2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010028**

參展科別　數學

作品名稱　攜手共解圓-扭結理論之探討

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　新竹市立培英國民中學

指導教師　謝春忠、黃珮漩

作者姓名　張家翔、黃瑋翔

關鍵字　**扭結理論、Reidemeister moves、HOMFLY polynomial**

作者簡介

我是上面照片中穿著藍色衣服的張家翔。今年就讀新竹市立培英國中九年級。平常我的興趣是打桌球和算數學，尤其喜歡研究數學題目，因為每當解開艱澀的問題時，就會有股魔力般的成就感，促使我繼續解決問題。而當問題遇到瓶頸時，我總是投入運動的懷抱，放空心思打球，偶爾甚至能突然突破困境，想出解開問題的方法呢!

我是照片中左邊的黃瑋翔，今年也就讀新竹市立培英國中九年級。我喜歡找有趣的數學題目或找數學遊戲研究。除了在研究數學的時間外，平常還喜歡看動漫跟打籃球，每次看動漫或跟朋友打球時都讓我很放鬆，感覺頭腦更清醒。除此之外，我也很喜歡交朋友，或跟朋友出去玩。每次放鬆一下之後總又能讓我有繼續算數學的動力!

摘要

此篇研究發現在任何一個結中，都可以利用「牽手順序」和「交錯點編碼」兩種結的資訊直接看出一結化簡後的圖形。利用從「Reidemeister moves」所衍伸出的四種化簡方法{α, β, γ, δ}能更有效率的簡化結，並證明只需{α, β, γ, δ}就可化簡任何結，也利用{α, β, γ, δ}來驗證 HOMFLY 多項式是結不變量。由圖形及結的資訊我們發現，可使用「牽手順序」和「交錯點編碼」，搭配所討論出{α, β, γ, δ}的通式，依照步驟及通式簡化任何結。

本篇最重要的成果為：只需利用{α, β, γ, δ}即可化簡所有的結，而且比 Reidemeister moves 更有效率，因此可用{α, β, γ, δ}取代 Reidemeister moves。

不管是一個封閉曲線或是兩個以上封閉曲線，都會遵守前述的規則，可利用{α, β, γ, δ}簡化圖形。文中也討論了較特別並具有規律的結──「星星結」，發現星星結只需使用「牽手順序」即可簡化，最後利用星星結的結論，發展出牽手遊戲中特殊的牽手遊戲情形。

Abstract

Knot theory has been widely discussed in mathematics and physics. Inspired by a human knot game which is a knot in the background, we have studied how to simplify a knot. We found that we could use “hand sequence” and “crossing code” of a knot, to simplify a knot. By using our four moves {α, β, γ, δ} developed from “Reidemeister moves”, we can simplify a knot in a faster way. We have shown that knot moves {α, β, γ, δ} are sufficient ones for all kinds of knots. Either one closed curve knots or many closed curve knots obeys this rule.

We also found that star knots only need “hand sequence” to untie. Using this result, we created a new way to play the human knot game.

壹、 研究動機

在團體活動中，隊輔們喜歡帶破冰遊戲，因為可以帶動氣氛製造歡樂，而我們曾經玩過以下遊戲：數個人圍成一圈，每個人兩手牽住兩個不同人的手，而且不可以牽與自己相鄰的人的手。牽完後大家使出渾身解數，在兩手相連不分開的情況下，重新變回一個大圓。這個遊戲引發了我們的興趣，因為有時可以成功，有時候卻像打了死結一樣解不開，甚至有時解出的不是一個圓，而是數個圓。於是我們開始思考並研究此問題。

貳、 研究目的

一、 探討在牽手遊戲的各種牽手情況下，能否直接看出該情況是否可解。
二、 找出較特別且有規律的圖形的簡化方式，並發展特殊牽手遊戲的解法。
三、 找出可化簡結的方法，並證明其結的不變量是正確且這些方法是夠用的。
四、 尋找將結簡化的方法及步驟，並證明得到的方法可以通用在所有結。

參、 研究設備

1 米長棉線三條、膠帶、紙、筆、電腦、小畫家軟體。

肆、 研究過程

一、參考資料整理與名詞定義

我們去圖書館及上網找尋資料，以下列出幾點較重要的參考資料並做了討論：

(一) 至少要三個以上交錯點才可能形成一個結(交錯點：繩子交錯的地方)。只要此結未達到三個交錯點，就不可能成結。

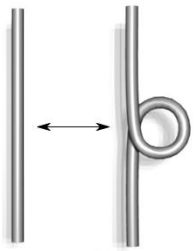
(二) 扭結理論(knot theory)──這個理論所涵蓋的範圍非常廣，較重要的討論是：如果一結符合扭結，則無法解回一個大圓，若不符合扭結，則可以解回一個大圓。扭結都是一封閉曲線，而「鏈」(link)則是兩個以上的封閉曲線且無法解成一個大圓。

綜合以上兩點，可提出初步的假設：牽手的方式可決定此次牽手是否能順利解開，若能解開代表此封閉曲線並不是扭結，稱為「不成結」；若不能解開代表此封閉曲線符合扭結，稱為「成結」。

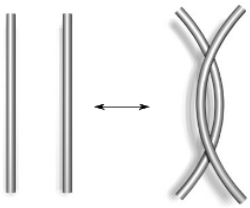
為了將牽手問題探討更廣，又查詢了更多資料並作整理：

(三) Reidemeister moves：在 1926 年，Kurt Reidemeister 為了要分辨結的種類，將結畫成投影圖(knot diagram)，在投影圖中可看出繩子互相交錯的牽手順序(本研究

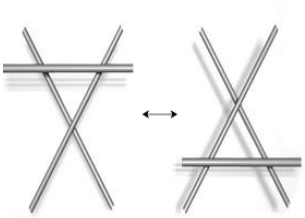
的圖形即是以投影圖表示)，發現兩投影圖的結若是相等的(也就是可以從一個變換到另一個)，則可以用三種最基本的方式來達到兩個圖形的變換，稱為 Reidemeister moves，為下列三種方式：



將一個圈扭開或扭入一個圈(研究內容中簡稱 R_1)



將一條線完全與另一條分開或將兩條線疊在一起(研究內容中簡稱 R_2)



三條線互相交叉，將其中一條從其他兩條所產生的交錯點一邊移動到另一邊(研究內容中簡稱 R_3)

(四) Dowker notation：原先是使用在電腦判斷結，使用 Dowker notation 的標記方式可以讓電腦了解一個結並畫出，但有一個問題：同樣的 Dowker notation 可能化出兩種結；同樣的結也可能寫出不一樣的 Dowker notation。

(五) 結的不變量：兩個投影圖，是否能透過初等變換(Reidemeister moves)從一個變到另一個。如果可以，就稱為等價；如果不可以，就稱為不等價。要說明兩投影圖是否等價，必須以邏輯推理為基礎，結的不變量即為判斷依據。

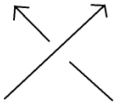
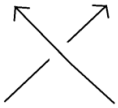
(六) 結的分類：近百年來數學家熱烈研究的問題，現在已經有電腦程式能夠依照步驟基本的簡化一個結，其中多是利用結的多項式來進行。

(七) 結的多項式: 一種以多項式形式表示結的不變量，而多項式的係數則代表結的性質。

(八) HOMFLY 多項式是一種雙變元的多項式結不變量，透過變元代換，它可以涵括 Jones 多項式和 Alexander 多項式在三維的情形。當兩個結的多項式不相同時，

代表那兩個結不等價，但反命題則不一定正確。

HOMFLY 多項式遵守以下三個規則:

1. $v^{-1}P$〈  〉$-vP$〈  〉$=zP$〈 〉

2. P〈0〉=1，當〈0〉表示沒有交錯點的結。

3. P〈$K_1 \cup K2$〉=〈$v^{-1}-v$〉z^{-1}P〈K_1〉P〈K_2〉，當〈$K_1 \cup K2$〉表示 K_1 和 K_2 互斥聯集。

由上述的資料探討中可得知，使用 Dowker notation 和 crossing orientations 配合電腦程式可以分類簡化一個結，但過程複雜，我們將試著使用容易擁有的資訊來完全簡化結。

二、 規則定義與研究在不同的最少人數中所結成的結

牽手遊戲有非常多種玩法，實際詢問老師、同學並參考網路資料後，訂定了兩條規則：

規則一：兩手牽著不同人。

規則二：不可以牽旁邊(相鄰)的人。

(一) 規則解釋與研究前提

1. 規則解釋：為了符合實際的情況並符合規則，規定每個人的手都要伸直，以下討論的結是屬於「每隻手都能伸直」的情況。

   全部人手牽好之後就可以開始解圓了，經過許多跨過或穿越等動作後，在保持手不放開的情況下，只要最後結果是解成一個大圓(也就是沒有交錯點)，不管人朝內朝外都算是成功。

2. 研究前提：依照這樣的規則討論，首先最讓我們感到困惑的是：真的能夠解成一個大圓嗎？會不會變成兩個圓或更多的圓？為了解決此問題，我們先做了假設：若解成的大圓是由一條線圍成，則人都只是線上一點，因此無須討論人數，只需要討論線的打結情形即可(意即當這條線打結時，此圓無法解開；若沒有打結，則可以解成一個大圓)。

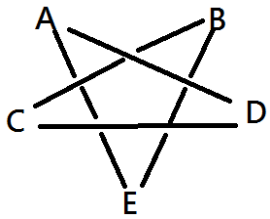
(二) 五人以上牽手情況

由於四人以下的牽手情況中，皆無法同時遵守規則一與規則二，因此以下將從五人以上的牽手情況開始討論。

1. 可能的牽手圖形

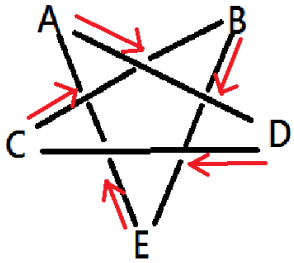
   將所有符合規則的圖形畫出後發現，在五人的牽手情況中，只有一種圖形同時

符合規則一與規則二並超過 3 個交錯點(如右圖)。



在列出所有五人可能牽出的圖形之後，我們發展出自己的結的資訊來進行簡化。使用的資訊是「牽手順序」和「交錯點編碼」，定義如下:

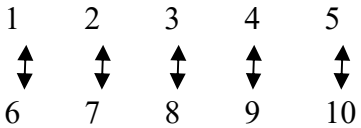
(1) 牽手順序

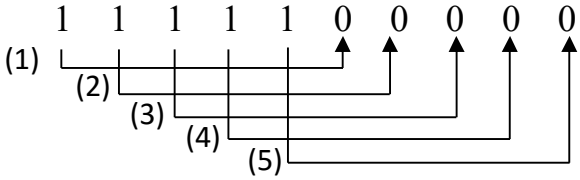


如右圖，先假設這條線是有方向性的，從 A 開始、A 結束，中間每次經過的交錯點，都觀察其上下情形，若在上則記為 1，若在下則記為 0。像右圖，線依序經過 ADCBEA，沿著 $\overline{AD}$ 走，遇到了兩個交錯點，都是從交錯點的上方經過，記作「11」，接著沿著 $\overline{DC}$ 走，經過了兩個交錯點，都是從上方經過，記作「11」，按照這樣的規則，一直走回到 A，將所有的上下情形列出可記為「1111100000」，這就是此圖形的「牽手順序」。牽手順序為 crossing orientations 的延伸。

(2) 交錯點編碼

依照牽手順序，可以發現第一個牽手順序碼遇到的交錯點與第六個相同、第二個與第七個相同、第三個與第八個相同、第四個與第九個相同、第五個與第十個相同，也就是說，第一個與第六個的牽手順序碼相反，若第一個是 1，則第六個是 0，依此類推。每一種圖形都會有屬於自己的一對一對應規則。在之後的討論中，將這個方式稱為「交錯點編碼」。交錯點編碼是 Dowker notation 的延伸。

