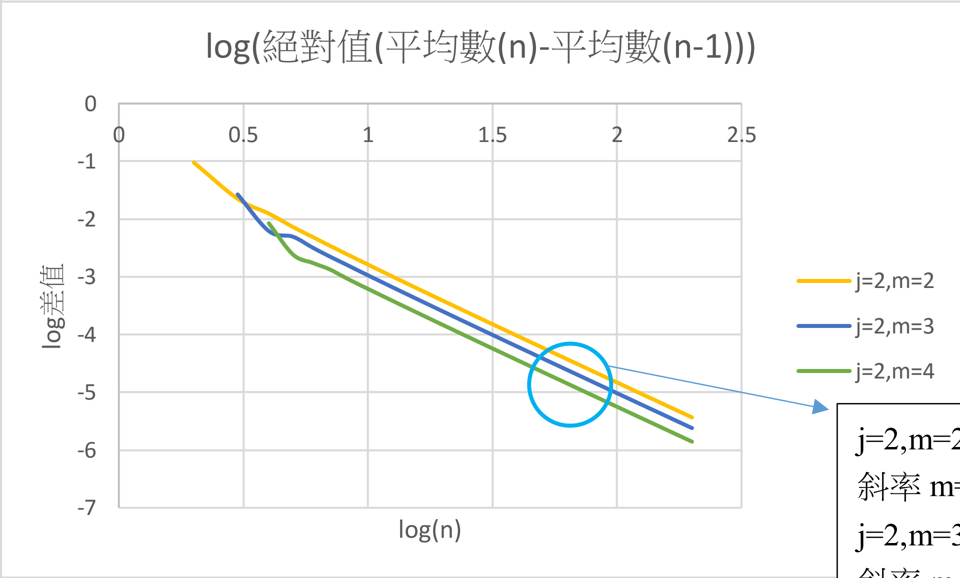
(二)　平均數：

計算平均數$\sum_i \frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$，隨著 n 改變，可發現平均數趨近於一值。

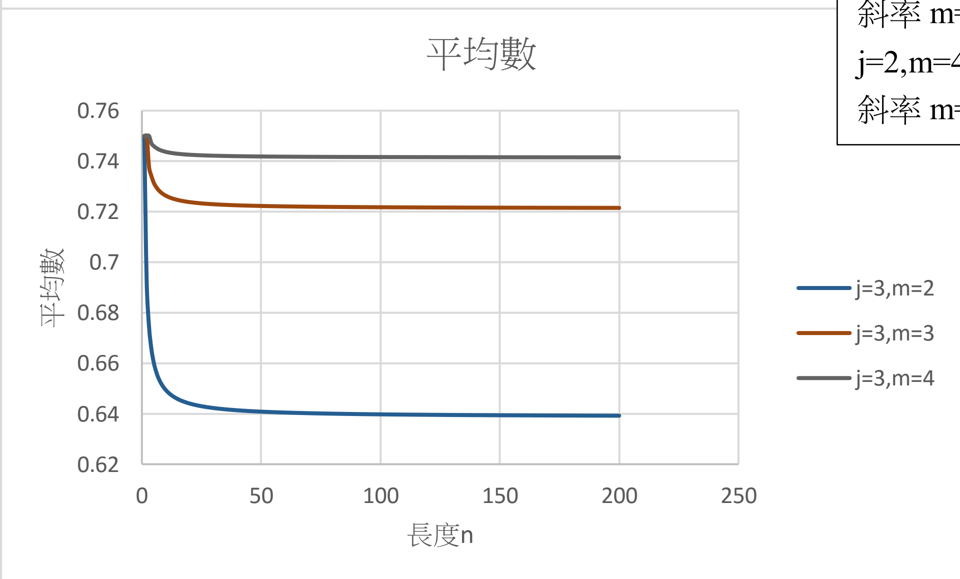
平均數之逼近值				
$m \backslash j$	1	2	3	4
2	0.2771	0.5007	0.6392	0.7239
3	0.3824	0.6102	0.7215	0.7839
4	0.4343	0.645	0.7415	0.796

