2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010020

參展科別　數學

作品名稱　翻轉塗色

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　國立臺南女子高級中學

指導教師　洪士薰

作者姓名　莊沅蓉、林詩琪

關鍵字　同色等差數列、兩色塗色、隨機塗色

作者簡介

我是莊沅蓉，就讀臺南女中數理資優班二年級。

一直以來，都覺得做數學是件很酷的事情。解題的剎那的欣喜固然難得，但最享受的還是思考的過程裡，即使不知道所用的方向正確與否，仍舊不斷嘗試的過程。科展的經驗裡一直都沒有很好的成績，第一次嘗試數學科展，希望一切順利。

我是林詩琪，目前就讀於台南女中二年級。

平時興趣是打籃球和看書，喜歡化學和物理，有時間的話也會想想數學。小時候很喜歡解數學題目，覺得思考的過程很有趣，解出答案的瞬間很開心。因此國中的時候跑去參加了幾次競賽也做了一次科展，雖然結果都不怎麼樣但是學到了很多經驗。這次做科展最幸運的事就是能遇到一個有趣的題目和對數學充滿熱情的夥伴。

中文摘要

長度為 n 的字串，我們設計了對偶塗色，目的在減少同色字串出現的周期規律。而計算這樣的字串中存在多少同色的 3-AP。

利用對偶塗色字串的特殊對稱性質，我們先將其中的同色 3-AP 分成單獨由字串前半 2^{n-1} 形成的第 I 類同色 3-AP 及部分在前半 2^{n-1} 部分在後半 2^{n-1} 的第 II 類同色 3-AP，並以 d-中心排列方式重新排列，將第 II 類同色 3-AP 分解成較小的子結構，得到遞迴式計算跨越中心的同色 3-AP，而得到定理 1，計算第 II 類同色 3-AP 的數量。

由對偶特性得知，2 倍的第 I 類與 2 倍的第 II 類同色 3-AP 即為長度 2^n 字串中同色 3-AP 的總個數，由此推出定理 2:

n 階對偶塗色字串中(字串長度 2^n)的同色 3-AP 總數為

$$\frac{1}{16}N^2 - \frac{1}{12}N\log_2 N + \frac{5}{36}N \text{，} N = 2^n.$$

此結果與所有塗色方式中平均存在的 3-AP 數量相近，第二大項 $-\frac{1}{12}N\log_2 N$ 則與對數值 $\log_2 N$ 相關。

有趣的是，經由程式計算的結果發現，對偶塗色法中同色 4-AP、5-AP 的數量也似乎是平均值。甚至從任給定的字串開始作對偶複合字串，程式計算的結果也是接近平均值。

Abstract

In strings with the length of n, we designed reversed-symmetric coloring, aiming to reduce the periodic patterns. Then we calculate the monochromatic 3-APs in this kind of strings.

Using the symmetry property of reversed-symmetric string, we divided monochromatic 3-APs into two types, type I and type II. Type I is made up with 3-APs which three of the elements are either in first half of the string or in the second half of it. Type II is 3-APs made up by elements crossing through the midline. By rearranging the sets through d-central arrangement, type II can be seperated into smaller structures so that we can find the recursion and additionally get Theorem 1, which calculates monochromatic 3-Aps in type II. Eventually we can obtain Theorem 2:

In strings with length of 2 to the power of n,

The amount of monochromatic 3-APs is $\frac{1}{16}N^2 - \frac{1}{12}N\log_2 N + \frac{5}{36}N$ where $N = 2^n$

This result is similar with the average monochromatic 3-AP amount among all random colorings. The second influential item is $-\frac{1}{12}N\log_2 N$ which is related to base-2 logarithm.

What's interesting is that from the result of calculating program, the amount of monochromatic 4-APs and 5-APs in reversed-symmetric strings are also around the averageof all random colorings. In addition, giving random string and make it into compound reversed-symmetric strings, the result of program calculation also turned out to be around the average.

一、前言

（一）、動機

k 個數形成的等差數列稱為 k－AP (Arithmetic Progression)。例如:5, 11, 17, 23, 29 便是一個 5－AP 而 10, 20, 30, 40, 50, 60 是一個 6－AP。若將 1 至 n 個整數分別塗上藍色或紅色其中之一種顏色，然後計算有多少的同色 k－AP。例如 $n=28$ 且 $k=3$ 時，依下列的塗色

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
🟥	🟥	🟥	🟦	🟦	🟥	🟥	🟥	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟦	🟦	🟦	🟥	🟥	🟦	🟦	🟦

則可分別形成 1, 2, 3, 6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25 與 4, 5, 9 ,10, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 26, 27, 28 兩組字串；經計算可知計有 182 個 k－AP。

RBBRBRRBBRRBRBBRBRRBRBBRRBBRBRRBBRRBRBBRRBBRBRRBRBBRB RRBBRRBRBBR⋯

像這樣不斷構造的字串中會有多少的等距且具有相同字母的子集。

（二）、目的

本文中我們想探討像 1001011001101001011010011001011 0⋯，這樣使用對偶塗色法的字串中有多少同字元的 3-AP?

二、研究方法或過程

（一）、文獻回顧

為表示方便，延用文獻中以下定義：

定義 1：

1. 數字 $1,2,3,\cdots,n$, 所成的集合計為 $[n]$ 。
2. 對給定正整數 m ，若整數 i,j 滿足 $i-j$ 為 m 的倍數歸為同一類, 所有整數依此分類所得的所有類構成的集合為 Z_m 。
3. 任意函數 $f:[n]\mapsto\{0,1,\cdots,r-1\}$ ，稱為 $[n]$ 上有 r 種顏色的一種塗色方法。
4. $f(1)\ f(2)\cdots f(n)$ 所形成的字串，稱為 $[n]$ 上的一個塗色字串。
   每一個塗色字串對應唯一的塗色方法。

回顧已知的文獻結果，由[1]、[2]研究中整理出以下結果:

1. *Van Der Waerden's Theorem*

定理:對於任意 r 個顏色和長度 k 的等差數列，存在一個 N 值，使得在 $1,2,3,\cdots,n$ *中*

(n 為 n≧N 成立的正整數)一切塗色法皆存在同色組成的 k－AP。

定理:對於固定的 r 和 k，必存在 c＞0 使得在 $1,2,3,\cdots,n$ *任意的塗色法中，至少有*

$cn^2+o\left(n^2\right)$ *個 k－AP。*

觀察:當 $n=(k-1)l+a$ 且 $0\le a<(k-1)$，$1,2,3,\cdots,n$ 中 *k－AP* 總數為

$$\frac{(n-a)(n-k+1+a)}{2(k-1)}=\frac{n^2}{2(k-1)}+O(n)\text{。}$$

2. 隨機塗色下 k-AP 的平均值

引理:當 n 很大，且 r、k 固定時，$[n]$ 的所有塗色中平均有 $\frac{1}{2(k-1)r^{k-1}}n^2+O(n)$ 個同色的 k－AP。

3. $\mathbb{Z}_n$ 中的同色 *3－AP*

顯然，$\mathbb{Z}_n$ 中全部塗同一色時，有 n^2 個同色的 *k－AP*。

定理：以紅藍兩色塗，其中 $\frac{\text{紅色元素個數}}{n}=\alpha$ *，則* $\mathbb{Z}_n$ *中有*

$(3\alpha^2-3\alpha+1)n^2$ *個同色的 3－AP。*

因此，$\mathbb{Z}_n$ 中的同色 *3－AP* 的最小值為 $\frac{1}{4}n^2$。

（二）、對偶塗色法

本文考慮，對於 $[2^n]$ 中對偶塗色法，

$1001011001101001011010011001011001101001100101101001011001101001\cdots$

中的同色 3-AP 有下列結果

定理 2: n 為正整數，$\left[2^n\right]$ 中的對偶塗色字串 A_n，則同色 3-AP 數量為

$$\frac{1}{16}\cdot 4^n-\frac{1}{12}\cdot\left(n\cdot 2^n\right)+\frac{5}{36}2^n-\frac{8}{9},\text{ 當 } n \text{ 為偶數時；}$$

$$\frac{1}{16}\cdot 4^n-\frac{1}{12}\cdot\left(n\cdot 2^n\right)+\frac{5}{36}2^n-\frac{10}{9},\text{ 當 } n \text{ 為奇數時.}$$