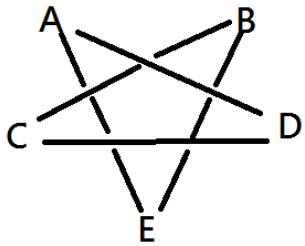




研究一開始只利用牽手順序來進行簡化，但後來發現同一組牽手順序碼也可能同時出現可解與不可解兩種情形(見討論二 p.29)，所以必須搭配交錯點編碼才能進行結的簡化。

2. 簡化方式

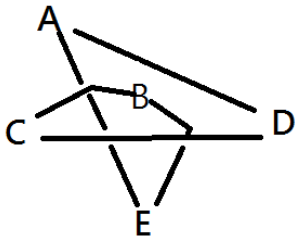
由下頁圖可看出，當 B 的兩手伸出，兩隻手都在 $\overline{AD}$ 下方，也就是從 C 走到 B 再到 E 的過程中，牽手順序中會有連續兩個 0，$\overline{AD}$ 對應到了這兩個 0，會連續記兩個 1，而這時 B 只要從 $\overline{AD}$ 下方穿過到中間，就會少兩個交錯點，由原本的五個交錯點變成三個交錯點，因此可知當一個人的兩手同在某一條線的上或下時，會有兩個交錯點消失。



1111100000

11111100000

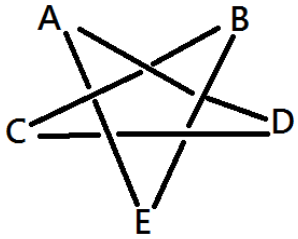
消失



111000

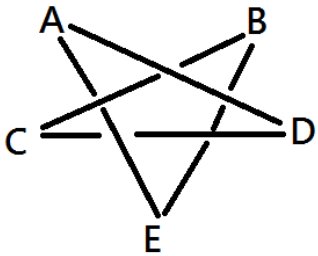
3. 依照簡化後的交錯點數量推論出成結情況

每出現一組「11」和相對應的「00」，就會少兩個交錯點，因此，此圖形中不可能出現四個交錯點的情況，而當沒有任何「11」或「00」的圖形，也就是簡化後為五個交錯點的情況(如右圖)，無法解成一圓。因此五個人的成結情況簡化後可能是三個交錯點或五個交錯點。

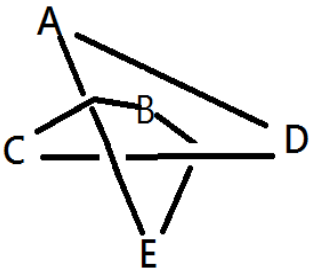


1010101010

簡化後有三個交錯點情況中，牽手順序由 5 個 1、5 個 0 所組成，這 10 個數字只能有一組 11，一組 00(這樣才會有三個交錯點)，依照交錯點編碼的順序，將所有可能的牽手順序列出為 1110100010 和 1101000101(如下圖)，數字順序調換後其實兩串數碼是相同的(可將 1110100010 的第一個 1 換成 1101000101 的最後一個 1)，也由此可知，五個人的牽手情況，有兩種是可以成結的。



11101100010

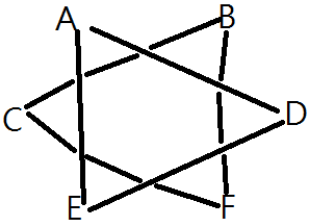


101010

簡化後形成三葉結

(三) 六人以上牽手情況

從六人開始，互相面對的三個人可以自行圍成一個三角形，另外三個人也可以圍成三角形(如右圖)，所以除了要探討圍成一封閉曲線的情況，還得探討圍成兩封閉曲線的情況。



1. 六人牽出兩封閉曲線

若六人為 A、B、C、D、E、F，則會圍成△ADE 和△BCF，因為這兩個三角形的上下情形一樣是相對的，所以只需要討論一個三角形的上下情形即可，在這裡我們討論△ADE 的上下情形。

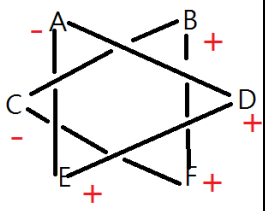
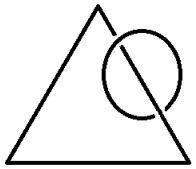
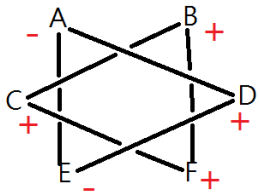
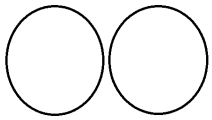
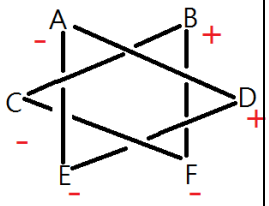
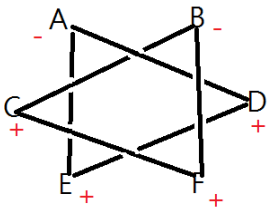
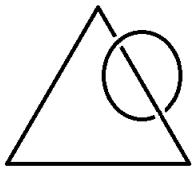
六人兩圈情況會有六個交錯點，對△ADE 來說，每個交錯點的牽手順序碼可

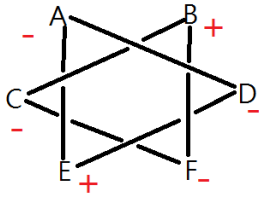
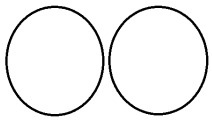
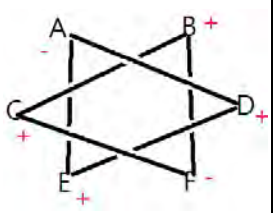
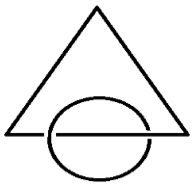
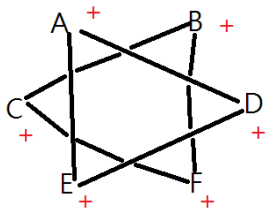
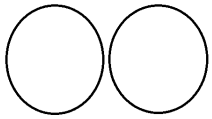
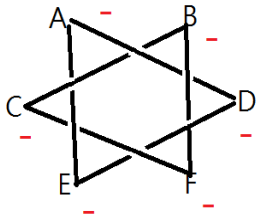
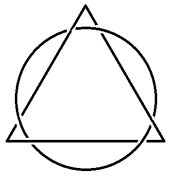
能是 1 或是 0，所以總共會有 2^6 種牽手順序，而因為兩個三角形的上下情形相反(像是△ADE 是 111000 時，△BCF 會是 000111)，所以必須再將得到的數字除以二，總共是 2^5=32 種，以下將這 32 種情況的數碼列出：

111110	111100	111010	110010	111000	110110	111111	101010
111101	111001	110101	100101	110001	101101		
111011	110011	101011	001011	100011	011011		
110111	100111	010111	010110				
101111	001111	101110	101100				
011111	011110	011101	011001				

在這 32 種情況中，可以分為 8 類，如上表所示，同一類的數字碼都是代表同一種結，因為這數字碼的起點是可以自行決定的，換個角度看，圖形還是一樣。

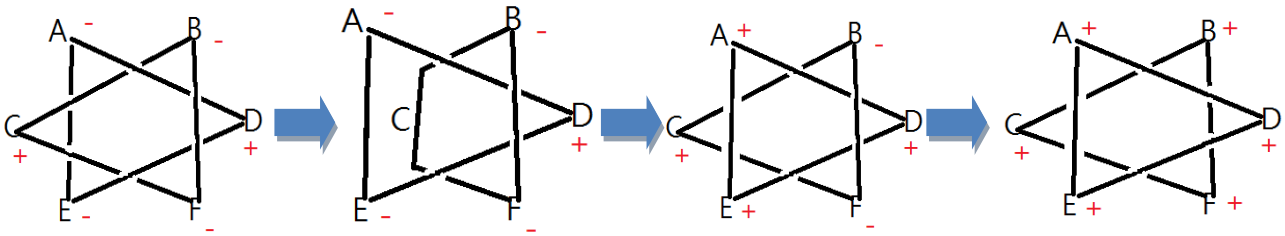
先定義若兩隻手伸出後，兩手都在同一線的上或下，稱為「+」；若兩隻手伸出後，兩手一上一下，稱為「－」，而討論「－」的相對位置，可以分類出結的種類。實際將這八種圖形畫出來，整理如下：

△ADE 牽手順序編碼	圖形	+的數量	－的數量	－的相對位置關係	是否可解	簡化圖及編碼簡化說明
111110		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1111~~10→10(鏈)
111100		4	2	分開	是	 ~~111100~~→無
111010		2	4	四個相連	否	~~11~~1010→1010(鏈)
110010		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1100~~10→10(鏈)

110110		2	4	兩兩相鄰	是	 ~~110110~~→~~00~~→無
111000		4	2	分開，隔兩個+	否	 ~~111000~~→10(鏈)
111111		6	0		是	 ~~111111~~→無
101010		0	6	全部相連	否	 101010(鏈)

由上表可知，六人以上牽成兩封閉曲線會有五種情況成結，形成「鏈」(link)。可利用牽手順序的數碼將六角星形簡化，並很容易看出是否成結。

(1) 從上表歸納並討論後，發現六人兩封閉曲線情況可以用以下方法化簡：如下圖，在此圖 100100 的情況下，會出現兩個+和四個－，以 C 來看，若將 C 先向內移動，再從 $\overline{AE}$ 的下方穿出，發現 A 和 E 都變成了+，而 C 不變；對 D 重複這個動作，全部的人都變成+了，由此可知這個圖是可以解開的。就像點燈遊戲一樣，只能點+，點了+之後旁邊的－會變成+、+會變成－，而原本點的+依然是+，若能讓所有的人都變成+即可解開。

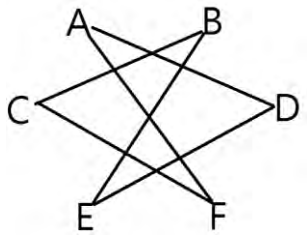


100100

(2) 從另一個角度看，兩個封閉曲線的情況經過簡化後，只需要兩個交錯點即無法解開，如上圖 C 向內移動後可以減少兩個交錯點，依照 100100 的順序來看，是最後兩個交錯點 00 消失，而 D 向內移動是中間的兩個交錯點 00 消失，剩下的 11 可以消掉不算一個交錯點，因此為不成結的圖形。依照這種想法，11 或 00 連在一起即可抵銷不算交錯點，也可以解決六人兩封閉曲線的問題，像圖 101000，僅可消去最後的 00，剩下的 1010 就是簡化後的牽手順序(成結)。

2. 六人牽成一封閉曲線

在六個人的情況下圍成一封閉曲線，首先要找出有幾種可能的圖形，討論後歸納出在六人一封閉曲線的情況下，可能有兩種圖形，但將這兩種圖形放在一起比較，傾斜角度後可發現兩者是同一種圖形(如下圖)。

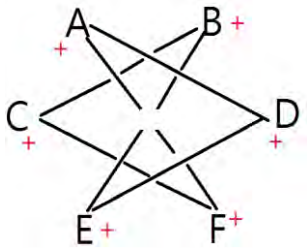


將所有情形用+和－的方式討論，發現在六人情況中，可以每個人都是+(即兩手同上或同下)，但若五人同為+則無法畫出，而四人是+又可以畫出來，可歸類為當有偶數或零個人是+時，則圖形可畫出，奇數則不行(其解釋請見 p.28 討論)。以下將這些情形作細部的分類：

(註：由圖形可觀察出，因為兩手伸出後所遇到的交錯點數量不同，因此 A、B、E、F 可視為同一類，C、D 則視為另外一類，下列表格的組合方式會將兩類分開。)

兩手同在上或在下的人數	+的人(每類僅以一種代表)					
6+	ABCDEF					
4+	ABEF	ABCD	ABCE	ABCF	ACDE	BCDE
2+	CD	AB	BD	AD	AE	AF
0+	(無)					

實際將上表的圖形畫出，發現這 14 種圖形中，以+和－分類僅可分類出靠近六人的六個交錯點，中間的交錯點並沒有討論到，而這個交錯點是兩條線疊合而成，會有兩種疊合方法(如右圖，中間空白處有兩種可能的圖形)，也就是每種圖形都還得再多討論一種，即 28 種圖形。



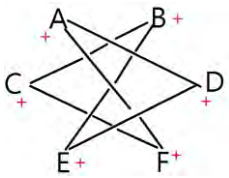
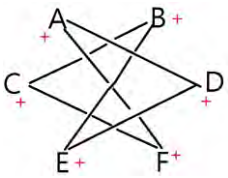
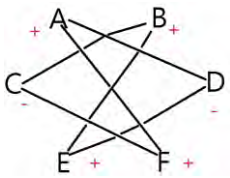
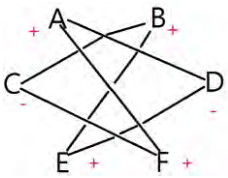
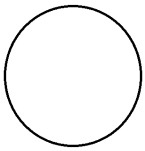
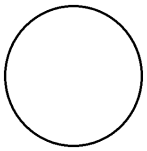
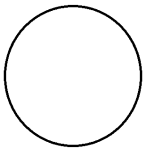
28 種結簡化的方式遵循以下步驟：

