2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010027

參展科別　數學

作品名稱　層出不窮的彩蛋有「心」「跡」

—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質

探討

得獎獎項　大會獎：一等獎

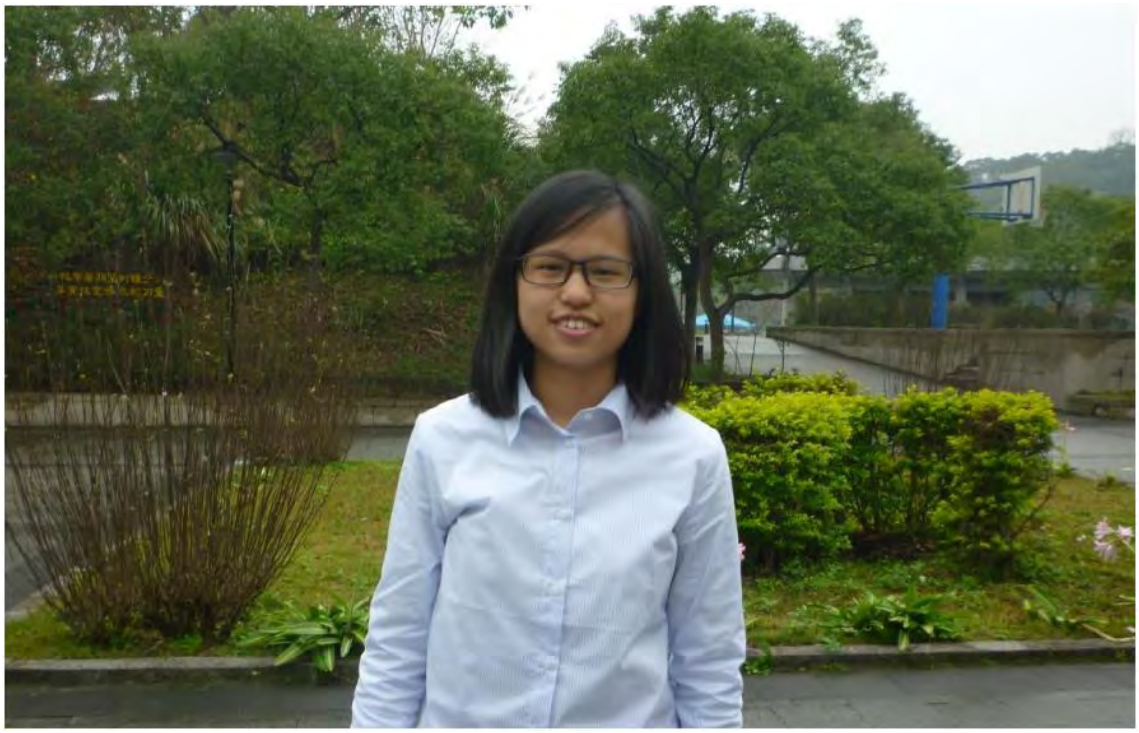
就讀學校　臺北市立麗山高級中學

指導教師　林永發

作者姓名　張霈萱

關鍵字　射影幾何、極點極線、圓錐曲線

作者簡介



我是張霈萱，目前就讀台北市立麗山高中三年級。

平時就喜歡與同學討論、研究數學問題，嘗試用不同的觀點與解法解決問題。我立志要投入數學工作，不論多少挫折都無法改變我對數學的熱愛。我希望未來能以數學研究為職業。

這次非常榮幸能參與這次盛會，抱著朝聖的心情來到這裡，期盼能結識更多同好，請教不同的師長，拓展我的國際視野。

摘要

本研究從 Brianchon 定理「圓外切六邊形三條對角線共點」以及 Pascal 定理「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線」，這兩個對偶定理出發，試圖以雙心六邊形串連兩個定理，讓 Pascal (1623–1662)及 Brianchon (1785–1864)兩位法國數學家「相遇在 21 世紀」。本研究除了探討雙心六邊形的共點共線問題外，更進一步研究其共點共線圖形的軌跡。研究有更驚人的發現：雙心六邊形將各邊延長取交點，其所形成的新六邊形同時內接於一條圓錐曲線，外接於另一條圓錐曲線。

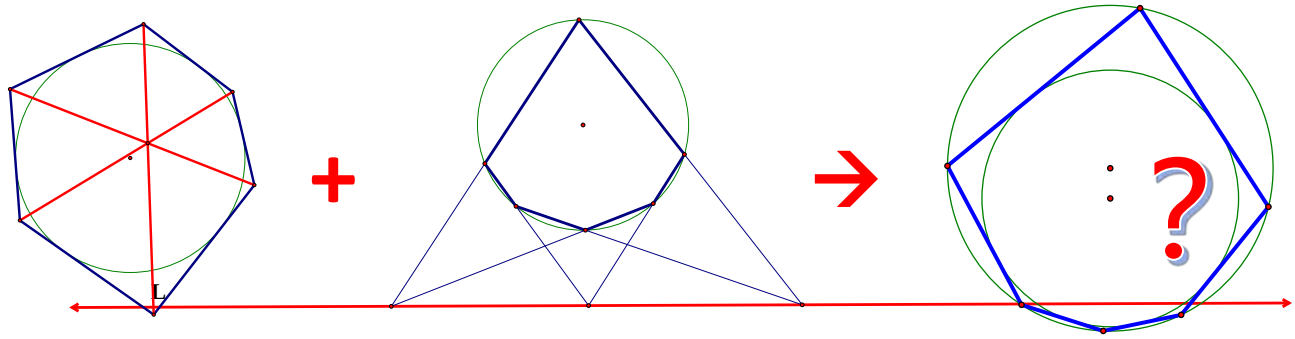
Abstract

This research is based on the Brianchon's theorem: "the lines joining opposite vertices of a hexagon that is circumscribed on a conic section are concurrent" and the Pascal's theorem: "the intersections of the three pairs of the continuations of opposite sides of a hexagon that is inscribed in a conic section are collinear", which are two dual theorems. I use bicentric hexagons to integrate these two theorems, and let these two French mathematicians, Pascal (1623–1662) and Brianchon (1785–1864), meet in the 21th century. I also examine the shape of the locus of the common points in the Brianchon's theorem and the common lines in the Pascal's theorem and find some amazing results: when we extend the sides of the bicentric hexagon and find their pairwise intersections, the new hexagon whose vertices are the six intersection points must be inscribed in a conic and at the same time circumscribed about another conic.

壹、前言

一、研究動機

當我翻閱「幾何明珠[1]」這本書時，閱讀到了 Pascal 定理「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線」以及 Brianchon 定理「圓外切六邊形三條對角線共點」，這兩個在射影幾何學上十分重要的定理，並了解到這兩個定理間具有對偶性質。我非常好奇為何兩個可以互相推導的定理，發現的時間竟相隔 150 年，且其它文獻也只是簡單提及兩者的對偶性質，而未試圖將兩者合併討論。所以我希望利用雙心六邊形將兩個定理串連在一起，讓 Pascal 和 Brianchon 這兩位錯過近 150 年的數學家有機會「相遇在 21 世紀」。



二、研究目的與問題

為了串連 Brianchon 定理及 Pascal 定理，我希望從一個圓上六邊形的研究出發，進而深入探討雙心六邊形的共點共線相關性質，問題如下：

（一）探討圓內接與外切六邊形之遞延圖形的共點共線情形；並探討其五邊形、四邊形和三角形等退化情形之遞延圖形。

（二）探討雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡圖形；並探討其邊延長和頂點切線遞延圖形中共點共線的性質。

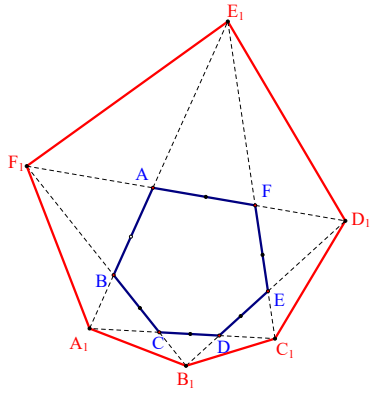
（三）探討雙心五邊形、四邊形、三角形 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡圖形。

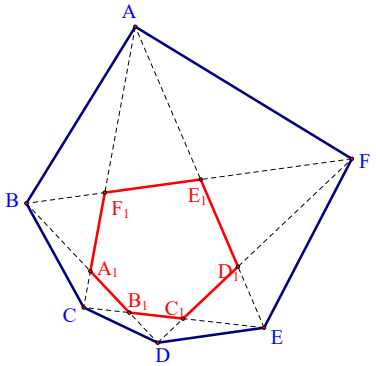
（四）根據上述問題，探討其在圓錐曲線上的軌跡圖形及遞延圖形共點共線關係。

【名詞解釋】

※ 邊延長遞延（分為外延與內朔）：

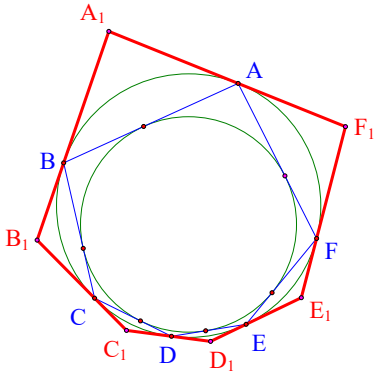
- 外延：延長六邊形 ABCDEF 的各邊，使$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{CD}$和$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{DE}$和$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{EF}$和$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{FA}$和$\overleftrightarrow{BC}$分別交於A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1。此時，六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$即為 ABCDEF 的邊延長遞延的外延圖形。（如下左圖）
- 內朔：連接$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{EA}$、$\overleftrightarrow{FB}$，則$\overleftrightarrow{AC}$和$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BD}$和$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CE}$和$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DF}$和$\overleftrightarrow{EA}$、$\overleftrightarrow{EA}$和$\overleftrightarrow{FB}$、$\overleftrightarrow{FB}$和$\overleftrightarrow{AC}$的交點分別是A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1，此時六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$即為 ABCDEF 的邊延長遞延的內朔圖形。（如下右圖）

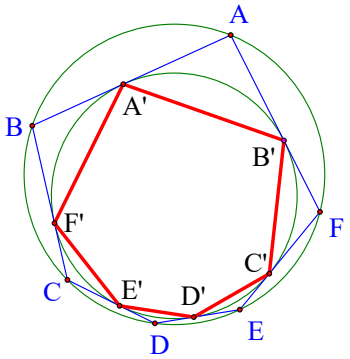




※ 頂點切線遞延（分為外延與內朔）

- 外延：過雙心六邊形 ABCDEF 的各頂點分別作切線，使相鄰切線分別交於分別交於A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1。此時，六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$即為雙心六邊形 ABCDEF 的頂點切線遞延的外延圖形。（如下左圖）
- 內朔：依序連接雙心六邊形的六個切點A'、B'、C'、D'、E'、F'，則六邊形$A'B'C'D'E'F'$即為雙心六邊形 ABCDEF 的頂點切線遞延的內朔圖形。（如下右圖）





貳、研究工具與研究方法

一、研究工具

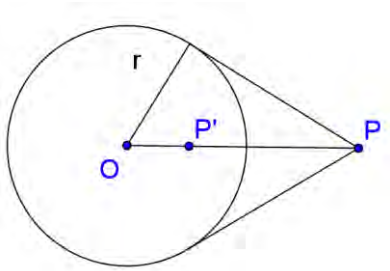
本研究主要利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

二、研究方法

本研究範圍涉及圓內接、圓外切多邊形共點共線問題，將引用有關反演、極點極線等射影幾何相關性質來探討共點共線問題，如下：

（一）反演變換（Inversion）（參見文獻[6]）

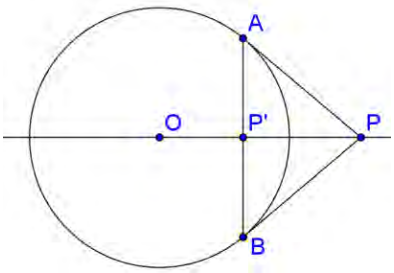
如圖 1-1，在平面上給定一圓，圓心為 O，半徑為 r，對平面上任一異於 O 的點 P，將其變換為$\overrightarrow{OP}$上的一點 P'，使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$ ，則稱「**P' 為 P 關於圓 O 的反演點**。」



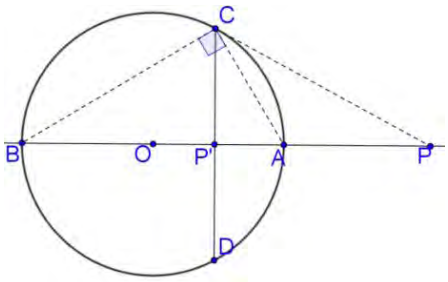
▲圖 1-1

【性質 1-1】點關於圓的反演點作法

若 P 在圓外，過 P 作圓 O 切線切圓 O 於 A，過 A 作$\overleftrightarrow{AB}\perp\overline{OP}$分別交圓 O 於 B，交$\overline{OP}$於 P'，則 P' 即為 P 關於圓 O 反演點。（如圖 1-2）



▲圖 1-2



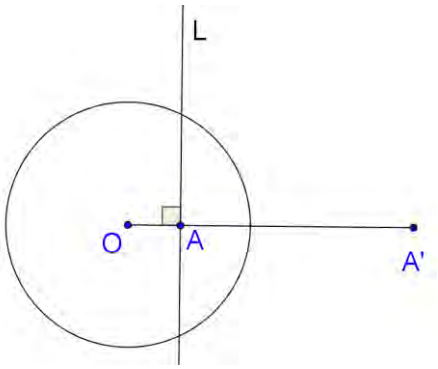
▲圖 1-3

【性質 1-2】反演與調和點列

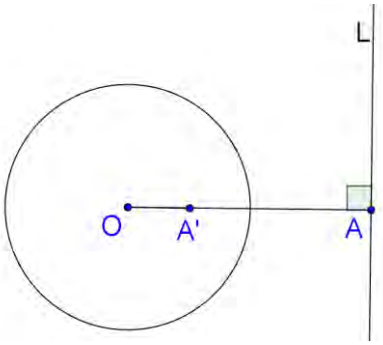
P′為 P 關於圓 O 的反演點，作$\overleftrightarrow{PP'}$交圓 O 於 A、B 兩點，則 P、P'；A、B 為調和點列，即$\overline{PA}:\overline{AP'}=\overline{PB}:\overline{BP'}$。（如圖 1-3）

（二）極線與極點（Pole and Polar）（參見文獻[4]）

如圖 1-4，若 A' 為 A 關於圓 O 的反演點，過 A 作垂直 $\overline{AA'}$ 的直線 L，則稱「**直線 L 為 A' 關於圓 O 的極線；A' 為此直線 L 的極點。**」



▲圖 1-4(a) 極點在圓外的情形



▲圖 1-4(b) 極點在圓內的情形

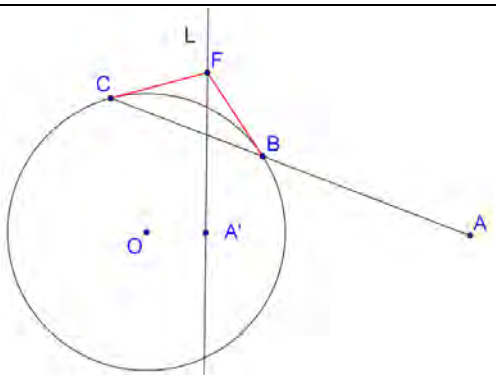
【性質 2-1】極點、極線的一一對應關係（參見文獻[7]）

(1) 若 A、B 兩點關於圓 O 的極線皆為 L，則 A=B，反之亦然。

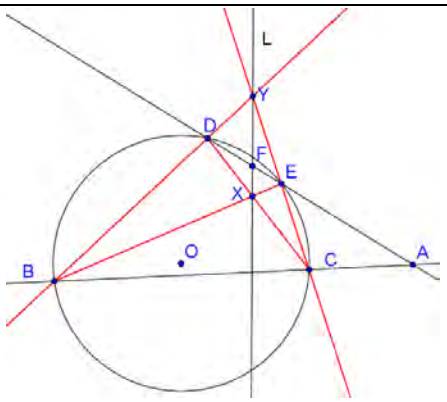
(2) 若 L_1、L_2 兩條直線關於圓 O 的極點皆為 A，則 $L_1=L_2$，反之亦然。

【性質 2-2】極線的判別 I

L 為 A 關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 割線交於 B、C 兩點，分別過 B、C 作圓 O 切線，則兩切線交點 F 必在極線 L 上。（如圖 1-5）



▲圖 1-5



▲圖 1-6

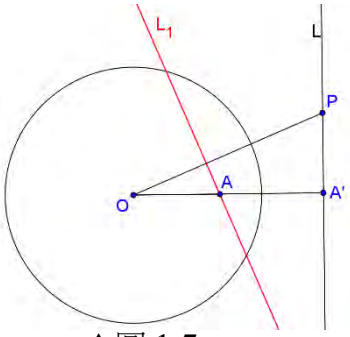
上述，若當過 A 點的割線變為切線時，B、C、F 重合成一點切點，故可得：「**過 A 作圓 O 的兩切線，則兩切點連線即為 A 關於圓 O 的極線。**」

【性質 2-3】極線的判別 II

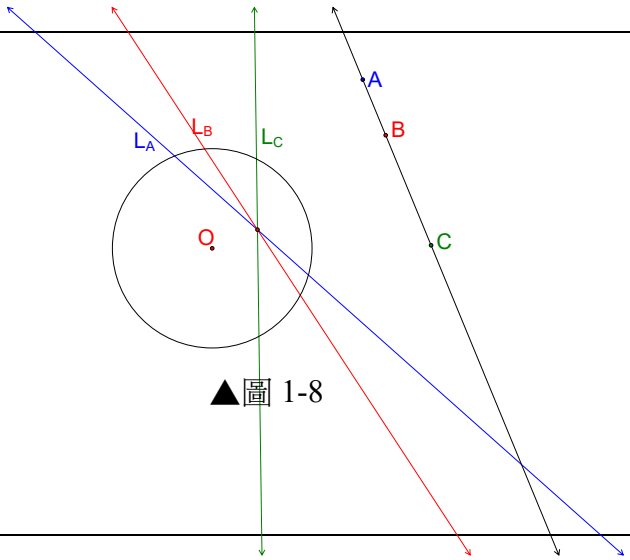
L 為 A 點關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 的兩條割線，分別交圓 O 於 B、C 及 D、E，則 $\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$ 的交點 Y，及 $\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 的交點 X 必在極線 L 上。（如圖 1-6）

【性質 2-4】極點極線的對偶關係

L 為 A 關於圓 O 的極線，則 L 上任意點 P 關於圓 O 的極線L_1必會通過 A 點，反之亦然。（如圖 1-7）



▲圖 1-7



▲圖 1-8

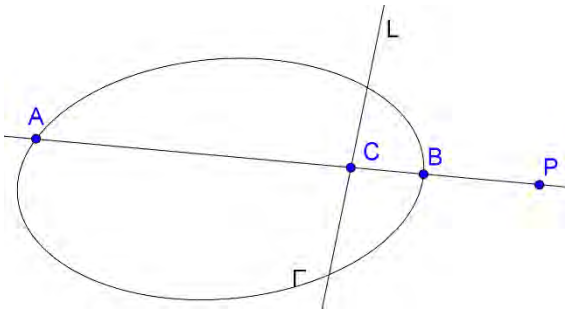
【性質 2-5】共點共線的極線判別法

平面上有一圓 O 及 A、B、C 三點，L_A、L_B、L_C分別為 A、B、C 關於圓 O 的極線，若 A、B、C 三點共線，則L_A、L_B、L_C三線共點，反之亦然。（如圖 1-8）

