2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010023

參展科別　數學

作品名稱　瓶蓋呀瓶蓋—飲料兌換問題的推廣研究

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立新竹高級中學

指導教師　張世標

作者姓名　馮子軒、王立安

關鍵字　價值、n 元 m 級瓶蓋問題、數團概念

作者簡介

我是王立安，現在就讀新竹高中二年級，是個搖盪於物質世界與精神世界的撐篙者。不僅愛幻想，嘗試發掘生活中不為人知的秘密；有時也講求實事求是，冷靜審思數學中微妙的一切。很高興今天躬逢其盛此等科學饗宴，我必矢勤矢勇，發揮堅苦卓絕的精神，以期真理的光輝照耀全世界！

我是馮子軒，現在就讀於新竹高中二一七班，我的個性可說是較內向的，高中前並沒有嘗試過參加層級高於校內的比賽。這次科展過程中讓我獲得不少對於高中生來說並不尋常的經驗，像是與老師及夥伴討論一項引理一整天，為了得到例子而去學習寫程式，或是在學校熬夜趕工報告。這段日子雖然辛苦，但也讓我獲益良多。

摘要

本文主要在討論一個益智遊戲—瓶蓋問題，我們延伸本問題，觀察多個正交互影響的變數的變化規律，並了解在兌換中的特性，進而找出計算法則來求取可兌換到的瓶子總數。

我們的研究過程如下：

1. 對原始問題進行定義化並求出增減初始瓶數所得之飲料通解。

2. 改變瓶蓋、瓶身兌換所需數量並觀察總共可喝飲料與殘餘瓶蓋、瓶身數量的變化。

3. 以含有高斯符號的等式描述總體變化關係。

4. 求得上述的第 2 點，並求出演算法則。

5. 增減可用於兌換的事物數量(瓶蓋、瓶身)，並觀察總共可喝飲料與殘餘瓶蓋、瓶身、・・・(其他可用於兌換的事物)數量的變化。

6. 以含有高斯符號的等式描述總體變化關係。

7. 求得上述的第 5 點，並求出演算法則。

8. 擴張規則，引入 m 級的概念。

9. 以數團概念描述兌換過程。

10. 求得上述的第 8 點，並求出演算法則。

11. 調整研究的角度，納入銷售者與經濟學者觀點進行討論。

Abstract

Our research originated from a puzzle game on net web, which concerns the resulting amount of lids after exchanging process.By deriving from the problem, we want to observe the pattern of numerous "positive interacting" variables, and find out various properties of the exchanging process. Last but not least, we hope to develop the algorithm of the exchanging problem, which can help us calculate the extremal values of solutions.

The following procedure will present our research process:

I. Investigate the property of the original problem and attain the formula of it.

II. Change the demanding quantity and observe the sum and the variation of the remains of the lid and the body.

III. Describe the various relations of the main body by equations involving Gauss' s greatest integer function.

IV. Develop the calculation law in II.

V. Change the quantity of the relating objects (the lid and the body) that can be used to exchange the goods and observe the variation of the sum of the beverage, the remaining amounts of the lid, the body, and everything that can be used for exchanging.

VI. Describe the various relations of the main body by using by equations involving Gauss' s greatest integer function.

VII. Develop the calculation law in V.

VIII. Extend the exchanging rule and introduce the concept of the mth class.

IX. Describe the changing procedure by group concept

X. Develop the calculation law in VIII.

XI. Change our viewpoints, try to put ourselves into dealers' and economists' shoes.

壹、　前言

一、　研究動機

最初接觸瓶蓋問題，是在一個社群網站的益智問答看到的，原始問題只要有耐心，就算是剛學會四則運算的兒童都可以解開。也因如此，當下並沒有給予其太大的關注，一直到了科展尋找題目的時候，在數學傳播第 39 卷 1 期上再次看到，才引起我們的注意。

而之後在眾多的方向中選擇了瓶蓋問題是因為它的龐大性，可用來兌換的部件種類越多，剛開始的飲料數和最後喝到的飲料數間的差距就越劇烈，加入更多變因後它的樣貌就像是一個小型的混沌系統，如此之間的交互作用令我們好奇而欣喜，使其最後變成為了我們的專題研究教材。

二、　研究目的

我們將原始的瓶蓋問題化作如下形式：一個物品由一個「本體」與多種不同的「部件」所構成，一種部件一個物品上只有一個，部件可以以一定種類與數量(簡稱兌換法)兌換一個物品，而求得最終擁有的本體的個數。

(一) 在原始問題改變最初飲料數並求得最終擁有的本體的個數。

(二) 解明兌換所需部件數量變動的規則與限制。

(三) 了解改變最初飲料數造成最終擁有的部件數的週期變化。

(四) 在原始問題改變最初飲料數與兌換所需部件數量求得最終擁有的本體個數。

(五) 在需多個部件的兌換法求得最終擁有的本體個數。

貳、　研究方法或過程

一、　研究設備及器材

Microsoft Excel

二、　名詞與設定

在兌換的過程中，有 n 種可用於兌換的部件，定義為「n 元」；使用於兌換的部件種類最多的兌換法需要的部件種類有 m 種，定義為「m 級」，因此以下的研究將以「n 元 m 級」來呈現。

n 元：有 n 種可用於兌換的部件。

m 級：兌換中每個兌換法需要的部件種類有 m 種。

兌換法：消耗特定數量及種類部件進行一次兌換得到 1 個物品的方法。

物品：由本體和部件構成。

部件 I_i (item)：構成一完整物品的部分，所有部件加本體為一物品。

本體：物品扣除部件後所剩餘的部分。

初始數 B (begin)：最初擁有的物品數，最少為 1。

兌換數 E_i (exchange)：在實施兌換法需要 E_i 個 I_i 。

兌換次數 $T(\mathrm{a,b,c,.....})$ (time)：用到 $I_a, I_b, I_c, ...$ 部件的兌換法使用次數。(a、b、c$\in\mathbb{N}$ ，b、c、…可不存在)

殘餘數 R_i (remain)：當下 I_i 所殘留的量。(若未註明過程中則為已經無法再進行兌換時 I_i 所殘留的量)

總和數 S (sum)：已經無法再進行兌換時本體的量。

數團概念：

數團(group)：在 n 元 m 級的計算中，將理想兌換次數分為 m 團。

步驟 k ：在數團概念下，將各部件的理想兌換次數及該步驟兌換次數求出的過程。

理想兌換次數 P_i^k (perfect)：在數團概念的計算下，第 k 步驟時 I_i 部件

$\left\lfloor \frac{I_i數}{E_i} \right\rfloor$ 的值，即 P_i^k 。

該步驟兌換次數 T^k ：利用理想兌換次數，求得第 k 步驟可以得到的兌換次數。

充足項：在該步驟中，該部件理想兌換次數充足，因而可參與每次兌換者。

補充項：計算該步驟兌換次數時，非充足項無法使用到的次數和。

邊界線：充足項與非充足項的邊界。

*為了簡化問題，將部件按照 E_i 的值由小到大編號為 i。

** B 、 E_i 、 R_i 、 $S \in \mathbb{N}$ (證明於內文)；$0 \le T(\mathrm{a,b,c,.....})$ 且 $T(\mathrm{a,b,c,.....}) \in \mathbb{Z}$ 。

三、 原始問題

你一開始有 20 元，一瓶飲料的價值為兩元，每瓶飲料都有一個蓋子和一個瓶身，每兩個蓋子可換一瓶飲料，每四個瓶身可以換一瓶飲料，求最終可喝幾瓶飲料？

以我們設定的名詞來看，原始問題屬於 2 元 1 級，初始數 B=10；I_1 為蓋子、I_2 為瓶身、本體為飲料(液體部分)；E_1=2、E_2=4。

在此先以每次把部件兌換完的方式計算：

換前 I_1	消耗 I_1	換後 I_1	換前 I_2	消耗 I_2	換後 I_2	$T(1)$	$T(2)$	本體數累積
10	10	7	10	8	9	5	2	17
7	6	6	9	8	6	3	2	22
6	6	4	6	4	6	3	1	26
4	4	3	6	4	5	2	1	29
3	2	3	5	4	3	1	1	31
3	2	2	3	0	4	1	0	32
2	2	2	4	4	2	1	1	34
2	2	1	2	0	3	1	0	35

如此就可以得到最後的總和數 S=35，亦即能喝到的飲料總共是 35 瓶。

若增加初始飲料數量為 x 瓶，則這個過程會愈趨複雜，故再以如下之觀察分析求出答案：

由兩個瓶蓋換一個，四個瓶身換一個的規則，不難發現你只要有四瓶完整的飲料便可以以之再換三瓶飲料，意即在瓶蓋、瓶身數不小於四時，可各減去一個並喝到三瓶飲料。由此得下式：