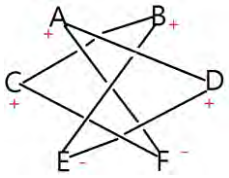
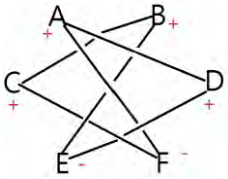
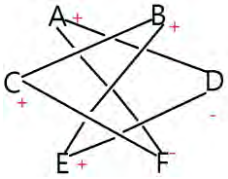
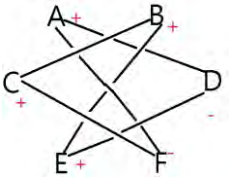
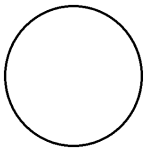
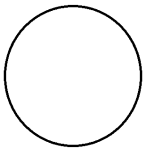
(1) 用約 1 米長的棉線擺成如投影圖所示的結。

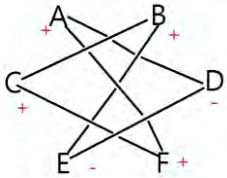
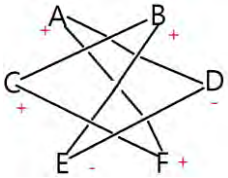
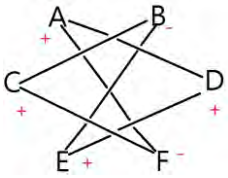
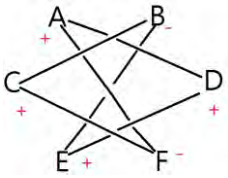
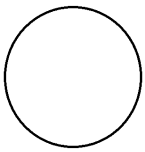
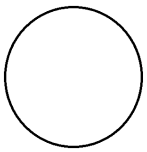
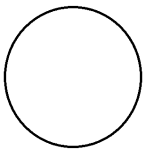
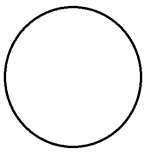
(2) 重複尋找是否有 R_1 及 R_2，一直到牽手順序變為 10101010……(1 與 0 完全交錯排列)，且沒有任何符合 R_1 及 R_2 所要拉開的線。

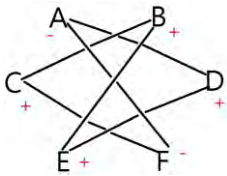
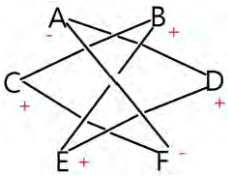
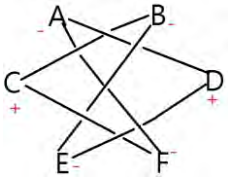
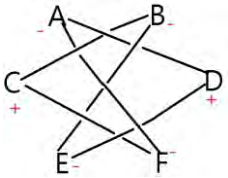
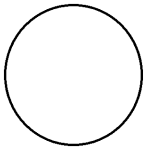
(3) 記錄結果。

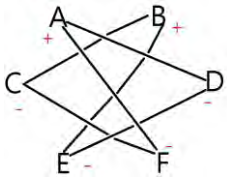
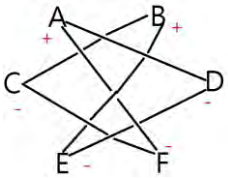
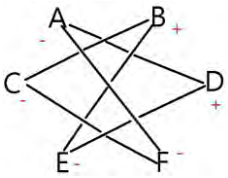
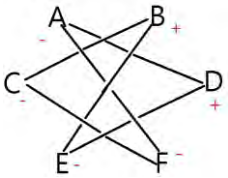
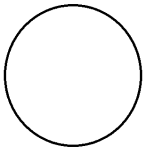
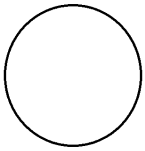
註：因 C 和 D 兩手遇到不同線段，因此不可使用前面所提到的 11 和 00 消去法。

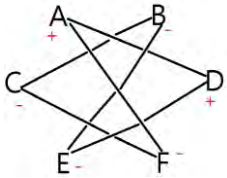
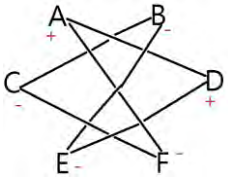
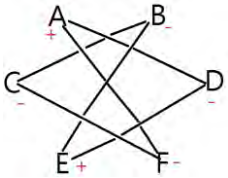
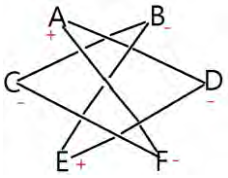
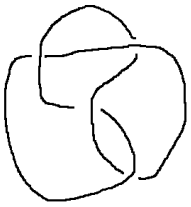
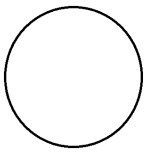
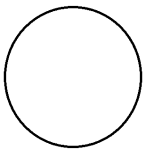
+的人	ABCDEF(1)	ABCDEF(2)	ABEF(1)	ABEF(2)
圖形				
牽手順序	11111000000011	11111100000001	11000100011101	11000000011111
是否可解	是	是	否(三葉結)	是
解完的圖形				

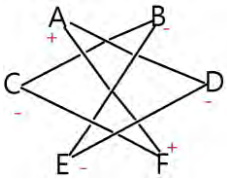
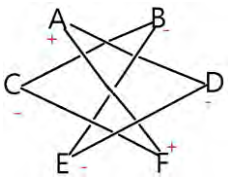
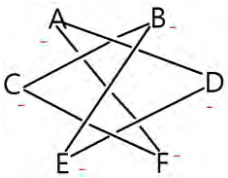
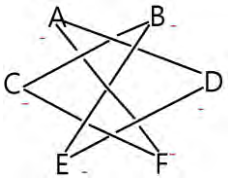
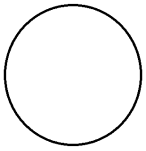
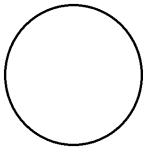
+的人	ABCD(1)	ABCD(2)	ABCE(1)	ABCE(2)
圖形				
牽手順序	11101100001001	11101000001011	00100111111000	00100011111010
是否可解	否(八字結)	是	是	否(三葉結)
解完的圖形				

+的人	ABCF(1)	ABCF(2)	ACDE(1)	ACDE(2)
圖形				
牽手順序	00110011110010	00110111110000	01100101111000	01100001111010
是否可解	是	是	是	是
解完的圖形				

+的人	BCDE(1)	BCDE(2)	CD(1)	CD(2)
圖形				
牽手順序	00011111000101	00011011000111	10010110110100	10010010110110
是否可解	否(三葉結)	是	否(六交錯點)	否(六交錯點)
解完的圖形				

+的人	AB(1)	AB(2)	BD(1)	BD(2)
圖形				
牽手順序	11010000010111	11010100010101	00010011010111	00010111010101
是否可解	是	否(五交錯點)	是	否(五交錯點)
解完的圖形				

+的人	AD(1)	AD(2)	AE(1)	AE(2)
圖形				
牽手順序	10010010010111	10010100010101	10100110011001	10100010011011
是否可解	否(八字結)	是	是	否(三葉結)
解完的圖形				

+的人	AF(1)	AF(2)	無(1)	無(2)
圖形				
牽手順序	10110110010001	10110010010011	10101110101000	10101010101010
是否可解	是	是	否(三葉結)	否(七交錯點)
解完的圖形				

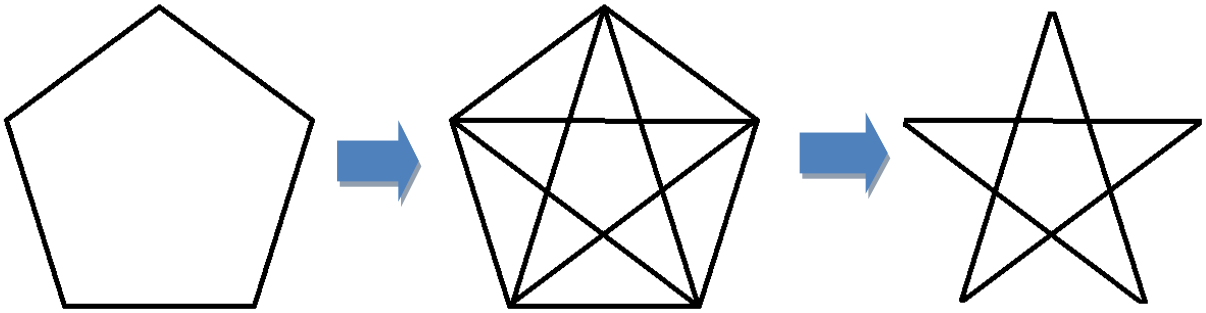
由以上表格可以清楚看出在六人牽成一封閉曲線的情況下，所有可能成結的情況。

三、星星結與特殊牽手遊戲

(一) 星星結

在以上一一找解的過程中，發現其中最有規律並最常在牽手遊戲中牽出的圖形就是「星星結」，星星結的特色就是極有規律，而且同種類的圖形可以用同樣的方式解出，因此讓我們極感興趣，決定研究一些星星結，找出其特定的解法。

星星結的畫法很容易，先畫出一個正多邊形，從某些頂點開始以有規律的走法將每個頂點都走過，畫完後再將原多邊形外框擦掉即可(如下頁圖五芒星)。



我們也討論了星星結所有可能的情況。假設一星星結有 x 個頂點，可牽出 $\left|\frac{x}{2}\right|-2$ 種星星結。因為不管剛開始在畫圖型的時候，是利用什麼規律，伸出去的兩手都只可能是遇到同一線段或遇到不同線段，因此可以知道星星結的簡化方式只有兩種，並且可以不看交錯點編碼，是最簡便的簡化方式。以下將其分為兩大類並說明其簡化方式。

1. 五芒星及六芒星的簡化法

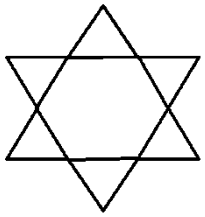
如右圖，當五芒星及六芒星的最外面的頂點(以下全部簡稱頂點)，當兩手同在上或同在下，頂點向內移動後可以減少兩個交錯點，列出牽手順序並將相對應的 11 或 00 刪除後，剩下的數字即為最終化簡的圖形。一封閉曲線的結至少要三個交錯點才能成結，兩封閉曲線只需要兩個。

五芒星

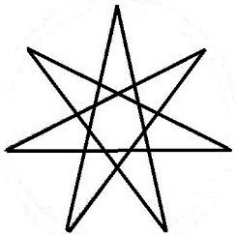
2. 七芒星的簡化法

如右圖七芒星(1)，發現這與五芒星和六芒星的解法不同，這是因為每一個頂點所伸出的兩線交錯於兩條不同的線(雖然是同一大條牽手的線，卻是由不同的兩組頂點所連接)，因此儘管兩手同在上或同在下，並不能直接向內移動而減少交錯點。

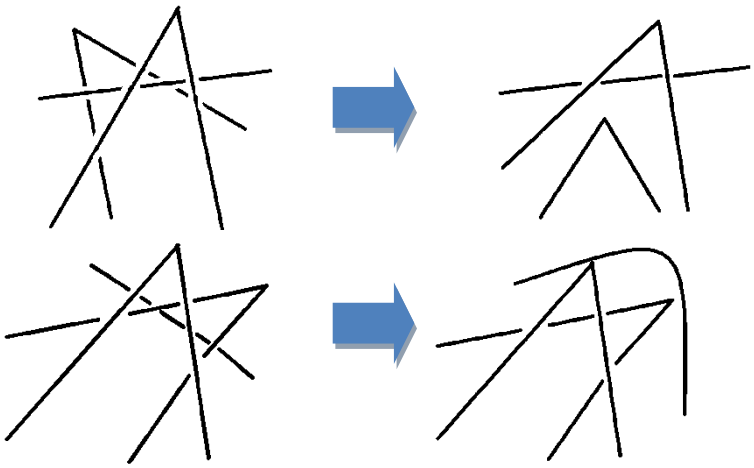
在這一類的星星結中，因為其規律(如下圖)導致若出現連續 3 碼相同，可消去前後 2 碼，重複一樣的方法後，最後得到的即為化簡過後的結。連續使用兩次簡化方法 4，可以減少 4 個交錯點，因此當此圖中有 4 個牽手順序碼相同時，可以直接消除(如下頁圖)。