考慮只有兩色的情形，$[2^n]$ 中的一種塗色方式，設兩色分別為 1,0，像  …，即

數字 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11…

顏色 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1…

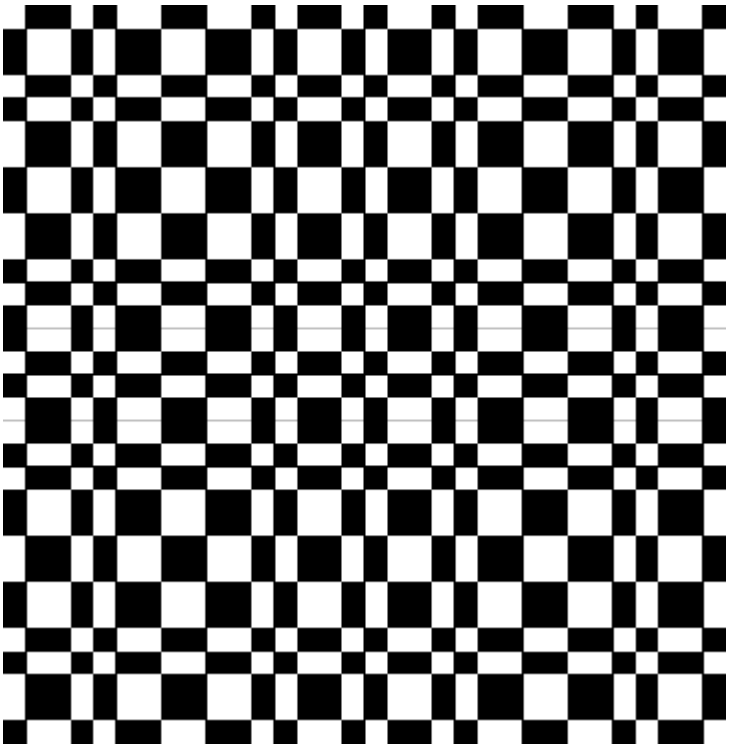
定義 2：

1. 若 $A=a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n$ 是 n 個字的塗色字串，則塗色字串

$B=(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$稱為 A的對偶塗色字串。

2. 塗色字串 $A_0=1$，其對偶塗色字串為 $B_0=0$。
   塗色字串 $A_1=A_0B_0$，其對偶塗色字串為 $B_1=B_0A_0$。
3. 依 2. $A_n=A_{n-1}B_{n-1}$， $B_n=B_{n-1}A_{n-1}$，n為任意正整數。
4. 在 0,1 兩色的情形下$[2^n]$對應塗色字串為 A_n 的塗色方法， 稱為$[2^n]$上的對偶塗色。

$[2^{10}]$上的對偶塗色字串 A_{10} 如下圖(每 32 個斷至下一列)



想計算$[2^n]$上的對偶塗色的同色 3－AP個數。
事實就是上圖中所有同一直線的等間距的同色 3 個格子的數目。
以 A_{10} 為例，

A_{10} 中同色 3－AP個數= A_9 中同色 3－AP個數+ B_9 中同色 3－AP個數+
部份在 A_9, 部份在 B_9 中的同色 3－AP個數
而顯然， A_9 中同色 3－AP個數= B_9 中同色 3－AP個數，
且部份在 A_9, 部份在 B_9 中的同色 3－AP個數，可以分成
2 個在 A_9、1 個在 B_9 中的同色 3－AP個數和 1 個在 A_9、2 個在 B_9 中的同色 3－AP個數。
由對偶特性可知，

2 個在 A_9, 1 個在 B_9 中的同色 3－AP個數
=1 個在 A_9, 2 個在 B_9 中的同色 3－AP個數

因此，A_{10} 中同色 3－AP 個數

$=2\times A_9$ 中同色 3－AP 個數+

2×2 個在 A_9, 1 個在 B_9 中的同色 3－AP 個數

同樣的討論，在 A_n 的情況也成立。

即 A_n 中同色 3－AP 個數

$=2\times A_{n-1}$ 中同色 3－AP 個數+2×2 個在 A_{n-1}, 1 個在 B_{n-1} 中的同色 3－AP 個數

為了方便起見，底下我們把 A_n 中同色 3－AP 分成

1. 「A_{n-1} 中同色 3－AP 個數」稱為 A_n 中的第 I 類同色 3-AP。
2. 「2 個在 A_{n-1}, 1 個在 B_{n-1} 中的同色 3－AP」稱為 A_n 中的第 II 類同色 3-AP。

所以，A_n 中同色 3－AP 個數 ＝ $2\times$第 I、II 類同色 3-AP 個數。

定義 3: n 是一正整數，k, p, q 是小於 2^n 的正整數

1.字串 $A_n(k)$ 為字串 A_n 的前 k 個字元構成的字串。

2.字串 $B_n(k)$ 為字串 B_n 的前 k 個字元構成的字串。

3.字串 $a_n(k)$ 為字串 A_n 的倒數 k 個字元構成的字串。

4.字串 $b_n(k)$ 為字串 B_n 的倒數前 k 個字元構成的字串。

5.字串 $A_n(p,q)$ 為字串 A_n 的第 p 個字元到第 q 個字元構成的字串。

6.字串 $B_n(p,q)$ 為字串 B_n 的第 p 個字元到第 q 個字元構成的字串。

例如：字串 $A_4=1001011001101001$，所以 $A_4(3)=100$、$a_4(5)=01001$、$b_4(5)=10110$、$A_4(3,5)=010$。

定義 4: n 是一正整數，s 是小於 2^n 的正整數

1. $\alpha(n,s)$ 為第一列字串 $a_n(2^n-s)$，

第二列字串 $A_n(2^n-s)$，

或者

第一列字串 $b_n(2^n-s)$，

第二列字串 $B_n(2^n-s)$ 中的同色行數

即

$$\begin{array}{ll} A & s \quad \boxed{2^n-s} \\ A & \quad\;\; \boxed{2^n-s} \;\; s \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{ll} B & s \quad \boxed{2^n-s} \\ B & \quad\;\; \boxed{2^n-s} \;\; s \end{array}$$

中重疊 2^n-s 的同色行數

例如：

A_4 : 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1

A_4 : 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1

故 $\alpha(4,3)=9$。

2. $\beta(n,s)$ 為第一列 $b_n(2^n-s)$，

第二列 $A_n(2^n-s)$，

或者

第一列 $a_n(2^n-s)$，

第二列 $B_n(2^n-s)$ 中的同色行數

例如 $\beta(4,3)=4$。

3. $\alpha(n)\equiv\sum_{s<2^n}\alpha(n,s)$，$\beta(n)\equiv\sum_{s<2^n}\beta(n,s)$

Remark：(1) 因為 $\begin{matrix}a_n(2^n-s)\\A_n(2^n-s)\end{matrix}$ 與 $\begin{matrix}a_n(2^n-s)\\B_n(2^n-s)\end{matrix}$ 的第二列互補，

所以 $\alpha(n,s)+\beta(n,s)=2^n-s$。

(2) 顯然 $\alpha(n,2^{n-1})=0$，$\beta(n,2^{n-1})=2^{n-1}$

引理 1：

$$\alpha(\mathrm{n})=\sum_{\mathrm{s}=0}^{2^{\mathrm{n-1}}-1}\alpha(\mathrm{n},\mathrm{s})+\alpha\left(\mathrm{n},2^{\mathrm{n-1}}\right)+\sum_{\mathrm{s}=2^{\mathrm{n-1}}+1}^{2^{\mathrm{n}}-1}\alpha(\mathrm{n},\mathrm{s})=2\alpha(\mathrm{n}-1)+0+2\beta(\mathrm{n}-1),$$

$$\beta(\mathrm{n})=\sum_{\mathrm{s}=0}^{2^{\mathrm{n-1}}-1}\beta(\mathrm{n},\mathrm{s})+\beta\left(\mathrm{n},2^{\mathrm{n-1}}\right)+\sum_{\mathrm{s}=2^{\mathrm{n-1}}+1}^{2^{\mathrm{n}}-1}\beta(\mathrm{n},\mathrm{s})=2\alpha(\mathrm{n}-1)+2^{\mathrm{n-1}}+2\beta(\mathrm{n}-1)$$

引理 1 的証明置於附錄（一）、1.

引理 2：n 為正整數，$n\geq 1$

$\alpha(n)=4^{n-1}-2^{n-1}$, $\beta(n)=4^{n-1}$ 且 $\alpha(2)=2$, $\beta(2)=4$

引理 2 的証明置於附錄（一）、2.

定義 5: n 是一正整數，s 是小於 2^n 的正整數

1. $\Gamma(\mathrm{n},\mathrm{s})$ 為第一列字串是 $a_n\left(2^{\mathrm{n}}\text{-}2\mathrm{s}\right)$，

第二列字串是 $B_n\left(\mathrm{s}+1,2^{\mathrm{n}}\text{-}\mathrm{s}\right)$，

第三列字串是 $B_n\left(2^n\text{-}2s\right)$；

或者

第一列是 $b_n\left(2^n\text{-}2s\right)$，

第二列是 $A_n\left(s+1,2^n\text{-}s\right)$，

第三列是 $A_n\left(2^n\text{-}2s\right)$ 中，同色部份的行數。

即如 $\begin{matrix} a_{n-1}(2^n-2s) \\ B_{n-1}(s+1,2^n-s) \\ B_{n-1}(2^n-2s) \end{matrix}$ 或者 $\begin{matrix} b_{n-1}(2^n-2s) \\ A_{n-1}(s+1,2^n-s) \\ A_{n-1}(2^n-2s) \end{matrix}$

2. $\Delta(n,s)$ 為第一列字串 $a_n\left(2^n\text{-}2s\right)$、

第二列字串 $A_n\left(s+1,2^n-s\right)$、

第三列字串 $A_n\left(2^n-2s\right)$ 中，同色部份的行數。

即如

$$\begin{matrix} a_{n-1}(2^n-2s) \\ A_{n-1}(s+1,2^n-s) \\ A_{n-1}(2^n-2s) \end{matrix}$$

3. $\Gamma(n)=\sum_{2s<2^n}\Gamma(n,s)$，$\Delta(n)=\sum_{2s<2^n}\Delta(n,s)$

引理 3：n 為正整數，$n>1$

$$\Gamma(n)=\sum_{s=0}^{2^{n-2}-1}\Gamma(n,s)+\Gamma\left(n,2^{n-2}\right)+\sum_{s=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}-1}\Gamma(n,s)=2\Gamma(n-1)+2\alpha(n-2)+2^{n-2},$$

$$\Delta(n)=\sum_{s=0}^{2^{n-2}-1}\Delta(n,s)+\Delta\left(n,2^{n-2}\right)+\sum_{s=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}-1}\Delta(n,s)=2\Delta(n-1)+2\beta(n-2)$$

引理 3 的証明置於附錄（一）、3.