設 s 為總共喝到的飲料數。

$$\begin{cases} x=1\text{時：無法兌換，}s=1 \\ x=2\text{時：僅瓶蓋兌換1次，}s=3 \\ x=3\text{時：瓶蓋、瓶身共兌換4次，}s=7 \end{cases}$$

$x\geq 4$時：每4個瓶蓋瓶身可換3瓶，直到剩3個瓶蓋、瓶身為止，故 $x\geq 4$ 時，$s=3\times(x-3)+4+x=4x-5$。

再將 x =2、3 分別代入 s=4 x -5，證實符合，故可知在原始問題下增減瓶數的通解為：

$\begin{cases} x=1\text{時：}s=1 \\ x\geq 2\text{時：}s=4x\text{-}5 \end{cases}$ 得證。

四、 前置證明

(一) 引理一

$$\boxed{B+\sum_{i=1}^{y}T_i=S,\text{其中}T\text{有}y\text{種}},$$

證明：

每一次的兌換都可以得到一物品，相當於得到一本體，而兌換過程中總共的兌換次數為 $\sum_{i=1}^{y}T_i$ ，再加上原本就有的本體數=初始數 B，即可得到總和數 S，整理上述過程即得下式：

$$\mathrm{B}+\sum_{i=1}^{y}T_i=\mathrm{S}\text{ 得證。}$$

(二) 引理二

$$\boxed{E_k\times\sum T(...,k,...)+R_k=S,\text{其中}\sum T(...,k,...)\text{代表有}k\text{參與的兌換次數。}}$$

我們使用簡寫符號 $\sum T(...,k,...)$ 來表示「所有有使用到 I_k 的兌換法的兌換次數之和，其中 $\sum T(...,k,...)$ 代表有 k 參與的兌換次數」，

即 $\sum_{i=1}^{y}T(...,k,...)=\sum_{i=1}^{y}T(i_1,i_2,...,i_t,k,j_1,j_2,...,j_s)$

且 $\begin{cases} 0\leq t\leq k-1 \\ 0\leq s\leq n-k \\ i_1<i_2<...<i_t<k<j_1<j_2<...<j_s \end{cases}$ (n 元 m 級的 n)

當 t=0 時，則 $i_1,i_2,...,i_t$ 不存在；當 s=0 時， $j_1,j_2,...,j_s$ 不存在。

證明：

將兌換過程中所有的I_i分為兩種，一種是在兌換過程中被消耗掉的I_i，一種是沒有在兌換過程中被消耗掉的I_i。而又當你擁有 1 個I_i時同樣也會有 1 個本體，所以可以得到**兌換過程中所有的I_i數量，即為兌換過程中所有的本體數量。**

被消耗的I_i數即為兌換數×兌換次數= $E_k \times \sum_{i=1}^{y} T(...,k,...)$

沒有被消耗的I_i數即為殘餘數=R_k

兩式相和=兌換過程中所有的I_i數量，即為兌換過程中所有的本體數量

$$E_k \times \sum_{i=1}^{y} T(...,k,...)+R_k=S$$ ，得證。

(三) 引理三

$$\boxed{\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{m-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}+B=S}$$

以下分成三個部分證明：

1. 「價值」概念

為了方便以下的計算，故建立「**價值**」的概念，並設定使兌換前後的價值不變，各部件與本體都有一定的價值，且物品價值為 1。

(1) n 元 1 級時

因E_k個I_k可換一物品，故定I_k價值為$\frac{1}{E_k}$，如此由兌換過程可知每消耗掉 1 價值數量的I_k便會得 1 價值的物品，故兌換不會影響初始的價值，即兌換前後總價值不變。

(2) n 元 m 級時

因每E_1個I_1、E_2個I_2、E_m個I_m、・・・可換一物品，為使兌換前後價值不變，故定I_k價值為$\frac{1}{m \times E_k}$，如此由兌換過程可知每消耗掉 1 價值數量的部件便會得 1 價值的物品，故兌換不會影響初始的價值，即兌換

前後價值不變。

*由此亦可知**所有用於兌換的部件總價值和屬於正整數或零**。

2. n 元 1 級時

一種部件單獨兌換時，因一個物品價值為 1、I_k 的價值為 $\frac{1}{E_k}$，故本體價值為 $1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}$，由於兌換前後價值不變，所有部件總價值減少量=本體總價值增加量，即為 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)$。如此便得下式：

$$\frac{\text{所有部件總價值和減少量}}{\text{本體價值}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}=\text{本體增加量}$$

$$S=\text{本體增加量}+\text{原有本體數}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}+B\text{ 得證。}$$

3. n 元 m 級時

在數種部件聯合兌換時，因物品價值為 1、I_k 的價值為 $\frac{1}{m\times E_k}$，本體價值為 $1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}$，由於兌換前後價值不變，部件總價值減少量=本體總價值增加量，即為 $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)$。如此便得下式：

$$\frac{\text{所有部件總價值和減少量}}{\text{本體價值}}=\frac{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{m-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}=\text{本體增加量}$$

$$\text{本體增加量}+\text{原有本體數}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{m-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}+B=\text{S 得證。}$$

(四) 兌換特性

1. $0 < R_k < E_k$ 且 R_k 至多 1 項值為 1(n 元 1 級成立)

證明：

首先，因為每次兌換時，兌換的部件於新的物品中可得到 1 個相同的部件，又 I_i 部件至少要有 E_i 個才能進行一次兌換，而此時 I_i 兌換完後還有 1 個部件，因而殘餘數必不小於 1。

當殘餘數≥兌換數時，則依定義兌換可以繼續進行，故殘餘數必小於兌換數。

當兌換過程中有 I_k 的數量≥ E_k 時，可進行一次兌換消耗 E_k 個 I_k 並可獲得一物品，又一物品包含一 I_k ，所以可知 I_k 兌換過程始末共減少了(E_k -1)個 I_k ，且當 I_k 數量＜ E_k 兌換不成立，故可知 I_k 數量最小值為 E_k -(E_k -1)=1，得結論當 B ＞ 0 時，兌換過程中 I_k 數量恆≥1。

假設有一兌換完成結果 $R_i = R_j$ =1，因為每次兌換會使未參與兌換的部件數加一，又由上知 I_k 數量恆≥1，故設 I_j 為最後兌換的部件，且最後 R_j =1，假設其兌換前 I_i 數量=1，則在 I_j 兌換後， R_i =2 不合。故得結論僅有最後進行兌換的部件，其殘餘數方可能為 1。

2. 殘餘數週期(n 元 1 級適用)

引理四：

週期長=$\left(1-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{E_m}\right)\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$(以 B 計算)，

其週期於B=n 時開始。

(其中$\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$表示 $E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n$ 的最大公倍數)

證明如下：

考慮殘餘數數組$(R_1,R_2,R_3,\cdots,R_k,\cdots,R_n)$，我們定義：隨著起始數$B$增加，數組$(R_1,R_2,R_3,\cdots,R_k,\cdots,R_n)$再次出現時，稱為一個週期。

(1) **週期起始**

在 n 元 1 級時，殘餘數週期於$B=n$ 時開始。

證明：

因為我們已證明 n 元 1 級時，所有的兌換結果具有唯一性，所以中間兌換過程可以改變順序，故將兌換過程拆分如下。

可知在$B=n$時，各部件皆有n個可供兌換，。假設另一個初始數為B'，它其中一種兌換路徑中暫時的殘餘數數組為$(E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n)$，則其兌換過程可延續如下：

$$
\begin{aligned}
&(E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n)\\
&\Rightarrow(E_1+1,E_2+1,E_3+1,\cdots,E_k+1,\cdots,1)\\
&\Rightarrow\cdots\Rightarrow(E_1+(n-k),E_2+(n-k),E_3+(n-k),\cdots,1,\cdots,1+(n-k))\\
&\Rightarrow(E_1+(n-3),E_2+(n-3),1+(\mathrm{n}-3),\cdots,1+(n-3),\cdots,1+(n-3))\\
&\Rightarrow(E_1+(n-2),1+(n-2),1+(n-2),\cdots,1+(n-2),\cdots,1+(n-2))\\
&\Rightarrow(1+(n-1),1+(n-1),1+(n-1),\cdots,1+(n-1),\cdots,1+(n-1))\\
&\Rightarrow(n,n,n,\cdots,n,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

由上述過程可發現，各部件在只有兌換一次的情況下抵達$(n,n,n,\cdots,n,\cdots,n)$，又所假設的$B'\neq B$，也就是各部件至少需兌換一次方能抵達$B'$，又各個所需的兌換數$E_i$不盡相同，因而假定$(E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n)$的存在是合理的。