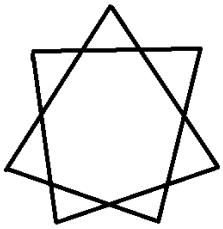


六芒星



七芒星(1)

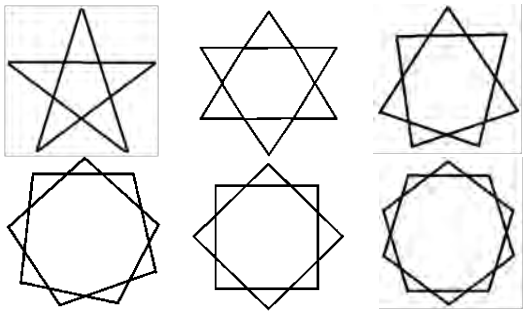
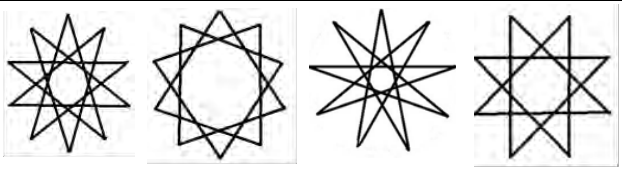




七芒星(2)

而七芒星(2)，與五芒星和六芒星相同，每個頂點若雙手同在上或在下，則可以消除兩個交錯點，依此方式找出化簡後的圖形。

由以上討論可整理出表格：

種類	簡化方式	圖形舉例
每個頂點發出的兩線相交於同一條由另外兩頂點相連的線。	牽手順序直接將 11 或 00 消去化簡。	
每個頂點發出的兩線相交於不同條由另外兩頂點相連的線。	牽手順序連續 3 碼相同，可消除其中 2 碼 (如 111 變成 ~~1~~1~~1~~)。	

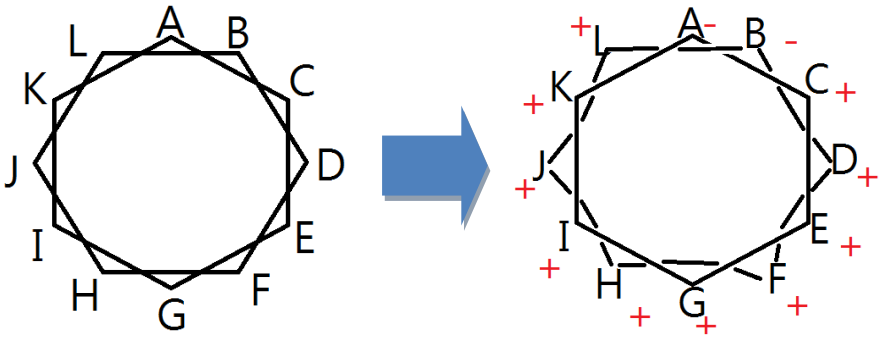
(二)特殊牽手遊戲

在較特別的遊戲中，可能希望讓所有人牽成多封閉曲線並互相連接在一起(也就是鏈)，接下來要討論這樣的牽法是否有一定的規則。

1. 牽成兩封閉曲線並成結

為了使最後得出來的手結呈現多個封閉曲線，必須要將人分組，如下頁圖。由 p.28 討論中的第一點，配合前述研究過程的六人兩封閉曲線中可知，若要讓多封閉曲線的手結成結，最快的方法是「只有一人或兩人是－，其他都是+」，在偶數人時

必須 2 個人是－並相連，奇數人時有 1 個人是－，這樣一定會成結。

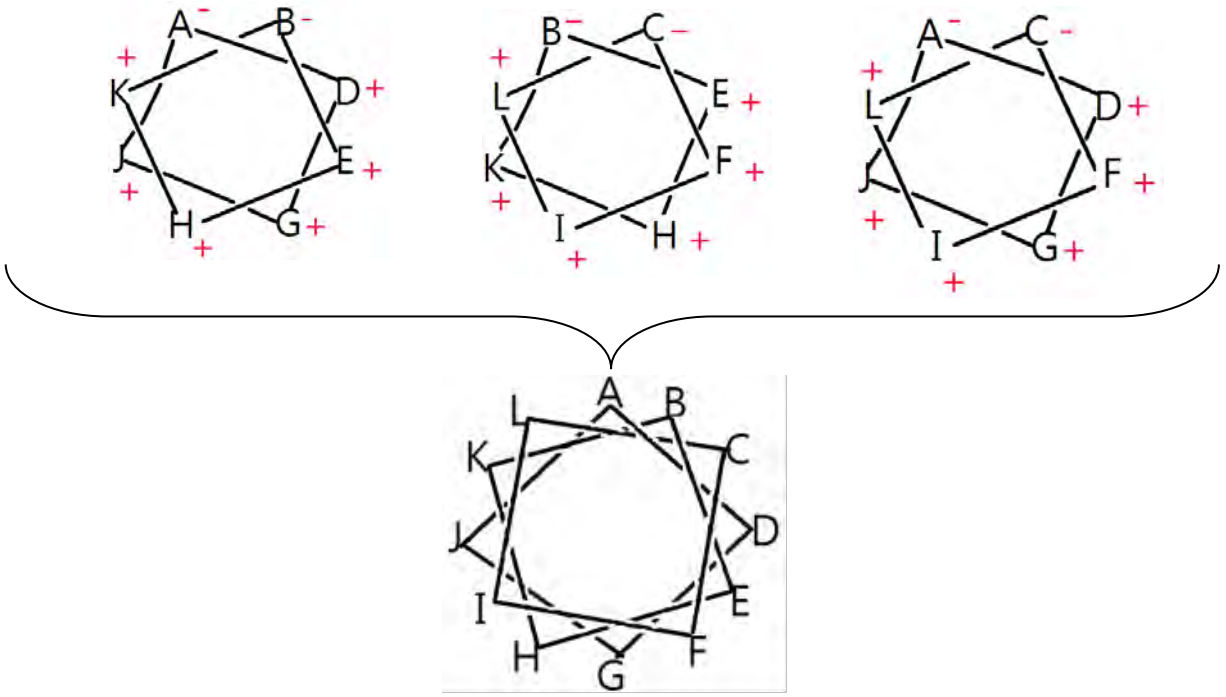


2. 牽成三個以上封閉曲線並成結

首先進行分組，最好的方式是每組人數相同，但若人數不同也沒關係，只是較難控制牽手順序。以下圖為例，A、D、G、 J 為一組(群組 A)，B、E、H、K 為一組(群組 B)，C、F、I、L 為一組(群組 C)。

由於這是四個人一封閉曲線的圖形，兩兩合併討論共有八人，也就是要有兩人為「－」，六人為「+」，且這兩個「－」要相鄰。以群組 A 和群組 B 來說，若 A 和 B 是－，其它是+，則群組 A 和群組 B 會成結。同理，若 C 也是－，其他是+，則所有群組皆會成結。

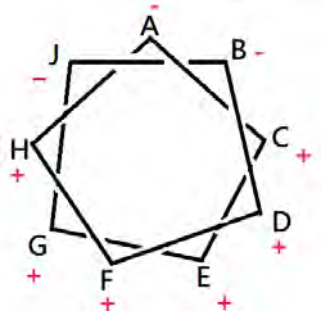
依照上面的推論，可知道在三個以上封閉曲線並成結的圖形中，只要每一組都僅有一人為「－」，且「－」的人相鄰，則此圖形成結。



3. 牽成一封閉曲線並成結

如果要讓一封閉曲線成結，最少需要 3 個交錯點；奇數人牽成星星結(所有人的兩手都

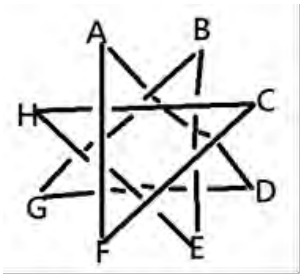
遇到同一線段)時，會有奇數個－；一個－會造成兩個交錯點，+不會造成交錯點，兩個－相連會造成三個交錯點。讓所有人牽成星星結(每個人的兩手都遇到同一線段)之後，總人數為奇數人時讓 3 個－相連(這樣才會超過 3 個交錯點)。



4. 牽成一封閉曲線並不成結

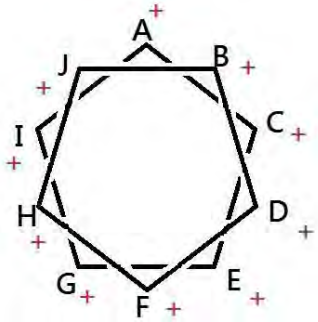
假設有一條棉線，固定其中一端後，拉另一端並隨意纏繞，只要沒有穿插的動作，這個結就必定不成結。

利用上述的想法，假設下圖的八芒星固定 A 點，經由 A→F→C→H→E→B→G→D→A 的順序牽手，每次經過前面已牽過的線段時就從下方經過，依序牽完後，這個結不會成結。



5. 牽成多封閉曲線並不成結

先分組成適合人數的牽手方式，組數和每組的人數為總人數的因數(如下圖)。利用前面「牽成一個封閉曲線並不成結」的結論可以發現，只要能讓線段一層一層的交疊而沒有交錯的話，便可以不成結。將所有封閉區線分開來並使之不成結(讓所有人都變成+)，再將此圖形合成後即可牽出。將每一個封閉曲線拉出來討論並確定它不成結，便可以確定那個牽手情形是多個封閉曲線且不成結。



四、找出簡化任何結的方法與通式

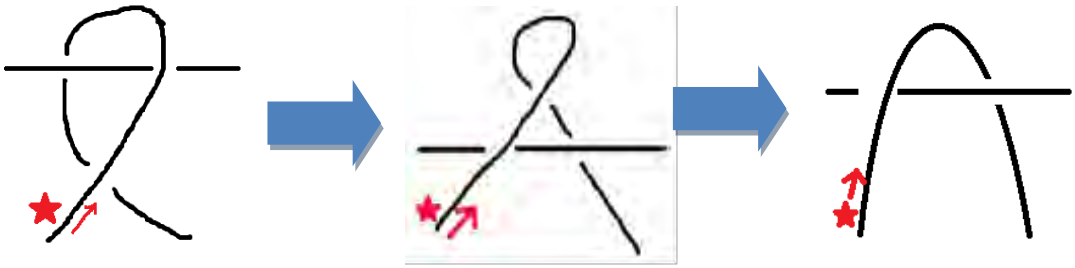
我們發現，在結簡化的過程中，可以利用「Reidemeister moves」的 R_1 及 R_2 來進行結的簡化。其中 R_1 可以減少 1 個交錯點、R_2 可以減少 2 個交錯點。但是只有這兩種簡

化方法的話，並沒有辦法達到很有效率的簡化，於是我們配合前面發現的結的兩個資訊來進行簡化，並試著找出其他延伸的簡化方法。

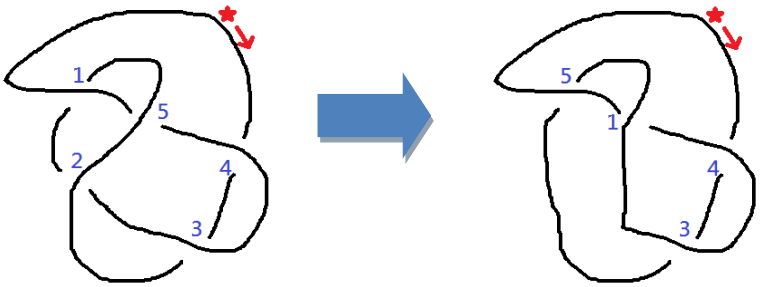
(一) 找出由 Reidemeister moves 延伸出的簡化方式

1. 如果在 R_1 中加入一條線，我們還是可以使用類似扭開的動作來將這個結簡化。不過這個動作卻不能當作是 R_1，因為它並不是結最基礎的變換，而且也與原本定義的 R_1 圖形不同。