【性質 2-6】極點極線軌跡的對偶性（參見文獻[7]）

若極點的軌跡為 n 次曲線，則其極線的軌跡亦會包絡出一 n 次曲線，反之亦然。

事實上，圓錐曲線也有極點極線，但並不能用垂直反演點的方式定義，故修正其定義為**「對於一個給定的點 P 及給定的圓錐曲線Γ，皆有唯一條直線 L 滿足過 P 點作任一割線交圓錐曲線Γ於 A、B、交 L 於 C 使得 P、C；A、B 為調和點列，則稱 L 為 P 關於圓 O 的極線或 P 為此直線 L 的極點。」**而此時，上述所有極點極線的性質皆成立。（如圖 1-9）



▲圖 1-9

（三）交比（Cross-ratio）（參見文獻[6]）

接下來我們的研究也探討六邊形是否外切或內接於一個圓錐曲線，我們引用射影幾何中的交比性質，試圖做簡潔有力的證明。

1. 有向線段比

若 A、B、C 為平面上的三個共線點，定義其有向線段比為$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$，若$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$同向，則$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$；反之，若$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$反向，則$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$。

2. 四共線點的交比

若 A、B、C、D 為平面上的四個共線點，定義其交比為(ABCD)或(A，B；C，D)=$(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}/\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}})$。

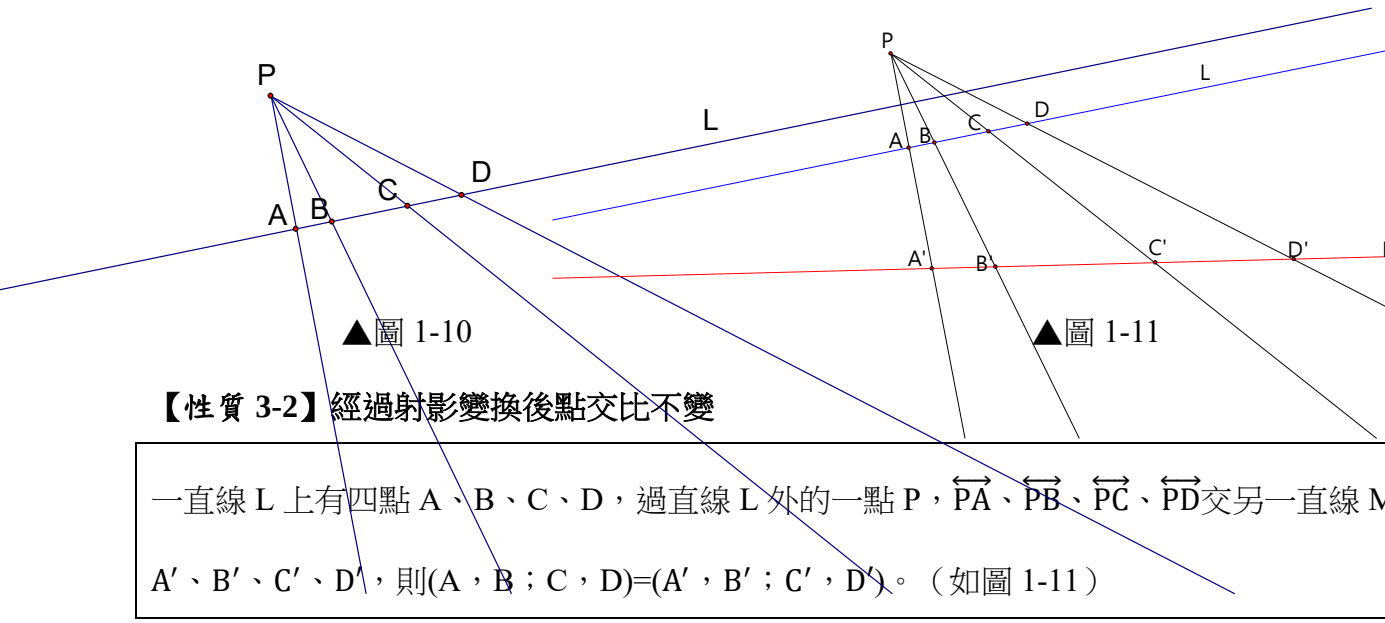
3. 四共點線的交比

平面中有兩相交直線 a、b，定義其交角(a，b)為由直線 a 轉向直線 b 的角度，即(a，b)為有向角。若 a、b、c、d 為平面上的四條共點的線束，則定義其交比

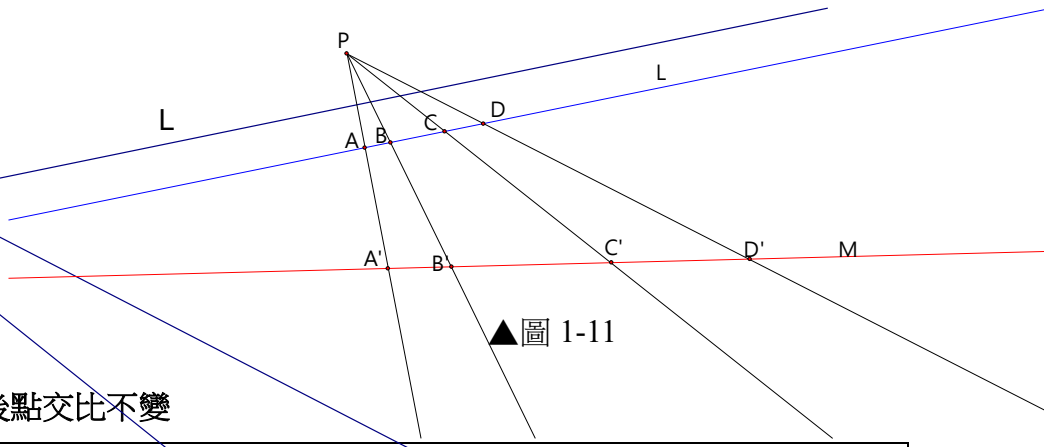
$$(a，b；c，d)=\left(\frac{\sin(a，c)}{\sin(c，b)}\Big/\frac{\sin(a，d)}{\sin(d，b)}\right)。$$

【性質 3-1】線交比與點交比的轉換

若 A、B、C、D 四點共直線 L，P 為線外一點，則(A，B；C，D)＝P(A，B；C，D)。（如圖 1-10）



▲圖 1-10



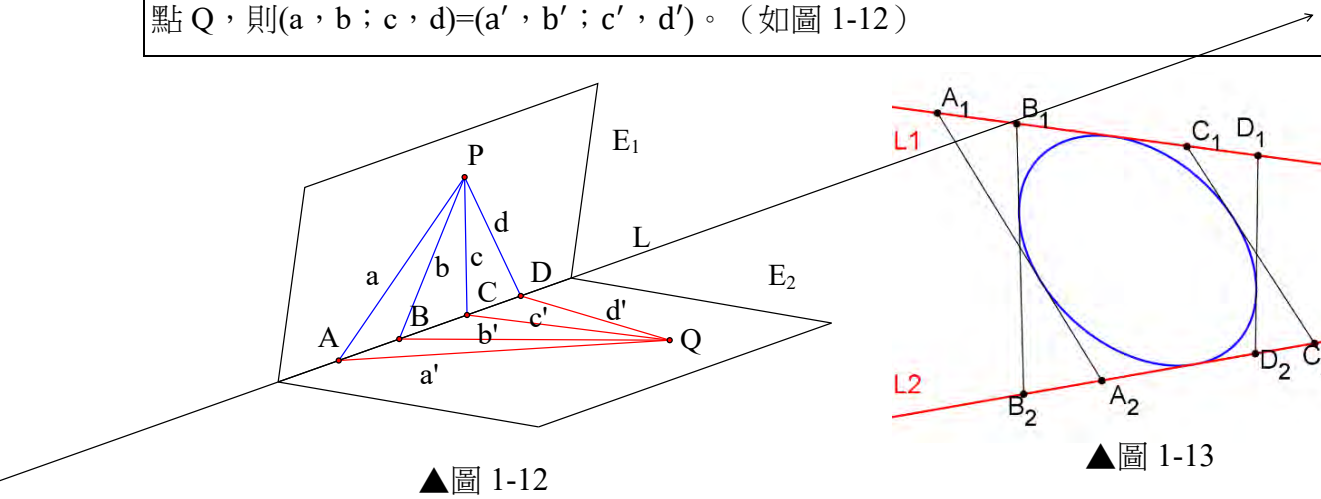
▲圖 1-11

【性質 3-2】經過射影變換後點交比不變

一直線 L 上有四點 A、B、C、D，過直線 L 外的一點 P，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$、$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{PD}$交另一直線 M 於 A′、B′、C′、D′，則(A，B；C，D)=(A′，B′；C′，D′)。（如圖 1-11）

【性質 3-3】經過射影變換後線交比不變

空間中有兩平面E_1、E_2，交於直線 L。平面E_1上有一點 P，以及皆通過 P 點的四條線束 a、b、c、d，並交 L 於 A、B、C、D，經射影變換後，會得到新的四條線束a'、b'、c'、d'並共交於點 Q，則(a，b；c，d)=(a'，b'；c'，d')。（如圖 1-12）



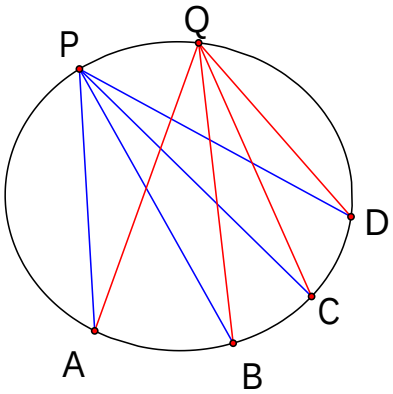
▲圖 1-12　　▲圖 1-13

【性質 3-4】內切圓錐的交比判別法

設$A_1B_1C_1D_1$與$A_2B_2C_2D_2$分別為直線L_1及L_2上的四點，若$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{C_1C_2}$、$\overleftrightarrow{D_1D_2}$、$L_1$、$L_2$六線共切於圓錐曲線，則($A_1$，$B_1$；$C_1$，$D_1$)=($A_2$，$B_2$；$C_2$，$D_2$)，反之亦然。（如圖 1-13）

【性質 3-5】外接切圓錐的交比判別法

若 A、B、C、D、P、Q 六點共圓錐曲線，則 P(A，B；C，D)=Q(A，B；C，D)。（如圖 1-14）

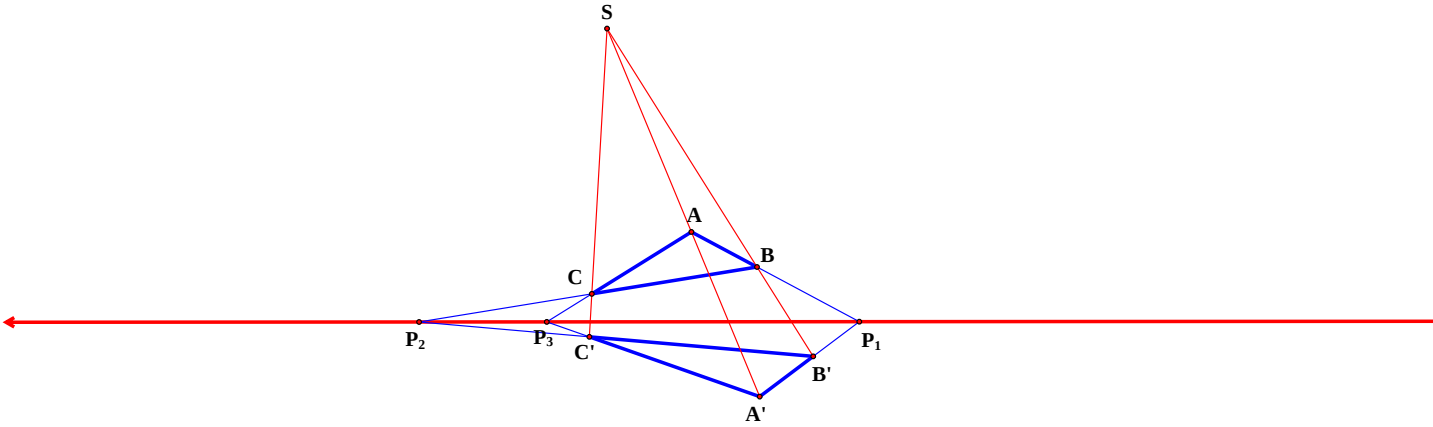


▲圖 1-14

（四）Desargues 定理、Pascal 定理和 Brianchon 定理

【Desargues 定理】（參見文獻[1]、[7]）

若兩個三角形對應頂點的連線共點，若且唯若其對應邊的交點共線。（如圖 1-15）

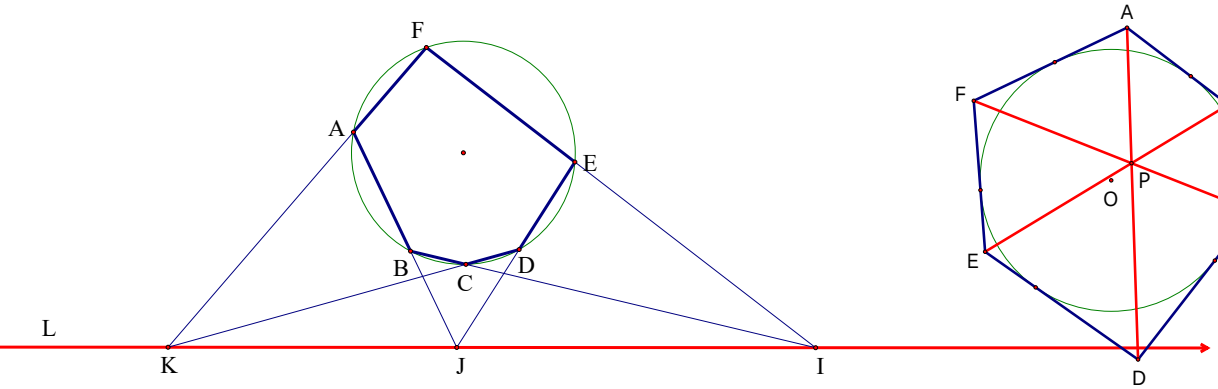


▲圖 1-15

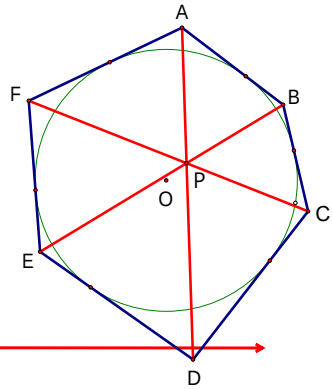
此定理有趣之處在於它是一個「自對偶定理」，即它的對偶定理是自己本身。

【Pascal 神秘六邊形定理】(簡稱 Pascal 定理)

若一個六邊形內接於圓錐曲線，則三組對邊延長線交點共線。(如圖 1-16)



▲圖 1-16



▲圖 1-17

【Brianchon 定理】

若一個六邊形外切於圓錐曲線，則三條對角線共點。(如圖 1-17)

由上述可以發現 Pascal 定理與 Brianchon 定理互相對偶，且逆定理皆成立。更值得一提的是，當 Pascal 定理發生在退化的圓錐曲線上時，敘述變為「若 A、B、C 及A'、B'、C'分別位於相異的兩直線上，則$\overleftrightarrow{AB'}$、$\overleftrightarrow{BC'}$、$\overleftrightarrow{CA'}$分別與$\overleftrightarrow{A'B}$、$\overleftrightarrow{B'C}$、$\overleftrightarrow{C'A}$的交點三點共線。」此即 Pappus 定理。然而 Pappus 定理不但比較早被發現，甚至比 Pascal 定理早了近 1300 年呢！

（五）雙心多邊形的畫法（參見文獻[9]）

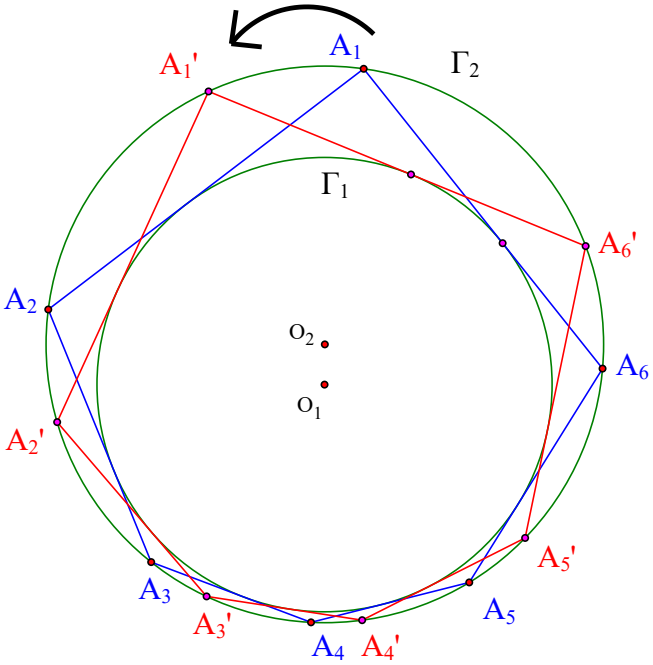
1. **Poncelet 定理（Poncelet's porism 或 Poncelet's closure theorem）：**

   給定兩個圓錐曲線Γ_1、Γ_2。在Γ_2上取一點A_1，過A_1做Γ_1切線，交Γ_2於A_2，再繼續過A_2做切線，交Γ_2於A_3，若以此類推經過 N 步後，A_{N+1}與A_1重合，則在Γ_2上取任意一點A_1'，不論A_1'之位置為何，經過 N 步後，A_{N+1}'必與A_1'重合。（可參考圖 1-18）

2. **Poncelet N 邊形：**

   上述的$A_1A_2 \ldots A_N$即稱為一個 PonceletN 邊形。若Γ_1、Γ_2皆為圓，則此時亦可稱$A_1A_2 \ldots A_N$為雙心 N 邊形。

※ Poncelet 定理提供了一個轉動雙心六邊形的想法：我們可以讓A_1在外接圓上移動，此時，雙心六邊形的所有頂點以及邊的位置會跟著改變，形狀也不一定全等，但仍保持著六個頂點在外接圓上，且六條邊仍外切於內切圓。為簡化上述說明，我們將移動A_1而使雙心六邊形改變的動態過程，稱為「**轉動**」。（如圖 1-18）