同時，若週期的開始可小於n，即各部件在少於n的情況下就已有週期，設此時$B=n-x,x\in\mathbb{N}$且$0<x<n$，那麼理論上應存在另一個初始數為B'，它其中一種兌換路徑中暫時的殘餘數數組為$(E_1-x,E_2-x,E_3-x,\cdots,E_k-x,\cdots,E_n-x)$，但明顯的，此時任一部件皆無法

完成任何一次兌換，因而週期不會從 $B=n-x, x\in\mathbb{N}$ 且 $0<x<n$ 開始，所以週期從 $B=n$ 時開始。

令剛才假設的初始數 B'，於此情況可得總和數 S'

又由**引理二**與**價值觀念**得下式：

因為 $E_k\times\sum T(...,k,...)+R_k=S$，其中 $\sum T(...,k,...)$ 代表有 k 參與的兌換次數，因此

$$
\begin{aligned}
&E_1\times T'(1)+E_1\\
&=E_2\times T'(2)+E_2\\
&=E_3\times T'(3)+E_3\\
&=\cdots=E_k\times T'(\mathrm{k})+E_k\\
&=\cdots=E_n\times T'(\mathrm{n})+E_n\\
&=S'
\end{aligned}
$$

*因為兌換次數為過程的「暫時」情況，故加上「’ 」表示。

而其可再整理為：

$$
\begin{aligned}
&E_1\times(T'(1)+1)\\
&=E_2\times(T'(2)+1)\\
&=E_3\times(T'(3)+1)\\
&=\cdots=E_k\times(T'(\mathrm{k})+1)\\
&=\cdots=E_n\times(T'(\mathrm{n})+1)\\
&=S'
\end{aligned}
$$

由此式可知，任一個 E_k 乘上 $(T'(\mathrm{k})+1)$ 的值 $=S'$，而 $(T'(\mathrm{k})+1)\geq 1$，則可知 S' 為 $\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$ 的正整數倍，又我們所找尋的是殘餘數變化的週期長度，因而取 S' 的最小值為 $\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$。由此可知，當殘餘數數組為 $(n,n,n,\cdots,n,\cdots,n)$ 時，與其相鄰的 S 差 $\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$。

另因兌換過程順序不影響兌換結果，所以 $B=k$ 時的殘餘數分別加 1 可以等於 $B=k+1$ 時暫時殘餘數(相當於事先保留 1 瓶，把 $(k+1)$-1 瓶先換完，再把最後一瓶加入)，因此 $B=n+k$ $(k\in\mathbb{N})$ 時，距離下次殘餘數數組相同時

的間距，與 $B=n$ 時是一樣的，故得證。

(2) **週期長度=** $\left(1-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{E_m}\right)\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$

根據我們對週期的定義，我們必須找到兩殘餘數數組 $(R_1,R_2,R_3,\cdots,R_k,\cdots,R_n)$ 相同時，兩相異初始數 B 值的最小差距，因此我們依據**引理二**在 n 元 1 級的簡化— $E_k\times T(\mathrm{k})+R_k=S$ —得下文：

因殘餘數、兌換數不變所以 S 經過一週期的增加量(下式中的 X)會被所有 E_k 整除：

$$E_k\times T(\mathrm{k})+R_k+X=S'$$

由上述討論可知 X 的最小值為 $\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]$，也就是 $E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n$ 的最小公倍數，而這也表示在原本的初始數 B 得到的 S 和下一周期的 B' 得到的總和數 S'， $S'-S$ 的差距為 $\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]$，又將這差距分為初始數的增加和兌換次數增加所造成的增加，又兌換次數的增加=$\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]\times(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})$ (由將此最小公倍數代入引理二求得)，故得下式：

$$B'-B+\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]\times(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})=$$

$$S'-S=\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]$$

整理得下式：

$$B'-B=\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,,E_n\right]\times(1-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{E_m})$$

故得週期長=$\left(1-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{E_m}\right)\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$，得證。

3. S 非兌換數的倍數

證明：

$\because E_k\times\sum \mathrm{T}(...,\mathrm{k},...)+R_k=\mathrm{S}$ 且 $0<R_k<E_k$ 。

又 $E_k \times \sum$`T(...,k,...) 是 E_k 的倍數，而 R_k 不是 E_k 的倍數。

$\therefore S$ 不被 E_k 整除，得證。

舉例來說，2 元 1 級時的兌換物價值，在 $E_1 = 2$ 、 $E_2 = 3$時會最大，相應地，本體價值會最小。

4. 合理設定範圍—避免無窮兌換

若 $m-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}>0$ ，則不會無窮兌換。

證明：

由價值觀念得到的兌換始末價值不變的結論，因為物品為本體與部件構成，而由於問題的開始是針對部件進行價值設定，因而確定部件價值必為正，且 1 個物品的價值已假設為 1，因此若本體價值為正時，則可以確保增加本體必會消耗部件價值，故不會無窮兌換。

(五) 引理五(n 元 1 級時成立)

$$\boxed{S-\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{S}{E_k} \right\rfloor = B \quad \text{(中括號為高斯符號)}}$$

證明：

將**引理二**修改為適合 n 元 1 級的情況： $E_k \times T(k)+R_k=S$

移項可得下式： $T(k)=\frac{S-R_k}{E_k}$ ，由於 n 元 1 級時兌換特性(1)：

「 $0<R_k<E_k$ 」會成立，因此 $\frac{S}{E_k}-1<T(k)<\frac{S}{E_k}$ ，可得下式：

$$T(k)=\frac{S-R_k}{E_k} \Leftrightarrow T(k)=\left\lfloor \frac{S}{E_k} \right\rfloor$$

再由引理一得下式：

$$B+\sum`T=S \text{ ，即 } S-\sum`T=B$$

可得欲證之式：

$$S-\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{S}{E_k} \right\rfloor = B$$

(六) n 元 1 級時 B→S

為了確定我們的方法不會因為兌換過程的不同而影響結果，因此我們必須證明在初始數 B、兌換數 I_1、I_2、I_3、・・・的情況下，不同兌換法被使用的順序並不會影響總和數 S。

1. 2 元 1 級時

證明：

假設存在兩種相異的過程可使得總和數相異，設其兌換次數分別為 $T(1)$ 和 $T(1)^C$、$T(2)$ 和 $T(2)^C$，最後的殘餘數分別為 R_1 和 R_1^C、R_2 和 R_2^C，因為欲使結果相異，因而 $R_1 \neq R_1^C$ 或 $R_2 \neq R_2^C$，則由**引理一**與**引理二**可得下式：

$$\because S=B+\sum T=E_k \times \sum T(...,\mathrm{k},...)+R_k$$

$\therefore$ 上式於 2 元 1 級時 $\Leftrightarrow B+T(1)+T(2)=T(\mathrm{k})\times E_k+R_k$，移項可得下式：

$$B-T(1)\times(E_1-1)+T(2)=R_1 \qquad \text{-(1)}$$

$$B-T(1)^C\times(E_1-1)+T(2)^C=R_1^C \qquad \text{-(2)}$$

因為欲求相異 S 的解，所以我們分為三種情況：$R_1=R_1^C$、$R_1 < R_1^C$ 和 $R_1 > R_1^C$ 進行討論。

若 $R_1=R_1^C$，又可由**價值概念**與**兌換特性**知 $\left|\frac{R_2-R_2^C}{E_2}\right| < 1$

(因為 $0<R_2,R_2^C \leq E_2-1$)，所以其價值差＜1，又 1 個物品的價值為 1，因此其不足以再得到更多物品，與使得「總和數相異」的前提不合，故不就其進行討論。又因 $R_1 < R_1^C$ 與 $R_1 > R_1^C$ 只是兌換次數相異導致的對稱結果，故只就 $R_1 <$

R_1^C 討論之。

以下分情況討論之，即 $T(1)>T(1)^C$ 、$T(1)<T(1)^C$ 、$T(1)=T(1)^C$ ：

(1) $T(1)>T(1)^C$

由於 $1\le R_1$ 、 $R_1^C \le E_1$-1，且 $R_1 < R_1^C$ 所以將(1)式減(2)式可得下式：

$$1\le [T(1)^C - T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C \le E_1\text{-}2 \quad \text{－(3)}$$

由避免無窮兌換之結論可得 $E_k \ge 2$，$T(1)>T(1)^C$ ，所以

$[T(1)^C - T(1)](E_1-1)\le -1$，又 $1\le [T(1)^C - T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C$ ，所以

$T(2)\text{-}T(2)^C$ 必 >0 ，所以 $T(2)>T(2)^C$ 。

由上面討論得 $T(1) > T(1)^C$ 且 $T(2) > T(2)^C$ ，$T(1)^C$ 、$T(2)^C$ 很明顯可再兌換繼續兌換至 $T(1)$ 、$T(2)$ ，所以與題意矛盾。