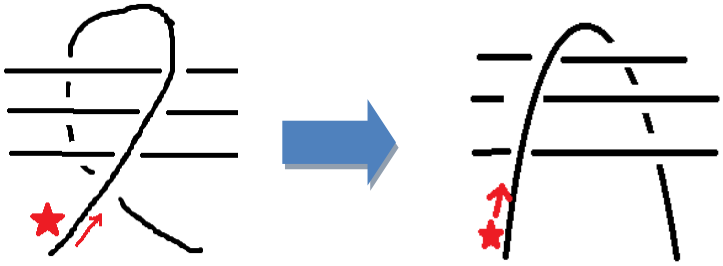
   這時，我們必須要先使用一個 R_3，將中間的直線移到交錯點的下方，才能使用一個 R_1。在我們的結的資訊中，因為主要是以「簡化」結為主，沒有辦法看到 R_3 的存在，於是我們將這兩個動作合成一個新的簡化方法。



   這時要注意的是，圖中橫線雖然沒有減少交錯點，但交錯點「位置改變」，被兩底線所夾的兩碼 1 和 0 分別對到的交錯點必須互換位置。舉例來說，左下圖的牽手順序為 1<u>1</u>10<u>0</u>0，兩畫底線數碼消去後可得右下圖，這時牽手順序變成 **0**10**1**，粗體數字為交錯點位置改變。

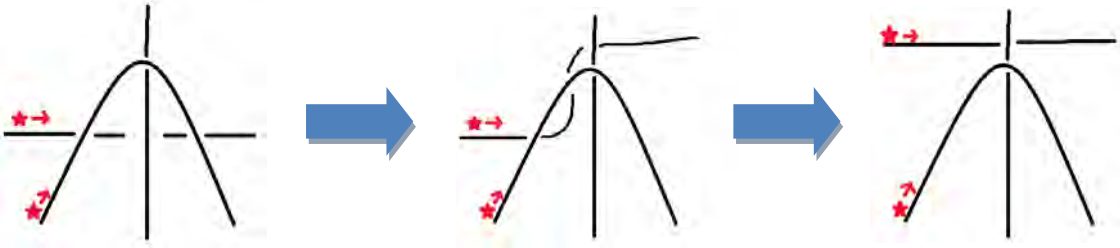


   上述簡化法的牽手順序中，最前面的 1 和最後面的 0 中間可以放入 10、1100、111000……，這是因為在一個 R_1 的圖形中可以放入很多條不同的線，如下圖的牽手順序就是 <u>1</u>1110000<u>0</u>，在 1 和 0 之間放入了 111000。

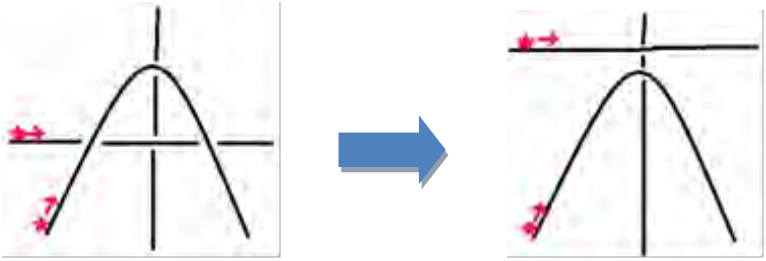


2. 如果在 R_2 中加入一條直線，我們還是可以使用類似將弧往下拉的動作來將它簡化。但是在做這個動作的同時，其實是多個動作同時進行，不符合結的基礎變換。首先必須要先做一個 R_3，才能使用一個 R_2。

但如同前面所提到的，我們的資訊沒有辦法看到 R_3 的存在，所以我們將這兩步合成一個新的簡化方法。



下圖的彎曲線牽手順序為 111，橫線牽手順序為 010，畫底線的牽手順序碼在相同兩個交錯點，這時也可使用 R_3 加上 R_2 將這兩個交錯點消除。



若牽手順序為「000」及「101」，一樣可以使用這種簡化方式(因為兩者是鏡射關係)。

進行這兩種簡化時需要注意，直線從上往下走時，牽手順序從 01 變成 10，兩交錯點位置會改變。和 R_1 一樣，在 1 和 0 之間可以放入 10、1100、111000……。

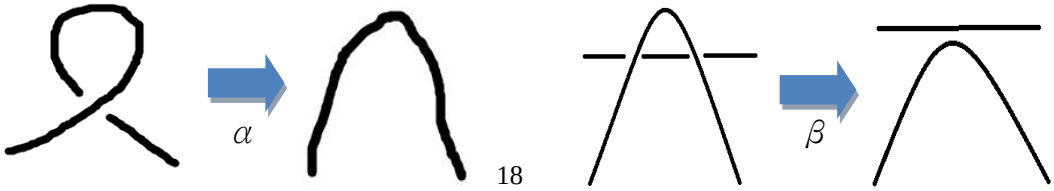
3. 結合研究過程中的簡化方式，歸納出四種最基本簡化結的方式並將其命名：

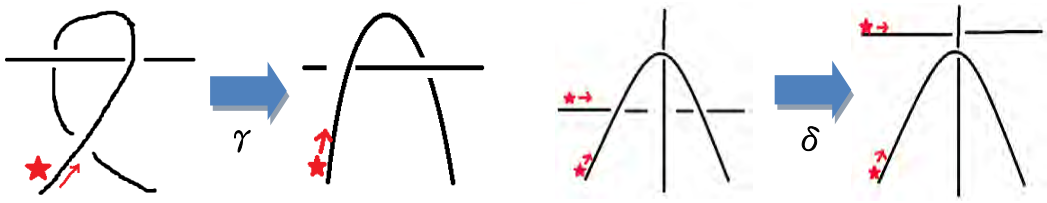
α：若牽手順序中出現「10」且兩數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點。

β：若牽手順序中出現「11」及「00」且在同樣兩個交錯點，則可以使用 R_2 減少 2 個交錯點。

γ：若牽手順序中出現「1100」且兩畫底線數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點，並將中間 10 所對到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 10、1100、111000……)

δ：若牽手順序中出現「111」及「000」、「111」及「010」或「000」及「101」，畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可使用 R_2 減少 2 個交錯點，而中間兩數碼所對應到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 11 及 00、111 及 000……)





由上面的內容可以發現到我們的{α, β, γ, δ}能夠完全的取代傳統的 Reidemeister moves 來進行結的變換。而且在簡化任何結時，能夠更有效率的進行結的簡化，且保證簡化前後的結的不變量是相同的。於是我們訂出了 C.H.定理:

C.H. Theorem: Instead of using the classical Reidemeister moves to construct the knot equivalence of Knot theory, we could use {α, β, γ, δ}.

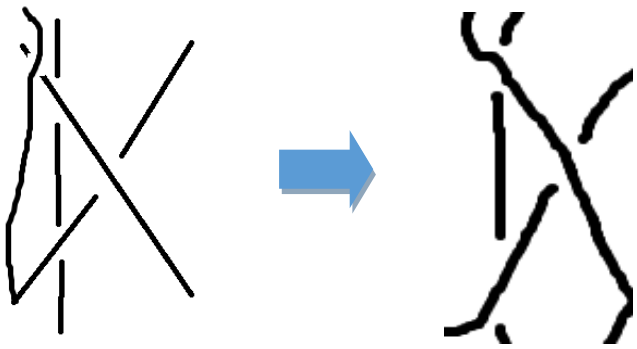
接下來要證明{α, β, γ, δ}能夠簡化任何結。

(二) 用區間證明法證明{α, β, γ, δ}是足夠使用的

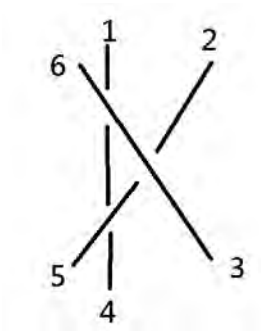
在結簡化的過程中，其實就是遵循了參考資料所提到的「Reidemeister moves」的 R_1 及 R_2，利用此兩種最基本的結的移動方式，可以將結最簡化。其中 R_1 減少 1 個交錯點、R_2 減少 2 個交錯點。

在文獻中可知 R_1, R_2, R_3 是足以解開所有結的基礎變換，所以只要證明{α, β, γ, δ}可以解開 R_1, R_2, R_3 即可。而 R_1 和 R_2 可以用 α 和 β 替代，因此只要證明 R_3 也可以用{α, β, γ, δ}解開即可，但是使用 R_3 並不會減少交錯點的數量，所以必須要與 R_1 或 R_2 結合，才能減少結的交錯點。

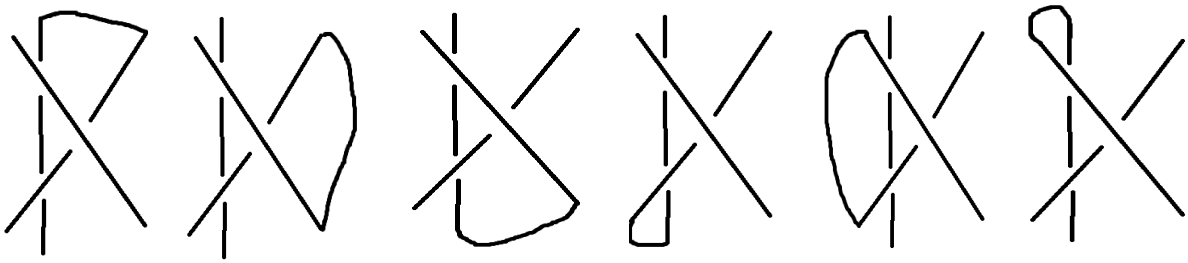
假設有一個結，將這個結放大到只容許此小區間中存在三條線，並且同時存在一個 R_3 與一個 R_1 或 R_2，如下圖，所選定的這個區間內目前有一個 R_3。



我們分別將每一個線段頭編號 1 至 6。暫且不管這個結在此區間外的所有部分，也就是說，可以假設這三條線段可以向外延伸至無限遠處，且不與其他線段有任何交點。若有其他交點，依然可以再次縮小區間，放大到只容許三條線在此區間內。

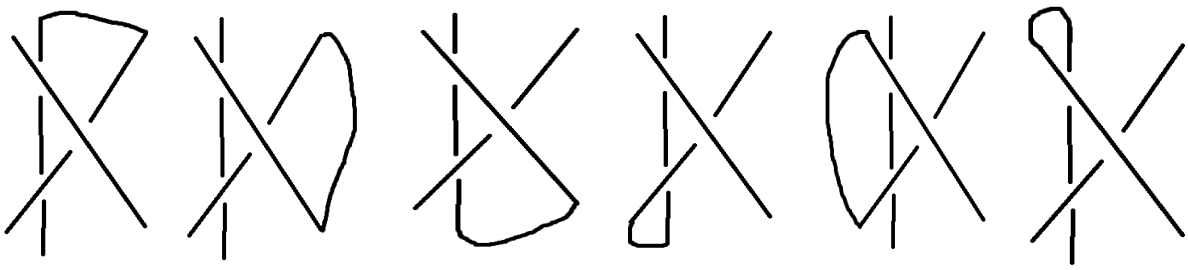


接著，我們將每兩條相鄰的線段連在一起。像是 1 連到 2，2 連到 3 等等。



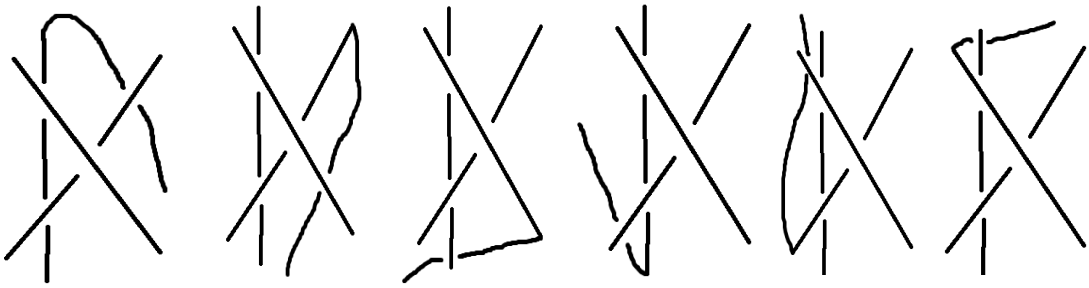
1 連到 2　　2 連到 3　　3 連到 4　　4 連到 5　　5 連到 6　　6 連到 1