▲圖 1-18　Γ_1、Γ_2皆為圓的 Poncelet 定理

3. 雙心六邊形的外接圓、內切圓必滿足下列關係式：

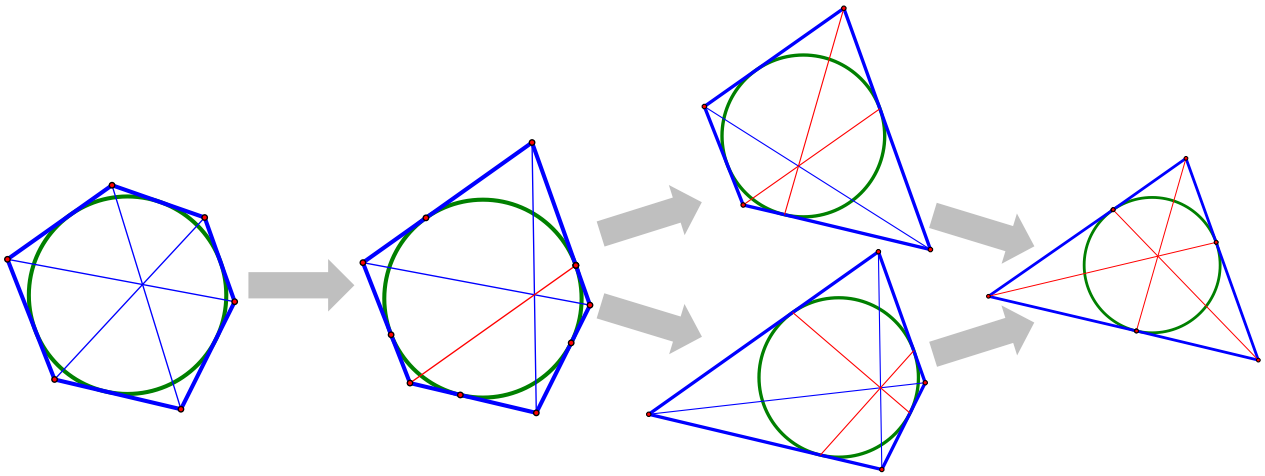
$$3(R^2-d^2)^4 = 4r^2(R^2+d^2)(R^2-d^2)^2 + 16r^4d^2R^2$$

（其中 R、r 分別是外接圓與內切圓半徑，d 為兩圓連心距）

（六）Brianchon 定理及 Pascal 定理的退化情形

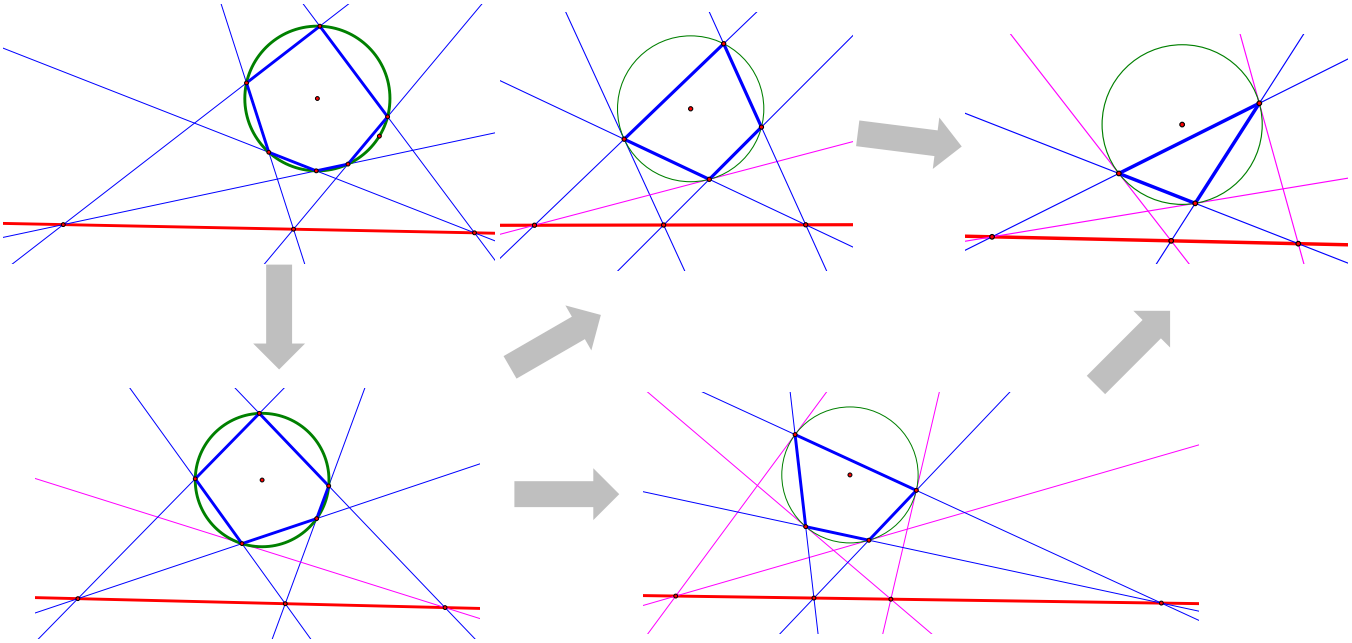
在動態環境下，倘若將圓外切六邊形的一個邊縮為 0，使兩個相鄰邊重合，則此頂點會變為切點，此時原本的圓外切六邊形退化成圓外切五邊形（如圖 1-19）；同理，拉動圓內接六邊形一個頂點，使其與相鄰的一個頂點重合，則邊的延長線會變為過頂點切線，此時原本的圓內接六邊形退化成圓內接五邊形（如圖 1-20）。然後再仿照前述方法，利用極點極線性質便可證得六邊形退化成五邊形、四邊形、三角形後，仍具有共點或共線之性質。

■ **Brianchon 定理的退化情形**



▲圖 1-19

■ **Pascal 定理的退化情形**



▲圖 1-20

參、研究結果與討論

一、 圓內接與外切多邊形之遞延圖形的共點共線情形

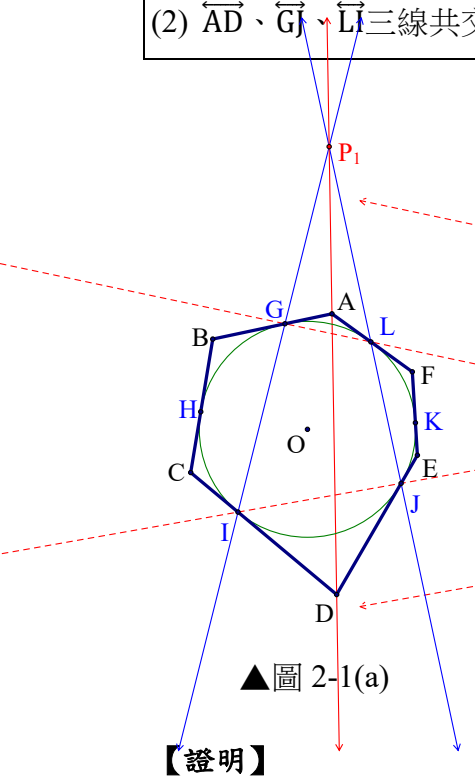
根據 Brianchon 定理，圓外切六邊形三條對角線所共交的點，稱為「Brianchon 點」；而我將透過不同條件組合所得到的三線共點，稱之為「廣義 Brianchon 點」。有以下的發現：

【定理 1-1】圓外切六邊形之廣義 Brianchon 點

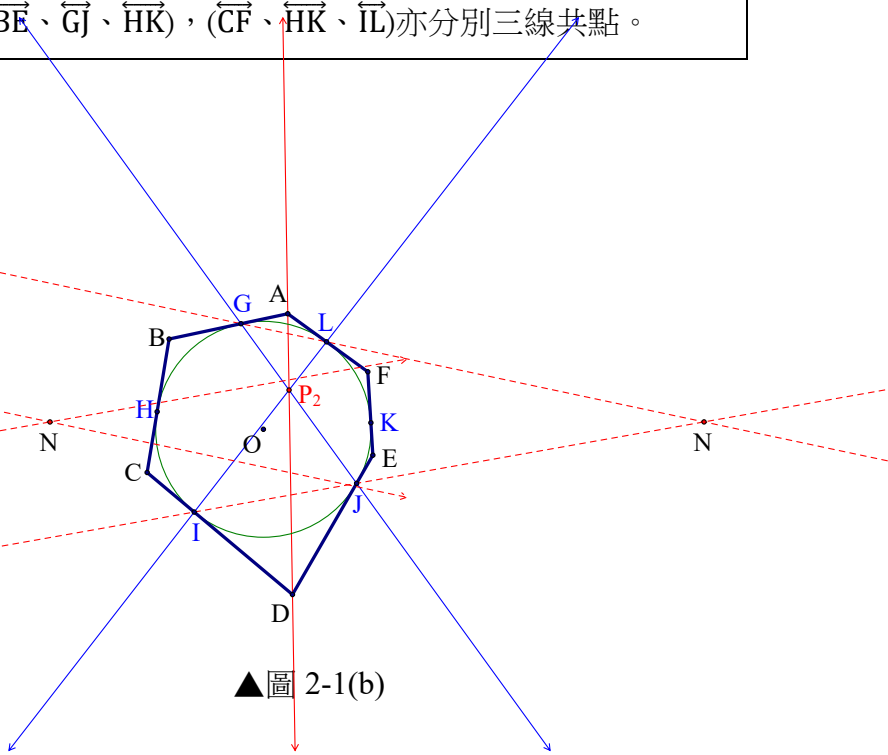
設 ABCDEF 為圓 O 的外切六邊形，G、H、I、J、K、L 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{FA}$ 上的切點。則（如圖 2-1）

(1) $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{LJ}$三線共交於P_1。同理，($\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{HJ}$、$\overleftrightarrow{GK}$)，($\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{KI}$、$\overleftrightarrow{HL}$)亦分別三線共點。

(2) $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{LI}$三線共交於P_2。同理，($\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$)，($\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{HK}$、$\overleftrightarrow{IL}$)亦分別三線共點。



▲圖 2-1(a)



▲圖 2-1(b)

【證明】

1° 作$\overleftrightarrow{GL}$、$\overleftrightarrow{JI}$交於 N，由<性質 2-2>可知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 N 關於圓 O 的極線。

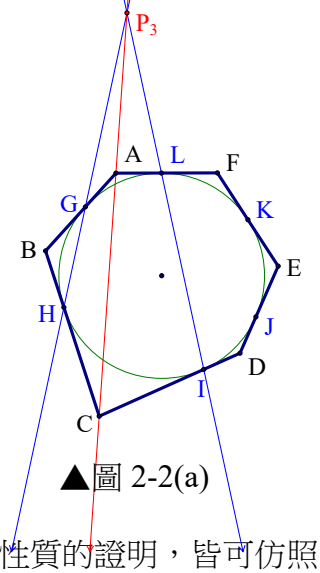
2° 由<性質 2-3>知$\overleftrightarrow{GI}$和$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GJ}$和$\overleftrightarrow{LI}$的交點P_1、P_2皆在 N 關於圓 O 的極線上，即在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上，所以$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{AD}$三線共點於P_1，且$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{LI}$三線共點於P_2。同理，($\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$)、($\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{HL}$、$\overleftrightarrow{IK}$)、($\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$)、($\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{IL}$、$\overleftrightarrow{HK}$) 也分別三線共點。■

繼續嘗試不同的連線組合，發現了另外兩種共點情形：

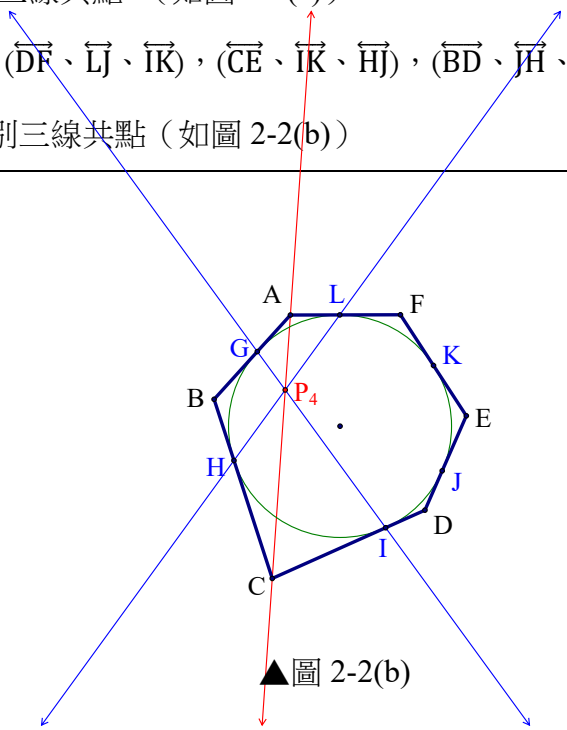
【定理 1-2】圓外切六邊形之廣義 Brianchon 點

（1） $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{LI}$ 三線共交於P_3。同理，($\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{HK}$、$\overleftrightarrow{GL}$)，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$)，($\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{LK}$)，($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{GJ}$)，($\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{KJ}$、$\overleftrightarrow{IL}$)亦分別三線共點。（如圖 2-2(a)）

（2） $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{LH}$ 三線共交於P_4。同理，($\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{IK}$)，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$)，($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{JH}$、$\overleftrightarrow{GI}$)，($\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GK}$)，($\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{LH}$、$\overleftrightarrow{GK}$)亦分別三線共點（如圖 2-2(b)）



▲圖 2-2(a)



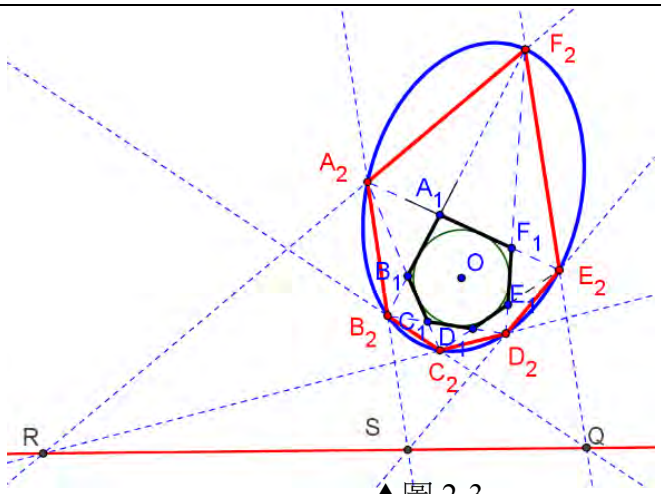
▲圖 2-2(b)

上面兩個共點性質的證明，皆可仿照**【定理 1-1】**的證明方法，故不再贅述。

接下來，我們大膽地將圓外切六邊形的各邊延長線取交點連線形成一個新的六邊形，我們將它稱為「邊延長遞延圖形」，可得到驚人的結果，如下：

【定理 1-3】圓外切六邊形的邊延長遞延圖形

設$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$為圓 O 的外切六邊形，若將各邊延長取交點連線形成一個六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，則六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$必內接於一個圓錐曲線。（如圖 2-3）



▲圖 2-3

我曾經嘗試以滿足六階行列式為零的代數方法來說明六點共圓錐曲線，如下：

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

並借助數學軟體 Maple 將邊延長遞延圖形的六個頂點求出，帶入上式證實 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$確實六點共圓錐曲線；但若沒有電腦輔助，這樣龐雜的計算，除了演算困難外，實在難以形成有力的說服，同時也深感這樣的證明不免失去原命題美麗之處。所幸，最終透過射影幾何中的交比運算，給出了簡潔有力的證明，如下：

【證明】

1° 根據＜性質 3-1>、＜性質 3-2＞，

$F_2\left(A_2，B_2；D_2，E_2\right)=F_2\left(A_2，A_1；F_1，E_2\right)=(A_2，A_1；F_1，E_2)$

2° 同理，$C_2(A_2，B_2；D_2，E_2)=C_2(C_1，B_2；D_2，D_1)=(C_1，B_2；D_2，D_1)$

3° 因為$\overleftrightarrow{A_2C_1}$、$\overleftrightarrow{A_1B_2}$、$\overleftrightarrow{F_1D_2}$、$\overleftrightarrow{E_2D_1}$為圓 O 切線，故根據＜性質 3-4＞，

$\left(A_2，A_1；F_1，E_2\right)=\left(C_1，B_2；D_2，D_1\right)$

4° 由以上得$F_2(A_2，B_2；D_2，E_2)=C_2(A_2，B_2；D_2，E_2)$，再由文獻探討中的

＜性質 3-5＞，知A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2六點共圓錐曲線。

5° 因為六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$內接於一個圓錐曲線，故根據 Pascal 定理，其三組對邊延長線交點必共交一線，即 Pascal 線。■

由上述中，可以發現「**滿足 Brianchon 定理的六邊形，其下一層邊延長遞延圖形會滿足 Pascal 定理**」，換句話說「**原來 Brianchon 定理中是隱含著 Pascal 定理的**」，這樣的發現不但有趣，也讓 Brianchon 與 Pascal 在這裡有了第一次的相遇！

而在上述的圓外切六邊形及其遞延圖形中，嘗試不同的連線組合仍會有三線共點之情形。

【定理 1-4】圓外切六邊形邊延長遞延圖形的廣義 Brianchon 點

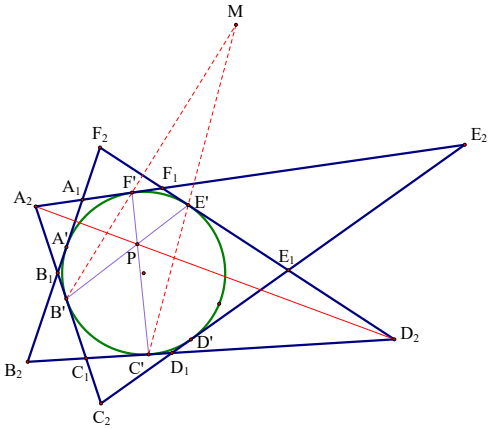
圓外切六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各邊與圓分別切於 A'、B'、C'、D'、E'、F'，各邊延長線相交交點依序為 A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2，則$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$三線共交於 P。（如圖 2-4）

【證明】

1° 作$\overleftrightarrow{B'F'}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$交於 M。由＜性質 2-2＞知$\overleftrightarrow{A_2D_2}$為 M 關於圓 O 的極線。

2° 由＜性質 2-3＞得$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$的交點 P 在 M 關於圓 O 的極線上，即$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$三線共點於 P。■

同理，($\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B_2E_2}$)，($\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{C_2F_2}$)亦分別三線共點。



▲圖 2-4

與 Brianchon 定理對偶的 Pascal 定理：圓內接六邊形的三組對邊延長線交點會共線，此線即為 Pascal 線。同樣的，是否也存在著其它廣義 Pascal 線呢？

【定理 1-5】圓內接六邊形的廣義 Pascal 線

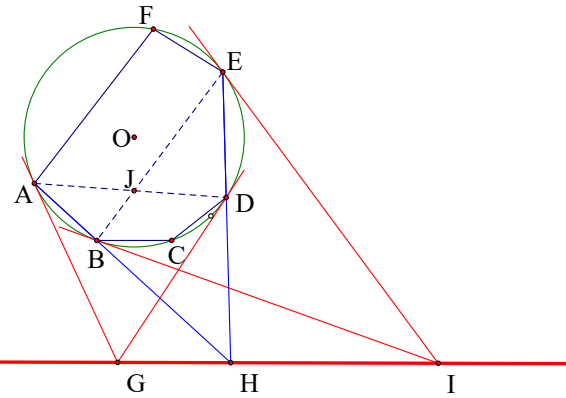
圓內接六邊形 ABCDEF，分別過 A、D 作切線交於 G，過 B、E 作切線交於 I，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組亦會形成廣義 Pascal 線。（如圖 2-5）

【證明】

1° 由＜性質 2-2＞知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BE}$ 為 I 關於圓 O 的極線。

2° 令 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 J，由＜性質 2-3＞知 J 亦在 H 關於圓 O 的極線上，故 G、H、I 各自關於圓 O 的極線共點 J。