引理 4：n 為正整數，$n>1$

$\Gamma(n)=4^{n-2}$，$\Delta(n)=4^{n-2}-2^{n-2}$ 且 $\Gamma(2)=1$，$\Delta(2)=0$

引理 4 的証明置於附錄（一）、4.

定義 6：n 是一正整數，s 是小於 2^n 的正整數

1. $ABB(n,s)$ 為

第一列字串 $A_n(s+1,2s)$，

第二列字串 $B_n(s)$，

第三列字串 $b_n(s)$ 中的同色行數。

即 $\begin{array}{ccccc} A & & s & \boxed{s} & 2^n-2s \\ B & & & \boxed{s} & 2^n-2s \quad s \\ B & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & \end{array}$ 中的同色行數。

2. $ABA(n,s)$ 為第一列字串 $A_n(s+1,2s)$，

第二列字串 $B_n(s)$，

第三列字串 $a_n(s)$ 中的同色行數。

即 $\begin{array}{ccccc} A & & s & \boxed{s} & 2^n-2s \\ B & & & \boxed{s} & 2^n-2s \quad s \\ A & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & \end{array}$ 中的同色行數。

3. $AAB(n,s)$ 為第一列字串 $A_n(s+1,2s)$，

第二列字串 $A_n(s)$，

第三列字串 $b_n(s)$ 中的同色行數。

即 $\begin{array}{ccccc} A & & s & \boxed{s} & 2^n-2s \\ A & & & \boxed{s} & 2^n-2s \quad s \\ B & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & \end{array}$ 中的同色行數。

4. $AAA(n,s)$ 為第一列字串 $A_n(s+1,2s)$，

第二列字串 $A_n(s)$，

第三列字串 $a_n(s)$ 中的同色行數。

即 $\begin{array}{ccccc} A & & s & \boxed{s} & 2^n-2s \\ A & & & \boxed{s} & 2^n-2s \quad s \\ A & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & \end{array}$ 中的同色行數。

5. $ABB(n)=\sum_{s<2^{n-1}} ABB(n,s)$、$ABA(n)=\sum_{s<2^{n-1}} ABA(n,s)$、

$AAB(n)=\sum_{s<2^{n-1}} AAB(n,s)$、$AAA(n)=\sum_{s<2^{n-1}} AAA(n,s)$

引理 5：n 為正整數，$n>1$

$$ABB(n)=2ABA(n-1)+\Gamma(n-1)+2^{n-2}$$

$$ABA(n)=ABB(n-1)+AAB(n-1)+\Delta(n-1)$$

$$AAB(n)=2AAA(n-1)+2\beta(n-2)-\Gamma(n-1)$$

$$AAA(n)=ABB(n-1)+AAB(n-1)+2\alpha(n-2)-\Delta(n-1)$$

引理 5 的証明置於附錄（一）、5.

引理 6：n 為正整數,n>1 時

$ABB(n)=2\times 4^{n-3}+2^{n-3}$ 、

$ABA(n)=2\times 4^{n-3}-2^{n-3}$ 、

$AAB(n)=2\times 4^{n-3}-2^{n-3}$ 、

$AAA(n)=2\times 4^{n-3}-2^{n-3}$ ，

且 $ABB(2)=1 \quad ABA(2)=0 \quad AAB(2)=0 \quad AAA(2)=0$

引理 6 的証明置於附錄（一）、6.

（三）、對偶塗色法的第 II 類同色 3-AP

為了計算上的便利，我們把字串 A_n，每若干個一列，其餘各字元排至各列中，所以字串可以重新排列成近似於方塊狀。

例如，

計算 A_5=10010110011010010110100110010110 中，公差為 $d=11$ 的單色 3-AP，可以把原字串每連續 11 個元成一列，其餘斷成下一列，把字串相疊排列

1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1
0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0
0 1 1 0 0 1 0 1 1 0

再去計算各行中有同色字元的行數。

各種可能的排列中，有一種 d –中心排列，說明如下:

為了方便觀察，將後半的字串以紅色書寫，中心位置即黑色與紅色交界處。從字串中間位置，每 11 個字元分別往前、後移至各列

1001011001101001 0110100110010110

變成 10010 **11001101001**

01101001100 10110

超出 11 個字元的部份分別往上與往下移形成各列，即如

10010

11001101001

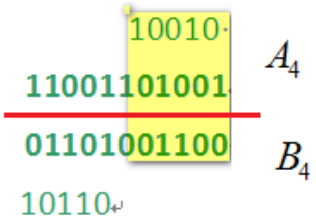
01101001100

10110

稱為 A_n 的 d –中心排列。

計算其中連續三列中每一行同色字元個數，就是公差為 11 的單色 3-AP 個數。

第 II 類同色 3-AP：「2 個在 A_4, 1 個在 B_4 中的同色 3–*AP* 個數」是上述同色 3-Ap 中的一部份，即下圖中黃色區域的同色字元行數。



定義 7：塗色字串 A_n 從字串中間位置，每 d 個字元分別往前後斷成各列，所構成的字串列稱為塗色字串 A_n 的 d –中心排列

首先，我們以 A_8 為例，計算其中的第 II 類同色 3-AP

依公差 d 分成下列情形：

(1) $d=128-s, 2s<128$，(2) $d=64-s, 2s<64$，(3) $d=32-s, 2s<32$，

(4) $d=16-s, 2s<16$ ， (5) $d=8-s, 2s<8$，(6) $d=4-s, 2s<4$。

(1) $d=128-s, 2s<128$時，

$A_8=A_7B_7$， A_8 的 d –中心排列為

$$\begin{matrix} A_7(s) \\ a_7(128-s) \\ B_7(128-s) \\ b_7(s) \end{matrix}$$

所以 A_8 中第 II 類同色 3-AP 的個數

即為 $\begin{matrix} A_7(s) \\ a_7(s) \\ B_7(128-2s+1, 128-s) \end{matrix}$ 中，同色的行數，

利用對稱性：

$\begin{matrix} A_7(s) \\ a_7(s) \\ B_7(128-2s+1, 128-s) \end{matrix}$ 同色的行數 = $\begin{matrix} a_7(s) \\ A_7(s) \\ B_7(s+1, 2s) \end{matrix}$ 的同色的行數，

$$\begin{matrix} a_7(s) \\ A_7(s) \\ B_7(s+1, 2s) \end{matrix} \xrightarrow{\text{第一、三列互換}} \begin{matrix} B_7(s+1, 2s) \\ A_7(s) \\ a_7(s) \end{matrix}$$

再由 A_7, B_7 字串的互補性質，得

$$\begin{matrix} B_7(s+1,2s) \\ A_7(s) \\ a_7(s) \end{matrix} \text{ 同色的行數 } = \begin{matrix} A_7(s+1,2s) \\ B_7(s) \\ b_7(s) \end{matrix} \text{ 的同色行數。}$$

因此，第 II 類同色 3-AP 個數為 $ABB(7,s)$

(2) $d=64-s, 2s<64$ 時，

$$A_8 = A_6B_6B_6A_6 \text{，}$$

$$A_8 = \cdots B_6 \overset{\text{中心}}{\Big|} B_6 \cdots$$

A_8 的 d −中心排列為

$$\begin{array}{c} A_6(2s) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a_6(64-2s) & B_6(s) \\ b_6(\ 64-s\ ) & \\ \hline B_6(\ 64-s\ ) & \\ \hline \end{array} \\ b_6(s)A_6(64-2s) \\ a_6(2s) \end{array}$$

第 II 類同色 3-AP 個數為

$$\begin{matrix} a_6(64-2s) \\ B_6(s+1,64-s) \\ B_6(\ 64-2s) \end{matrix} \text{ 及 } \begin{matrix} B_6(s) \\ b_6(s) \\ B_6(\ 64-2s+1,64-s) \end{matrix} \text{ 中的同色行數。}$$