(2) $T(1)<T(1)^C$

同(1)之理可得(3)式。

$$1\le [T(1)^C - T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C \le E_1\text{-}2 \qquad (3)$$

因為 $E_1 \ge 2$ ，$T(1)<T(1)^C$ ，故 $[T(1)^C - T(1)](E_1-1)$ 必 $\ge E_1-1$ ，所以

$T(2)\text{-}T(2)^C$ 必 <0 才符合條件，即 $T(2)<T(2)^C$ 。

由上面討論可得 $T(1)<T(1)^C$ 且 $T(2)<T(2)^C$ ，$T(1)$ 、$T(2)$ 很明顯可再兌換繼續兌換至 $T(1)^C$ 、$T(2)^C$ ，所以與題意矛盾。

(3) $T(1)=T(1)^C$

同(1)之理可得(3)式，但可進一步化簡為下：

$$1\le T(2)-T(2)^C \le E_1\text{-}2 \qquad \text{-(4)}$$

即 $T(2)>T(2)^C$ 。

由上面討論可得 $T(1)=T(1)^C$ 且 $T(2)>T(2)^C$ ，$T(2)^C$ 很明顯可再兌換繼續兌換至 $T(2)$ ，所以與題意矛盾。

同理，將$T(1)$改為$T(2)$、$T(3)$，亦可知矛盾

由(1)、(2)、(3)的討論知 2 元 1 級時任意兌換數的情況，B→S 具有唯一性。

2. n 元 1 級時

證明：

假設至少存在另一種過程，可使得總和數相異，設其兌換次數分別為$T(1)$和$T(1)^C$、$T(2)$和$T(2)^C$、⋯、$T(n)$和$T(\mathrm{n})^C$，最後的殘餘數分別為R_1和R_1^C、R_2和R_2^C，因為欲使結果相異，因而$R_1 \neq R_1^C$或$R_2 \neq R_2^C$ ⋯或$R_n \neq R_n^C$，則由**引理一**與**引理二**可得下式：

$$\because S=B+\sum T=E_k \times \sum \mathrm{T}(...,\mathrm{k},...)+R_k$$

∴上式於 n 元 1 級時相當於 $B+T(1)+T(2)+\cdots+\cdots T(\mathrm{n})=T(\mathrm{k})\times E_k+R_k$，移項可得下二式：

$$B-T(1)\times(E_1-1)+T(2)+T(3)+\cdots+T(\mathrm{n})=R_1 \qquad \text{-(1)}$$

$$B-T(1)^C\times(E_1-1)+T(2)^C+T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})^C=R_1^C \qquad \text{-(2)}$$

因為欲求相異S的解，所以我們分為三種情況：$R_1=R_1^C$、$R_1<R_1^C$和$R_1>R_1^C$進行討論。

若$R_1=R_1^C$，又可由**價值概念**與**兌換特性**知$\left|\dfrac{R_2-R_2^C}{E_2}\right|<1$

(因為$0<R_2,R_2^C\leq E_2-1$)，所以其價值差＜1，又 1 個物品的價值為 1，因此其不足以再得到更多物品，與使得「總和數相異」的前提不合，故不就其進行討論。又因$R_1<R_1^C$與$R_1>R_1^C$只是兌換次數相異導致的對稱結果，故只就$R_1<R_1^C$討論之。

以下分情況討論之，即$T(1)>T(1)^C$、$T(1)<T(1)^C$、$T(1)=T(1)^C$：

(1) $T(1)>T(1)^C$

由於 $1\le R_1$ 、 $R_1^C\le E_1$-1，且 $R_1<R_1^C$ 所以將(1)式減(2)式可得下式：

$$1\le[T(1)^C-T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C\le E_1\text{-}2 \quad -(3)$$

由避免無窮兌換之結論可得 $E_k\ge 2$，$T(1)>T(1)^C$ ，所以

$[T(1)^C-T(1)](E_1-1)\le -1$，又

$1\le[T(1)^C-T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C$ ，

所以 $T(2)\text{-}T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C$ 必 >0 ,

即 $(T(2)+T(3)+\cdots+T(\mathrm{n}))\text{-}(T(2)^C\text{-}T(3)^C\text{-}\cdots\text{-}T(\mathrm{n})^C)$ 必 >0 ，

所以 $T(2)>T(2)^C$ 或 $T(3)>T(3)^C$ 或 $\cdots$ 或 $T(\mathrm{n})>T(\mathrm{n})^C$ 。

由上面討論得 $T(1)>T(1)^C$ 且

$\left(T(2)>T(2)^C\text{或}T(3)>T(3)^C\text{或}\cdots\text{或}T(\mathrm{n})>T(\mathrm{n})^C\right)$，$T(1)^C$ 、$T(2)^C$ 或 $T(1)^C$ 、$T(3)^C$ 或 $\cdots$ 或 $T(1)^C$、$T(\mathrm{n})^C$ 很明顯可再兌換繼續兌換至 $T(1)$、$T(2)$ 或 $T(1)$、$T(3)$ 或 $\cdots$ 或 $T(1)$ 、 $T(\mathrm{n})$ ，所以與題意矛盾。

(2) $T(1)<T(1)^C$

同(1)理可得(3)式。

$$1\le[T(1)^C-T(1)]\times(E_1\text{-}1)+T(2)-T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C\le E_1\text{-}2 \quad -(3)$$

因為 $E_1\ge 2$ ， $T(1)<T(1)^C$ ，故 $[T(1)^C-T(1)](E_1-1)$ 必 $\ge E_1-1$ ，

所以 $T(2)\text{-}T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C$ 必 <0 才符合條件，

即 $(T(2)+T(3)+\cdots+T(\mathrm{n}))\text{-}(T(2)^C\text{-}T(3)^C\text{-}\cdots\text{-}T(\mathrm{n})^C)$ 必 <0 ，

所以 $T(2)<T(2)^C$ 或 $T(3)<T(3)^C$ 或 $\cdots$ 或 $T(\mathrm{n})<T(\mathrm{n})^C$ 。

由上面討論可得 $T(1)<T(1)^C$ 且

$\left(T(2)<T(2)^C\text{或}T(3)<T(3)^C\text{或}\cdots\text{或}T(\mathrm{n})<T(\mathrm{n})^C\right)$，$T(1)$ 、$T(2)$ 很明顯可再兌換繼

續兌換至$T(1)^C$、$T(2)^C$或$T(1)^C$、$T(3)^C$或$\cdots$或$T(1)^C$、$T(\mathrm{n})^C$，所以與題意矛盾。

(3) $T(1)=T(1)^C$

同(1)理可得(3)式，但可進一步化簡為下：

$$1\le T(2)-T(2)^C+T(3)\text{-}T(3)^C+\cdots+T(\mathrm{n})\text{-}T(\mathrm{n})^C\le E_1\text{-}2$$

(4) 即$(T(2)+T(3)+\cdots+T(\mathrm{n}))$-$(T(2)^C$-$T(3)^C$-$\cdots$-$T(\mathrm{n})^C)$必$>0$，

所以$T(2)>T(2)^C$或$T(3)>T(3)^C$或$\cdots$或$T(\mathrm{n})>T(\mathrm{n})^C$。

由上面討論可得$T(1)=T(1)^C$

且$\left(T(2)>T(2)^C\text{或}T(3)>T(3)^C\text{或}\cdots\text{或}T(\mathrm{n})>T(\mathrm{n})^C\right)$，$T(2)^C$很明顯

可再兌換繼續兌換至$T(2)$、$T(3)$、$\cdots$、$T(\mathrm{n})$，所以與題意矛盾。

同理，將$T(1)$改為$T(2)$、$T(3)$、$\cdots$、$T(\mathrm{n})$，亦可知矛盾。

由(1)、(2)、(3)的討論知 n 元 1 級時任意兌換數的情況，B→S 具有唯一性。

五、 1 元 1 級

初始數=B，每E_1個I_1可兌換一物品，則除了 B 個之外，我們還可使用新獲得的物品，其所產生的I_1再去兌換，直到剩下的I_1少於E_1個為止，但由**兌換特性**知I_1至少會剩 1 個，因此可得兌換次數$T(1)$的不等式：

$$1\le B-T(1)E_1+T(1)<E_1$$

$$\text{整理可得}\ \frac{B-E_1}{E_1-1}<T(1)\leqq\frac{B-1}{E_1-1}$$

因為$\frac{B-1}{E_1-1}-\frac{B-E_1}{E_1-1}=\frac{E_1-1}{E_1-1}=1$，即$T(1)$的不等式左右兩側差距 1 個單位，又$T(1)$只有上界部分等號成立，因而可看出$T(1)$可能的區間小於 1，又$B\ge E_1$，故可由此不等式得$T(1)$之唯一正整數解，因此$S=B+T(1)$。