3° 由＜性質 2-5＞知，G、H、I 三點共線。■

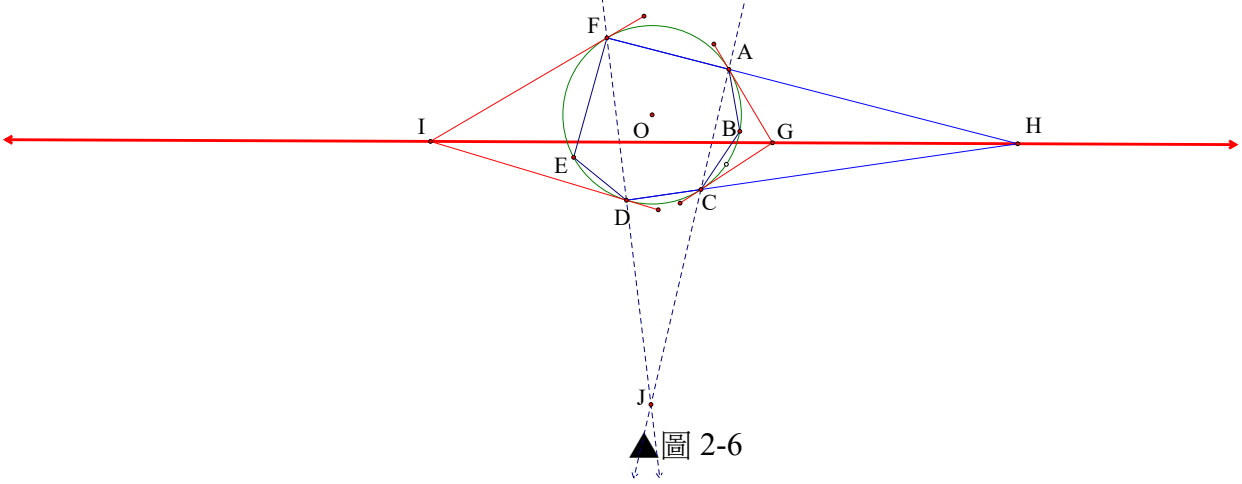


▲圖 2-5

如同圓外切六邊形的情形，我們繼續嘗試不同的連線組合，發現了下列共線情形：

【定理 1-6】圓內接六邊形的廣義 Pascal 線

分別過 A、C 作切線交於 G，過 F、D 作切線交於 I，$\overleftrightarrow{AF}$與$\overleftrightarrow{CD}$交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組也會形成廣義 Pascal 線。（如圖 2-6）



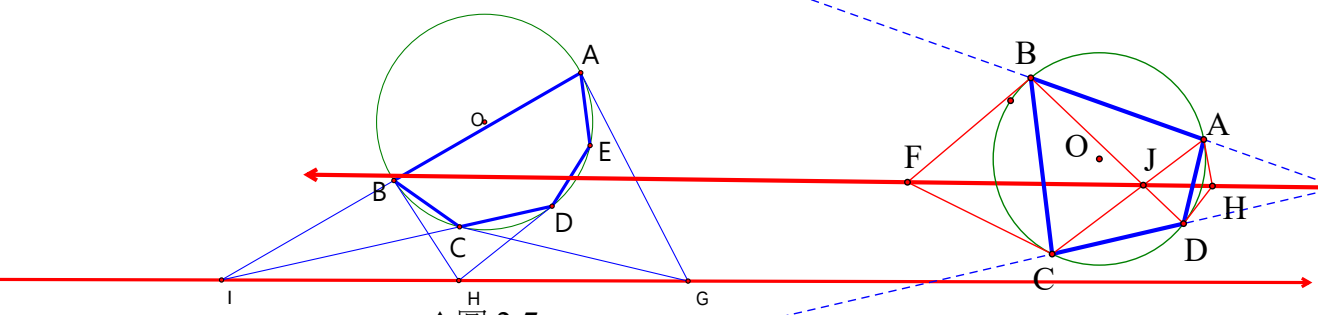
▲圖 2-6

若運用退化手法，可得到下列圓內接五邊形或四邊形的共線性質，如下：

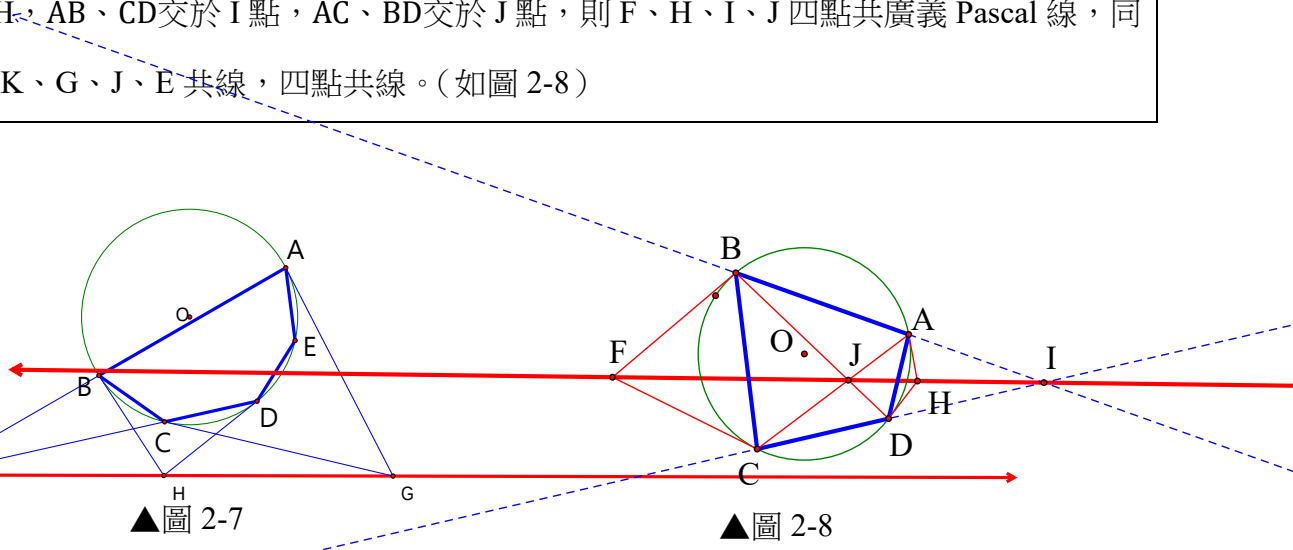
【定理 1-7】圓內接五邊形、四邊形的廣義 Pascal 線

（1）設 ABCDE 內接於圓 O，分別過 A 與 C 作切線交於 G，過 B 與 D 作切線交於 H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 I，則 G、H、I 三點共線。同理，另有四組共線情形。（如圖 2-7）

（2）設 ABCD 為圓 O 的內接四邊形，分別過 A、B、C、D 作圓 O 切線，分別交於 E、F、G、H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 I 點，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$交於 J 點，則 F、H、I、J 四點共廣義 Pascal 線，同理，K、G、J、E 共線，四點共線。（如圖 2-8）



▲圖 2-7



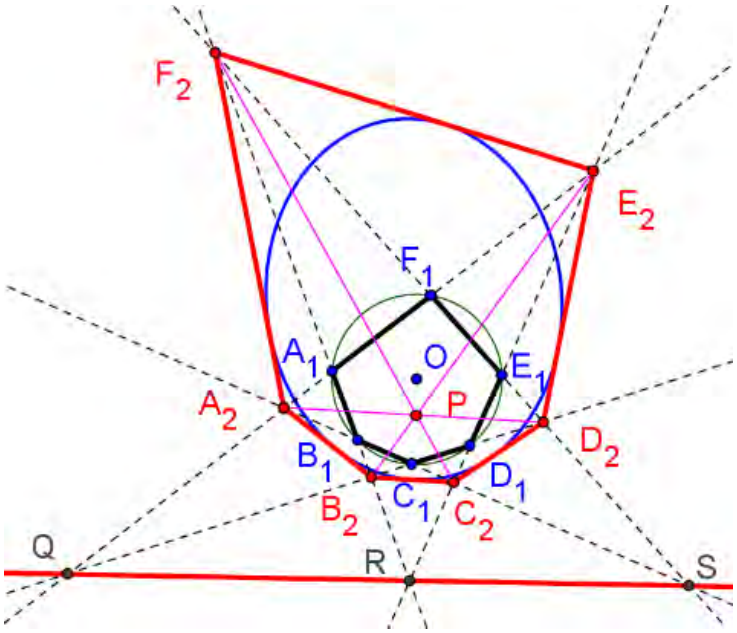
▲圖 2-8

上述之共線情形，可仿照**【定理 1-5】**證出，故不再贅述。

接著，我將圓內接六邊形仿照圓外切六邊形的方式做邊延長遞延，而得到了以下性質。唯須特別注意的是，我們是做了相同的構圖動作，而非做對偶的構圖，所以這兩個命題並不是對偶的。事實上，這兩個命題都是自對偶的。（參見【**定裡** 1-3】）

【定理 1-8】圓內接六邊形的邊延長遞延圖形

若$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$內接於圓 O，將各邊延長取交點連線形成六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，則六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$外切於一個圓錐曲線，故存在一 Brianchon 點。（如圖 2-9）



▲圖 2-9

與【**定理** 1-3】的證明所遭遇的困難一樣，我嘗試利用齊次座標，以及同樣的六階行列式來完成證明，雖然同樣以數學軟體 Maple 驗證無誤，但仍希望如同【**定理** 1-3】一般，以交比完成證明，卻不料因為兩個命題並非對偶命題，而使得同樣的方法無法在這裡適用。

所幸，一個突如其來的想法，將$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$視為兩個重疊的三角形，這才能以 **Desargues 定理**完成了證明，如下：

【證明】

1° 由 Pascal 定理可知$\overleftrightarrow{F_2D_2}$、$\overleftrightarrow{C_2A_2}$的交點 S、$\overleftrightarrow{D_2B_2}$、$\overleftrightarrow{A_2E_2}$的交點 Q、$\overleftrightarrow{B_2F_2}$、$\overleftrightarrow{E_2C_2}$的交點 R 三點共線。

2° 由上述及 Desargues 定理可推得：$\triangle F_2D_2B_2$及$\triangle C_2A_2E_2$之對應邊交點共線，故知其對應之頂點連線$\overleftrightarrow{F_2C_2}$、$\overleftrightarrow{D_2A_2}$、$\overleftrightarrow{B_2E_2}$三線共點。

3° 由 Brianchon 逆定理知，六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$必外切於一個圓錐曲線。■

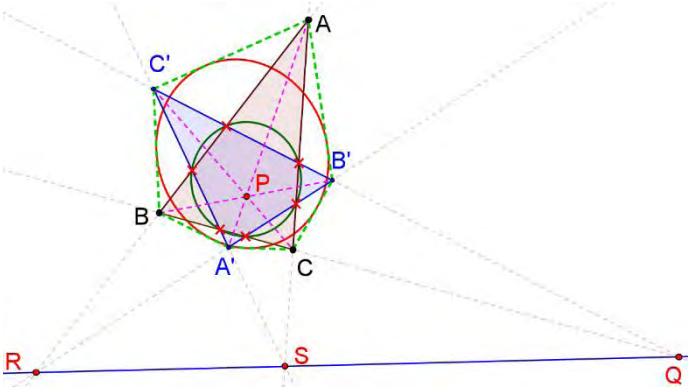
由上述可以發現「**滿足 Pascal 定理的六邊形，其下一層邊延長遞延圖形會滿足 Brianchon 定理**」，換句話說「Pascal 定理中也含有 Brianchon 定理的性質」；若再與**【定理 1-3】**一起討論，會發現「**無論對圓內接六邊形或外切六邊形不斷做邊延長遞延，若其第 n 層遞延圖形滿足 Brianchon 定理，則其第 n+1 層的遞延圖形必滿足 Pascal 定理；反之亦然**」。原是對偶關係的兩個定理，在這裡竟呈現出「你中有我，我中有你！」的現象，也讓 Pascal 與 Brianchon 這兩位不同年代的數學家，彼此有了真正的「相遇」！

另外，由**【定理 1-8】**的證明過程，可以發現，Desargues 定理雖然不同於 Pascal 定理和 Brianchon 定理，它並未涉及圓錐曲線，但是透過 Pascal 定理和 Brianchon 定理及其逆定理可以很容易發現，其同時含有六點共接圓錐曲線、六線共切圓錐曲線之情形，簡述如下：

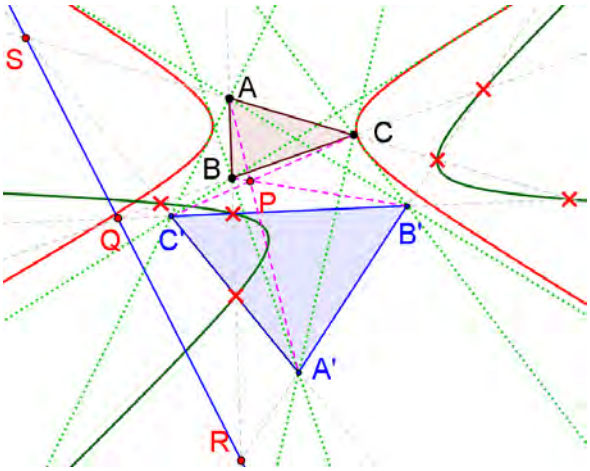
若$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$為滿足 Desargues 定理的兩個三角形，則有：

（1） $\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$、$\overleftrightarrow{AC}$和$\overleftrightarrow{B'C'}$、$\overleftrightarrow{AC}$和$\overleftrightarrow{B'A'}$、$\overleftrightarrow{CB}$和$\overleftrightarrow{B'A'}$、$\overleftrightarrow{CB}$和$\overleftrightarrow{A'C'}$、$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{A'C'}$的交點，六點共圓錐曲線。

（2） $\overleftrightarrow{AC'}$、$\overleftrightarrow{C'B}$、$\overleftrightarrow{BA'}$、$\overleftrightarrow{A'C}$、$\overleftrightarrow{CB'}$、$\overleftrightarrow{B'A}$六線共切圓錐曲線。（如圖 2-10）



▲圖 2-10(a)　$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$重疊的情形

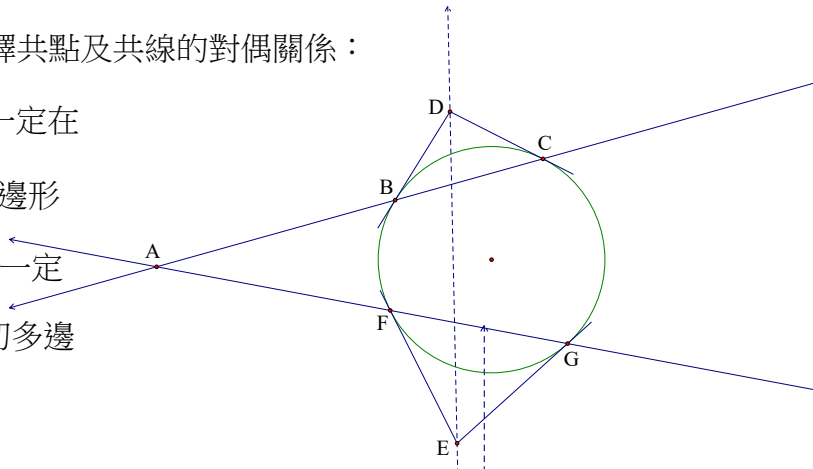


▲圖 2-10(b)　ABC與$\triangle A'B'C'$分離的情形

由上述不難看出，Pascal 定理和 Brianchon 定理在 Desargues 定理中呈現更緊密的關係；而同屬法國數學家的 Desargues (1591-1661)、Pascal (1623-1662)與 Brianchon (1785-1864)，這三位的研究，在同為射影幾何的重要支柱上有了更密不可分的微妙關係。

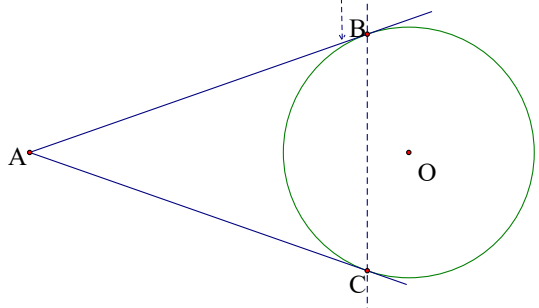
接著，我們希望透過極點極線的性質，來解釋共點及共線的對偶關係：

如圖 2-11(a)，由＜性質 2-2＞知道 D 點一定在 A 關於圓 O 的極線上。若將$\overleftrightarrow{BC}$視為圓內接多邊形的邊延長線，當 A 點發生共線關係時，則$\overleftrightarrow{DE}$一定涉及另一共點關係。此時 D、E 可視為圓外切多邊形的頂點。



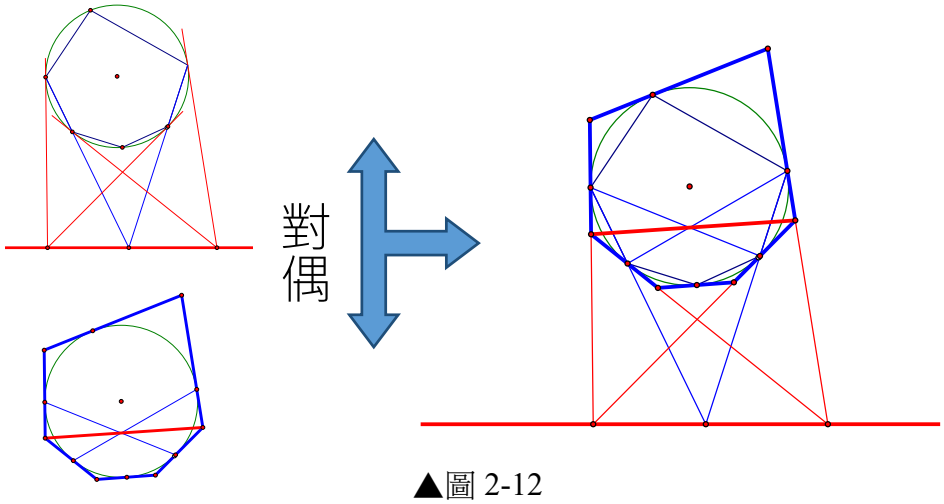
▲圖 2-11(a)

同樣的，圖 2-11(b)中的$\overleftrightarrow{BC}$為 A 關於圓 O 的極線，若將$\overleftrightarrow{BC}$視為圓外切多邊形的切點連線，當$\overleftrightarrow{BC}$發生共點關係時，則 A 點也會涉及另一共線關係，此時 A 點可視為圓內接多邊形頂點的切線交點。



▲圖 2-11(b)

以下面的圓內接六邊形和圓外切六邊形為例，即可依上述方式互相導出，如此我們稱為「**廣義 Brianchon 點與廣義 Pascal 線互相對偶**，或**互相對應的一組廣義 Brianchon 點及廣義 Pascal 線**。」