由 $\Gamma(6,s)$ 及 $AAA(6,s)$ 的定義得知

公差 $64-s$ 的第 II 類同色 3-AP 個數為 $\Gamma(6,s)+AAA(6,s)$

(3) $d=32-s, 2s<32$ 時，

因為 $A_8 = A_5B_5B_5A_5B_5A_5A_5B_5$

$$A_8 = \cdots A_5 \overset{\text{中心}}{\Big|} B_5 \cdots$$

故， A_8 的 d −中心排列為

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots \\ \begin{array}{|c|c|} \hline b_{n-3}(2^{n-2}-2s) & A_{n-3}(s) \\ a_{n-3}(\ 2^{n-3} & -\ s\ ) \\ \hline B_{n-3}(\ 2^{n-3} & -\ s\ ) \\ \hline \end{array} \\ b_{n-3}(s)A_{n-3}(2^{n-3}-2s) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (n=8)$$

其中包含 $\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ A_5(s+1,32-s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}$ 及 $\begin{matrix} A_5(s) \\ a_5(s) \\ B_5(32-2s+1,32-s) \end{matrix}$ 中的同色行數。

(i)

$$\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ A_5(s+1,32-s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}\text{的同色行數}+\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ B_5(s+1,32-s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}\text{的同色行數} =$$

$$\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}\text{的同色行數} = \alpha(5,2s)=2\alpha(4,s)$$

由定義 5.知 $\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ B_5(s+1,32-s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}$的同色行數= $\Delta(5,s)$

得

$$\begin{matrix} b_5(32-2s) \\ A_5(s+1,32-s) \\ B_5(32-2s) \end{matrix}\text{的同色行數} = 2\alpha(4,s)-\Delta(5,s)$$

(ii)另一方面，

$$\begin{matrix} A_5(s) \\ a_5(s) \\ B_5(32-2s+1,32-s) \end{matrix}\text{的同色行數} = AAB(5,s)$$

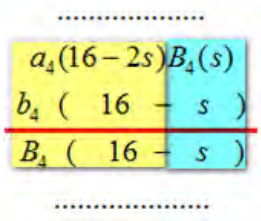
因此，A_8 公差 $32-s$ 的第 II 類同色 3-AP 個數為

$$2\alpha(4,s)-\Delta(5,s)+AAB(5,s)$$

(4) $d=16-s, 2s<16$ 時，

$$A_8=\cdots B_4 \overset{\text{中心}}{|} B_4\cdots$$

A_8 的 d –中心排列為



類似於前面(2)的討論，第 II 類同色 3-AP 個數為

$$\begin{matrix} a_4(16-2s) \\ B_4(s+1,16-s) \\ B_4(16-2s) \end{matrix} \quad 及 \quad \begin{matrix} B_4(s) \\ b_4(s) \\ B_4(16-2s+1,16-s) \end{matrix}$$ 中的同色行數。

即為，$\Gamma(4,s)+AAA(4,s)$

(5) $d=8-s, 2s<16$時，與(3)的討論類似

A_8公差$8-s$的第 II 類同色 3-AP 個數為$2\alpha(2,s)-\Delta(3,s)+AAB(3,s)$

(6) $d=4-s, 2s<4$時，與(3)的討論類似

A_8公差$4-s$的第 II 類同色 3-AP 個數為$\Gamma(2,s)+AAA(2,s)$

綜合(1)~(6)的討論，

A_8的第II類同色$3-$AP個數

$=$公差$2^k, 0\le k\le n-1$的第II類同色$3-$AP個數

+公差為(1)~(6)情形的第II類同色$3-$AP個數

A_8中第II類同色3 - AP個數

$$=\sum_{2s<2^7}ABB(7,s)+\sum_{2s<2^6}(\Gamma(6,s)+AAA(6,s))+\sum_{2s<2^5}(2\alpha(4,s)-\Delta(5,s)+AAB(5,s))+$$
$$\sum_{2s<2^4}(\Gamma(4,s)+AAA(4,s))+\sum_{2s<2^3}(2\alpha(2,s)-\Delta(3,s)+AAB(3,s))+\sum_{2s<2^2}(\Gamma(2,s)+AAA(2,s))$$

化簡得，

A_8中第II類同色3 - AP個數

$$=ABB(7)+(\Gamma(2)+\Gamma(4)+\Gamma(6))+(AAA(2)+AAA(4)+AAA(6))+$$
$$2(\alpha(2)+\alpha(4))-(\Delta(3)+\Delta(5))+(AAB(3)+AAB(5))$$
$$=1014$$

類似於A_8的情形，計算A_n中的第 II 類同色 3-AP

依公差d分成下列情形：

1. $d=2^{n-1}-s, 2s<2^{n-1}$，
2. $d=2^{n-2k}-s, 2s<2^{n-2k}, 1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}-1\right\rfloor$，
3. $d=2^{n-2k+1}-s, 2s<2^{n-2k+1}, 2\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}-1\right\rfloor$.

1. $d=2^{n-1}-s, 2s<2^{n-1}$時,

$A_n=A_{n-1}B_{n-1}$的$d-$中心排列為

$$\begin{array}{c} A_{n-1}(s) \\ a_{n-1}(2^{n-1}-s) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-s) \\ b_{n-1}(s) \end{array}$$

類似於 A_8 中(1)的情形，

$$\begin{array}{c} A_{n-1}(s) \\ a_{n-1}(s) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-2s+1, 2^{n-1}-s) \end{array}$$

中，同色的行數為 $ABB(n,s)$

2. $d=2^{n-2k}-s, 2s<2^{n-2k}, 1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}-1\right\rfloor$時,

$$A_n=\cdots A_{n-2k}B_{n-2k}\overset{\text{中心}}{\Big|}B_{n-2k}A_{n-2k}\cdots$$

A_n的$d-$中心排列為

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hline a_{n-2k}(2^{n-2k}-2s) & B_{n-2k}(s) \\ b_{n-2k}(2^{n-2k}-s) & \\ \hline B_{n-2k}(2^{n-2k}-s) & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

類似於 A_8 中(2)的情形，可得 A_n 公差 $2^{n-2k}-s$ 的第 II 類同色 3-AP 個數為 $\Gamma(n-2k,s)+AAA(n-2k,s)$

3. $d=2^{n-2k+1}-s, 2s<2^{n-2k+1}, 2\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}-1\right\rfloor$時,

因為

$$A_n=\cdots A_{n-2k+1}\overset{\text{中心}}{\Big|}B_{n-2k+1}\cdots$$

故，A_n的$d-$中心排列為

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \hline b_{n-2k+1}(2^{n-2k+1}-2s) & A_{n-2k+1}(s) \\ a_{n-2k+1}(2^{n-2k+1}-s) & \\ \hline B_{n-2k+1}(2^{n-2k+1}-s) & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

因此，A_n 公差 $2^{n-2k+1}-s$ 的第 II 類同色 3-AP 個數為

$$2\alpha(n-2k,s)-\Delta(n-2k+1,s)+BAA(n-2k+1,s)$$

綜合上述 1.~3.的討論，可以得到

定理 1: n 為正整數，$\left[2^n\right]$中的塗色字串 A_n，則

A_n 中第 II 類同色 3-AP 數量為

$4^{n-3}-\frac{2^{n-3}}{3}+\frac{2}{3}$，當 n 為偶數時；

$4^{n-3}-\frac{2^{n-3}}{3}+\frac{1}{3}$，當 n 為奇數時

定理 1 的証明：

1.當 $n \in 2k$，

A_n中第II類同色3-AP個數

$$= ABB(n-1)+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\Gamma(2i)+AAA(2i)\right)+2\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\alpha(2i)-\sum_{2}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\Delta(2i-1)+\sum_{i=2}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}AAB(2i-1)$$

$$=2\cdot 4^{n-4}+2^{n-4}+\frac{1}{15}\left(4^{n-2}-1\right)+\frac{8}{15}\left(4^{n-4}-1\right)-\frac{2}{3}\left(2^{n-4}-1\right)+\frac{8}{15}\left(4^{n-4}-1\right)-\frac{4}{3}\left(2^{n-4}-1\right)$$

$$-\frac{4}{15}\left(4^{n-4}-1\right)-\frac{2}{3}\left(2^{n-4}-1\right)+\frac{2}{15}\left(4^{n-4}-1\right)-\frac{1}{3}\left(2^{n-4}-1\right)$$

$$=4^{n-3}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-3}+\frac{2}{3}$$

2.當 $n \in 2k+1$，

A_n中第II類同色3-AP個數

$$= ABB(n-1)+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left(\Gamma(2i+1)+AAA(2i+1)\right)+2\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\alpha(2i-1)-\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\Delta(2i)+\sum_{i=2}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}AAB(2i)$$

$$=2\cdot 4^{n-4}+2^{n-4}+\frac{4}{15}\left(4^{n-3}-1\right)+\frac{2}{15}\left(4^{n-3}-1\right)-\frac{1}{3}\left(2^{n-3}-1\right)+\frac{2}{15}\left(4^{n-3}-1\right)-\frac{2}{3}\left(2^{n-3}-1\right)$$

$$-\frac{1}{15}\left(4^{n-3}-1\right)+\frac{1}{3}\left(2^{n-3}-1\right)+\frac{8}{15}\left(4^{n-5}-1\right)-\frac{2}{3}\left(2^{n-5}-1\right)$$

$$=4^{n-3}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-3}+\frac{1}{3}$$

（四）、定理 2

定理 2: n 為正整數，$\left[2^n\right]$中的塗色字串 A_n，

則 A_n 中所有同色 3-AP 數量為

$\frac{1}{16}\cdot 4^n-\frac{1}{12}\cdot\left(n\cdot 2^n\right)+\frac{5}{36}2^n-\frac{8}{9}$, 當 n 為偶數時，