可以清楚發現，把線頭互相連起來後，每一個區間內都同時有了原本的 R3 與新加的 R1。接下來，我們要試著利用{α, β, γ, δ}來簡化所有可以簡化的圖形。

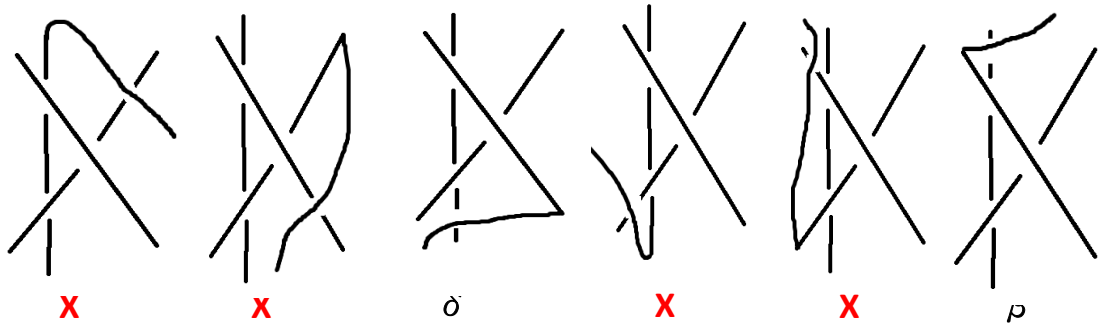


$\alpha\ \beta$　　$\beta\ \alpha$　　γ　　$\beta\ \alpha$　　$\alpha\ \beta$　　α

接下來將第 n 個線頭從 n+1 個線頭的下方穿過去以及從上面繞過去。如此一來，原本有著 R3 的圖便會再加上一個 R2。



δ　　β　　X　　β　　δ　　X



上面的 18 張圖列出了所有同時會出現 R1+R3 或 R2+R3 的所有情況，除了 X 的六種情況之外，其他的 12 種情況都能夠使用{α, β, γ, δ}進行簡化，也都能簡化到無法再簡化的情形(只限在此區間內)，而 X 的六種情況並不能用 R_1, R_2, R_3 簡化，因此也無法使用{α, β, γ, δ}簡化。經過上面的證明，我們可以肯定在簡化一個結時{α, β, γ, δ}是夠用的。

(三) 用{α, β, γ, δ}証明 HOMFLY 多項式是不變量

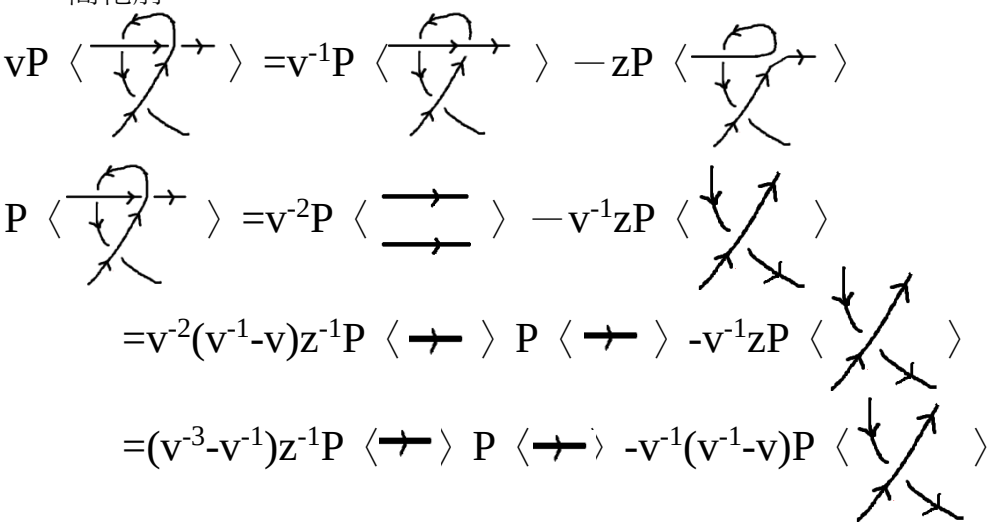
為了證明使用{α, β, γ, δ}前後兩結的多項式是相等的，我們使用 HOMFLY 多項式(詳見參考資料 p.22)來檢驗其結的不變量。

由於 α 即為 R_1，β 即為 R_2，在 HOMFLY 多項式定義時已包含在裡面，因此僅須證明 γ 和 δ。

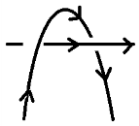
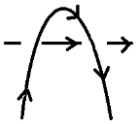
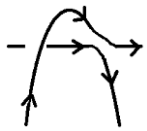
1. 証明 γ 是正確的

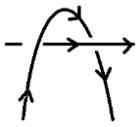
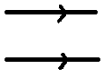
γ 圖形中有 2 條線，每條線共有 2 種方向，也就是會有 4 種不同的情況。以下舉出其中一種情況証明，並將其他三種情況置於 p.32 附錄 A。

簡化前：



簡化後：

vP 〈  〉 $=v^{-1}$P 〈  〉 -zP 〈  〉

P 〈  〉 $=v^{-2}$P 〈  〉 $-v^{-1}$zP 〈 〉

$=v^{-2}(v^{-1}-v)z^{-1}$P 〈 〉 P 〈 〉 - v^{-1}zP 〈 〉

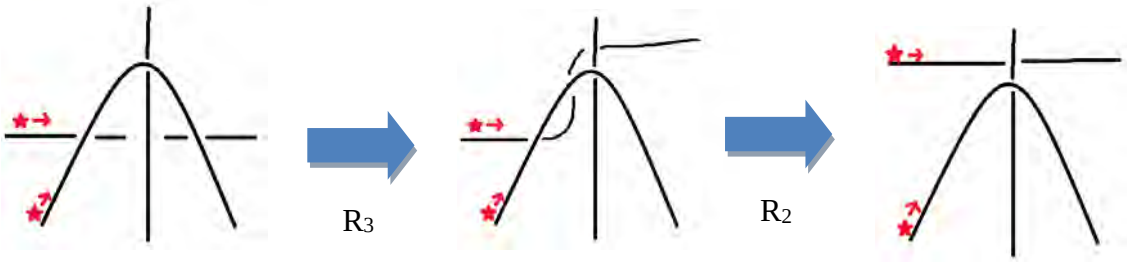
$=(v^{-3}-v^{-1})z^{-1}$P 〈 〉 P 〈 〉 $-v^{-1}(v^{-1}-v)$P 〈 〉

由以上計算可發現，使用 γ 前後的 HOMFLY 多項式相同，因此符合結的不變量。

2. 証明 δ 是正確的

原本想要利用 HOMFLY 的演算方式，仿造前面 γ 的計算來算出 δ 的多項式，但後來發現，因為 δ 中有四個交錯點，並且因為 δ 不是封閉曲線，不管利用 HOMFLY 多項式的哪個公式，皆無法有效的化簡 δ，目前正在持續研究其他方法，期望能找出證明的方式。

在查了更多資料之後，我們知道其實 Reidemeister moves 是 HOMFLY 多項式的基礎條件(見 p.34 附錄 B)，可以直接使用 Reidemeister moves 並保證使用前後的兩結是等價的。因此將 δ 直接化簡可以得到以下算式：



利用一樣的方法，我們依然可以證明 γ 化簡前後的不變量是一樣的：

先使用一個 R_3 再使用一個 R_1，簡化前後的多項式是相同的，符合結的不變量。

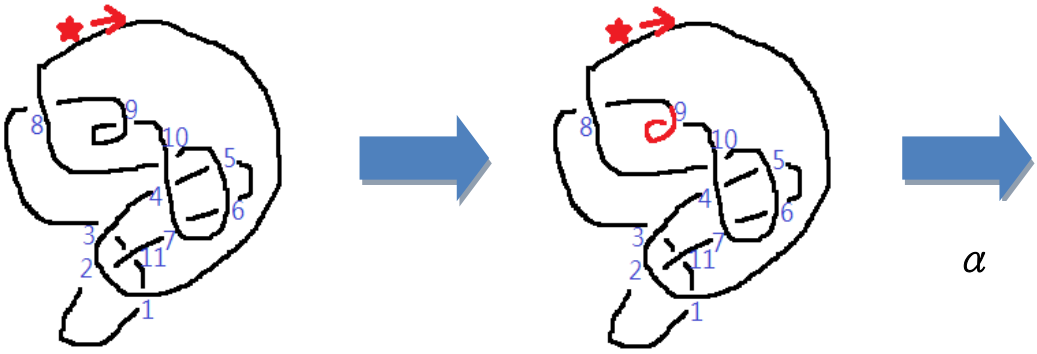
不過，因為目前只用 HOMFLY 多項式證出{α, β, γ,}，並且在{α, β, γ, δ}中沒有出現 R_3，理想狀態下希望可以不使用 R_3 證明其不變量，方法尚在修正中。

(四) 簡化結的舉例與步驟

證明了{α, β, γ, δ}是正確而且夠用，並找出四種方法與牽手順序、交錯點編碼的通式，接下來要實際畫出一封閉與多封閉曲線的結，用上述的方式將結完全簡化。

1. 一封閉曲線

以下圖為例：(牽手順序為上排的 1 和 0，交錯點編碼為下排的(1)、(2)……且順序可自行訂定，紅色數字代表可消去之交錯點，牽手順序與交錯點編碼的藍色數字代表受影響、必須交換順序的交錯點)

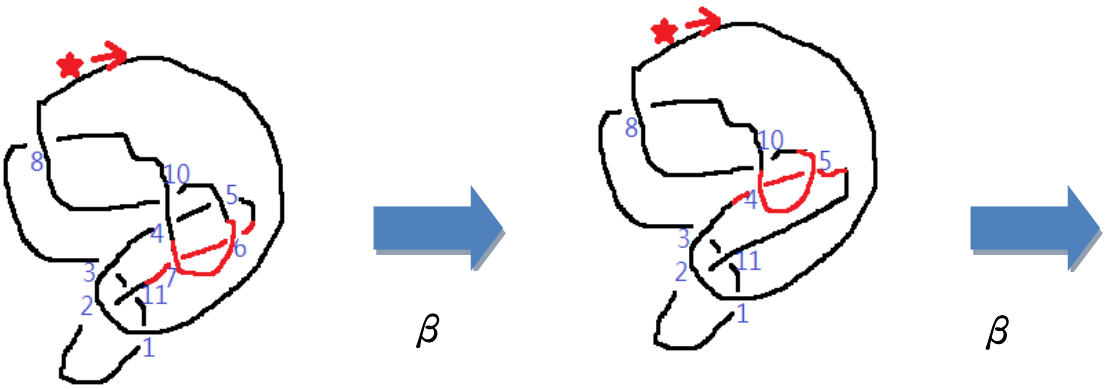


1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(9)(9)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)

1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(9)(9)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)



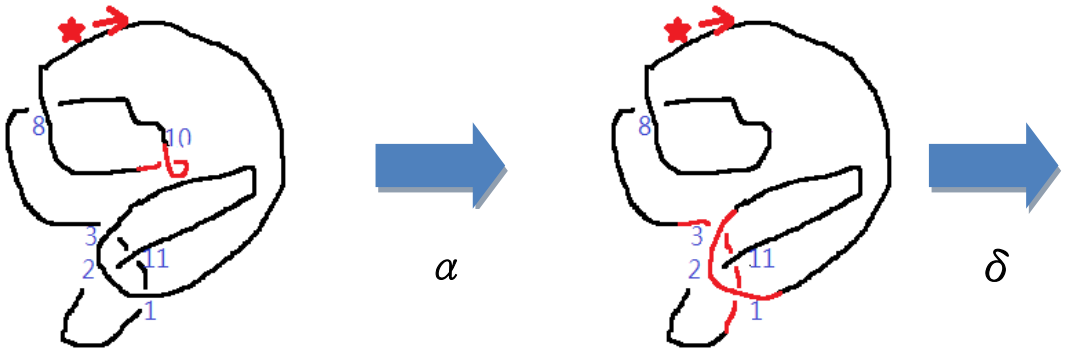
1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(4)(7)(6)(5)(10)(8)

10 在相同交錯點

1 1 1 0 0 1 0 0 0 _ _ _ _ _ 0 1

(1)(2)(3)(4)(5)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(4)(5)(10)(8)