六、 2 元 1 級

欲討論 2 元 1 級前，可先回溯到原始問題思考，為何題目所訂的兌換數E_1和E_2分

別為 2、4，而非其他數字？我們於資料查詢時亦發現絕大部分針對此問題的討論也僅限於此設定。由**引理二**可知：

$$E_k \times \sum \mathrm{T}(\ldots,\mathrm{k},\ldots)+R_k=S \quad ,$$

代入上述條件可得：$2\times T(1)+R_1=4\times T(2)+R_2=S$，而由**兌換特性：n 元 1 級時，0 $<R_k<E_k$ 且 R_k 至多 1 項值為 1** 知 R_1 存在唯一解=1，且 $R_2\neq 1$。又 $2\times T(1)+R_1$ 必為一奇數，因此 $R_2=3$，所以在 $B\geq 3$ 時，殘餘數 $(R_1,R_2)=(1,3)$，因此，當 n-1 個物品進行兌換(n≥4)時，其兌換數會是 $(1,3)$，而 n 個物品進行兌換時，其兌換數依然是 $(1,3)$，

但兌換過程中所獲的價值已增加了 $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=3$(瓶)，而經推算可知 B=3 時 S - B=4，

因此 B=n 時的 S 為：

n+4	+	3(n-3)	=	4n-5 。
(B=3 的 S)	(B 每增 1 可兌換 4 個物品，故可多兌換 3 個物品。)		(公式解)	

但隨著 E_k 的變化，R_k 的結果不再唯一，而是呈現週期性變化，因此必須作嚴謹的討論。

設原有 B 個物品，每 E_1 個 I_1 或每 E_2 個 I_2 可兌換一個物品，由**引理四**：週期長= $\left(1-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{E_m}\right)\left[E_1,E_2,E_3,\cdots,E_k,\cdots,E_n\right]$，

可知殘餘數會形成一周期，且因為在 2 元 1 級時可得 $(E_1,E_2)\left[E_1,E_2\right]=E_1\times E_2$，其中 (E_1,E_2) 為 E_1、E_2 最大公因數，因此週期表示為 $\dfrac{(E_1-1)(E_2-1)-1}{(E_1,E_2)}$ 。

除了上述之外，我們再由**引理三**：$\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}(B-R_k)}{m-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}}+B=S$ 和**引理五**：

S-[S/E_1]-[S/E_2]=B，可建立一套 S、B、T(k)、E_k 和 R_k 的轉換模式。

實際應用層面，雖然已知給定 B 和 E_1 、 E_2 時， S 有唯一性，但因為不確定引理五的範圍是否會因為高斯符號的關係而太大，因採用下述推導來觀察範圍：

去除 S-[S/E_1]-[S/E_2]=B 中的高斯符號，可得

$$B-\frac{E_1-1}{E_1}-\frac{E_2-1}{E_2}\le S-\frac{S}{E_1}-\frac{S}{E_2}<B$$

下限範圍：舉 E_1 部分為例，因為高斯符號中被捨去的值最多會是 $\frac{E_1-1}{E_1}$ ，因此不等式的下限範圍定為如此。

上限範圍：[S/E_1]和[S/E_2]均為非負整數，則可得 B ，但由**兌換特性**知 S 非兌換數 E_1 或 E_2 的倍數，因此等式不成立。

上式可再整理為： $B-2+\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\le S(1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2})<B$

由設定的價值概念知本體的價值為 $1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}$ ，令 $\frac{1}{\Omega}=1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}$ ，

意即 $\frac{1}{\Omega}$ 為本體的價值，則可將之整理為下式：

$$(B-3)\times\Omega+1\le S<B\times\Omega$$
$$\Leftrightarrow B\times\Omega-3\Omega+1\le S<B\times\Omega$$

因為當 $\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}$ 愈大時，本體所佔的價值愈小，因而 Ω 愈大， S 可能的範圍愈大，搭配**兌換特性**，可知在在 $E_1=2$ 、 $E_2=3$ 時即為 Ω 最大值出現之處，此時 $\frac{1}{\Omega}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 其範圍如下：

$$B\times6-3\times6+1\le S<B\times6$$
$$\Leftrightarrow 6B-17\le S<6B$$

範圍為 17 個整數，又由**兌換特性**知 S 非兌換數的倍數，因此，範圍可再縮小，因此這個方法在 1 元 2 級時的確有助於快速找到解答。

七、 n 元 1 級

原有 B 個物品，每 E_1 個 I_1 ，每 E_2 個 I_2 ，…，每 E_n 個 I_n 可兌換一個物品，因為各引理已證，此處不再贅述，僅探討實際利用引理五的公式是否有效率。

由引理五：$S-\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{S}{E_k} \right\rfloor = B$ 可知 n 元 1 級時可展開如下：

$$S-\left\lfloor \frac{S}{E_1} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{S}{E_2} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{S}{E_3} \right\rfloor-\cdots-\left\lfloor \frac{S}{E_n} \right\rfloor = B$$

去除高斯符號可得下式：

$$B-\frac{E_1-1}{E_1}-\frac{E_2-1}{E_2}-\cdots-\frac{E_n-1}{E_n} \le S-\frac{S}{E_1}-\frac{S}{E_2}-\frac{S}{E_3}-\cdots-\frac{S}{E_n} < B$$

下限範圍：舉 E_1 部分為例，因為高斯符號中被捨去的值最多會是 $\frac{E_1-1}{E_1}$ ，因此不等式的下限範圍定為如此。

上限範圍：$[S/E_1]$、$[S/E_2]$、$[S/E_3]$、⋯、$[S/E_n]$ 均為非負整數，則可得 B ，但由**兌換特性**知 S 非兌換數 E_1 或 E_2 或 $E_3 \cdots$ 或 E_n 的倍數，因此等式不成立。

整理後可得：

$$B-n+\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}+\cdots+\frac{1}{E_n} \le S(1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_3}-\cdots-\frac{1}{E_n}) < B$$

由設定的價值概念知本體的價值為 $1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_3}-\cdots-\frac{1}{E_n}$ ，令 $\frac{1}{\Omega}=1-\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_3}-\cdots-\frac{1}{E_n}$ ，意即 $\frac{1}{\Omega}$ 為本體的價值，則可將式子整理如下：

$$(B-n-1)\times\Omega+1 < S < B\times\Omega$$
$$\Leftrightarrow B\times\Omega-(n+1)\Omega+1 < S < B\times\Omega$$

因為當 $\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}+\cdots+\frac{1}{E_n}$ 愈大時，本體所佔的價值愈小，因而 Ω 愈大，S 可能的範圍愈大，雖然欲找 Ω 的最大值時，發現其趨近於無限大，但搭配**兌換特性**知 S 非兌換數的倍數，因此，若 E_k 存在愈小的值，找出範圍的速度愈快。

八、 2 元 2 級

原有 B 個物品，每 E_1 個 I_1 和 E_2 個 I_2 可兌換一物品，因為 $E_2 > E_1$ ，所以 I_2 會比 I_1 早

兌換完畢，因此可視 I_2 為限量物(限制兌換進行的部件)，即當 I_2 用盡時兌換就結束，因此可將問題簡化至 1 元 1 級的部分，因此兌換次數 $T(1,2)$ 的解為下式：

$$\frac{B-E_2}{E_2-1} < T(1,2) \le \frac{B-1}{E_2-1}$$

又 $B \ge E_2$ ，所以同 1 元 1 級之理，此區間內亦可找到唯一的正整數解。

九、 3 元 3 級

原有 B 個物品，每 E_1 個 I_1 、 E_2 個 I_2 和 E_3 個 I_3 可兌換一物品，因為 $E_3 > E_2 > E_1$ ，所以 I_3 會比 I_1 、 I_2 早兌換完畢，因此可視 I_3 為限量物，即當 I_3 用盡時兌換就結束，因此可將問題簡化至 1 元 1 級的部分，故兌換次數 $T(1,2,3)$ 的解如下：

$$\frac{B-E_3}{E_3-1} < T(1,2,3) \leqq \frac{B-1}{E_3-1}$$

又 $B \ge E_3$ ，所以同 1 元 1 級之理，此區間內亦可找到唯一的正整數解。

又由七、與八、推導過程可知，n 元 n 級時，兌換次數 $T(1,2,3,...,n)$ 的解如下：

$$\frac{B-E_n}{E_n-1} < T(1,2,3,...,n) \leqq \frac{B-1}{E_n-1}$$

又 $B \ge E_n$ ，所以同 1 元 1 級之理，此區間內亦可找到唯一的正整數解。

十、 n 元 m 級

(因為 $n=m$ 的情況(九)已有說明，故此處我們設定 $n \ge m+1$ 。)