▲圖 2-12

綜合上述，我們可得到下列結論：

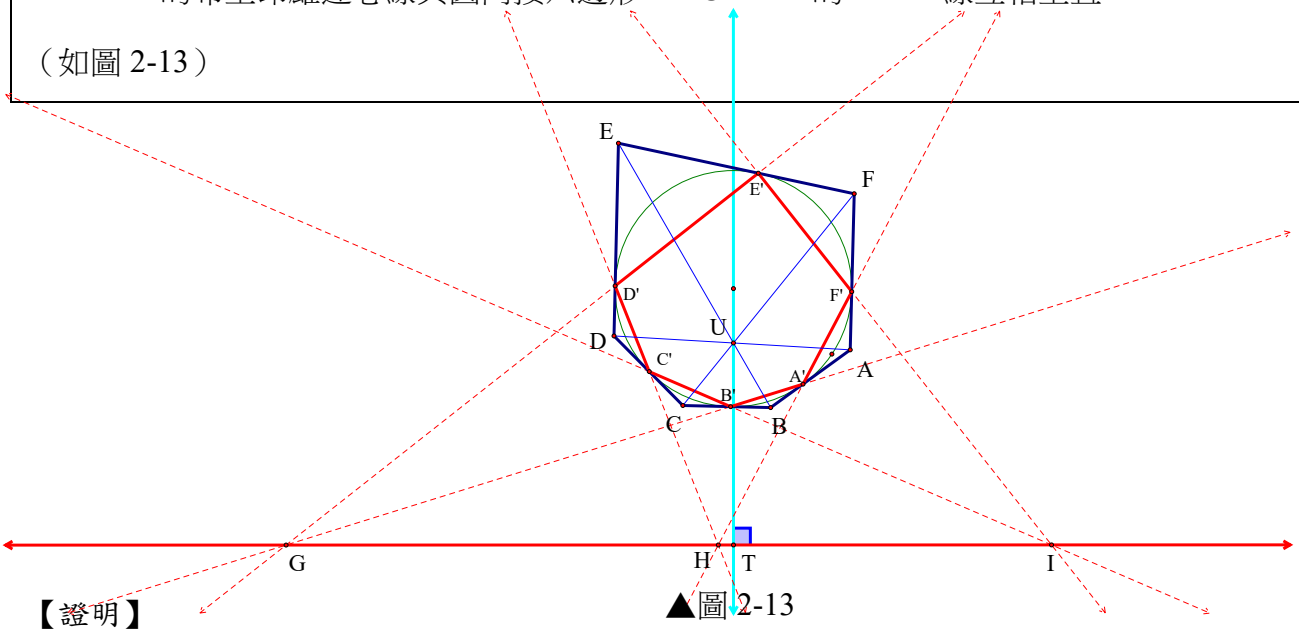
【定理 1-9】共點與共線的對偶關係

當圓外切多邊形有共點關係時，則與之對應的圓內接多邊形必有共線關係。反之亦然。

上面的圖形，引發我一個有趣的想法：若將圓外切六邊形 ABCDEF 的六個切點連接形成一個圓內接六邊形$\mathbf{A'B'C'D'E'F'}$（或是過圓內接六邊形的六個頂點做切線並取交點），則此時 ABCDEF 的 Brianchon 點與$\mathbf{A'B'C'D'E'F'}$的 Pascal 線是否具有特殊關係呢？下面為方便敘述，將 Brianchon 點與圓心的連線稱為**布里昂雄連心線**。

【定理 1-10】圓外切內接六邊形的共點共線關係

以圓外切六邊形 ABCDEF 的六個切點作出圓內接六邊形$\mathbf{A'B'C'D'E'F'}$，則圓外切六邊形 ABCDEF 的布里昂雄連心線與圓內接六邊形$\mathbf{A'B'C'D'E'F'}$的 Pascal 線互相垂直。（如圖 2-13）



▲圖 2-13

【證明】

1° 由<性質 2-2>知$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$分別為 G、H、I 關於圓 O 的極線。

2° 由 Brianchon 定理以及 Pascal 定理知道，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$會共點，G、H、I 會共線。

3° 由＜性質 2-5＞知，這裡的 Brianchon 點與 Pascal 線互為極點與極線的關係，故 Brianchon 點與圓心的連線會垂直於 Pascal 線。■

由上可知，Brianchon 點與 Pascal 線互為極點極線的關係，使得布里昂連心線必然垂直 Pascal 線。那任意的廣義 Brianchon 點與圓心的連線是否也會垂直其所對應的廣義 Pascal 線呢？答案是肯定的，我們在**【定理 1-9】**提到了共點共線的對偶關係，這背後的原因便是廣義 Brianchon 點及廣義 Pascal 線互為極點極線關係。

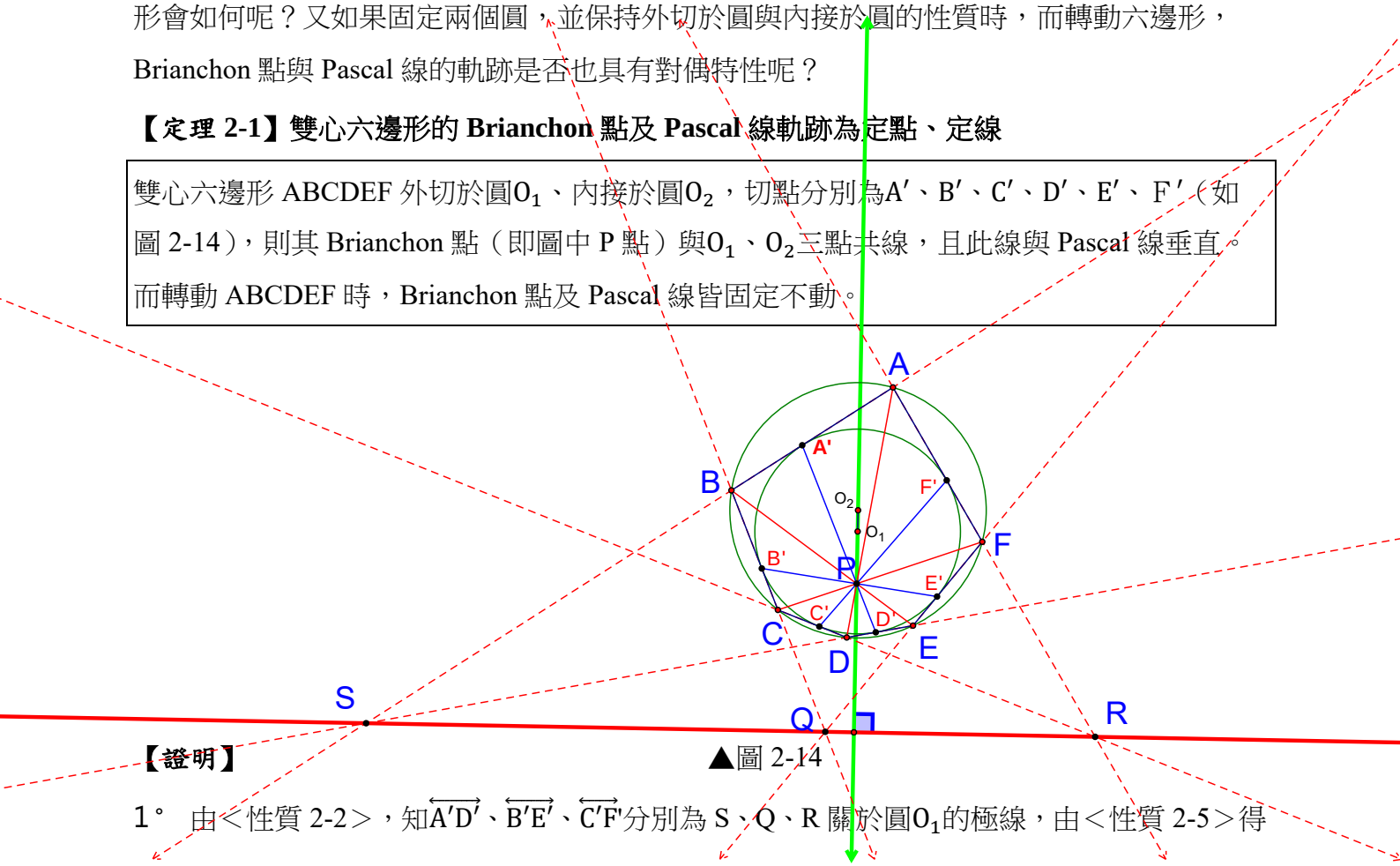
事實上，包括圓外切內接五邊形、四邊形、三角形皆滿足 Brianchon 點與 Pascal 線互為極點極線的條件，故它們的布里昂連心線也會垂直 Pascal 線；此外，還有哪些同時具有 Brianchon 點及 Pascal 線的圖形會滿足這樣的條件呢？接下來，我們將著眼於雙心六邊形。

二、 雙心六邊形的 Brianchon 點、Pascal 線之軌跡與遞延圖形

前述的圓外切（或圓內接）六邊形的 Brianchon 點（或 Pascal 線）均會隨著六邊形變動而改變位置；若將兩者合併成一個同時外切於圓與內接於圓的六邊形，即雙心六邊形，其情形會如何呢？又如果固定兩個圓，並保持外切於圓與內接於圓的性質時，而轉動六邊形，Brianchon 點與 Pascal 線的軌跡是否也具有對偶特性呢？

【定理 2-1】雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線軌跡為定點、定線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為A'、B'、C'、D'、E'、F'（如圖 2-14），則其 Brianchon 點（即圖中 P 點）與O_1、O_2三點共線，且此線與 Pascal 線垂直。而轉動 ABCDEF 時，Brianchon 點及 Pascal 線皆固定不動。



▲圖 2-14

【證明】

1° 由＜性質 2-2＞，知$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$分別為 S、Q、R 關於圓$O_1$的極線，由＜性質 2-5＞得$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$必共交 P 點，且 Pascal 線關於圓$O_1$的極點為 P 點。

2° 由＜性質 2-3＞知道，S、Q、R 關於圓O_2的極線皆通過 Brianchon 點 P，故 Pascal 線關於圓O_2的極點亦為 P 點。則$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_2P}$皆垂直 Pascal 線，所以 P、$O_1$、$O_2$三點共線。

3° 由上述可知，Brianchon 點、Pascal 線同時對於圓O_1、圓O_2皆為極點極線關係，故知 Brianchon 點為圓O_1和圓O_2的 Limiting Point（極限點）。Limiting Point 是固定的，所以當 ABCDEF 轉動時，其 Brianchon 點為固定不動的點，Pascal 線為固定不動的線。■

前述 P 點與O_1、O_2所共的線，即為前述的「**布里昂雄連心線**」。

同時我們也觀察到正六邊形的特例情形：

已知$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$分別為 S、Q、R 關於$O_1$的極線。當兩圓為同心圓時，$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$三線的交點（即 P 點）位於兩圓圓心上，由＜性質 2-5＞可知，S、Q、R 必共線，但此時六邊形的三組對邊分別平行，理應不存在交點 S、Q、R，然而在射影幾何中，將平行線視為交於無限遠點，即此時的 S、Q、R 在無線遠處，而仍存在一條 Pascal 線。

在我們的研究中也發現廣義 Brianchon 點與 Pascal 線或廣義 Pascal 線與 Brianchon 點之間存在對偶關係，以下面【**定理 2-2**】和【**定理 2-3**】為例說明：

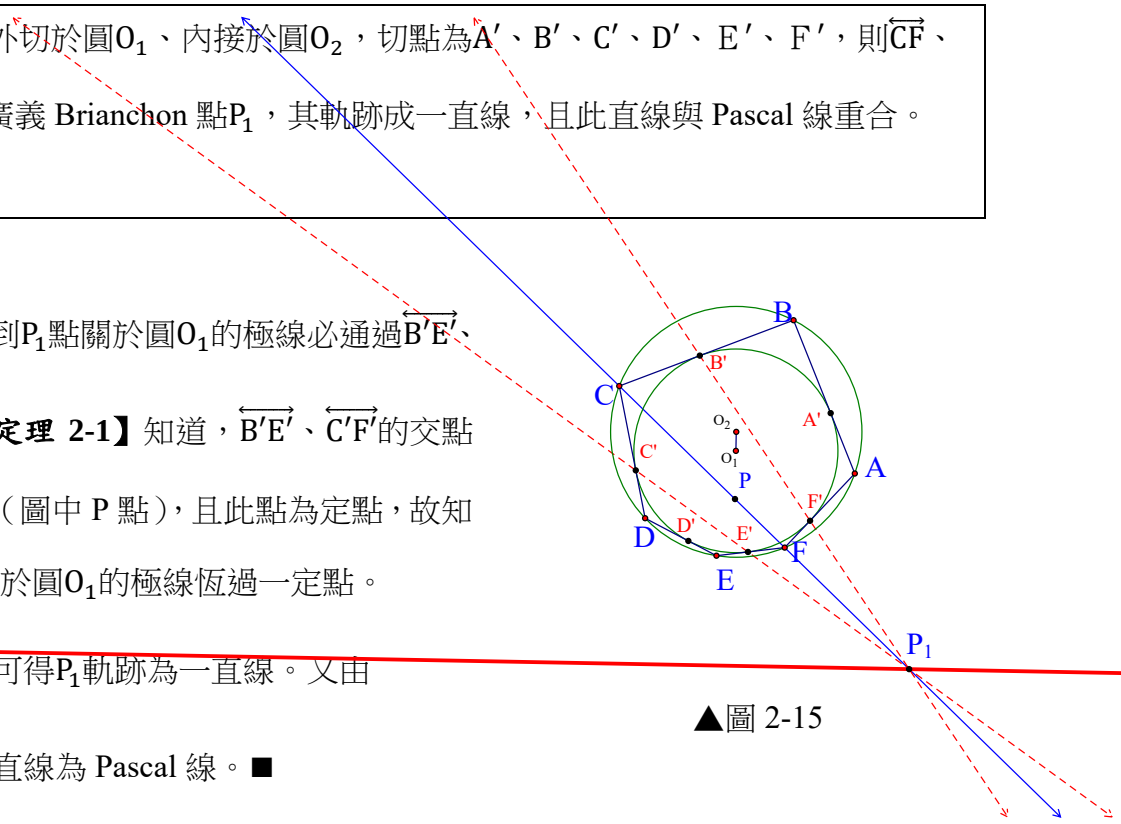
【定理 2-2】雙心六邊形的廣義 Brianchon 點軌跡為 Pascal 線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$、$\overleftrightarrow{B'F'}$共交於一個廣義 Brianchon 點$P_1$，其軌跡成一直線，且此直線與 Pascal 線重合。（如圖 2-15）

【證明】

1° 由＜性質 2-3＞得到P_1點關於圓O_1的極線必通過$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$的交點，由【**定理 2-1**】知道，$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$的交點即為 Brianchon 點（圖中 P 點），且此點為定點，故知轉動過程中P_1點關於圓O_1的極線恆過一定點。

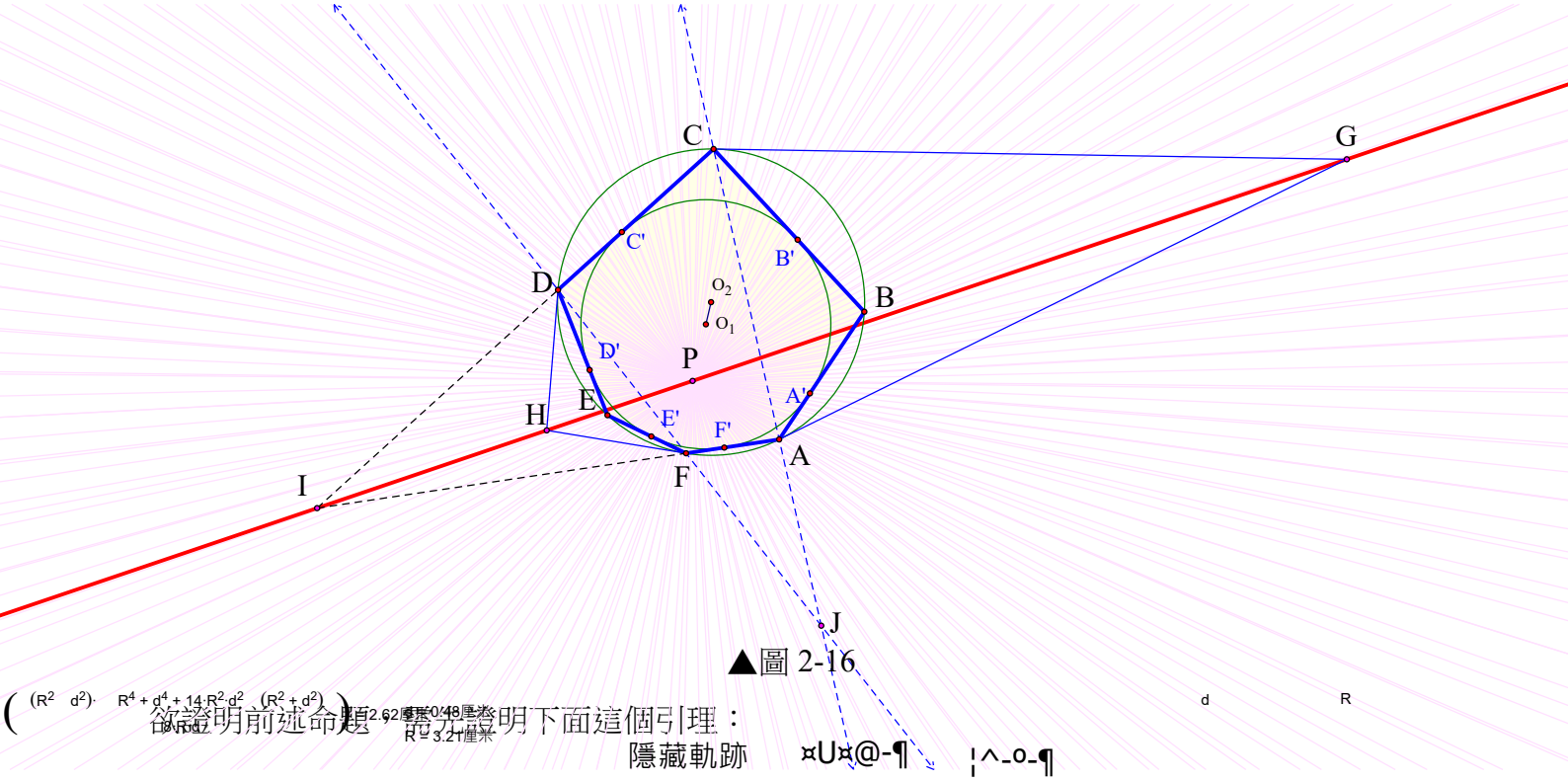
2° 根據＜性質 2-6＞可得P_1軌跡為一直線。又由＜性質 2-4＞知此直線為 Pascal 線。■



▲圖 2-15

【定理 2-3】雙心六邊形的廣義 Pascal 線軌跡恆過 Brianchon 點

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。過 A、C 做切線交於 G，過 D、F 做切線交於 H，延長$\overline{AF}$、$\overline{CD}$交於 I，則 G、H、I 三點共線，即為廣義 Pascal 線。當轉動 ABCDEF 時，此廣義 Pascal 線也跟著轉動，其軌跡恆過一定點 P，此點為 Brianchon 點。（如圖 2-16）