$\frac{1}{16}\cdot 4^n-\frac{1}{12}\cdot\left(n\cdot 2^n\right)+\frac{5}{36}2^n-\frac{10}{9}$, 當 n 為奇數時。

定理 2 的証明：

由於

A_n 中同色 3–*AP* 個數

$=2\times A_{n-1}$ 中同色 3–*AP* 個數 + $2\times$第 II 類同色 3-AP 個數

令 p_n 表示 A_n 中同色 3–*AP* 個數，q_n 表示 A_n 中第 II 類同色 3-AP 個數

可以推得以下結果

$$p_n = 2p_{\text{n-1}} + 2q_n$$

$$2p_{n-1} = 2^2 p_{\text{n-1}} + 2^2 q_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^{n-3} p_4 = 2^{n-2} p_3 + 2^2 q_4$$

而直接計數可得 $p_3 = 2$，故

1. 當 *n* 為偶數時，

$$p_{\text{n-3}} = 2^{\text{n-3}} p_3 + \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-3}} 2^{\text{i}} \cdot q_{\text{n+1-i}}$$

$$= 2^{n-3}\cdot 2 + 4^{n-2} - 2^{n-1} - \frac{1}{12}\cdot 2^n \cdot n + \frac{1}{4}\cdot 2^n + \frac{5}{36}\cdot 2^n - \frac{8}{9}$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 4^{\text{n}} + \frac{5}{36}\cdot 2^{\text{n}} - \frac{1}{12}\cdot 2^{\text{n}}\cdot \text{n} - \frac{8}{9}$$

2. 當 *n* 為奇數時，

$$p_{\text{n-3}} = 2^{\text{n-3}} p_3 + \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-3}} 2^{\text{i}} \cdot q_{\text{n+1-i}}$$

$$= 2^{n-3}\cdot 2 + 4^{n-2} - 2^{n-1} - \frac{1}{12}\cdot 2^n \cdot n + \frac{1}{4}\cdot 2^n + \frac{5}{36}\cdot 2^n - \frac{10}{9}$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 4^{\text{n}} + \frac{5}{36}\cdot 2^{\text{n}} - \frac{1}{12}\cdot 2^{\text{n}}\cdot \text{n} - \frac{10}{9}$$

由此得証。

帶入不同的 *n* 值做計算如下表 1：

n值	2	4	6	8	10	12	14
	0	12	232	3960	64824	1045048	16760376

n值	3	5	7	9	11	13	15
	2	54	966	16070	260550	4186566	67072454

表 1

三、研究結果與討論

（一）、由定理 2 可得知 A_n 以對偶塗色法塗色所包含的 3-AP 約有

$$\frac{1}{16}\cdot 4^n+\frac{5}{36}\cdot 2^n-\frac{1}{12}\cdot 2^n\cdot n\text{個}$$

(常數項不會因為 n 的改變而有變化所以忽略不計)。

若將 2^n 視為 N，即為，

$$\frac{1}{16}N^2-\frac{1}{12}N\log_2 N+\frac{5}{36}N \quad \text{個}$$

從文獻[1]知 $\left[2^n\right]$ 的所有塗色中同色 3-AP 平均值為，

$$\frac{1}{16}\left(2^n\right)^2$$

另外，$\left[2^n\right]$ 的對偶塗色第 2 大的項是 $\frac{1}{12}N\log_2 N$

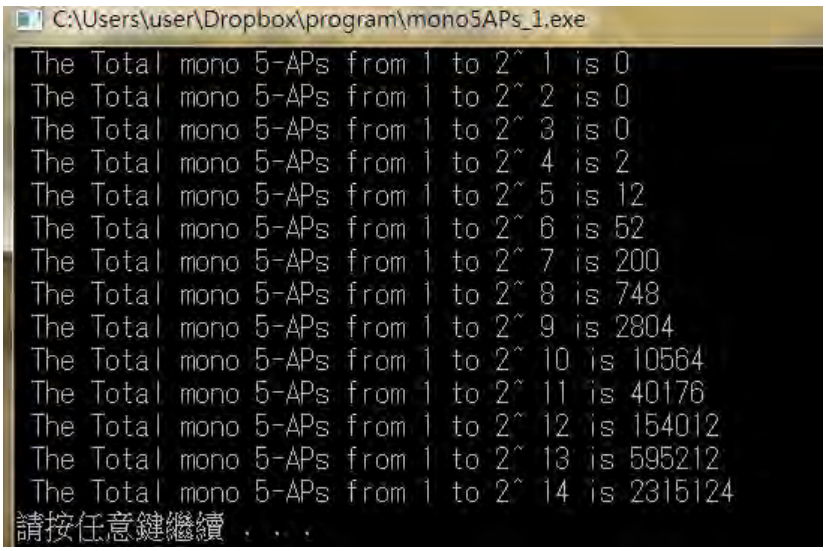
從方法上來看，我們的推導方式應可應用於計算 $\left[2^n\right]$ 的對偶塗色 A_n 中

同色 4-AP、5-AP 乃至 k-AP 個數。

我們試著從由電腦程式推算，A_n 中 4-AP、5-AP 的數量計算結果如下：

```
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 1 is 0
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 2 is 0
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 3 is 0
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 4 is 4
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 5 is 24
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 6 is 106
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 7 is 420
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 8 is 1632
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 9 is 6320
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 10 is 24534
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 11 is 95596
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 12 is 374284
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 13 is 1472152
The Total mono 4-APs from 1 to 2^ 14 is 5813122
請按任意鍵繼續 . . .
```

$\left[2^n\right]$ 的對偶塗色 A_n 同色 4-AP 的數目



$\left[2^n\right]$的對偶塗色 A_n 同色 5-AP 的數目

將結果與$\left[2^n\right]$的所有塗色中同色 4-AP 平均值與 5-AP 平均值 $\frac{1}{48}\left(2^n\right)^2$、$\frac{1}{128}\left(2^n\right)^2$比較，並求其比值，結果如下表。

n值	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	0	4	24	106	420	1632	6320	24534	95596	374284	1472152	5813122
4-AP 平均比	0	0.75	1.125	1.242188	1.230469	1.195313	1.157227	1.123077	1.094009	1.070835	1.052965	1.039467
	0	0	12	52	200	748	2840	10564	40176	154012	595212	2315124
5-AP平均比	0	0	1.5	1.625	1.5625	1.460938	1.386719	1.289551	1.226074	1.175018	1.135277	1.103937

很明顯在 4-AP 的情況比值趨近於 1，即我們觀察到：

$\left[2^n\right]$的所有塗色中同色 4-AP 為 $\frac{1}{48}\left(2^n\right)^2+O(2^n)$。

而在 5-AP 的情況比值接近 1，但是否趨近於 1，則有待進一步計算。

這程式計算的結果，我們好奇是否對所有的正整數 $k>3$

$\left[2^n\right]$的對偶塗色中同色 k-AP 的數量為

$$\frac{1}{2(k-1)\cdot 2^{k-1}}\left(2^n\right)^2+O(2^n)$$

（二）、在 0,1 兩色的情形，給定長度為 m 的一段塗色 S，將其中的 0 與 1 互換得對偶字串 V，再以 $A_2=SV, B_2=VS$， $A_n=A_{n-1}B_{n-1}$, $B_n=B_{n-1}A_{n-1}\cdots$構造對偶塗色字串，所以字串 A_n 中有 $m\cdot 2^n$ 個字元，我們以程式計算其中的同色字元數量。

例如塗色 S＝11010，所以 V＝00101，計算對應的字串 A_n 中同色 3-AP 的數量

```
The length is 5 * 2^ 11
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 1 is 2 , rate
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 2 is 18 , rate
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 3 is 83 , rate
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 4 is 363 , rat
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 5 is 1523 , ra
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 6 is 6243 , ra
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 7 is 25283 , r
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 8 is 101763 ,
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 9 is 408323 ,
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 10 is 1635843
The total monochromatic 3-APs from 1 to 2^ 11 is 6548483
請按任意鍵繼續 . . .
```

及相對於$\left[5\cdot 2^n\right]$中所有塗色字串同色 3-AP 的平均值$\frac{1}{16}(5\cdot 2^n)^2$的比值

n值		
1	2	0.32
2	18	0.72
3	83	0.83
4	363	0.9075
5	1523	0.951875
6	6243	0.975469
7	25283	0.987617
8	101763	0.993779
9	408323	0.996882
10	1635843	0.998439
11	6548483	0.999219