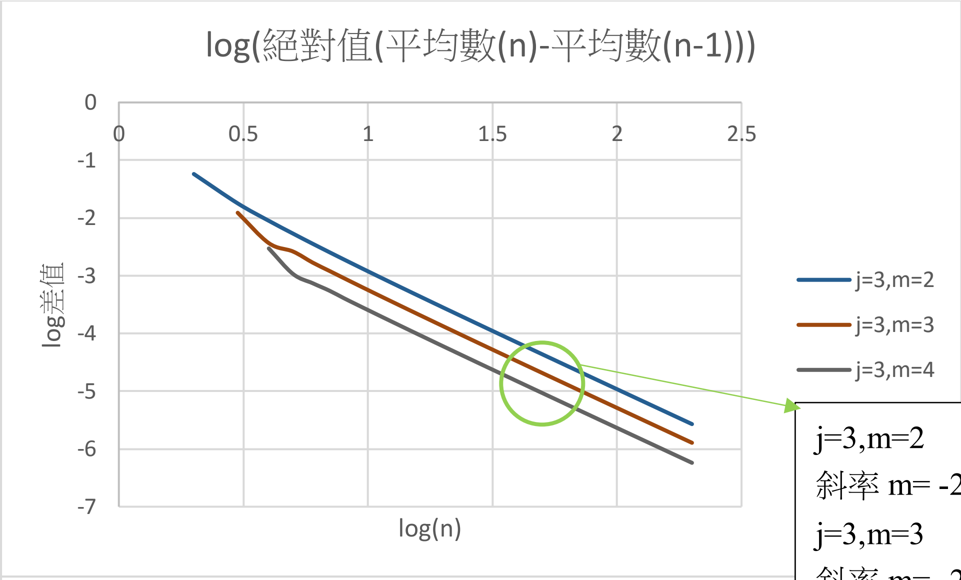




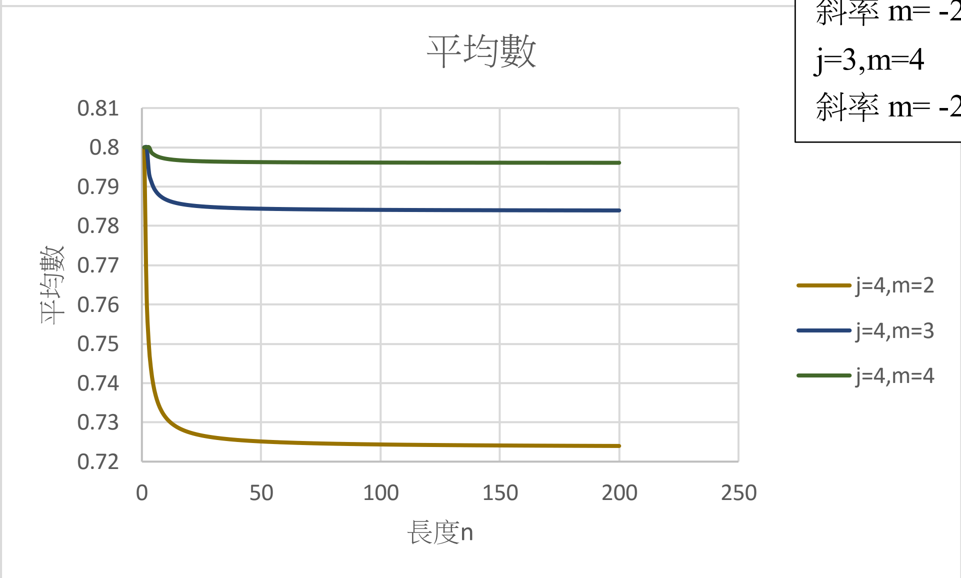


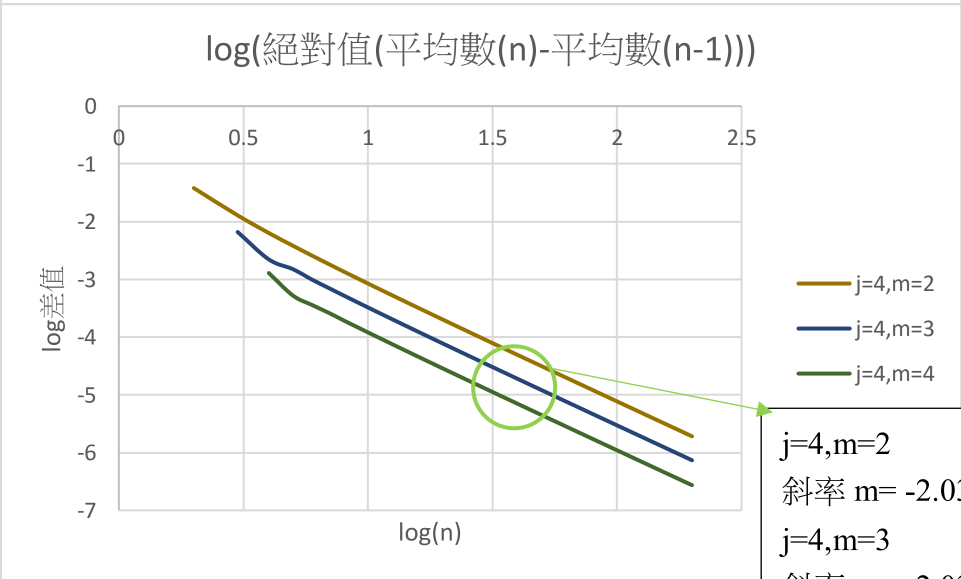
j=2,m=2
斜率 m= -2.033497388
j=2,m=3
斜率 m= -2.03349551
j=2,m=4
斜率 m= -2.033545212