針對 $m \ge 2$ 時的情況，原有的價值公式與相關引理已不足以解決，因此以下將引入新的計算方式：

(一) 數團概念介紹與演算法規則

設現在有一個 n 元 m 級的問題，因此我們擁有 n 種部件，每 m 種可兌換一個新物品。將 P_i^k 由大至小排列分為 m 團，最大定義為第一團，次大定義為第二團，以此類推，第 m-1 大定義為第 m-1 團，其餘剩下的 P_i^k 定義為第 m 團。

	E1	E2	E3	…	En	T	J	L
第1步驟	B	B	B	…	B	T(1)	J(1)	L(1)
	P(1,1)	P(1,2)	P(1,3)	…	P(1,n)			
	R(1,1)	R(1,2)	R(1,3)	…	R(1,n)			
第2步驟	X(1,1)	X(1,2)	X(1,3)	…	X(1,n)	T(2)	J(2)	L(2)
	P(2,1)	P(2,2)	P(2,3)	…	P(2,n)			
	R(2,1)	R(2,2)	R(2,3)	…	R(2,n)			
第3步驟	X(2,1)	X(2,2)	X(2,3)	…	X(2,n)	T(3)	J(3)	L(3)
	P(3,1)	P(3,2)	P(3,3)	…	P(3,n)			
	R(3,1)	R(3,2)	R(3,3)	…	R(3,n)			
	…	…	…	…	…	…	…	…
	…	…	…	…	…			
	…	…	…	…	…			
第n-1步驟	X(n-2,1)	X(n-2,2)	X(n-2,3)	…	…	T(n-1)	J(n-1)	L(n-1)
	P(n-1,1)	P(n-1,2)	P(n-1,3)	…	…			
	R(n-1,1)	R(n-1,2)	R(n-1,3)	…	…			
第n步驟	X(n-1,1)	X(n-1,2)	X(n-1,3)	…	X(n-1,n)	0	0	L(n)
	P(n,1)	P(n,2)	P(n,3)	…	P(n,n)			
	R(n,1)	R(n,2)	R(n,3)	…	R(n,n)			
						T(1)+T(2)+…+T(n-1)		

※1.B為初始數。

2.Ei為i部件的兌換數。

3.P(x,y)為第x步驟Ey的理想兌換次數，即為 P_i^k 。

4.R(x,y)為第x步驟Ey扣除理想兌換次數所使用的部件後的殘餘數，即為 $\frac{I_i數}{E_i}-\left[\frac{I_i數}{E_i}\right]$ 。

5.X(x,y)為第x+1步驟開始前，Ey所擁有的部件數，即為 $\left[\frac{I_i數}{E_i}\right]$ 。

6.T(x)為第x步驟時的該步驟兌換次數，即為 T^k 。

7.J(x)為第x步驟時該步驟的補充項。

8.L(x)為第x步驟時，邊界線的位置，由左而右，左於第1團者訂為0，接著依序為1,2,3…m。

9.T(n)=0時，代表已無可供應的兌換次數，運算到此步驟結束。

10.加總各步驟的該步驟兌換次數，再加上初始數B，即為總和數S。

11.數團的排列順序將於本文說明。

(如圖，我們使充足項在邊界線左側，非充足項在邊界線右側)

1. 兌換次數的說明

上圖為演算法的進行過程，在第一步驟時，各部件皆擁有 B 個部件，算出 $\left\lfloor\frac{B}{E_i}\right\rfloor$，此即為 P_i^1，為此部件於第一步驟時的理想兌換次數，而剩餘的部件，也就是 $\frac{B}{E_i}-\left\lfloor\frac{B}{E_i}\right\rfloor$ 的部分，則為圖中的 R(1,i)，將於下一步驟時

與部件得到的該步驟兌換次數合併，再進行 $\frac{I_i數}{E_i}-\left\lfloor\frac{I_i數}{E_i}\right\rfloor$ 以求出下一步驟的理想兌換次數。

2. 該步驟兌換次數與補充項

該步驟兌換次數的計算方法為：

(1) 將第 m 團的理想兌換次數相加，得 $\sum_{i=m}^{n}P_i^k$ 。

(2) 先與 $P_{m-1}{}^1$ 比較

i. 若 $\sum_{i=m}^{n}P_i^k \le P_{m-1}{}^k$ ，則該步驟兌換次數 T^k 即為 $\sum_{i=m}^{n}P_i^k$ 。

ii. 若 $\sum_{i=m}^{n}P_i^k > P_{m-1}{}^k$ ，則求出 $T^k=\left\lfloor\frac{\sum_{i=m-1}^{n}P_i^k}{2}\right\rfloor$ 再與 $P_{m-2}{}^k$ 比較。

(3) 再與 $P_{m-2}{}^k$ 比較

i. 若 $T^k=\left\lfloor\frac{\sum_{i=m-1}^{n}P_i^k}{2}\right\rfloor \le P_{m-2}{}^k$ ，則該步驟兌換次數 T^k 即為 $\left\lfloor\frac{\sum_{i=m-1}^{n}P_i^k}{2}\right\rfloor$ 。

ii. 若 $T^k=\left\lfloor\frac{\sum_{i=m-1}^{n}P_i^k}{2}\right\rfloor > P_{m-2}{}^k$ ，則求出 $T^k=\left\lfloor\frac{\sum_{i=m-2}^{n}P_i^k}{3}\right\rfloor$ 再與 $P_{m-3}{}^k$ 比較

(4) 以此類推。若最後 $T^k=\left\lfloor\frac{\sum_{i=2}^{n}P_i^k}{m-1}\right\rfloor > P_1^k$ ，則該步驟兌換次數 T^k 即為 $\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i^k}{m}\right\rfloor$ 。

在該步驟兌換次數運算出來後，因為使用高斯符號，在取整數的條

件之下，非充足項會有部分兌換次數無法使用到，因而將其歸類至補充項，留待下一步驟時再使用。

3. 充足項與邊界線的決定

充足項與邊界線的決定，取決於該步驟兌換次數，為了方便說明與運算，我們設在該步驟兌換次數的運算結束時，比較的數團間存在一條假想的邊界線，並為其的位置特性編號：

i. 若存在於第 x 團與第 $x+1$ 團之間，則命名為 x

ii. 若其於第 1 團之外，則命名為 0。

如 2-(2)-i 時，邊界線存在於第 m-1 團和第 m 團之間，此時邊界線命名為 m；又如 2-(3)-i 時，邊界線存在於第 m-2 團和第 m-1 團之間，此時邊界線命名為 m-1。

找出邊界線後，兩側的數團可依據「有無參與計算『該步驟兌換次數 T^k 』」分類，未參與者稱為「充足項」，參與者稱為「非充足項」。

4. 運算過程統整

綜合 1.、2.、3.的討論整理過程如下：

如 1.上方之圖，

(1) 先計算出各部件的理想兌換次數 P_i^k 和殘餘數 R(k,i)。

(2) 進行比較後，計算出該步驟兌換次數 T^k ，而補充項則在比較時放入，需放置於非充足項，由 $P_n{}^k$ 依序開始放，各元素至多放 1 個。

(3) 已知 T^k ，因而找出邊界線。

(4) 已知邊界線，因而得知充足項。

(5) 將充足項的各團各用去 T^k 後，剩餘的部件再加上該步驟兌換次數，並記錄於 X(k,i)。

(6) 進行下一步驟的計算，直到該步驟兌換次數變為零為止。

(二) .解釋數團概念與演算法

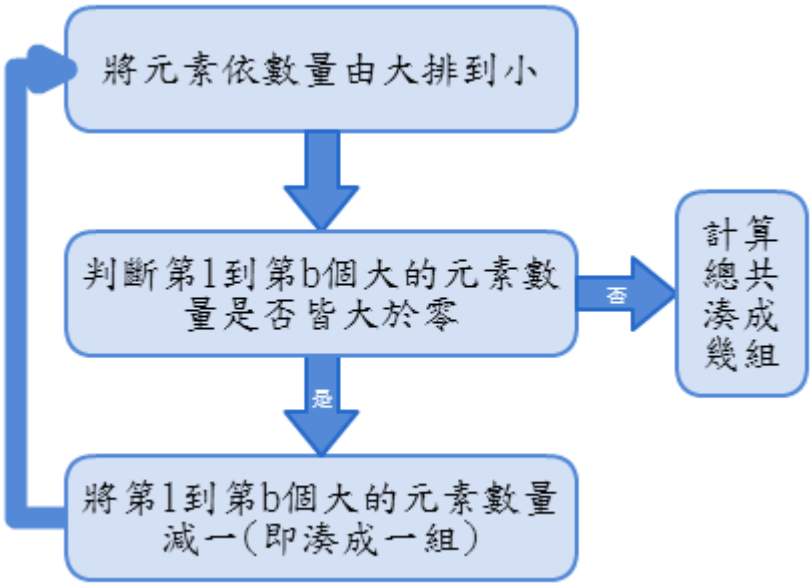
1. 各步驟中，兌換的過程確實可被進行

證明：

我們可以把這一步驟視作如下問題：

有 a 種元素，每個元素數量若干(可為零)，每 b 種元素各一個

分為一組，則最多可分幾組？



從上述的流程，我們可以發現在如此的換法中，會有兩種情況，一種是元素的數量皆小於等於所有元素數量和除以 b 取整數的值，反則大於。不考慮種類，每組內有 b 個元素，因此若為理想情況，即原本的所有元素數量和除以 b 取整數即會是組數。