發現比值也是趨於 1，因此我們也好奇：是否對所有的正整數 $k\geq 3$

$\left[m\cdot 2^n\right]$的對偶塗色中同色 k-AP 的數量為

$$\frac{1}{2(k-1)\cdot 2^{k-1}}\left(m\cdot 2^n\right)^2+O(m\cdot 2^n).$$

四、結論與應用

（一）、$[n]$上的所有可能塗色中，全部塗同一色時會有最多的同色 k-AP。

共有$(n-k+1)+\left(n-2(k-1)\right)+\cdots+\left(n-\left[\frac{n-1}{k-1}\right](k-1)\right)$個。

即$\left[\frac{n-1}{k-1}\right]n-\frac{(k-1)}{2}\left[\frac{n-1}{k-1}\right]\left(\left[\frac{n-1}{k-1}\right]-1\right)=\frac{n^2}{2(k-1)}+O(n)$

因此，最少同色 k-Ap 的結果，就成了大家感興趣的問題。

到目前為止，$[n]$上 2 色的塗色中所知最少的同色 3-Ap 為

Theorem (Parrilo-Robertson-Saracino;Butler-Costello-Graham)

$$\frac{117}{137}\cdot\frac{1}{16}n^2+O(n)$$

(根據 2013 年 7 月 Iowa State University, Steve Butler 教授的報告)

事實上在一般情形中，所知的成果很少，
在 Steve Butler 教授的同一報告中猜測：

猜測：給定正整數 k , r 對於 $[n]$ 上 r 色的塗色中總是有某種塗色法使得其中的同色 k-Ap 的數量為 $cn^2+o(n^2)$，

其中 $c<\dfrac{1}{2(k-1)r^{k-1}}$

（二）、在 Z_n 中的塗色問題 2 色情況下，同色 3-AP 的數量為 $n^2\left(1-3\alpha+3\alpha^2\right)$，其中 α 為某一色的分佈比率，另一色的分布比率為 $1-\alpha$。這個結果意味著 2 色問題時，Z_n 中同色 3-AP 決定於顏色出現的頻率而非位置，這與 $[n]$ 中的情形明顯不同。

不過這引起我們關心：

1. 在 Z_n 中對偶塗色法塗色所包含的同色 k-AP 有多少?是否仍為 $\dfrac{1}{2(k-1)\cdot 2^{k-1}}\left(2^n\right)^2+O(2^n)$。
2. 當 $[n]$ 中顏色出現的頻率固定時，哪種塗色會有最少的 k-AP，其數量又是如何？

五、附錄

（一）、

1.引理 1 證明：

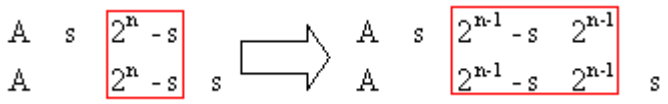
(1) $\alpha(n)\equiv\sum_{s<2^n}\alpha(n,s)$

*Case*1： 若 $s<2^{n-1}$ 時，

因為字串 $A_n=A_{n-1}B_{n-1}$ ， $B_n=B_{n-1}A_{n-1}$

所以， $a_n(2^n-s)=a_{n-1}(2^{n-1}-s)B_{n-1}(s)b_{n-1}(2^{n-1}-s)$ ；

$$A_n(2^n-s)=A_{n-1}(2^{n-1}-s)a_{n-1}(s)B_{n-1}(2^{n-1}-s)$$



因此，我們可以得到

$$\alpha(n,s)=\alpha(n-1,s)+\beta(n-1,2^{n-1}-s)+\alpha(n-1,s)$$

即 $\alpha(n,s)=2\alpha(n-1,s)+\beta(n-1,2^{n-1}-s)$

*Case*2： 若 $s=2^{n-1}$ 時，

$a_n(2^{n-1}) = B_{n-1}$ ； $A_n(2^{n-1}) = A_{n-1}$

故第一列為 1 的字元時，第二列同行對應的字元為 0；

$b_n(2^{n-1}) = A_{n-1}$ ； $B_n(2^{n-1}) = B_{n-1}$

第一列為 0 時，第二列同行對應為 1，因此， $\alpha(n, 2^{n-1}) = 0$

*Case*3：若 $s > 2^{n-1}$時，

$$a_n(2^n - s) = b_{n-1}\left(2^{n-1} - (s - 2^{n-1})\right) \text{，} A_n(2^n - s) = A_{n-1}\left(2^{n-1} - (s - 2^{n-1})\right)$$

或者

$$b_n(2^n - s) = a_{n-1}\left(2^{n-1} - (s - 2^{n-1})\right) \text{，} B_n(2^n - s) = B_{n-1}\left(2^{n-1} - (s - 2^{n-1})\right)$$

因此，我們可以得到 $\alpha(n, s) = \beta(n-1, s - 2^{n-1})$

由 *Case*1、2、3，可得

$$\alpha(n) = \sum_{s \le 2^{n-1}-1} \alpha(n,s) + \sum_{s \ge 2^{n+1}+1} \alpha(n,s) + \alpha\left(n, 2^{n-1}\right) = 2\alpha(n-1) + 2\beta(n-1)$$

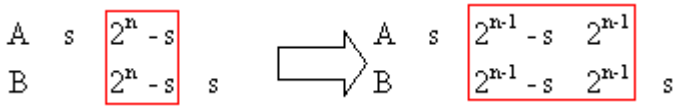
(2) $\beta(n) \equiv \sum_{s<2^n} \beta(n,s)$

*Case*1：若 $s < 2^{n-1}$時，

因為字串 $B_n = B_{n-1}A_{n-1}$ ， $A_n = A_{n-1}B_{n-1}$

所以， $b_n\left(2^n\text{-s}\right) = b_{n-1}\left(2^{n-1}\text{-s}\right)A_{n-1}(\text{s})a_{n-1}\left(2^{n-1}\text{-s}\right)$

$$B_n\left(2^n\text{-s}\right) = B_{n-1}\left(2^{n-1}\text{-s}\right)b_{n-1}(\text{s})A_{n-1}\left(2^{n-1}\text{-s}\right)$$



因此，我們可以得到

$\beta(\text{n}, \text{s}) = \beta(\text{n - 1}, \text{s}) + \alpha\left(\text{n - 1}, 2^{\text{n-1}} - \text{s}\right) + \beta(\text{n - 1}, \text{s})$

即， $\beta(\text{n}, \text{s}) = 2\beta(\text{n - 1}, \text{s}) + \alpha\left(\text{n - 1}, 2^{\text{n-1}} - \text{s}\right)$

*Case*2：若 $s = 2^{n-1}$時，

$$a_n\left(2^{\text{n-1}}\right) = B_{n-1} \text{ ； } B_n\left(2^{\text{n-1}}\right) = B_{n-1}$$

故第一列為 1 時，第二列同行對應為 1；

$$b_n\left(2^{\text{n-1}}\right) = A_{n-1} \text{ ； } A_n\left(2^{\text{n-1}}\right) = A_{n-1}$$

第一列為 0 時，第二列同行對應為 0，因此 $\beta\left(\text{n}, 2^{\text{n-1}}\right) = 2^{\text{n-1}}$

*Case*3：若 $s > 2^{n-1}$時，

$$a_n\left(2^{\mathrm{n}}\text{-s}\right)=b_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}\text{-(s-}2^{\mathrm{n-1}}\text{)}\right)，B_n\left(2^{\mathrm{n}}\text{-s}\right)=B_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}\text{-(s-}2^{\mathrm{n-1}}\text{)}\right)$$

或者

$$b_n\left(2^{\mathrm{n}}\text{-s}\right)=a_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}\text{-(s-}2^{\mathrm{n-1}}\text{)}\right)，A_n\left(2^{\mathrm{n}}\text{-s}\right)=A_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}\text{-(s-}2^{\mathrm{n-1}}\text{)}\right)$$

因此，我們可以得到 $\beta(\mathrm{n},\mathrm{s})=\alpha\left(\mathrm{n}-1,\mathrm{s}-2^{\mathrm{n-1}}\right)$

由 *Case*1、2、3，可得

$$\beta(\mathrm{n})=\sum_{\mathrm{s}<2^{\mathrm{n-1}}}\beta(\mathrm{n},\mathrm{s})+\sum_{2^{\mathrm{n-1}}<\mathrm{s}<2^{\mathrm{n}}}\beta(\mathrm{n},\mathrm{s})+\beta\left(\mathrm{n},2^{\mathrm{n-1}}\right)=2\alpha(\mathrm{n}-1)+2\beta(\mathrm{n}-1)+2^{\mathrm{n-1}}$$

2.引理 2 的証明：

因為 $\alpha(n)=2\alpha(n-1)+2\beta(n-1)$ 、 $\beta(\mathrm{n})=2\alpha(\mathrm{n-1})+2\beta(\mathrm{n-1})+2^{\mathrm{n-1}}$