j=3,m=2
斜率 m= -2.033496972
j=3,m=3
斜率 m= -2.033498131
j=3,m=4
斜率 m= -2.033539052



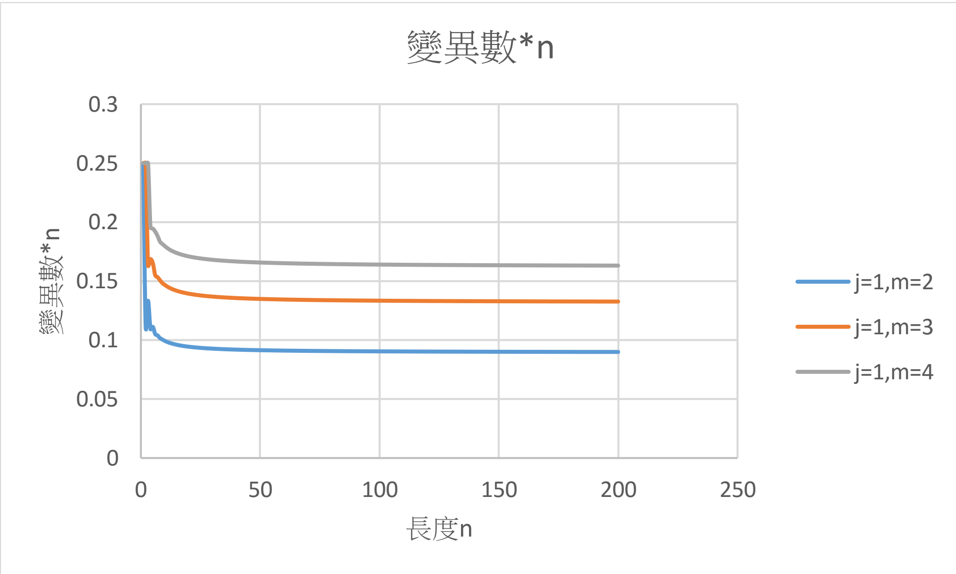


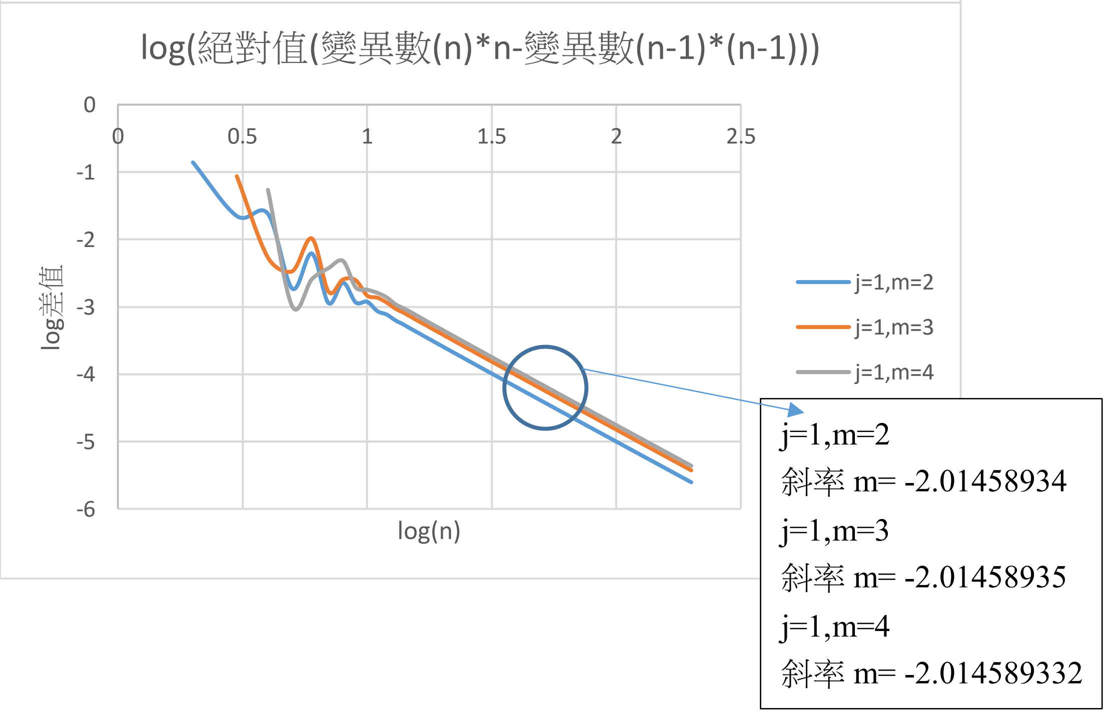
j=4,m=2
斜率 m= -2.033496976
j=4,m=3
斜率 m= -2.033496376
j=4,m=4
斜率 m= -2.03351174