在所有元素數量小於等於所有元素數量和除以 b 取整數的值時，每個元素皆可藉由配對配到數量非一即零，所以所有元素數量和除以 b 取整數的值就是組數。

而當有元素數量大於所有元素數量和除以 b 取整數的值，則可知這個元素是無論如何都配不完的，因此我們將之視為充足項而不計入平均，並可知每組必有一個此元素，由此我們可將問題視為所有非充足元素數量和除以(b-充足元素數)

取整數的值。

2. 邊界線的位置表示最大為 m-1，最小為 0

由該步驟兌換次數的計算過程可知，比較開始於 $\sum_{i=m}^{n} P_i^k$ 和 $P_{m-1}{}^k$ ，因而邊界線位置表示最大為 m-1；而比較至多比較到 $\left\lfloor \frac{\sum_{i=2}^{n} P_i^k}{m-1} \right\rfloor$ 和 P_1^k ，因而邊界線位置表示最小為 0 。

3. 充足項說明暨補充項(注意邊界線位置)擺放

由 1.之證明可知，非充足項的部件除了補充項外，其餘的理想兌換次數皆可於該步驟兌換完畢，但此時充足項的部件仍有剩餘，因而我們於名詞定義時，將邊界線定義為：「充足項與非充足項的邊界。」

計算該步驟兌換次數時，因為n元m級時每進行一次兌換需要m種部件，所以非充足項可能會有部分無法使用到的次數，那些次數的和我們即稱為補充項。又由 2.知：邊界線的位置表示最大為 m-1，最小為 0。所以將情況分為邊界線位置為 m-1 或非 m-1 的情況。

1. 若邊界線位置表示為 m-1 則補充項為 0：

證明：

因為此時該步驟兌換次數會變為 $\left\lfloor \frac{\sum_{i=m}^{n} P_i^k}{1} \right\rfloor = \sum_{i=m}^{n} P_i^k$ ，因而

$\frac{\sum_{i=m}^{n} P_i^k}{1} - \left\lfloor \frac{\sum_{i=m}^{n} P_i^k}{1} \right\rfloor = \sum_{i=m}^{n} P_i^k - \sum_{i=m}^{n} P_i^k = 0$ ，所以補充項為 0。

2. 若邊界線位置表示不為 m-1，則可能存在補充項，且補充項的處理方式為：**將其放置於非充足項中，由小至大開始依序放置，若相同則由右邊開始擺放，最多使各部件得到一次。**因為用此方法可對補充項作最有效率的分配。

證明：

i. 非充足項可容納補充項的放置

若此時邊界線位置表示為 x ，則此時的該步驟兌換次數為 $\left\lfloor \frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} \right\rfloor$ ，因而 $\frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} - \left\lfloor \frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} \right\rfloor$ 不一定為 0，但可確定 $0 \le \frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} - \left\lfloor \frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} \right\rfloor \le m-x-1$ ，而非充足項有 m-x 個，因而必有足夠部件放置。

ii. 為何擺放至非充足項

在每一步驟結束後，充足項必定有剩餘，因此我們不將補充項放置於此，因為我們的目的為：使 n 元 m 級的分配最有效率，所以放置非充足項可以於下一步驟進行利用，可以降低其不充足的狀況。

iii. 由小到大依序放置

由 1.可知所有的非充足項的理想兌換次數(意即低於該步驟兌換次數的所有部件)在未考慮補充項前，藉由兌換均可降至 0 或 1，但加入補充項考慮才是實際的兌換過程。而我們目的為：「為兌換過程進行最有效率的分配，以期得到總和數 S 的最大值」，因而要先就不足的位置擺放，而既然非充足項的部件數大於補充項，因而就不能有同一部件放置兩個補充項的情況，因為其與所追求的目的相悖，因而每部件至多得到一次，且須由小到大依序放置。

iv. 由右邊開始放置補充項

因為在該步驟兌換次數的計算過程中，我們知道

$$P_1^k \ge P_2^k \ge \ldots \ge P_{m-1}{}^k \ge P_m{}^k \ge P_{m+1}{}^k \ge \ldots \ge P_n^k \ge P_{n-1}{}^k$$

因而若此時邊界線位置表示為 x ，則此時的該步驟兌換次

數為 $\left\lfloor \frac{\sum_{i=x+1}^{n} P_i^k}{m-x} \right\rfloor$ 若邊界線移動至 $x+1$，則該步驟兌換次數變為 $\left\lfloor \frac{\sum_{i=x+2}^{n} P_i^k}{m-x-1} \right\rfloor$，

兩者比值的意義可解釋為非充足項的「平均團的理想兌換次數」，又已

知 $P_1^k \geq P_2^k \geq \ldots \geq P_{m-1}{}^k \geq P_m{}^k \geq P_{m+1}{}^k \geq \ldots \geq P_n^k \geq P_{n-1}{}^k$

可知位置表示移動愈大會使「平均團的理想兌換次數」降低，所以若我們不從右放置補充項，則會使邊界線向右移動，因而降低該步驟兌換次數，此不符合我們的目的，因而，我們從右方開始放置。

綜合 i、ii、iii 和 iv，我們**將其放置於非充足項中，由小至大開始依序放置，若相同則由右邊開始擺放，最多使各部件至多得到一次。**

4. 該步驟兌換次數變為零，運算即結束。

證明：

在第 k 步驟中，$R(k,i) = \frac{I_i數}{E_i} - \left\lfloor \frac{I_i數}{E_i} \right\rfloor$，因而 $0 \leq R(k,i) < E_i$，在充足項的情況為：其仍有剩餘的理想兌換次數；而非充足項則除了補充項外並無其餘的理想兌換次數，我們由 3.知在非充足項中，步驟結束時剩餘的理想兌換次數應為 0、1 或 2(加入補充項考慮後)，但由於 T^k 為 0，所以必存在任一數團，其剩餘的理想兌換次數為 0；又或者其邊界線已至位置表示為 m-1，則第 m 團(其即為此時所有的非充足項)此時由 3-i 知其必定不會剩餘可供兌換的次數，所以只要該步驟兌換次數變為零，運算即結束。

5. 第 m 團內各部件順序的變動不會影響運算結果

證明：

因為由 2.知第 m 團始終為非充足項，又在我們的運算過程中，我們始終利用的是其團內理想兌換次數的總和，即將其視為一個整體來觀察，因而變動其

順序並無對整個運算造成影響。

6. 此方法可得到 n 元 m 級情形下，總和數 S 的最佳解

證明：

由 1.可知，我們為兌換次數做了一個有效的分配，而此在單一步驟時確為最理想的兌換方式，又由**補充項的放置**可知，我們「將其放置於非充足項中，由小至大開始依序放置，若相同則由右邊開始擺放，最多使各部件得到一次」才能得到最有效的分配，又未兌換完畢之兌換次數可留待下一步驟使用，因而可知我們為整個 n 元 m 級的計算做了最有效率的分配，因而可確信由此得到之總和數 S 為最佳解。

參、 研究結果與討論

一、 研究成果

(一) 原始問題解答。

(二) 改變原始問題中初始數 B ，獲得總和數 S 通解。

(三) 了解殘餘數呈週期變化的原因並獲得週期長度計算法。

(四) 改變原始問題中初始數 B 與各兌換數 E_i ，獲得總和數 S 速算法。

(五) 得到 n 元 1 級的 S 的計算法。

(六) 發展數團概念並得到 n 元 m 級的 S 的計算法。

二、 問題延伸

關於 n 元 m 級的解決辦法，還可以使用單體法(simplex method)來運算，惟實際應用部分仍有待研究，但其與數團概念的連結亦有待探明之處；另外，n 元 m 級的兌換在我們的設定下皆為兌換「1 個」物品，是否可以兌換 2 個、3 個或任意個，亦是個值得思考的問題；元與級的混和討論部分我們提出了一些理論，希望能不限制