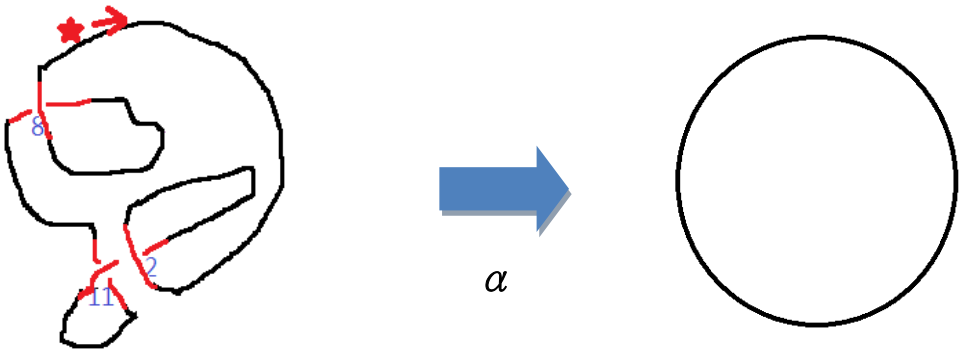


1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1

(1)(2)(3)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(10)(10)(8)

1 1 1 1 0 0 0 0 0 1

(1)(2)(3)(11)(2)(1)(11)(3)(8)(8)



1 0 1 0 0 1

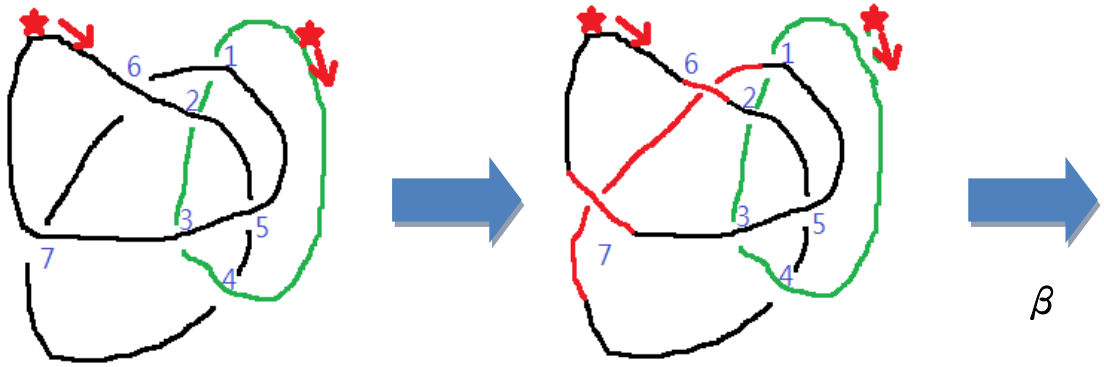
(2)(2)(11)(11)(8)(8)

無

最後得出來的圖形為一個圓，成功完全簡化一個結。因此驗證了可以運用{α, β, γ, δ}，寫出牽手順序和交錯點編碼來判斷一個手結是否成結及如何簡化。

2. 兩個以上封閉曲線

此類圖形必須將每個封閉曲線的牽手順序與交錯點編碼分開來寫，再使用簡化結的四種方式將它簡化，簡化時要將兩組牽手順序與交錯點編碼合起來看，以下圖為例：



1 1 0 0 0 0 1 1 1 1

(6)(2)(5)(4)(7)(6)(1)(5)(3)(7)

1 0 0 0

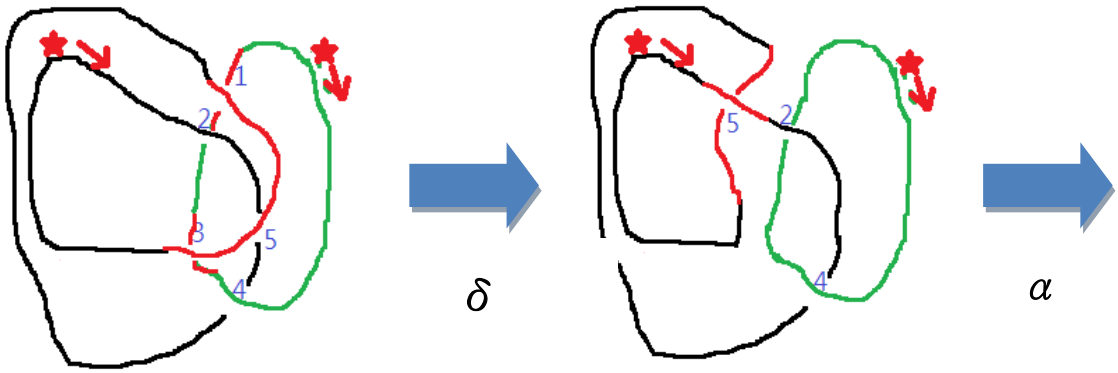
(4)(3)(2)(1)

1 1 0 0 0 0 1 1 1 1

(6)(2)(5)(4)(7)(6)(1)(5)(3)(7)

1 0 0 0

(4)(3)(2)(1)



1 0 0 1 1 1

(2)(5)(4)(1)(5)(3)

1 0 0 0

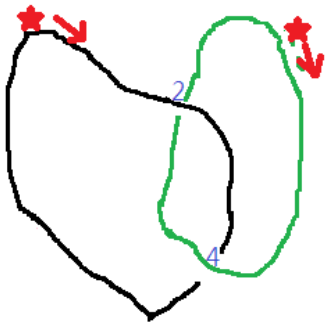
(4)(3)(2)(1)

0 1 0 1

(5)(2)(4)(5)

1 0

(4)(2)



1 0

(2)(4)

1 0

(4)(2)

以上是兩個封閉曲線的簡化過程，在這個例子中，最後結簡化成一個鏈，有兩個交錯點。

在三個或以上的封閉曲線中，也可以使用相同的方式，將三條封閉曲線的牽手順序與交錯點編碼列出，併在一起看並尋找簡化的步驟。

伍、研究結果

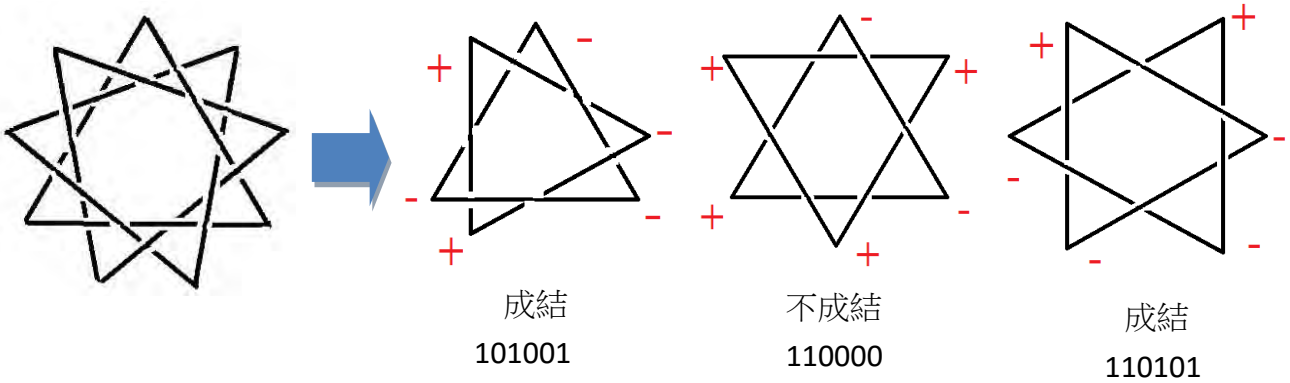
一、 三人遊戲、四人遊戲皆無法成結；五人遊戲有兩種情況會成結；六人一封閉曲線有 12 種情況會成結；六人二封閉曲線有 5 種情況會成結(圖形詳見研究過程)。可以從最少人數、牽手順序及交錯點數量來判斷一結是否成結。因為人可以算是線上一點，一條線上可以有無限多人，所以同一種結可能由不同的人數所牽成。

二、 「星星結」有一定的簡化規律性，在簡化時只需要看牽手順序，不需要管交錯點編碼。以下為兩種不同條件的圖形分別的簡化方式：

(一) 若封閉曲線數量為一個或兩個，則會有兩種不同簡化法的圖形，如下表所示：

	種類 1──每個從最外面的頂點發出的兩線相交於同一條由兩個最外面頂點相連的線。	種類 2──每個從最外面的頂點發出的兩線相交於不同條由兩個最外面頂點相連的線。
圖形舉例		
說明	牽手順序中可將 11 或 00 消去化簡。	牽手順序連續 3 碼相同，可消除其中 2 碼 (如 111 變成 ~~1~~1~~1~~)。若連續 4 碼相同則全部消除。

(二) 若封閉曲線數量為三個，也可使用以下的方式簡化一個結(此為舉例)：



可由上述的分解得到：這個三條封閉曲線的手結成結。

星星結的結果可推論出特殊牽手遊戲時的牽手方式，使用牽手順序的特性，能知道最快牽出特定圖形的方法。

三、 取代傳統的 Reidemeister moves，{α, β, γ, δ}成為由基礎變換推論出的變換方式，能運用在每一個結並用比 Reidemeister moves 更有效率的方法簡化每一個結，並且保證簡化前後的結的多項式不變。

可利用兩資訊：牽手順序及交錯點編碼，直接看出手結是否成結，並證明了可以運用以下四種結的簡化方式{α, β, γ, δ}直接從牽手順序中簡化，並化成最簡的圖形。

α：若牽手順序中出現「10」且兩數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點。

β：若牽手順序中出現「11」及「00」且在同樣兩個交錯點，則可以使用 R_2 減少 2 個交錯點。

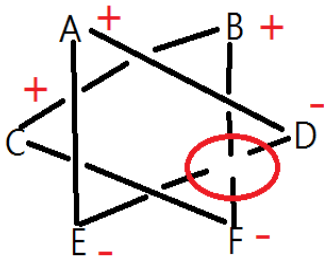
γ：若牽手順序中出現「<u>1</u>10<u>0</u>」且兩畫底線數碼在同一個交錯點，則可以使用 R_1 簡少 1 個交錯點，並將中間 10 所對到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可以是 10、1100、111000……)

δ：若牽手順序中出現「<u>1</u>1<u>1</u>」及「<u>0</u>0<u>0</u>」、「<u>1</u>1<u>1</u>」及「<u>0</u>1<u>0</u>」或「<u>0</u>0<u>0</u>」及「<u>1</u>0<u>1</u>」，畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可使用 R_2 減少 2 個交錯點，而中間兩數碼所對應到的交錯點數碼互換位置。中間數碼可以是 11 及 00、111 及 000……)

能使用 HOMFLY 多項式證明{α, β, γ,}符合結的不變量，並使用區間證明法證明可以只用{α, β, γ, δ}簡化每一個結，不需要使用其他的簡化法，比 Reidemeister moves 更有效率。

陸、討論

一、 在六人以上牽手情況中，分成兩種不同種類的圖(一封閉曲線及兩封閉曲線)，我們運用全部列舉法的方式找出所有不同的圖形，發現了其中+與－的順序是有一定規律的，在六人兩封閉曲線的討論中，可直接從列出的表格中發現+和－的人數皆是偶數，這是因為在六人情況下，若+和－的人數是奇數的話，會無法打出(如下圖為例)。



設兩手同在一線上方的有 x 人，兩手同在一線下方的有 y 人，一手上方一手下方的有 z 人。由交錯點的性質可列出以下關係式：

$\because x+y+z=2x+z=2y+z=$ 交錯點數量

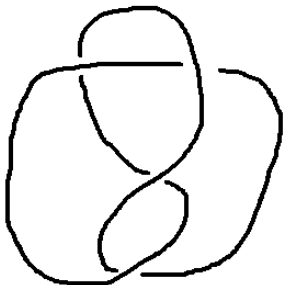
$\therefore x=y$

x+y 一定是偶數，所以+的人數一定為偶數。由此可知，在任何情況下，+的人

數都為偶數，而－的人數則要依總人數而定。

二、 原想利用容易找到的牽手順序來觀察一手結是否成結，並直接利用牽手順序使一結化簡，但我們卻找到了一組「相同牽手順序，結果不同」的圖形，證明了不可能僅看牽手順序就能推出是否成結。這一組圖形如下：

11001100 不成結



11001100 成結(三葉結)