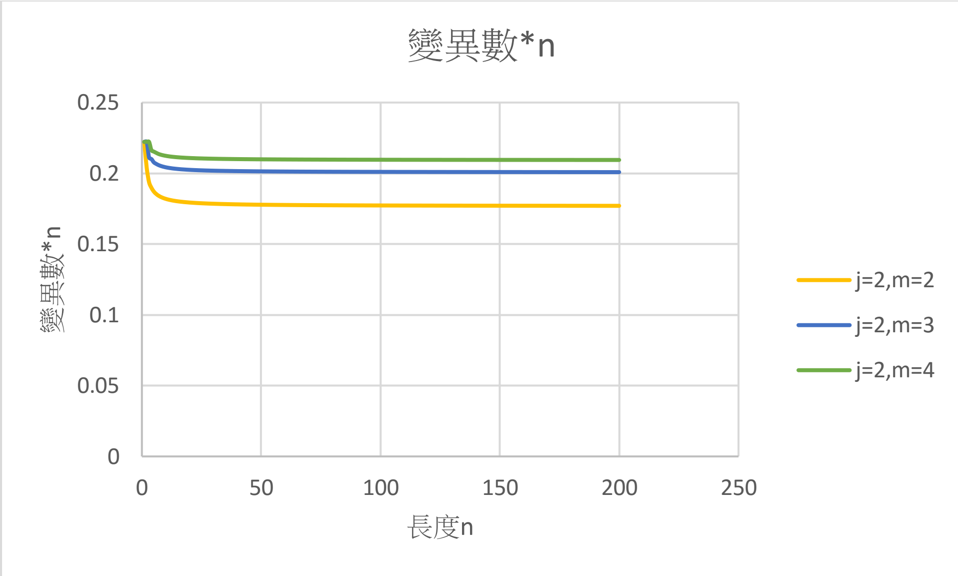
(三)　變異數：

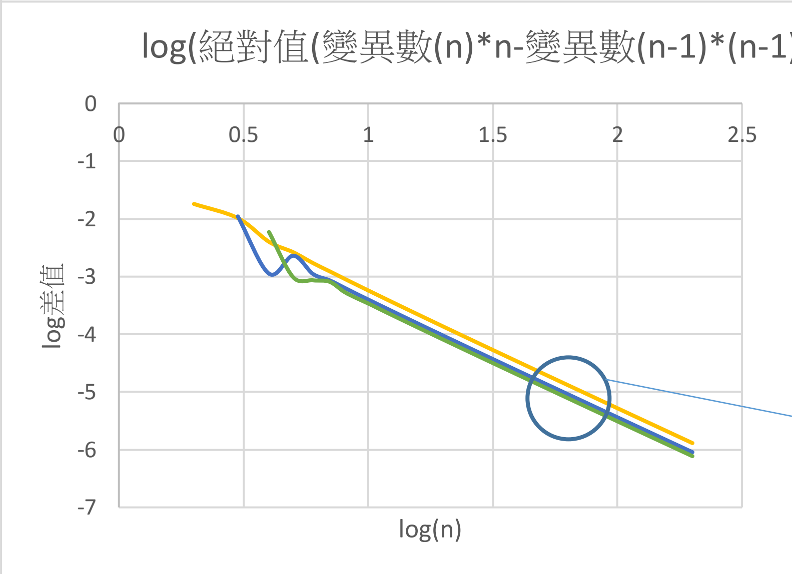
在計算變異數$\sum_i \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)} - \left(\sum_i \frac{i}{n} \frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}\right)^2$，乘上 n 後，可發現 $\left(\sum_i \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)} - \left(\sum_i \frac{i}{n} \frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}\right)^2\right) \times n$ 隨著 n 改變，也趨近於一值。

變異數*n 之逼近值				
$m \setminus j$	1	2	3	4
2	0.0899	0.177	0.192	0.1788
3	0.1326	0.2008	0.1868	0.163
4	0.1631	0.2094	0.1858	0.1601