▲圖 2-16

欲證明前述命題，需先證明下面這個引理：

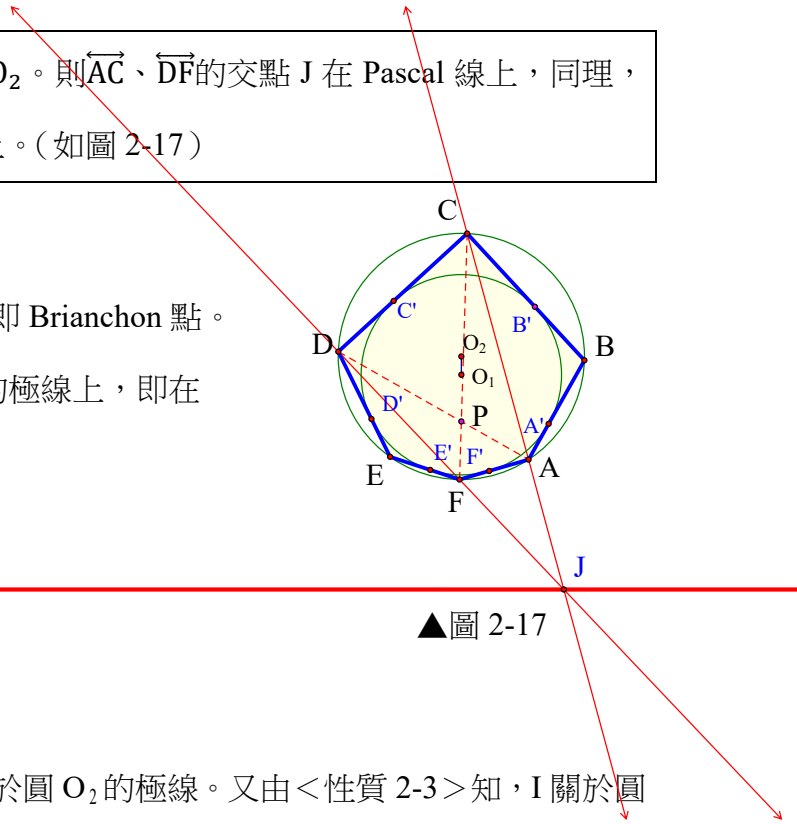
【引理】

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。則$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$的交點 J 在 Pascal 線上，同理，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{BF}$)、($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{AE}$)的交點亦皆在 Pascal 線上。（如圖 2-17）

【證明】

由＜性質 2-3＞知 J 關於圓O_2的極線過 P 點，即 Brianchon 點。

再由＜性質 2-4＞知 J 在 Brianchon 點關於O_2的極線上，即在 Pascal 線上。■



▲圖 2-17

接著回頭證明原本的**【定理 2-3】**，如下：

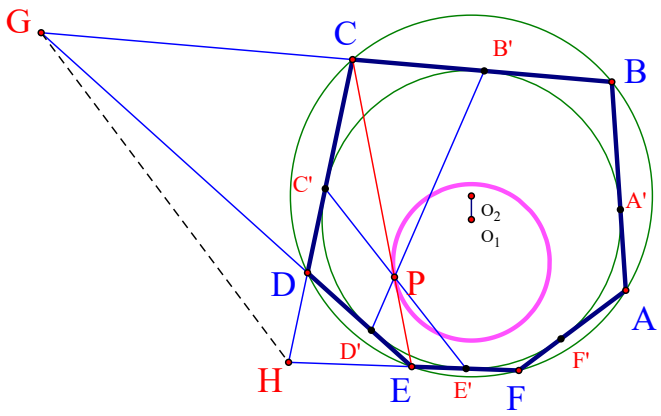
1° 由**【定理 1-6】**知 G、H、I 三點共線。

2° 由＜性質 2-2＞知$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$分別為 G、H 關於圓 O_2 的極線。又由＜性質 2-3＞知，I 關於圓 O_2 的極線通過$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$的交點，令此交點為 J，由**【引理】**知 J 在 Pascal 線上。

3° 由＜性質 2-4＞知 J 的極線必過 Pascal 線的極點，即 G、H、I 三點共線且通過 Brianchon 點，因為 Brianchon 點為定點，故轉動六邊形 ABCDEF 時，此廣義 Pascal 線的軌跡恆過一定點 P。■

【定理 2-4】雙心六邊形的廣義 Brianchon 點軌跡為圓錐曲線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。切點為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$、$\overleftrightarrow{B'D'}$三線共點於 P，此點的軌跡為一圓錐曲線。（如圖 2-18）



▲圖 2-18

【證明】

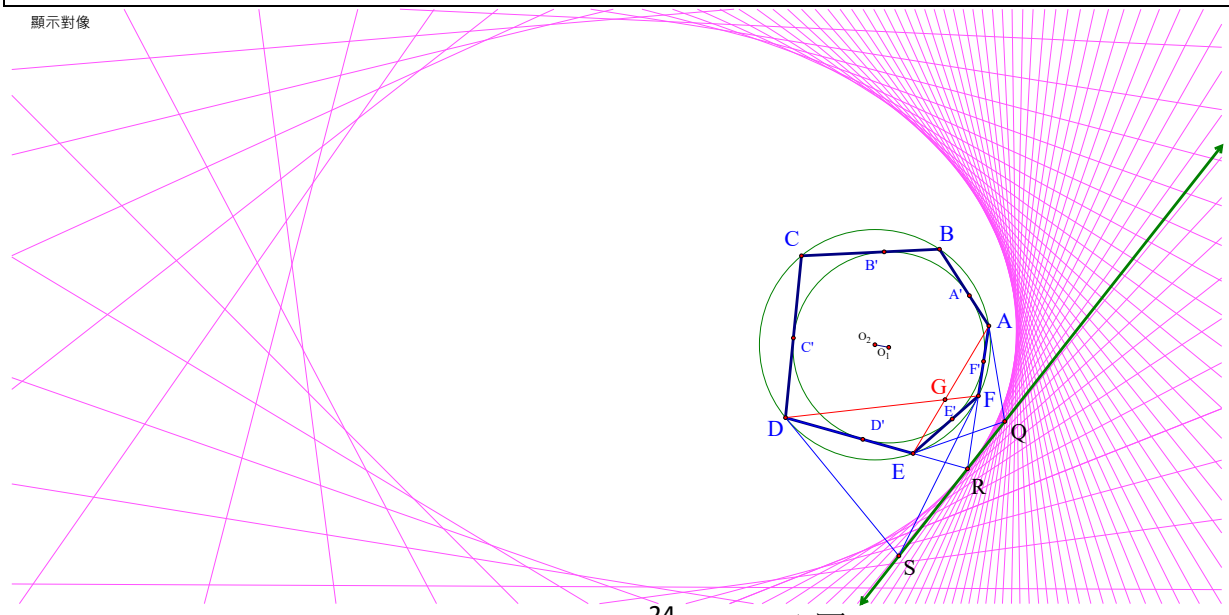
1° 延伸$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{CD}$和$\overleftrightarrow{EF}$分別交於 G、H。由＜性質 2-4＞知道$\overleftrightarrow{GH}$關於圓O_1的極點為 P。

2° 將 G、H 視為邊延長遞延的外延圖形之頂點，根據**【定理 2-8】**知道邊延長遞延圖形邊的軌跡會包絡出一圓錐曲線。（後面會再做說明，請參見 P.28）

3° 根據＜性質 2-6＞知 P 的軌跡為一圓錐曲線。■

【定理 2-5】雙心六邊形的廣義 Pascal 線軌跡為圓錐曲線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。切點為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則過 D、F 作切線交於 S，過 A、E 作切線交於 Q，延長$\overline{AF}$、$\overline{DE}$交於 R，則 Q、R、S 三點共線，即廣義的 Pascal 線，此線的軌跡包絡出一圓錐曲線。（如圖 2-19）



▲圖 2-19

【證明】

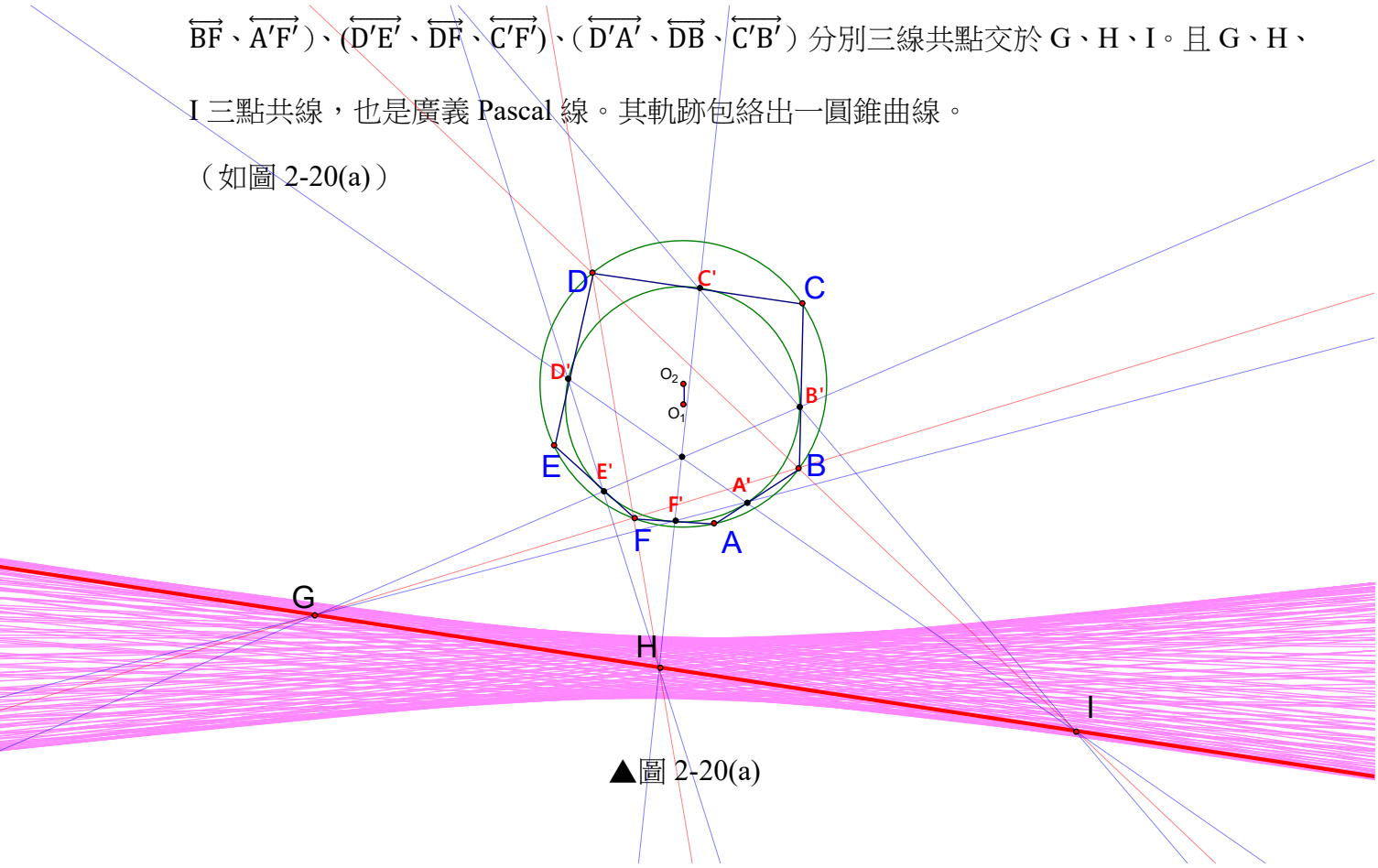
1° 延伸$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{AE}$交於 G，由＜性質 2-2＞知道 Q、S 關於圓O_2的極線分別為$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{DF}$，故由＜性質 2-4＞知道$\overleftrightarrow{QS}$關於圓O_2的極點為 G。

2° 將 G 視為邊延長遞延圖形的內朔圖形之頂點，根據【**定理 2-8**】知道邊延長遞延圖形的頂點軌跡為一圓錐曲線。（後面會再做說明，請參見 P.28）

3° 根據＜性質 2-6＞知$\overleftrightarrow{QS}$的軌跡包絡出一圓錐曲線。■

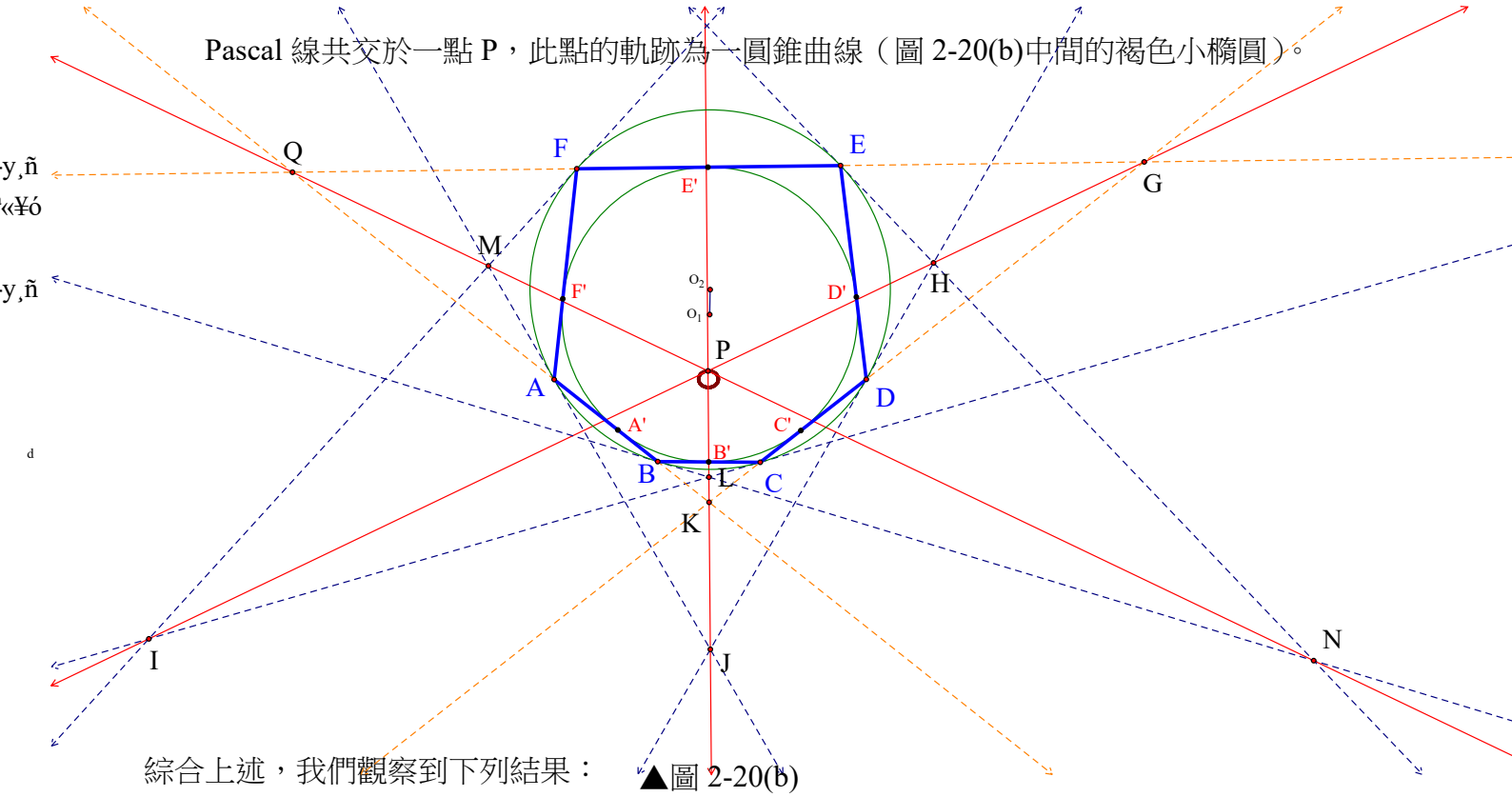
其他軌跡圖形的發現，羅列於下：

(1) 雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則（$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{A'F'}$）、（$\overleftrightarrow{D'E'}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$）、（$\overleftrightarrow{D'A'}$、$\overleftrightarrow{DB}$、$\overleftrightarrow{C'B'}$）分別三線共點交於 G、H、I。且 G、H、I 三點共線，也是廣義 Pascal 線。其軌跡包絡出一圓錐曲線。（如圖 2-20(a)）



▲圖 2-20(a)

(2) $\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 G，過 D、E 作切線交於 H，過 C、F 作切線交於 I，則 G、H、I 三點共線，也是廣義 Pascal 線。同理，(J、K、L）和（M、N、Q）分別共線，且三條廣義 Pascal 線共交於一點 P，此點的軌跡為一圓錐曲線（圖 2-20(b)中間的褐色小橢圓）。



綜合上述，我們觀察到下列結果：　▲圖 2-20(b)

【定理 2-6】廣義 Brianchon 點與廣義 Pascal 線的對偶關係

(1) 當廣義 Brianchon 點在圓內時，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓外離，若廣義 Brianchon 點在圓外，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓相割於兩點。

(2) 當廣義 Brianchon 點有共線情形時，則與之對應的廣義 Pascal 線也會有共點的情形。

(3) 當一組廣義 Brianchon 點軌跡為 Pascal 線時，則與之對應的廣義 Pascal 線的軌跡恆通過 Brianchon 點，反之亦然。

(4) 當廣義 Brianchon 點軌跡為非退化圓錐曲線時，廣義 Pascal 線的軌跡亦為非退化圓錐曲線，反之亦然。

上述結果從**【性質 2-6】**極點極線軌跡的對偶性質，便可看出端倪。

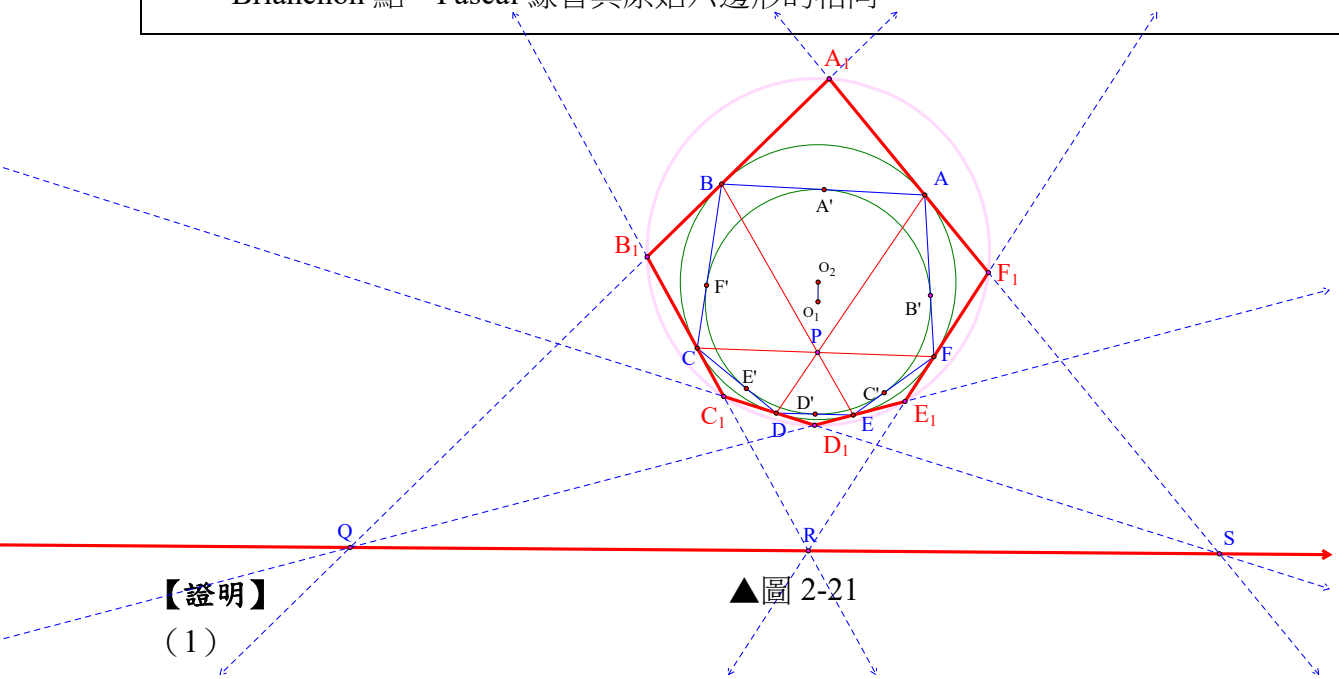
接下來，我們大膽的作雙心六邊形各頂點的切線，取交點連線形成一個新的六邊形，稱之為「**頂點切線遞延圖形**」，當轉動六邊形時，會得到以下結果：