所以 $\beta(n)=\alpha(n)+2^{n-1}\rightarrow\beta(n-1)=\alpha(n-1)+2^{n-2}$

$$\alpha(n)=2\alpha(n-1)+2\left\lfloor\alpha(n-1)+2^{n-2}\right\rfloor=4\alpha(n-1)+2^{n-1}$$

$$\alpha(\mathrm{n})=4\alpha(\mathrm{n}-1)+2^{\mathrm{n-1}}$$

$$4\alpha(\mathrm{n}-1)=4\left[4\alpha(\mathrm{n}-2)+2^{\mathrm{n-2}}\right]$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

將各式相加消去後得到 $\alpha(n)=4^{n-2}\alpha(2)+2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-3}2^i$

$$4^{\mathrm{n-4}}\alpha(4)=4^{\mathrm{n-4}}\left[4\alpha(3)+2^3\right]$$

$$4^{\mathrm{n-3}}\alpha(3)=4^{\mathrm{n-3}}\left[4\alpha(2)+2^2\right]$$

所以 $\alpha(n)=4^{n-2}\times2+2\times4^{n-2}-2^{n-1}=4^{n-1}-2^{n-1}$ 、 $\beta(n)=4^{n-1}$

3. 引理 3 証明：

*Case*1：當 $2\mathrm{s}<2^{\mathrm{n-1}}$ ，

因為 $a_n\left(2^{\mathrm{n}}-2\mathrm{s}\right)=a_{n-1}(2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s})B_{n-1}(s)B_{n-1}(s+1,2s)b_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s}\right)$ ，

$$B_n\left(\mathrm{s}+1,\,2^{\mathrm{n}}-\mathrm{s}\right)=B_{n-1}(s+1,\,2^{\mathrm{n-1}}-\mathrm{s})b_{n-1}(s)A_{n-1}(s)A_{n-1}\left(\mathrm{s}+1,\,2^{\mathrm{n-1}}-\mathrm{s}\right)，$$

$$B_n\left(2^{\mathrm{n}}-2\mathrm{s}\right)=B_{n-1}(\,2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s})B_{n-1}(s+1,\,2^{\mathrm{n-1}}-\mathrm{s})b_{n-1}(s)A_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s}\right)$$

或者

$$b_n\left(2^{\mathrm{n}}-2\mathrm{s}\right)=b_{n-1}(2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s})A_{n-1}(s)A_{n-1}(s+1,2s)a_{n-1}\left(2^{\mathrm{n-1}}-2\mathrm{s}\right)，$$

$$A_n\left(s+1,\ 2^n-s\right)=A_{n-1}(s+1,2^{n-1}-s)a_{n-1}(s)A_{n-1}(s)B_{n-1}\left(s+1,\ 2^{n-1}-s\right)$$

$$A_n\left(2^n-2s\right)=A_{n-1}(2^{n-1}-2s)A_{n-1}(s+1,2^{n-1}-s)a_{n-1}(s)B_{n-1}\left(2^{n-1}-2s\right)$$

因此，$\Gamma(n,s)=\Gamma(n-1,s)+Y+Z+\Gamma(n,s)$

又 Y:

$$\begin{array}{cccccc}
B_{n-1}(s) & & & \boxed{s} & s & 2^{n-1}-2s \\
b_{n-1}(s) & & s\ \ 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & & \\
B_{n-1}\left(2^{n-1}-2s+1,2^{n-1}-s\right) & & 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & s &
\end{array}$$

可調換列的上下順序，

$$\begin{array}{cccccc}
B_{n-1}\left(2^{n-1}-2s+1,2^{n-1}-s\right) & & s & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & \\
b_{n-1}(s) & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & & \\
B_{n-1}(s) & & & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & s
\end{array}$$

再左右鏡向翻轉，得到

$$\begin{array}{cccccc}
B & 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & s & & \\
B & & \boxed{s} & s & 2^{n-1}-2s & \\
B & s\ \ 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & & &
\end{array}$$

而 Z:

$$\begin{array}{cccccc}
B_{n-1}(s+1,2s) & & s & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & \\
A_{n-1}(s) & & & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & s \\
b_{n-1}(s) & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & &
\end{array}$$

可調換列的上下順序，

$$\begin{array}{cccccc}
B_{n-1}(s+1,2s) & & s & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & \\
b_{n-1}(s) & 2^{n-1}-2s & s & \boxed{s} & & \\
A_{n-1}(s) & & & \boxed{s} & 2^{n-1}-2s & s
\end{array}$$

再左右鏡向翻轉，得到

$$\begin{array}{cccccc}
B & 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & s & & \\
B & & \boxed{s} & s & 2^{n-1}-2s & \\
A & s\ \ 2^{n-1}-2s & \boxed{s} & & &
\end{array}$$

，

最後，Y+Z=

$$\begin{array}{cccccc}
B & & \boxed{s\ \ s} & 2^{n-1}-2s & & \\
B & 2^{n-1}-2s & \boxed{s\ \ s} & & &
\end{array}$$

，

也就是 $2\Gamma(n,s)=\alpha\left(n-1,2^{n-1}-2s\right)$，

又 $\frac{1}{2}\alpha\left(n-1,2^{n-1}-2s\right)=\alpha\left(n-2,2^{n-2}-s\right)$，

所以可以得知 $\Gamma(n,s)=\frac{1}{2}\alpha\left(n-1,2^{n-1}-2s\right)=\alpha\left(n-2,2^{n-2}-s\right)$

Case2：當 $2s=2^{n-1}$，

因為第一列為 $a_n\left(2^{n-1}\right)$，

第二列為 $B_n\left(s+1,2^{n-1}+s+1\right)$，

第三列為 $B_n\left(2^{n-1}\right)$

或者

第一列為 $b_n\left(2^{n-1}\right)$，

第二列為 $A_n\left(s+1,2^{n-1}+s+1\right)$，

第三列為 $A_n\left(2^{n-1}\right)$，

$$\begin{matrix} b_{n-1}(2^{n-2}) & a_{n-1}(2^{n-2}) \\ A_{n-1}(2^{n-2}) & B_{n-1}(2^{n-2}) \\ b_{n-1}(2^{n-2}) & a_{n-1}(2^{n-2}) \end{matrix}$$

其中同色的行數僅有 $A_{n-1}(2^{n-2})$ 和 $B_{n-1}(2^{n-2})$ 兩部份，

故 $\Gamma(n,s)=\Gamma\left(n,2^{n-2}\right)=2^{n-2}$

Case3：當 $2s>2^{n-1}$，

第一列為 $A_{n-1}(s)A_{n-1}(s+1,2^{n-1})A_{n-1}(2s-2^{n-1})B_{n-1}\left(2^{n-1}-s\right)b_{n-1}\left(2^{n-1}-s\right)$，

第二列為

$B_{n-1}\left(2^{n-1}-s\right)B_{n-1}\left(2^{n-1}-s+1,s\right)b_{n-1}\left(2s-2^{n-1}\right)A_{n-1}(2^{n-1}-s)A_{n-1}(2^{n-1}-s+1,s)a_{n-1}\left(2^{n-1}-s\right)$

第三列為

$B_{n-1}\left(2^{n-1}-s\right)B_{n-1}\left(2^{n-1}-s+1,2^{n}-2s\right)b_{n-1}\left(2s-2^{n-1}\right)A_{n-1}(2^{n-1}-s)a_{n-1}(s)$

將同色部分分為 M、N 兩部份，

M：

$$\begin{array}{lllll} B_{n-1}(2s-2^{n-1}+1,s) & & 2s-2^{n-1} & \boxed{2^{n-1}-s} & 2^{n-1}-s \\ b_{n-1}(2^{n-1}-s) & 2^{n-1}-s & 2s-2^{n-1} & \boxed{2^{n-1}-s} & \\ B_{n-1}(2^{n-1}-s) & & & \boxed{2^{n-1}-s} & 2^{n-1}-s \quad 2s-2^{n-1} \end{array}$$

N:

$$\begin{array}{lllll} B_{n-1}(2s-2^{n-1}+1,s) & & 2s-2^{n-1} & \boxed{2^{n-1}-s} & 2^{n-1}-s \\ a_{n-1}(2^{n-1}-s) & 2^{n-1}-s & 2s-2^{n-1} & \boxed{2^{n-1}-s} & \\ B_{n-1}(2^{n-1}-s) & & & \boxed{2^{n-1}-s} & 2^{n-1}-s \quad 2s-2^{n-1} \end{array}$$

M+N:

依據對偶塗色特性，任意列上下互換同色行數相同，A、B 整組互換同色行數也相同，所以可以計算 $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ 同色行數得到 $\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}$ 的同色行數

4.引理 4 證明:

因為， $\Delta(n)=2\Delta(n-1)+2\beta(n-2)$

所以

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= 2\,\Delta(n-1)+2\times 4^{n-3} \\ 2\Delta(n-1) &= 2\left[2\,\Delta(n-2)+2\times 4^{n-4}\right] \\ 2^2\Delta(n-2) &= 2^2\left[2\,\Delta(n-3)+2\times 4^{n-5}\right] \\ \cdots & \qquad \cdots \\ 2^{n-4}\Delta(4) &= 2^{n-4}\left[2\,\Delta(3)+2\times 4^{1}\right] \\ 2^{n-3}\Delta(3) &= 2^{n-3}\left[2\,\Delta(2)+2\times 4^{0}\right] \end{aligned}$$