因此可以推論，若要找出直接看出是否成結的方式，不能只看牽手順序，還必須參考其他有關此結的資訊，例如：交錯點編碼。

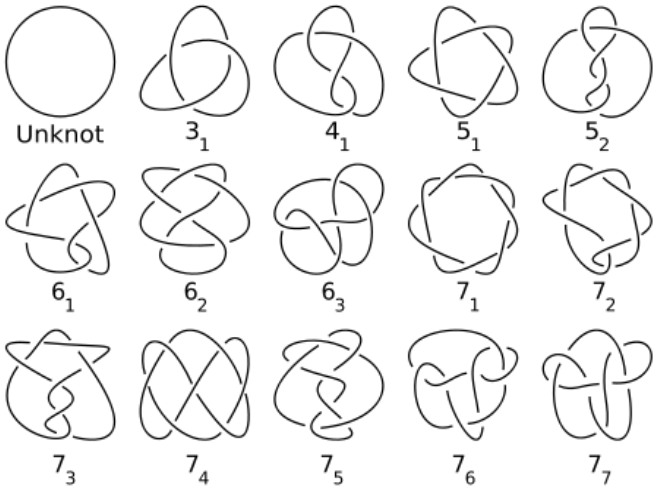
三、 在六人一封閉曲線的簡化圖中，許多結無法解開，在簡化過後成為最簡的結，對照「素扭結」圖，可發現其實這些結都屬於扭結，驗證了「利用 Reidemeister moves 的基礎變換可完全簡化一個結」一說，而因為兩種同樣的結長相不一定一樣，因此又使用了 Reidemeister moves 的基本變換來使一結轉換至另一結，驗證了基本變換可使一結轉換成另一結。以下列出在六人一封閉曲線中簡化過後的扭結，並配合素扭結圖，做成對照表。

四、 素扭結(Prime knot)：是指不能分解的扭結。素扭結不能表示為兩個扭結相加，而兩個扭結相加成的扭結稱為「複合扭結」。下圖是七個交錯點以下的素扭結，每個圖下面較大的數字代表這個圖形的交錯點數量。

ABEF(1) 為圖 3_1。

ABCD(1) 為圖 4_1。

AB(2) 為圖 5_2。



BD(2) 為圖 5_2。

CD(1) 為圖 6_1。

CD(2) 為圖 6_1。

無(2) 為圖 7_4。

柒、結論與未來展望

一、 {α, β, γ, δ}是由基礎變換推論出的變換方式，取代傳統的 Reidemeister moves，它能運用在每一個結上並且比 Reidemeister moves 更有效率的簡化每一個結，並利用{α, β, γ, δ}來檢驗 HOMFLY 多項式是不變量。

二、 這次的研究完成了一大部分的牽手遊戲討論，從最少人數開始，慢慢增加結的複雜度與交錯點數目，找出更多扭結形式，最後發現可以從「找出+與－」及「排出牽手順序」來整理所有的牽手情形，且在五人及六人的討論中發現，其實每個化簡的步驟都是使用 Reidemeister moves 的三種基本變換，因此可從「牽手順序」和「交錯點編碼」直接判斷一結是否可解。

三、 從特別的「星星結」中找出了規律性，並從此規律性推導更快速的化簡方式，共分成兩種，可以只看牽手順序就直接簡化結，提供玩家多一種解結方式。使用星星結的結論推出牽手遊戲的特殊遊戲方式，使牽手遊戲的玩家能夠牽出想牽出的圖形。

四、 本研究成功討論出可利用「牽手順序」及「交錯點編碼」配合{α, β, γ, δ}四個形變化簡任何結，並看出需要幾個步驟才能完全化簡一個結。也證明了化簡任何一個結僅需{α, β, γ, δ}四個方法，而且比 Reidemeister moves 更有效率。

五、 利用{α, β, γ}檢驗 HOMFLY 多項式是不變量，期望在之後的討論中能再利用 δ 檢驗 HOMFLY 多項式是不變量。

六、 目前發現可以用{α, β, γ, δ}取代 Reidemeister moves，並比 Reidemeister moves 更有效

率的簡化結，而 HOMFLY 多項式是以 Reidemeister moves 為基礎所創造的，期望在學習更多有關多項式的知識後，能夠創造屬於{α, β, γ, δ}的多項式，並配合簡化結的通式，創造出能簡化結的多項式。目前的想法是使用電腦軟體(如 Linknot 軟體)，修改程式碼，創造出屬於{α, β, γ, δ}的多項式。

捌、參考資料及其他

1. 姜伯駒(2011 年 5 月 1 日)・繩圈的數學・大連理工大學出版社。

2. 郎一全・幾種古典的結不變量・中研院數學研究所・取自 http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d252/25204.pdf

3. 國立板橋高級中學・盤根錯結・第 35 屆全國中小學科學博覽會・數學科高中組。

4. 國立馬祖高級中學・中國藝『數』－由雙錢結不變量來探討結其性質・第 48 屆全國中小學科學博覽會・數學科高中組。

5. Peter Cromwell (2004 年)・Knots and Links・Cambridge University Press

6. Dominic Goulding(2010 年 4 月)・Knot Theory: The Yang-Baxter Equation, Quantum Groups and Computation of the Homfly Polynomial・Durham University

7. Manuela Almeida(2012 年 2 月)・Knot Theory・取自 http://www.math.ist.utl.pt/~ggranja/manuela.pdf

8. Knot table・Notation for knots・取自 http://www.indiana.edu/~knotinfo/descriptions/dt_notation.html

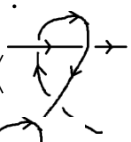
9. The Knot Atalas(2013 年 2 月)・DT (Dowker-Thistlethwaite) Codes・取自 http://katlas.org/wiki/DT_(Dowker-Thistlethwaite)_Codes

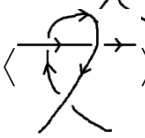
10. StackExchange(2014 年 10 月)・Can knot diagrams be monotonically simplified using under moves?・取自 http://mathoverflow.net/questions/182961/can-knot-diagrams-be-monotonically-simplified-using-under-moves

附錄 A

一、證明 γ (第二種)

簡化前：

$v^{-1}P\langle$  $\rangle = vP\langle$ $\rangle + zP\langle$ $\rangle$

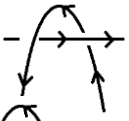
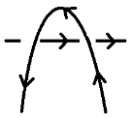
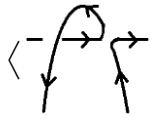
$P\langle$  $\rangle = v^2P\langle$ $\rangle + vzp\langle$ $\rangle$

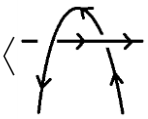
$= v^2(v^{-1}-v)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle + vz(v^{-1}-v)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

$= (v-v^3)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle + 1-v^2P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

$= (vz^{-1}-v^3z^{-1}-v^2+1)P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

簡化後：

$v^{-1}P\langle$  $\rangle = vP\langle$  $\rangle + zP\langle$  $\rangle$

$P\langle$  $\rangle = v^2P\langle$ $\rangle + vzP\langle$ $\rangle$

$= v^2(v^{-1}-v)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle + vz(v^{-1}-v)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

$= (v-v^3)z^{-1}P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle + 1-v^2P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

$= (vz^{-1}-v^3z^{-1}-v^2+1)P\langle \leftarrow \rangle P\langle \rightarrow \rangle$

二、證明 γ (第三種)

簡化前：

$v^{-1}P\langle$ $\rangle = vP\langle$ $\rangle + zP\langle$ $\rangle$

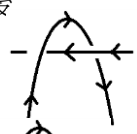
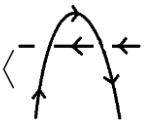
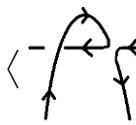
$P\langle$ $\rangle = v^2P\langle$ $\rangle + vzP\langle$ $\rangle$

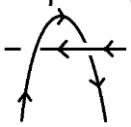
$= (v^2+vz)(v^{-1}-v)z^{-1}\langle$ $\rangle\langle$ $\rangle$

$= (v-v^3+z-v^2z)z^{-1}\langle$ $\rangle\langle$ $\rangle$

$= (v^{-1}z^{-1}-v^3z^{-1}-v^2)\ \langle$ $\rangle\langle$ $\rangle$

簡化後

$v^{-1}\langle$  $\rangle = vP\langle$  $\rangle + zP\langle$  $\rangle$

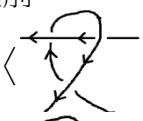
$P\langle$  $\rangle = v^2P\langle$ $\rangle + vzP\langle$ $\rangle$

$= (v^2+vz)(v^{-1}-v)z^{-1}\langle$ $\rangle\langle$ $\rangle$

$= (v-v^3+z-v^2z)z^{-1}\langle$ $\rangle\langle$ $\rangle$

三、證明 γ (第四種)

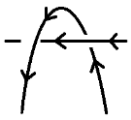
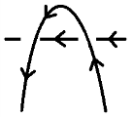
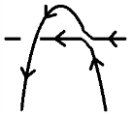
簡化前：

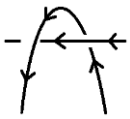
$vP\langle$  $\rangle = v^{-1}P\langle$ $\rangle - zP\langle$ $\rangle$

$P\langle$ $\rangle = v^{-2}P\langle$ $\rangle - zv^{-1}P\langle$ $\rangle$

$= v^{-2}(v^{-1}-v)z^{-1}P\langle$ $\rangle\ P\langle$ $\rangle - zv^{-1}P\langle$ $\rangle$

簡化後：

$vP\langle$  $= v^{-1}P\langle$  $\rangle - zP\langle$  $\rangle$

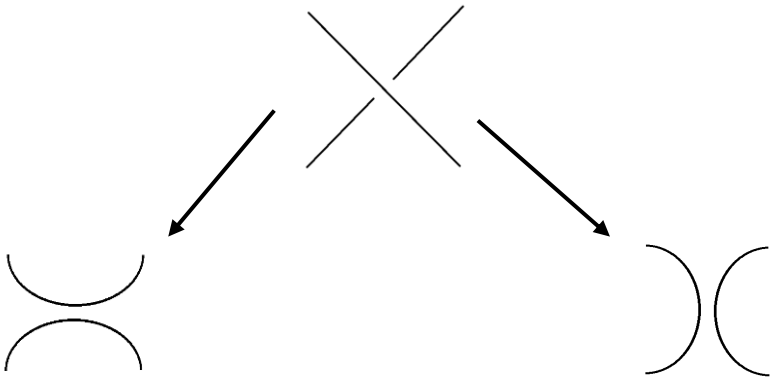
P〈  〉= v^{-2}P〈 〉-zv^{-1}P〈 〉

=$v^{-2}(v^{-1}-v)z^{-1}$P〈 〉P〈 〉-zv^{-1}P〈 〉

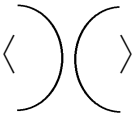
附錄 B

結的多項式非常的好用，因為它非常容易計算，而且可以用來辨別大量不同的結。第一個多項式是由 J.Alexander 在 1928 年發現的。

再來的多項式便是 1987 年發現的 Bracket 多項式。它有趣的地方在於它用了兩種不同的方法將兩線段分開，與物理常用的方法有所關連，如下圖。



Bracket 多項式遵守以下規則:

〈 〉=A〈 〉+B〈  〉

且滿足

〈O K〉=C〈K〉　(當(OK)中的結 K 與不成結的 O 不相交時)

經簡化後

〈O〉=1

Bracket 多項式計算了 R_2 和 R_3 的不變量，但卻在計算 R_1 的不變量時失敗了。於是他將交錯點上下的規則標記為+1 與-1，則 R_1 使多項式變為±1 的形式。

接下來出現的是 Kauffman 多項式。一個有方向性的結的 Kauffman 多項式被定義為 X〈K〉=$(-A^3)^{-w(k)}$〈K〉 。

W〈 〉=W〈 〉= +1

W〈 〉=W〈 〉=-1

如果用多項式來分別表示一個擁有(+1)的結 K^+，以及一個擁有(-1)的結 K^-，那麼便會出現以下結果:

$X\langle K^+\rangle = (A^3)^{-w(K+)}\langle K^+\rangle$

$= (-A^3)^{-(w(K+)-1)})(-A^{-3})\langle K^+\rangle$

$= (-A^3)^{-(w(K+)-1)})(-A^{-3})(-A^3)\langle —\rangle$

$= (-A^3)^{-(w(K+)-1)})\langle —\rangle$

$=X\langle —\rangle$

$X\langle K^-\rangle = X\langle —\rangle$

故得證，Kauffman 多項式成功計算 R_1 的不變量。

【評語】010028

本作品由牽手遊戲入手，進而利用扭結理論進行探討，扭結理論在科展中是比較新鮮的主題，有吸引性，作品中對一些概念的說明，似乎不足，作者可能需要對 Dowker notation 及 HOMFLY 多項式等概念,作更深入的瞭解。作品提出了四種基本簡化結的方式，但基本質並未離開文獻中常用的 Reidemeister moves，文中提到新的簡化結方式比較有效率，但未從數學的方式定義何謂有效率，本作品若能對扭結理論有更深入掌握，結果將可以更為紮實。