【定理 2-7】頂點切線遞延圖形內接於一個固定的圓錐曲線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。分別過頂點 A、B、C、D、E、F 作圓O_2切線，取交點連線形成一個新六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，則：

（1）六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$頂點的軌跡皆落在同一個圓錐曲線上。換句話說，遞延圖形六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，內接於一個圓錐曲線。（如圖 2-21）

（2）依次不斷遞延，可得第 n 層頂點切線遞延圖形$A_nB_nC_nD_nE_nF_n$，則所有遞延圖形之 Brianchon 點、Pascal 線皆與原始六邊形的相同。



▲圖 2-21

【證明】

（1）

1° 作$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{D_1E_1}$交於 Q，$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{E_1F_1}$交於 R，$\overleftrightarrow{C_1D_1}$、$\overleftrightarrow{F_1A_1}$交於 S。由＜性質 2-2＞可知 Q 的極線為$\overleftrightarrow{BE}$，同理，R、S 的極線為$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$。

2° 因為 ABCDEF 外切於圓O_1，所以由 Brianchon 定理知道$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點於 P。由＜性質 2-5＞知道 Q、R、S 三點共線。由 Pascal 逆定理知，六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$必內接於一個圓錐曲線。

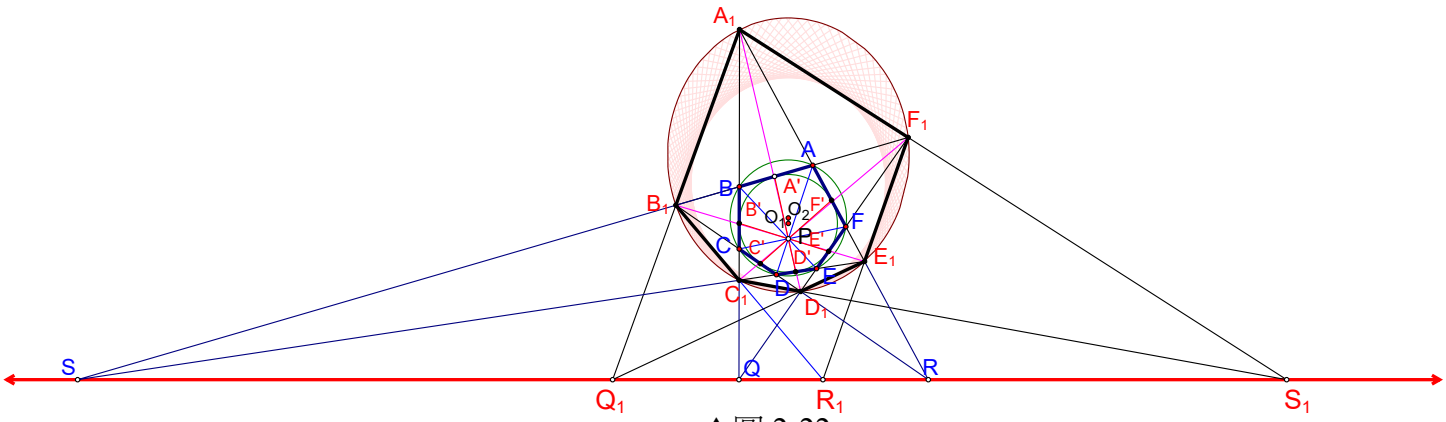
（2）因為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點於 P，而知兩個六邊形的 Brianchon 點重合，進而得出 Pascal 線亦重合。由於頂點切線遞延後的六邊形，依舊同時具有外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線，故知不斷遞延後，前述性質不變。■

上述，雙心六邊形的頂點切線遞延圖形仍同時外切於圓錐曲線及內接於圓錐曲線，我們將此性質簡稱為「**雙心性質**」，也就是說此六邊形為「**Poncelet 六邊形**」。

但由於六邊形只有在雙心時三條對邊切點連線才會共點，所以六邊形的頂點切線遞延只有在雙心情形下才會發生。否則，若只有一個圓的時候，因為三條對邊切點連線不共點，使得頂點切線遞延出的六邊形不會共圓錐，無法再造出後續具有雙心的遞延圖形。

【定理 2-8】雙心六邊形之邊延長遞延圖形仍保持雙心性質

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。作各邊延長線取交點連線形成新六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，則$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$會外切於一個圓錐曲線，並內接於另一個圓錐曲線，且各層的 Brianchon 點和 Pascal 線皆與原雙心六邊形 ABCDEF 的重合。（如圖 2-22）



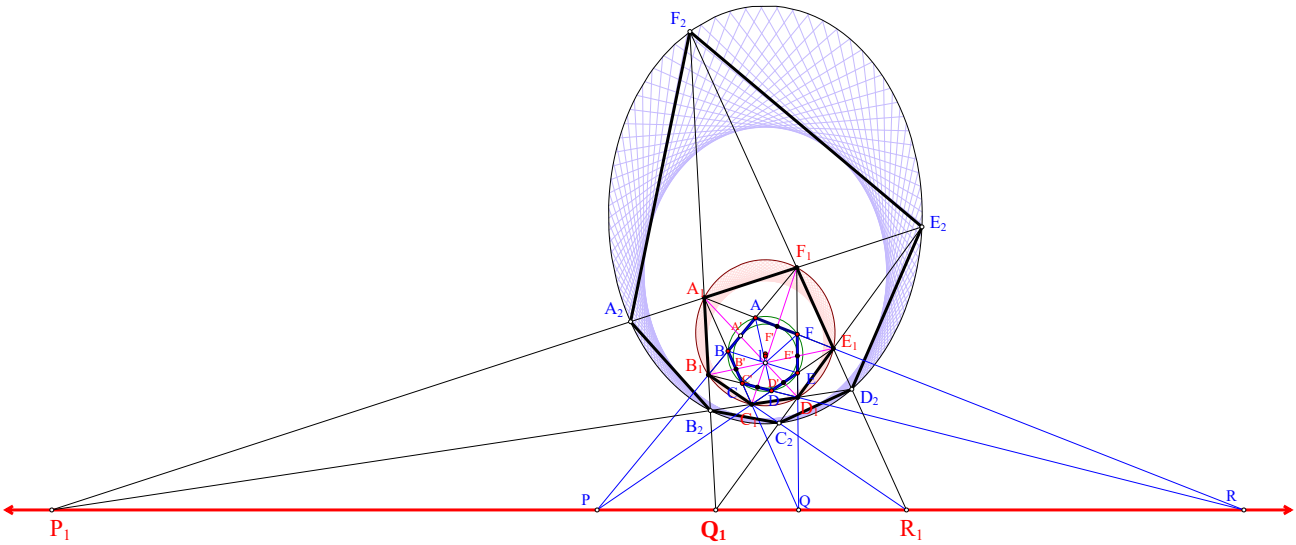
▲圖 2-22

【證明】

1° 根據**【定理 1-3】**圓外切六邊形的第一層邊延長遞延圖形內接於一個圓錐曲線，以及**【定理 1-8】**圓內接六邊形的第一層邊延長遞延圖形外切於一個圓錐曲線，可推知雙心六邊形的邊延長遞延圖形必同時外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線，也就是此邊延長遞延圖形為 Poncelet 六邊形。

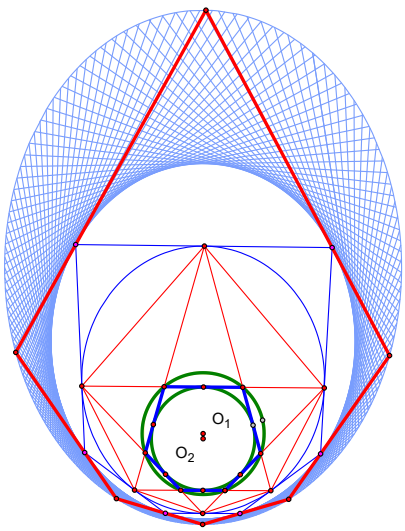
2° 由**【定理 1-4】**及**【定理 2-1】**得到$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{A_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_1E_1}$、$\overleftrightarrow{C_1F_1}$九線共點 P，即兩個六邊形的 Brianchon 點完全重合。又因為雙心六邊形的 Brianchon 點與 Pascal 線關於兩圓錐曲線皆為極點極線的關係，所以$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$與 ABCDEF 兩者的 Pascal 線亦完全重合。■

注意到由於邊延長遞延後的六邊形，依舊同時具有外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線（即保有雙心性質），且極點與極線性質在圓錐曲線上依舊適用，故可知不斷遞延後，所形成的六邊形仍是 Poncelet 六邊形。如圖 2-23 所示：

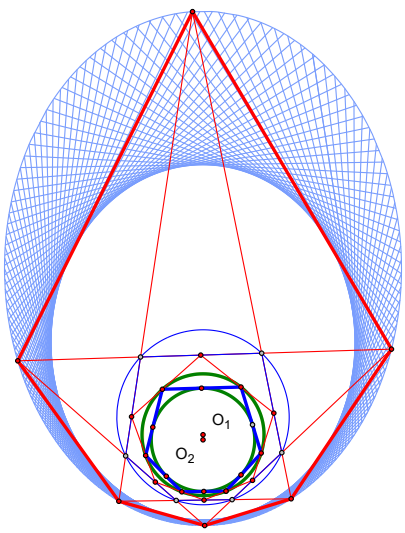


▲圖 2-23

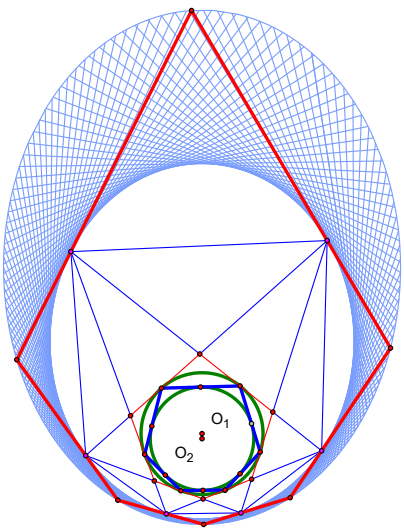
而我們若將邊延長遞延及頂點切線遞延放在一起討論，可得下列發現：**若對雙心六邊形做若干次遞延，其中邊延長遞延共有 m 次，頂點切線遞延共有 n 次，無論遞延方式的次序為何，其所得的最後一層六邊形均相同。**以圖 2-24 為例共做了 3 次遞延，其中邊延長遞延共有 1 次，頂點切線遞延共有 2 次，無論次序為何，所得最後一層六邊形均相同。



▲圖 2-24(a)
邊+頂+頂



▲圖 2-24(b)
頂+頂+邊

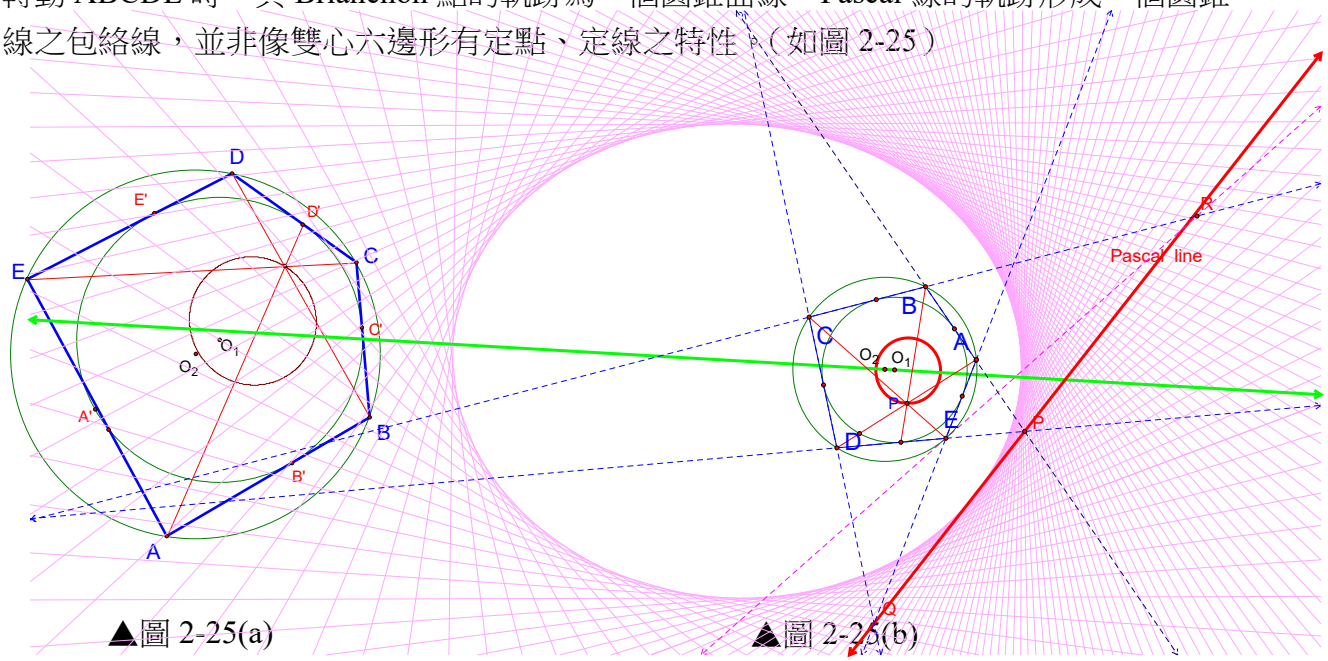


▲圖 2-24(c)
頂+邊+頂

三、雙心五邊形、四邊形、三角形的 Brianchon 點、Pascal 線軌跡

對雙心五邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線的軌跡圖形結果如下：

當轉動 ABCDE 時，其 Brianchon 點的軌跡為一個圓錐曲線，Pascal 線的軌跡形成一個圓錐曲線之包絡線，並非像雙心六邊形有定點、定線之特性。（如圖 2-25）

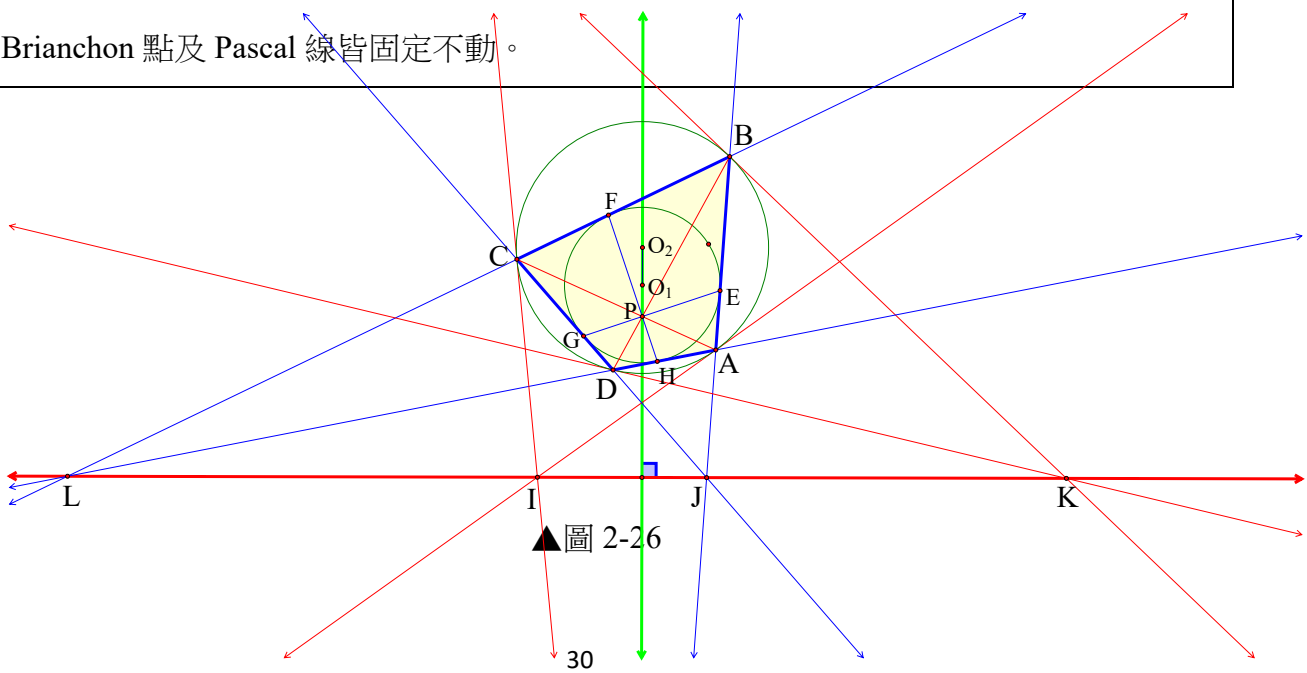


▲圖 2-25(a)　　▲圖 2-25(b)

在曹亮吉教授所寫的「幾何探究[4]」這本書中有提及一個他非常得意的發現：曹亮吉定理「雙心四邊形的對角線交點與兩圓圓心共線」。而四邊形的對角線交點即我們這裡的 Brianchon 點，所以我們亦針對上述曹亮吉定理作探討，而有下面的發現：

【定理 3-1】雙心四邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為 E、F、G、H（如圖 2-26），則其 Brianchon 點（即圖中 P 點）與O_1、O_2三點共線，此線與 Pascal 線垂直。且轉動 ABCDEF 時，Brianchon 點及 Pascal 線皆固定不動。



▲圖 2-26

【證明】

1° 由＜性質 2-2＞，可知$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$分別為 I、K 關於圓O_2的極線，故 Pascal 線對於圓O_2的極點為 Brianchon 點。

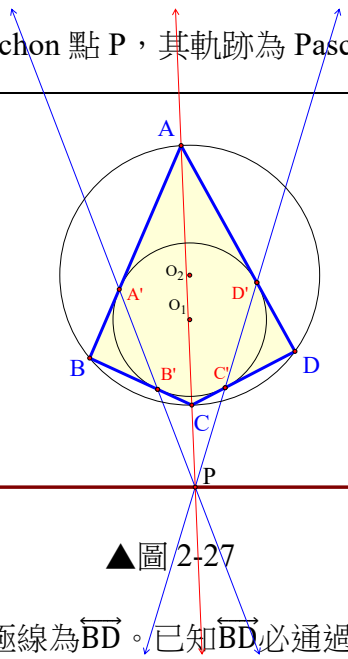
2° 再由＜性質 2-3＞知道，$\overleftrightarrow{FH}$、$\overleftrightarrow{GE}$分別為 L、J 關於圓O_1的極線，故 Pascal 線對於圓O_1的極點亦為 Brianchon 點。則$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_2P}$皆垂直 Pascal 線，所以 P、$O_1$、$O_2$三點共線。

3° 由上述可知，Brianchon 點、Pascal 線對於圓O_1、圓O_2皆為極點極線關係，故知 Brianchon 點為圓O_1和圓O_2的 Limiting Point（極限點）。Limiting Point 是固定的，所以轉動 ABCD 時，其 Brianchon 點為固定不動的點，Pascal 線為固定不動的線。■

事實上，這個結果與【**定理 2-1**】相對應：雙心六邊形與雙心四邊形，兩者的所有的對角線以及對邊切點連線皆共交在 Brianchon 點上，且 Brianchon 點與兩圓心共線，而布里昂雄連心線又與 Pascal 線垂直。那雙心四邊形與雙心六邊形是否有其他共同特性呢？