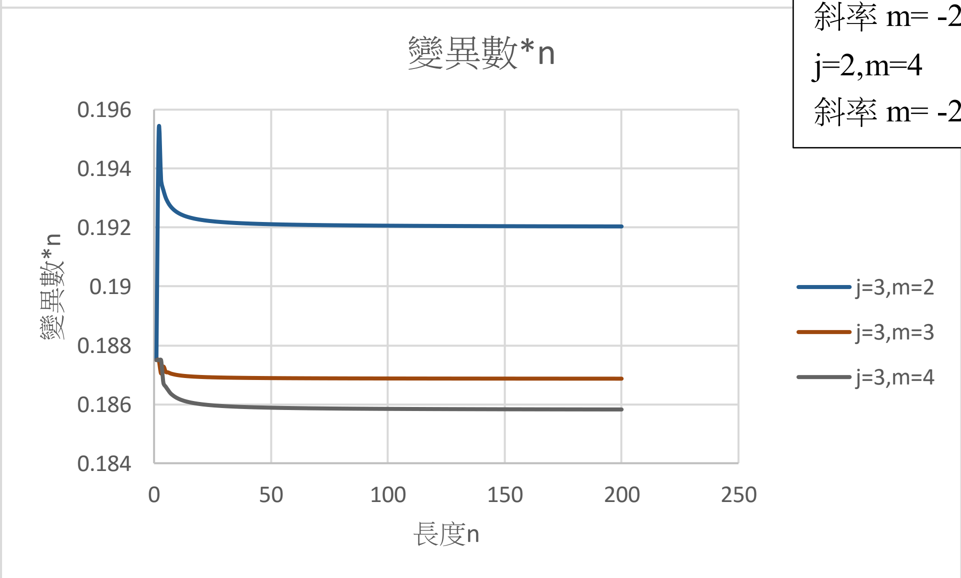


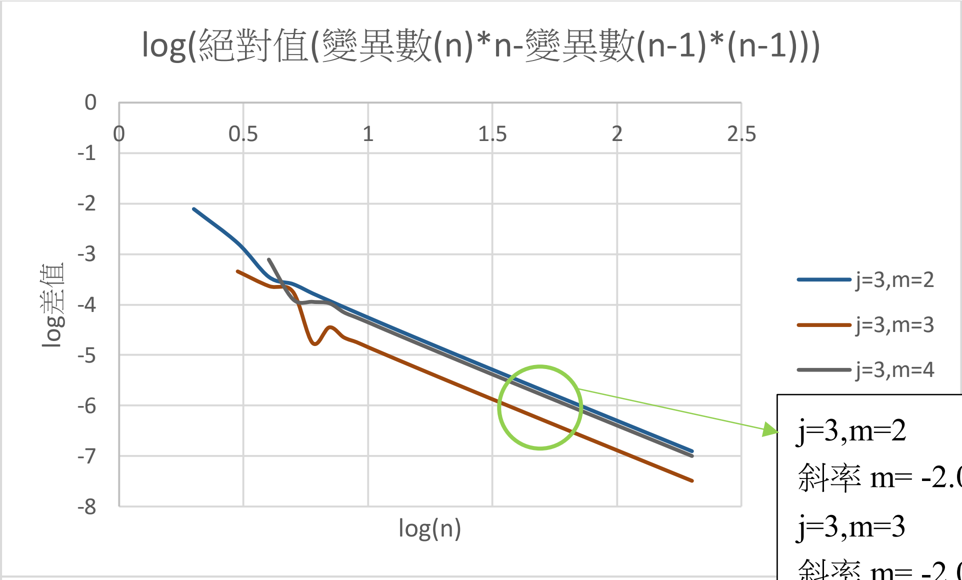




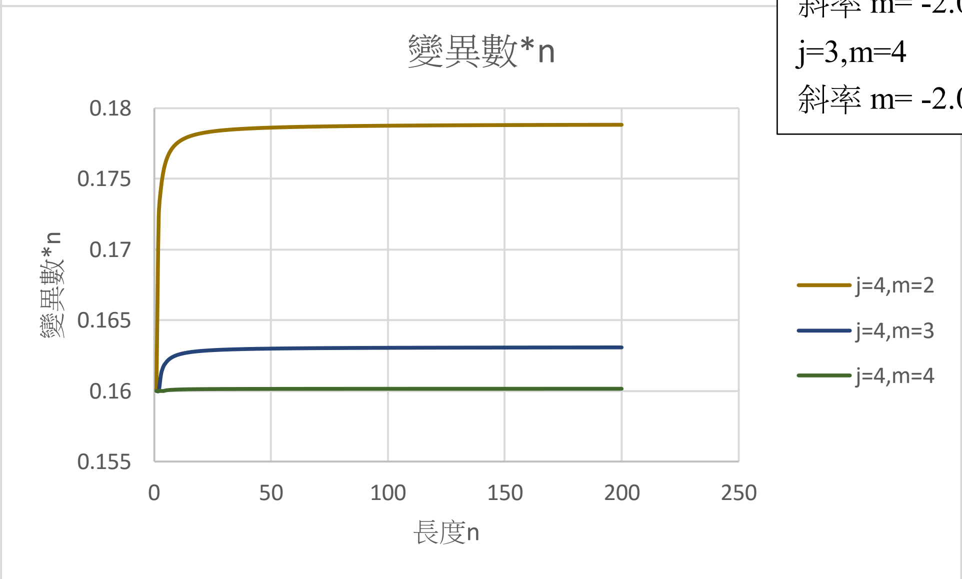


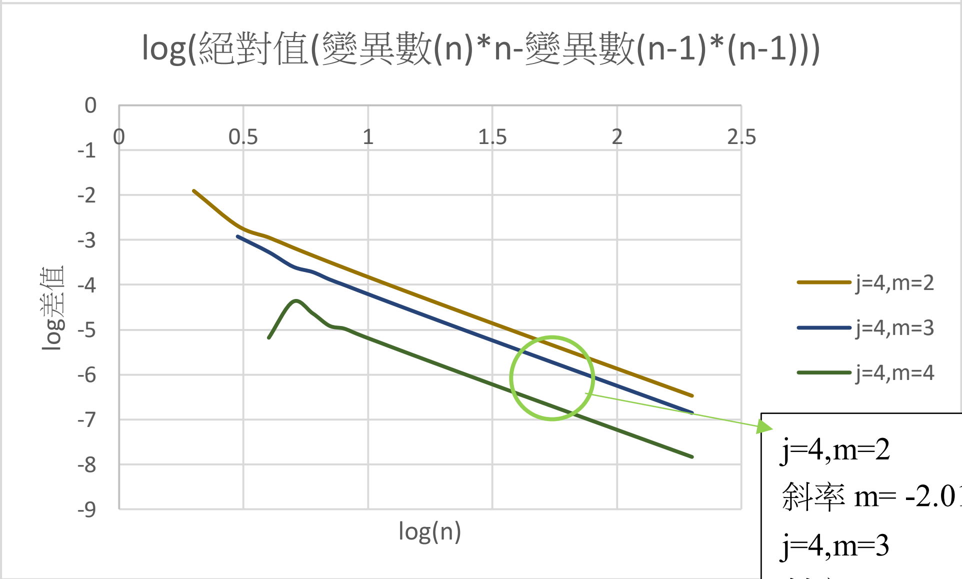
j=2,m=2
斜率 m= -2.01458934
j=2,m=3
斜率 m= -2.014589356
j=2,m=4
斜率 m= -2.014589375





j=3,m=2
斜率 m= -2.014589185
j=3,m=3
斜率 m= -2.014586774
j=3,m=4
斜率 m= -2.014588215





j=4,m=2
斜率 m= -2.01458926
j=4,m=3
斜率 m= -2.014589484
j=4,m=4
斜率 m= -2.014590223

伍、 研究結果與結論

俄國學者 Tanya Khovanova [1]提出長度為 n，避免同一物連續出現兩次的方法數之遞迴式。筆者則於去年臺灣國際科展[4]中推廣到避免同一物連續出現 m 次數的方法。

本研究將 $A(t,n,m,j)$ 寫成以 $B(n,m,j,i)$ 為係數之多項式，並著重於 $B(n,m,j,i)$ 之探討，研究其生成函數、一般式及遞迴關係，並得到當 $i<m$ 時 $B(n,m,j,i)$ 之一般式。其中最重要的部份便是 $B(n,m,j,i)$ 之常態分佈、誤差值、平均數及變異數之圖形探討：n 越大時，誤差值趨近於 0；平均數逼近於一值；變異數乘上 n 也逼近於一值。此發現將在研究避免相同物連續出現的領域找到新的一片天。

綜合以上之研究結果，整理如下：

定理一（目的三）：令生成函數 $R_{m,j}^{t}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A(t,n,m,j)x^{n}$，則：