特定兌換方式而供消費者選擇；回饋作用部分，期望能藉由以下理論將元、級的觀念更進一步一般化，以符合現實情況的多變性。

(一) 單體法求解 n 元 m 級與數團概念的連結

以 n 元 1 級的討論方式，會於 $m \geq 2$ 時遇上了困難，因為各類物品的兌換互相關聯，因而殘餘數 R_i 不再受到兌換數 E_i 的限制，僅能保證其必不小於 1，因此我們以所剩的條件：

$$1 \leq B - (E_i - 1)(\sum T_{ij}) + \sum_{k \neq i} T_{kj}$$

改採整數線性規劃的方式討論。整數線性規劃的方法繁多，而我們採用的方法為單體法(Simplex method)，它是目前各方法中最完整，也已有相關完整證明的方式，以下將詳加介紹本問題如何應用單體法解出一些線索。

單體法的目的為解一個多變數的單次方(多元一次)聯立不等式，其目標函數的極值(最大值或最小值)，若以其他方法輔助，也可將所選取之變數值限於非負整數之中，也就是本問題所需的限制，因而我們可使用單體法作為計算的方式。另外，由於一般單體法無法求出整數解，我們採取作業研究中的分支界線法來找出。

使用單體法必須解決以下問題：

1. 依據所使用的條件，我們看到的是兌換的結果，但是過程中是否有不符合兌換規則的情況，需另用方法驗證。
2. 針對矩陣的運算，由於其中牽涉到判斷入基變數和出基變數，是否得以應其特性簡化運算？
3. 使用分支界限法時，對於新的限制式加入單體法運算，能否有簡化的方式？

在單體法的概念中，若確定結果為合理的，則可確定我們需要的變數最後會是在基邊數中，而我們知道在合理的兌換過程與假設中，S 必定存在一個最大的數值，因而將矩陣簡化是可行的，但由於(1)的情況仍未得到解決，因此此部分留至

找出克服(1)的問題時再討論，但至少現在可以找到 S 的上界，因為其違反兌換過程的情況只可能為：超越殘餘數的限制而使過程中的暫時殘餘數小於 0。

在以數團概念進行相關演算時，發現邊界線會向右移或者向左移，其移動的原因著實令人好奇，也使我們暫時無法將此演算法簡化，其與單體法造成的誤差究竟有什麼關聯？是否兩者有異曲同工之妙，希冀能將其圓滿解釋。

(二) 兌換數的推廣

現實生活中除了「買多送 1」外，也可能出現「買多送 2」、「買多送 3」甚至「買多送多」，若更改原先題目設定，或可得到更豐碩的成果。

(三) 元與級的混和討論

商人欲促銷一種商品，提供不同優惠方式供消費者選擇：於此商品上的各種部件，可組合兌換成新的商品，消費者在有限預算下自行組合對自己較有利的購買方式，而且各種優惠方式的使用量不一定相同。

1. 各相異情況中，若存在兩種 n 元 m 級情況，m 較小情況的條件完全為 m 較大情況的部分條件，顯然較小情況所花費的價值必小於較大情況，因此可直接採用較小情況。
2. 若非 1.則需比較其兌換過程和相關價值，仍需近一步做討論。

(四) 回饋作用部分，希望能藉由以下理論將元、級的觀念更進一步一般化，以符合現實情況的多變性。

在兌換的過程中，我們可使各元的待換數在某些固定門檻時改變其所需的兌換數，並依其所需門檻的高低與兌換數的增減量，定義其為「回饋作用」。

由價值公式知，當兌換數改變時，進行兌換的物品其價值會改變，總價值，即所有物品的待兌換量與已兌換飲料之價值和，也會隨之改變，但是其改變的量是相同的。因此，我們可同時消去等式左右的變量，使總價值仍然守恆，但是在原先改

變兌換價值的物品上做標記，以確定其是否受回饋作用的影響。

在n元一級的情形時，未受回饋作用影響的兌換有唯一性，但若受回饋作用影響，則須考慮其兌換路徑；在 n 元 m 級的情形時，未受回饋作用影響的兌換不具唯一性，但若受回饋作用影響，則可能改變最佳解與最差解的結果。

1. 單一門檻

可分部件是否使相同門檻討論，到達特定門檻就增減兌換數。

2. 多門檻

3. 比例門檻

以比例來取代固定的增減量，達成動態效果。

肆、 結論與應用

一、 本作品的意義

(一) 從簡單且生活化的瓶蓋問題，進一步走向結合經濟學和統計學的廣泛討論。

(二) 透過計算和推導，找出直覺易產生的謬誤，並對兌換過程的可能情形有更透徹的理解。

(三) 而透過引理的建立和分項的討論，使實際推算問題與結果的效率更加。

二、 實際應用

除了找出買方所需的最佳解和供方所需的最差解外，可考慮 S 與 B 的比值，也就是在經營商和顧客之外，以經濟學家立場來找出永續經營的方式，讓供需能達到平衡。

另外，既已知道存在超級大盤商的情況下會有一固定折數，或可透過兩者競爭的模式或者以折數來設想原先題目設定的相關「反問題」，可達到較商業化的角度，進而符合現實生活的需求。

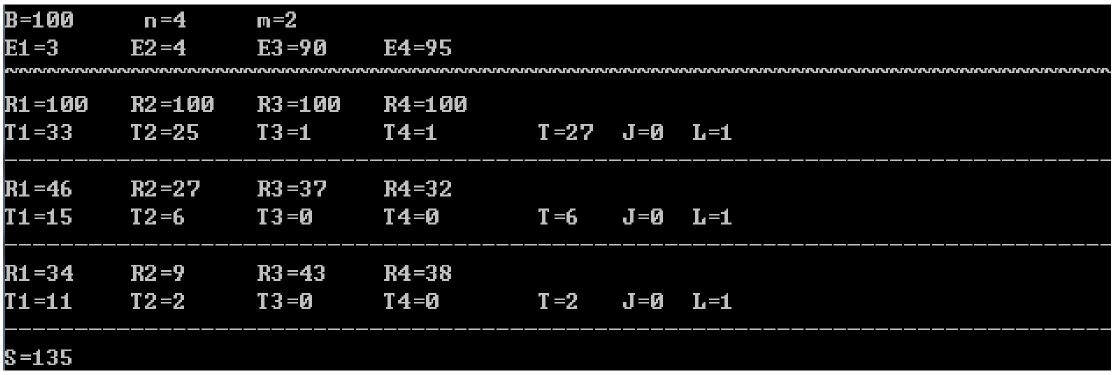
最後，此為實用化商業指標，在初始數 B 極大時可就其性質進行以下討論：

(一) 本體價值

由價值概念可知，本體總價值為 B-**殘餘數價值**。假設在理想情況中，所有部件都換成本體，因為兌換中價值不變，所以可知此時本體價值=B(一個完整物品價值為 1)，本體數量=$B\div(1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})$ 。

(二) 無法利用價值

由兌換過程可知，當在一級時，殘餘數小於兌換數，故每個部件殘餘價值 $\le\frac{E_k-1}{E_k}$ ，殘餘部件價值和 $\le\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k-1}{E_k}=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k}$ 。故可知在 B 極大的情況下，本體數量趨近於理想狀況，$\lim_{B\to\infty}\{[B-(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})]\div(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})-B\div(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{E_k})\}=0$ 。但當在 m 級時，殘餘數不一定小於兌換數(如下圖，T 為本輪兌換次數、 J 為補充項， L 為第幾個部件前(含)都是充足項)，可見在最後兩次換完時 R_1 還剩 30 個，大於 E_1 ，因而將其稱為無法利用價值，而我們在實驗中發現，在初始數 B 極大的時候，期與 B 的比值亦會趨向一定值，因此由(一)、(二)可知：在兌換數固定， B 值為極大的時候， B 與 S 的比值會趨向一定值。



```
B=100     n=4     m=2
E1=3     E2=4     E3=90    E4=95
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
R1=100   R2=100   R3=100   R4=100
T1=33    T2=25    T3=1     T4=1          T=27  J=0  L=1
--------------------------------------------------------------------------------
R1=46    R2=27    R3=37    R4=32
T1=15    T2=6     T3=0     T4=0          T=6   J=0  L=1
--------------------------------------------------------------------------------
R1=34    R2=9     R3=43    R4=38
T1=11    T2=2     T3=0     T4=0          T=2   J=0  L=1
--------------------------------------------------------------------------------
S=135
```

伍、　參考文獻

一、　一個益智問題 蔡聰明 http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d391/39105.pdf

二、　可以喝到幾瓶汽水一 兼談台灣中小學數學教育* 張鎮華

http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d391/39106.pdf

【評語】010023

網路上流傳許久的一個有趣問題。作者們針對可兌換的物件有多種，每種物件又各有自己的兌換門檻時，最終可得出的主體的總數的值這樣一個一般化的問題，作了一番深入的討論。作者們給出了許多的結果，結果看起來也都是正確的，但整個說明的過程似乎存在著一些邏輯上的問題。如果能修正這些邏輯上的瑕疵，會是一個很不錯的作品。