【定理 3-2】雙心四邊形的廣義 Brianchon 點的軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為A'、B'、C'、D'，則$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{C'D'}$交於一廣義 Brianchon 點 P，其軌跡為 Pascal 線。（如圖 2-27）



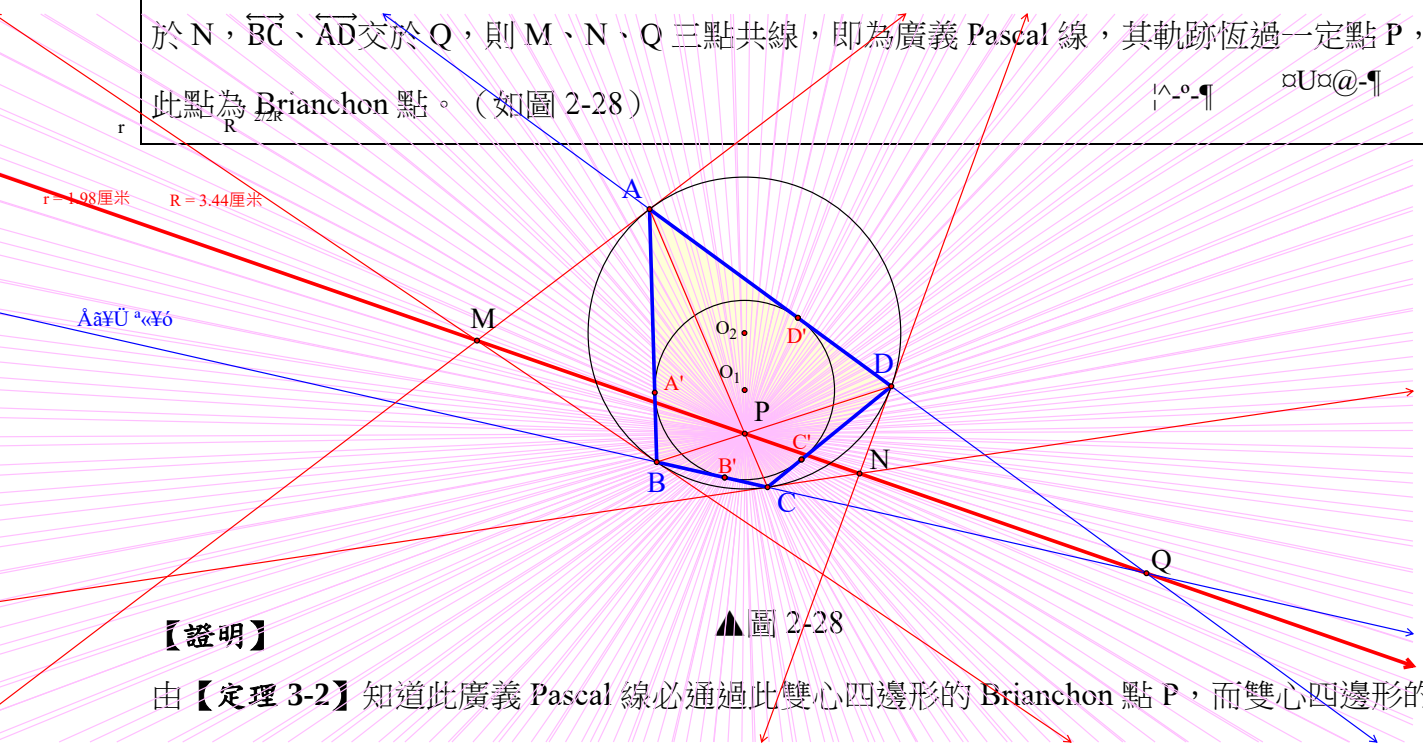
▲圖 2-27

【證明】

由＜性質 2-2＞知 P 關於圓O_1的極線為$\overleftrightarrow{BD}$。已知$\overleftrightarrow{BD}$必通過 ABCD 的 Brianchon 點，由＜性質 2-4＞可知，Brianchon 點的極線（即 Pascal 線）必通過 P 點，故 P 點在 Pascal 線上，而雙心四邊形的 Pascal 線為定線，故 P 點軌跡為一條 Pascal 線。■

【定理 3-3】雙心四邊形的廣義 Pascal 線之軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，過 A、B 作切線交於 M，過 C、D 作切線交於 N，$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AD}$交於 Q，則 M、N、Q 三點共線，即為廣義 Pascal 線，其軌跡恆過一定點 P，此點為 Brianchon 點。（如圖 2-28）

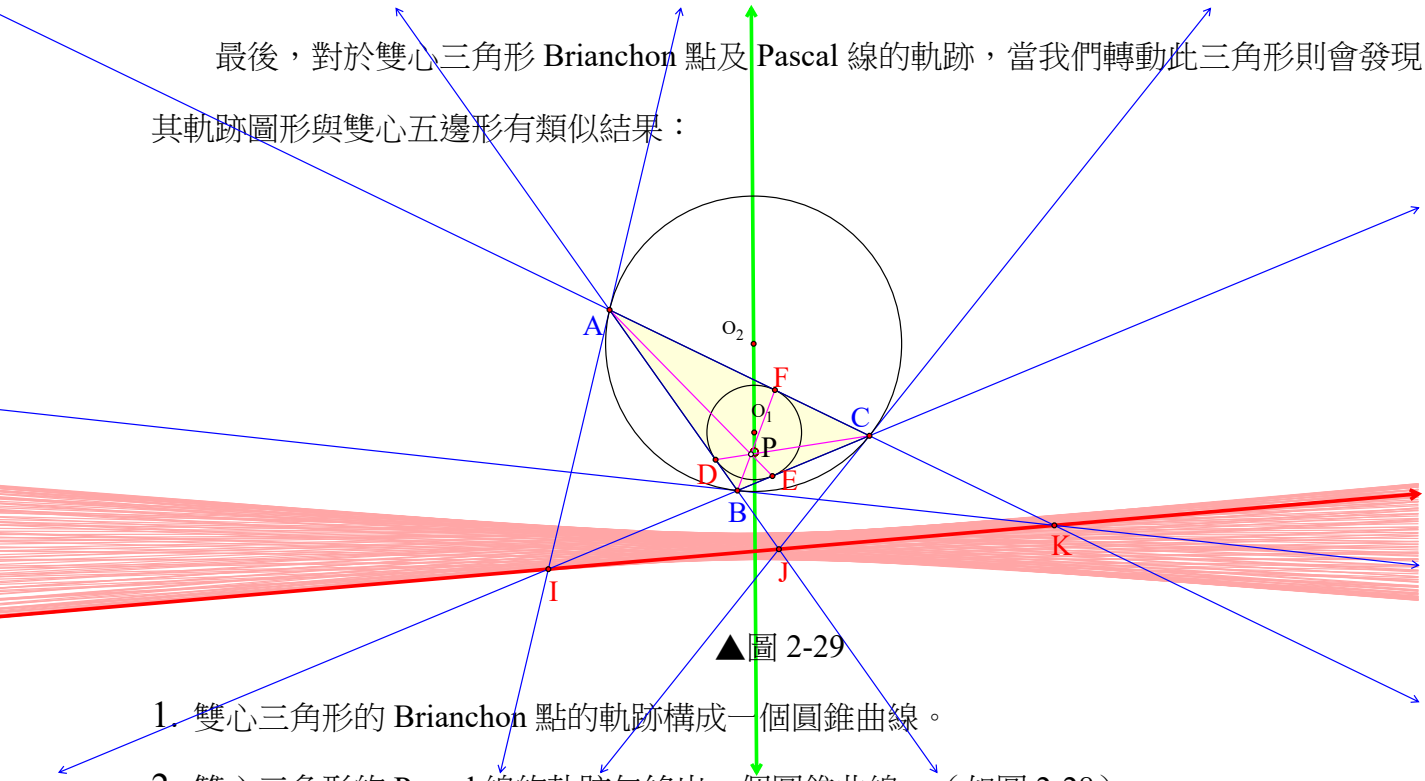


▲圖 2-28

【證明】

由**【定理 3-2】**知道此廣義 Pascal 線必通過此雙心四邊形的 Brianchon 點 P，而雙心四邊形的 Brianchon 點為定點，故此廣義 Pascal 線恆過此定點。■

最後，對於雙心三角形 Brianchon 點及 Pascal 線的軌跡，當我們轉動此三角形則會發現其軌跡圖形與雙心五邊形有類似結果：



▲圖 2-29

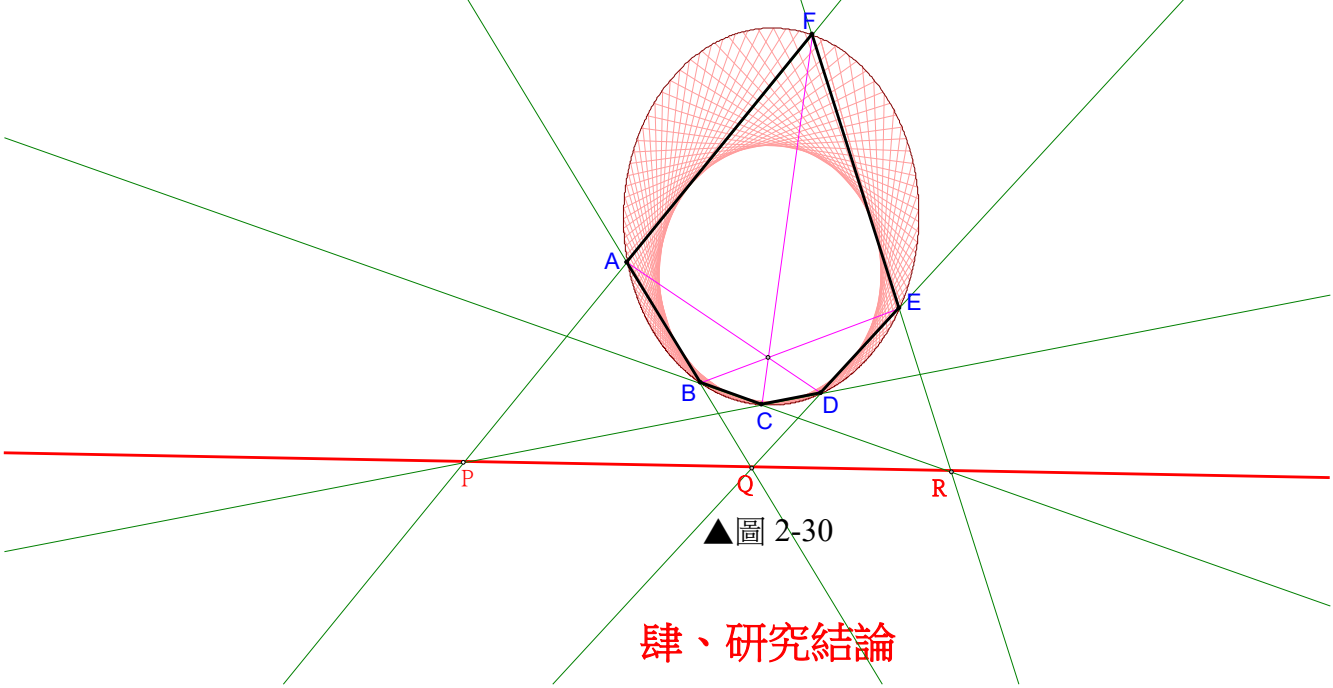
1. 雙心三角形的 Brianchon 點的軌跡構成一個圓錐曲線。
2. 雙心三角形的 Pascal 線的軌跡包絡出一個圓錐曲線。（如圖 2-28）

由前面的這些結果，可以發現雙心四邊形的性質與雙心六邊形相近。而雙心五邊形與三角形性質相似。

四、圓錐曲線上的軌跡及其遞延圖形

若單純從前述命題中的證明過程來看，可以發現證明所用之極點極線、交比等性質，對圓錐曲線皆成立，故本研究前面所探討的問題皆可推廣至圓錐曲線上。惟圓錐曲線的極點與中心的連線不一定垂直極線（如 P.6 的說明），故布里昂雄連心線不一定垂直 Pascal 線。

而若以幾何變換的角度視之，則發現可透過射影變換將圓變為圓錐曲線，而共點共線等性質在射影變換下具有不變性，但射影變換卻沒有保角性，故可以得到跟上述一樣的推論。



▲圖 2-30

肆、研究結論

正如研究主題名稱「層出不窮的彩蛋有心跡」，我們探討了「有心」的六邊形之遞延圖形，以及其廣義 Brianchon 點、Pascal 線的軌跡。除了本研究動機希望利用雙心六邊形將 Pascal 和 Brianchon 兩個定理串連起來討論之外，我們意外發現原是對偶關係的兩個定理，在一個圓上六邊形的邊延長遞延圖形時竟出現「你中有我，我中有你」的現象，讓 Pascal 與 Brianchon 這兩位不同年代數學家的重大發現，在 21 世紀有機會相遇。更驚奇的發現：「**雙心六邊形層出不窮的遞延圖形構造出有如彩蛋般的圖形，且每層均保有雙心性質，每一層的三條對角線均共交同一點，三組對邊延長線均共交同一線。轉動六邊形也不會改變兩者的位置。**」茲將結論說明如下：

一、 圓上六邊形的共點共線情形：

(一)改變 Brianchon 定理與 Pascal 定理的條件，可得到許多**廣義 Brianchon 點與廣義 Pascal 線**；其退化的圓外切或內接的五邊形、四邊形或三角形也有同樣的發現。

(二)圓上六邊形邊延長遞延圖形的性質：

1. 作圓外切六邊形的邊延長遞延圖形，得到的新六邊形必內接於一個圓錐曲線。
2. 作圓內接六邊形的邊延長遞延圖形，得到的新六邊形必外切於一個圓錐曲線。
3. 無論對圓外切或內接六邊形不斷作邊延長遞延圖形，所得六邊形必一層內接、一層外切於一個圓錐曲線，且交替出現。推廣至圓錐曲線一樣成立。換句話說「**若其第 n 層遞延圖形滿足 Brianchon 定理，則其第 n+1 層的遞延圖形必滿足 Pascal 定理且逐層交替出現。**」

(三)給定圓外切六邊形連接切點形成內接六邊形(或相反)，有下列性質：

1. 圓外切六邊形所產生的 Brianchon 點與圓心連線(稱之為布里昂雄連心線)會與圓內接六邊形所產生的 Pascal 線互相垂直。
2. 所有廣義 Brienchon 點跟圓心的連線與其對應的廣義 Pascal 線也會垂直。
3. 推廣到五邊形、四邊形、三角形的情形時也成立。

二、同時外切與內接於兩個定圓的雙心六邊形，其特殊的共點與共線的性質如下：

(一)雙心六邊形的三條對角線與三條對邊切點連線等六線共定點（Brianchon 點），其三組對邊延長線交點，與三組對頂點的切線交點等六點共定線（Pascal 線）。

1. 其 Brianchon 點與兩圓圓心三點共線，此線也是與 Pascal 線垂直的布里昂雄連心線。
2. 當兩圓為同心圓時，Brianchon 點位於兩圓圓心上，而 Pascal 線則在無限遠處。
3. 當轉動此六邊形時，其 Brianchon 點仍為同一點，Pascal 線仍為同一線，與雙心六邊形中的六邊形位置無關。

(二)廣義 Brianchon 點與對應的廣義 Pascal 線具有對偶關係。

1. 當廣義的 Brianchon 點在圓內時，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓外離；當廣義 Brianchon 點在圓外，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓相割於兩點。
2. 當一組廣義 Brianchon 點的軌跡為 Pascal 線時，則與之對應的廣義 Pascal 線的軌跡恆通過 Brianchon 點，反之亦然。
3. 當若干廣義 Brianchon 點有共線情形時，則與之對應的廣義 Pascal 線也會有共點情形，反之亦然。

三、 **雙心六邊形的遞延圖形的性質：**

(一)不論透過邊延長遞延或頂點切線所形成的**每一層六邊形**的六個頂點的軌跡皆落在同一個圓錐曲線上（即**內接於圓錐曲線**），而六個邊的軌跡包絡出另一個圓錐曲線（即**外切於圓錐曲線**），其**三條對角線均會共交於原始六邊形的 Brianchon 點，其三組對邊延長線交點也均會共於原始六邊形的 Pascal 線。**

(二)若對雙心六邊形做若干次遞延，只要邊延長遞延次數，及頂點切線遞延次數不變，則無論遞延方式的次序為何，其所得的最後一層六邊形均相同。

四、 **同時外切與內接於兩定圓的雙心五邊形、四邊形、三角形，有下列共點共線情形：**

(一)雙心四邊形與雙心六邊形有相同結果：Brianchon 點為定點，Pascal 線為定線。

(二)雙心五邊形和三角形有相同結果：Brianchon 點並非定點，但其軌跡圖形為圓錐曲線，而 Pascal 線也不是定線，其軌跡圖形包絡出一個圓錐曲線。且兩圓心連線皆通過此二個圓錐曲線的中心點。

五、 **透過射影變換，可將上述雙心六邊形共點共線的結果推廣到非退化的圓錐曲線上，也會有 Brianchon 點與 Pascal 線軌跡的相關發現，惟布里昂雄連心線不一定與 Pascal 線互相垂直。**

伍、應用及未來展望

一、 目前已找出如何判斷雙心六邊形邊延長遞延圖形頂點軌跡為何種圓錐曲線的判別式，期望未來能繼續研究出其他遞延圖形的邊或點之判別式。目前已有結果如下：

$$D = (R^2 - d^2 + 2dr + 2r^2)(R^2 - d^2 - 2dr - 2r^2)$$

當 D<0，則軌跡為橢圓；當 D=0，為拋物線；當 D>0，則為雙曲線。

二、Brianchon 定理及 Pascal 定理是射影幾何學中的兩大定理，射影幾何與物體受光線照射投影的現象有關，其在航空、測量的應用也很廣泛。就連 Paul Adrien Maurice Dirac 也曾為了發展量子力學，研究過射影幾何，並以此作為其研究的基礎[8]，可見射影幾何的是有很多應用性的。而本研究從兩大定理出發，發現許多共點共線的現象，希望有助於未來在物理光學上應用、舞台燈光特殊效果設計，以及在投影藝術創作上的發想，特別是對未來資訊科技在虛擬空間的視覺設計上，期待能有新的啟發。

陸、參考文獻

[1]許志農。高中數學第四冊第四章。99 課綱。新北市：龍騰文化。

[2]曹亮吉（2000）。幾何探究。台南市：南一書局。

[3]黃家禮（1997）。幾何明珠。台北市：九章出版社。

[4]謝國芳(無日期)。圓錐曲線的謝國芳小定理。2015 年 3 月 7 日。取自：http://www.xieguofang.cn/Maths/GeometryTheorems/Guofang_Xie's_Conic_Theorem_1.htm

[5]H.S.M. 考克瑟特，S.L. 格雷策。幾何學的新探索。新竹市：凡異出版社。

[6]C.Stanley Ogilvy (1969). *Excursions in Geometry.* New York, NY: Dover Publications Inc

[7]Derrick Norman Lehmer (1917). *An Elementary Course In Synthetic Projective Geometry.* Boston, MA: Ginn And Company.

[8]Peter Woit (2005, September 24). Dirac's Hidden Geometry [Web blog message]. Retrieved from http://www.math.columbia.edu/~woit/wordpress/?p=262

[9]Weisstein, Eric W. "Poncelet's Porism." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html

【評語】010027

本作品由古典的數個定理出發作發想，得出許多新的結果，是令人驚豔之處。本作品題材相關古典，若能往現代數學的代數幾何作連結，使其更有現代數學的風格，當會更佳。