$$R_{m,j}^{t}(x)=\left(1-x^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(tx-(j-1)x^{m}-(t-j)x^{m+1}\right)^{k}\right)$$

定理三（目的三）：令生成函數 $G_{m,j}(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}B(n,m,j,i)x^{n}y^{i}$，則：

$$G_{m,j}(x,y)=\left(1-(xy)^{m}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((1+jy)x-(j-1+x)(xy)^{m}\right)^{k}\right)$$

定理四（目的二）：固定避免最小連續長度 m、有限制元素類數 j 及選取元素個數 i，$B(n,m,j,i)$ 呈現一遞迴關係：

$$B(n,m,j,i)=j^{i}+\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\binom{i}{k}B(n-k,m,j,i)$$

定理五（目的三）：已知 $B(i,m,j,i), \ldots, B(2i\text{-}1,m,j,i)$ 共 i 個值

$$y_{k}=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l}\binom{k}{l}B(i+k-l-1,m,j,i)$$

則：$B(n,m,j,i)=\sum_{r=1}^{i}y_{r}\binom{n-i+1}{r}$

定理六（目的三）：$i<m$ 時，$B(n,m,j,i)=j^{i}\binom{n}{i}$

定理七（目的三）：$B(n,2,1,i)=\binom{n-i+1}{i}$ 且 $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\binom{n-i+1}{i}=F(n+2)$

猜想一（目的四）：

(1) 令函數 $f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$，發現和常態分佈曲線 $g\left(\frac{i}{n}\right)$ 之誤差值

$\sum_{i}\left(g\left(\frac{i}{n}\right)-f_{m,j}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{2}$ 隨著 n 越大而逼近於 0

(2) 計算其平均數 $\mu=\sum_{i}\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}$，發現隨著 n 越大而趨近於一值

平均數之逼近值				
$m \backslash j$	1	2	3	4
2	0.2771	0.5007	0.6392	0.7239
3	0.3824	0.6102	0.7215	0.7839
4	0.4343	0.645	0.7415	0.796

(3) 計算其變異數 $\sigma^{2}=\sum_{i}\left(\frac{i}{n}\right)^{2}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}-\left(\sum_{i}\frac{i}{n}\frac{B(n,m,j,i)}{A(j+1,n,m,j)}\right)^{2}$，發現 $\sigma^{2}\times n$ 隨著 n 越大而趨近於一值

變異數*n 之逼近值				
$m \backslash j$	1	2	3	4
2	0.0899	0.177	0.192	0.1788
3	0.1326	0.2008	0.1868	0.163
4	0.1631	0.2094	0.1858	0.1601

陸、　參考文獻

[1] Tanya Khovanova, Recursive Sequences Proofs, http://www.tanyakhovanova.com/RecursiveSequences/RecursiveSequencesProofs.html#common , 2007.

[2]游森棚、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明，普通高級中學數學課本第二冊，翰林書局，2013。

[3]游森棚、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明，普通高級中學數學課本選修數甲上冊，翰林書局，2015。

[4]從 Avoid 數列到類巴斯卡三角形，臺灣國際科展，2015。

柒、 附錄

一、 $B(n,m,j,i)$一般式

（一） $m=2$

(1) $i=2$, $B(n,2,j,2)=2!\binom{j}{2}\binom{n}{2}+1!\binom{j}{1}\binom{n-1}{2}$

Example: $B(4,2,3,2)=3\times 2\binom{4}{2}+3\binom{3}{2}=45$

(2) $i=3$, $B(n,2,j,3)=3!\binom{j}{3}\binom{n}{3}+2!\binom{j}{2}\binom{n}{3}+2\times 2!\binom{j}{2}\binom{n-1}{3}+1!\binom{j}{1}\binom{n-2}{3}$

Example: $B(6,2,3,3)=3\times 2\times 1\binom{6}{3}+3\times 2\binom{6}{3}+2\times 3\times 2\binom{5}{3}+3\binom{4}{3}=372$

(3) $i=4$,

$$B(n,2,j,4)=4!\binom{j}{4}\binom{n}{4}+3\times 3!\binom{j}{3}\binom{n}{4}+2!\binom{j}{2}\binom{n}{4}+3\times 3!\binom{j}{3}\binom{n-1}{4}+3\times 2!\binom{j}{2}\binom{n-1}{4}$$
$$+3\times 2!\binom{j}{2}\binom{n-2}{4}+1!\binom{j}{1}\binom{n-3}{4}$$

Example:

$$B(7,2,3,4)=3\times 3\times 2\times 1\binom{7}{4}+3\times 2\binom{7}{4}+3\times 3\times 2\times 1\binom{6}{4}+3\times 3\times 2\binom{6}{4}+3\times 3\times 2\binom{5}{4}+3\binom{4}{4}$$
$$=1473$$

（二） $m=3$

(1) $i=2$， $B(n,3,j,2)=2!\binom{j}{2}\binom{n}{2}+1!\binom{j}{1}\binom{n}{2}$

Example: $B(5,3,3,2)=3\times 2\binom{5}{2}+3\binom{5}{2}=90$

(2) $i=3$， $B(n,3,j,3)=3!\binom{j}{3}\binom{n}{3}+3\times 2!\binom{j}{2}\binom{n}{3}+1!\binom{j}{1}(2\binom{n-2}{2}+\binom{n-2}{3})$

Example: $B(6,3,3,3)=3\times 2\times 1\binom{6}{3}+3\times 3\times 2\binom{6}{3}+3(2\binom{4}{2}+\binom{4}{3})=528$

(3) $i=4$,

$$B(n,3,j,4)=4!\binom{j}{4}\binom{n}{4}+6\times 3!\binom{j}{3}\binom{n}{4}+5\times 2!\binom{j}{2}\binom{n}{4}+2\times 2!\binom{j}{2}(2\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{4})$$
$$+1!\binom{j}{1}(\binom{n-3}{2}+3\binom{n-3}{3}+\binom{n-3}{4})$$

Example:

$$B(6,3,3,4)=6\times 3\times 2\times 1\binom{6}{4}+5\times 3\times 2\binom{6}{4}+2\times 3\times 2(\,2\binom{4}{3}+\binom{4}{4})+3(\binom{3}{2}+3\binom{3}{3})=1116$$

（三） $m=4$

(1) $i=4$,

$$B(n,4,j,4)=4!\binom{j}{4}\binom{n}{4}+6\times 3!\binom{j}{3}\binom{n}{4}+7\times 2!\binom{j}{2}\binom{n}{4}+1!\binom{j}{1}(\,3\binom{n-3}{2}+3\binom{n-3}{3}+\binom{n-3}{4})$$

Example: $B(6,4,3,4)=6\times 3\times 2\times 1\binom{6}{4}+7\times 3\times 2\binom{6}{4}+3(\,3\binom{3}{2}+3\binom{3}{3})=1206$

(2) $i=5$,

$$B(n,4,j,5)=5!\binom{j}{5}\binom{n}{5}+10\times 4!\binom{j}{4}\binom{n}{5}+25\times 3!\binom{j}{3}\binom{n}{5}+10\times 2!\binom{j}{2}\binom{n}{5}+3\times 2!\binom{j}{2}\binom{n}{5}$$

$$+2\times 2!\binom{j}{2}(\,3\binom{n-3}{3}+3\binom{n-3}{4}+\binom{n-3}{5})+1!\binom{j}{1}(\,2\binom{n-4}{2}+6\binom{n-4}{3}+4\binom{n-4}{4}+\binom{n-4}{5})$$

Example:

$$B(7,4,3,5)=25\times 3\times 2\times 1\binom{7}{5}+10\times 3\times 2\binom{7}{5}+3\times 3\times 2\binom{7}{5}+2\times 3\times 2(\,3\binom{4}{3}+3\binom{4}{4})$$

$$+3(\,2\binom{3}{2}+6\binom{3}{3})$$

$$=5004$$

二、 類巴斯卡三角形(擷取)

Example m=2, j=1											
$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	0								
3	1	3	1	0							
4	1	4	3	0	0						
5	1	5	6	1	0	0					
6	1	6	10	4	0	0	0				
7	1	7	15	10	1	0	0	0			
8	1	8	21	20	5	0	0	0	0		
9	1	9	28	35	15	1	0	0	0	0	
10	1	10	36	56	35	6	0	0	0	0	0

Example m=2, j=2											
$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	2									
2	1	4	2								
3	1	6	8	2							
4	1	8	18	12	2						
5	1	10	32	38	16	2					
6	1	12	50	88	66	20	2				
7	1	14	72	170	192	102	24	2			
8	1	16	98	292	450	360	146	28	2		
9	1	18	128	462	912	1002	608	198	32	2	
10	1	20	162	688	1666	2364	1970	952	258	36	2

Example *m*=2, *j*=3											
n \ *i*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	3									
2	1	6	6								
3	1	9	21	12							
4	1	12	45	60	24						
5	1	15	78	171	156	48					
6	1	18	120	372	558	384	96				
7	1	21	171	690	1473	1656	912	192			
8	1	24	231	1152	3225	5160	4608	2112	384		
9	1	27	300	1785	6219	13083	16584	12240	4800	768	
10	1	30	378	2616	10941	28746	47910	50016	31392	10752	1536

Example *m*=4, *j*=2											
n \ *i*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	2									
2	1	4	4								
3	1	6	12	8							
4	1	8	24	32	14						
5	1	10	40	80	76	26					
6	1	12	60	160	234	172	48				
7	1	14	84	280	552	630	376	88			
8	1	16	112	448	1110	1720	1600	800	162		
9	1	18	144	672	2004	3922	4976	3888	1672	298	
10	1	20	180	960	3346	7908	12720	13600	9138	3444	548

Example m=4, j=3											
$n \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	3									
2	1	6	9								
3	1	9	27	27							
4	1	12	54	108	78						
5	1	15	90	270	399	228					
6	1	18	135	540	1206	1410	666				
7	1	21	189	945	2823	5004	4833	1944			
8	1	24	252	1512	5655	13440	19710	16200	5676		
9	1	27	324	2268	10188	30363	59796	74682	53400	16572	
10	1	30	405	3240	16989	60876	150525	252720	274635	173724	48384

【評語】010032

本作品討論 t 類不同物中選取 n 個作排列，避免連續元素出現的方法數。這作品去年參加國際科展獲得三等獎，但推導的公式太過複雜。經去年評審提醒，本次作品從生成函數的角度處理，獲得較為漂亮的公式，最後再以數值方式，看出和常態分配的關係，比起去年有長足進步。生成函數比去年組合方式所節省的計算時間，建議要以量化的方式去精確計算！