將上面每一式進行相加消去會得到

$$\Delta(n)=2^{n-2}\Delta(2)+\sum_{i=0}^{n-3}2^{n-i-2}\times 4^{i}$$

進一步化簡可得， $\Delta(n)=2^{n-2}\Delta(2)+2^{n-2}\sum_{i=0}^{n-3}2^{i}$

又， $\Delta(2)=0$

所以， $\Delta(n)=2^{n-2}\left[\dfrac{\left(2^{n-2}-1\right)}{2-1}\right]=4^{n-2}-2^{n-2}$

5.引理 5 証明：

1. $ABB(n,s)$ 的部份：

Case 1: $2s < 2^{n-1}$ 時，

因為 $ABB(n,s)$ 為

$$A_{n-1}(s+1,2s)$$
$$B_{n-1}(s)$$
$$a_{n-1}(s)$$

就重疊的部分來看,發現和 $ABA(n-1,s)$ 相同

所以， $ABB(n,s) = ABA(n-1,s)$, $s < 2^{n-2}$ 。

Case 2: $2s = 2^{n-1}$ 時，

因為

$$\begin{array}{cccccc} & & A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\ & & & B_{n-2} & A_{n-2} & A_{n-2} & B_{n-2} \\ B_{n-2} & A_{n-2} & A_{n-2} & B_{n-2} & & \end{array}$$

可以發現重疊部分的塗色完全相同,因此 $ABB(n,2^{n-2}) = B_{n-2} = 2^{n-2}$

Case 3: $2s > 2^{n-1}$

令 $t = 2^{n-1} - s$

因為

$$\begin{array}{ccccc} A & s & a_{n-1}(t) & B_{n-1}(2^{n-1}-2t) & 2^n - 2s \\ B & & B_{n-1}(t) & B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) & 2^{n-1}+t \\ B & 2^{n-1}+t & A_{n-1}(t+1,2t) & a_{n-1}(2^{n-1}-2t) & \end{array}$$

可看出重疊部分有兩塊

$$\begin{array}{l} a_{n-1}(t) \\ B_{n-1}(t) \\ A_{n-1}(t+1,2t) \end{array}$$ 的部分和 $ABA(n-1,s)$ 相同

$$\begin{array}{l} B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \\ a_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{array}$$ 的部分因為各列可上下互換，

經整理後會等於 $$\begin{array}{c} a_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{array}$$

又因為 $$\begin{array}{c} a_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) = \Gamma(n-1,t) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{array}$$

所以，$\sum_{s<2^{n-1}} ABB(n,s) = \sum_{s<2^{n-2}} ABA(n-1,s) + 4^{n-3}$

綜合 Case 1,2,3

可得 $ABB(n) = 2ABA(n-1) + \Gamma_{n-1} + 2^{n-2}$

2. $ABA(n,s)$ 的部份：

Case 1:當 $2s < 2^{n-1}$ 時，

因為

$$\begin{array}{llllll} A & s & A_{n-1}(s+1,2s) & 2^{n-1}-2s & 2^{n-1} & \\ B & & B_{n-1}(s) & 2^{n-1}-2s & 2^{n-1} & s \\ A & 2^n - s & b_{n-1}(s) & & & \end{array}$$

就重疊的部分來看,和 $ABB(n-1,s)$ 相同

所以，$ABA(n,s) = ABB(n-1,s)$，$s < 2^{n-2}$ 。

Case 2:當 $2s = 2^{n-1}$ 時，

因為

$$\begin{array}{llllllll} & & & A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} & \\ & & & & B_{n-2} & A_{n-2} & A_{n-2} & B_{n-2} \\ A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} & & & & \end{array}$$

可以發現重疊部分有一行和其他兩行的塗色完全相反，因此

$ABA(n,2^{n-2}) = 0$

Case 3:當 $2s > 2^{n-1}$ 時，

令 $t = 2^{n-1} - s$

因為

$$\begin{array}{lllll} A & s & a_{n-1}(t) & B_{n-1}(2^{n-1}-2t) & 2^n - 2s \\ B & & B_{n-1}(t) & B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) & 2^{n-1}+t \\ A & 2^{n-1}+t & B_{n-1}(t+1,2t) & b_{n-1}(2^{n-1}-2t) & \end{array}$$

重疊的有兩部分

$$\begin{array}{c} a_{n-1}(t) \\ B_{n-1}(t) \\ B_{n-1}(t+1,2t) \end{array}$$ 的部分可上下互換成 $$\begin{array}{c} B_{n-1}(t+1,2t) \\ B_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{array}$$ 又因為 A,B 為互補塗

色，所以 k-AP 的數量會和 $\begin{array}{c} A_{n-1}(t+1,2t) \\ A_{n-1}(t) \\ b_{n-1}(t) \end{array}$ 相同，其值等於 $AAB(n-1,s)$

$$\begin{matrix} B_{n-1}(2^{n-1}-2t) & & b_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ \text{又}\ B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) & \text{各列可上下互換成} & B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \\ b_{n-1}(2^{n-1}-2t) & & B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} b_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ B_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{matrix} = \Delta(n-1,s)\text{，故得}$$

$$\sum_{s=1}^{2^{n-1}} ABA(n,s) = \sum_{s=1}^{2^{n-2}} ABB(n-1,s) + 4^{n-3} - 2^{n-3}$$

綜合 Case 1,2,3 可得

$$ABA(n) = ABB(n-1) + AAB(n-1) + \Delta(n-1)$$

3. $AAB(n,s)$ 的部份

Case 1:當 $2s < 2^{n-1}$ 時

因為

$$\begin{matrix} A & s & A_{n-1}(s+1,2s) & 2^{n-1}-2s & 2^{n-1} & \\ A & & A_{n-1}(s) & 2^{n-1}-2s & 2^{n-1} & s \\ B & 2^n - s & a_{n-1}(s) & & & \end{matrix}$$

重疊部分和 $AAA(n-1,s)$ 相同，故

$$AAB(n,s) = AAA(n-1,s),\ \ s < 2^{n-2}$$

Case 2:當 $2s = 2^{n-1}$ 時

因為

$$\begin{matrix} & & A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} & \\ & & & A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\ B_{n-2} & A_{n-2} & A_{n-2} & B_{n-2} & & & \end{matrix}$$

重疊部分有一行的塗色法與其他兩行完全不同，所以 $AAB(n,2^{n-2}) = 0$.

Case 3:當 $2s > 2^{n-1}$ 時，

令 $t = 2^{n-1} - s$

因為

$$\begin{matrix} A & s & a_{n-1}(t) & B_{n-1}(2^{n-1}-2t) & 2^n - 2s \\ A & & A_{n-1}(t) & A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) & 2^{n-1}+t \\ B & 2^{n-1}+t & A_{n-1}(t+1,2t) & a_{n-1}(2^{n-1}-2t) & \end{matrix}$$

可知重疊的有兩部分

$a_{n-1}(t)$

$A_{n-1}(t)$ 的部分和 $AAA(n-1,s)$ 相同

$A_{n-1}(t+1,2t)$

$B_{n-1}(2^{n-1}-2t)$ $\qquad$ $A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t)$

又 $A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t)$ 各列可上下互換成 $B_{n-1}(2^{n-1}-2t)$

$a_{n-1}(2^{n-1}-2t)$ $\qquad$ $a_{n-1}(2^{n-1}-2t)$

$A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t)$

又 $B_{n-1}(2^{n-1}-2t) = 2\beta(n-2,s)-\Gamma(n-1,s)$，故得

$a_{n-1}(2^{n-1}-2t)$

$$AAB(n,s)=AAA(n-1,s)+2\beta(n-2,s)-\Gamma(n-1,s)\,,\ 2^{n-2}<s<2^{n-1}$$

綜合 Case 1,2,3 並對所有的 s 作累加，可得

$$AAB(n)=2AAA(n-1)+2\beta(n-2)-\Gamma(n-1)$$

4. $AAA(n,s)$ 的部份

Case 1: 當 $2s<2^{n-1}$

因為
$$\begin{array}{lll} A & s & A_{n-1}(s+1,2s) \quad 2^{n-1}-2s \quad 2^{n-1} \\ A & & A_{n-1}(s) \quad 2^{n-1}-2s \quad 2^{n-1} \quad s \\ A & 2^n-s & b_{n-1}(s) \end{array}$$

重疊部分和 $AAB(n-1,s)$ 相同,所以 $AAA(n,s)=AAB(n-1,s)\,,s<2^{n-2}$

Case 2:當 $2s=2^{n-1}$

因為
$$\begin{array}{lll} & & A_{n-2} \quad B_{n-2} \quad B_{n-2} \quad A_{n-2} \\ & & A_{n-2} \quad B_{n-2} \quad B_{n-2} \quad A_{n-2} \\ A_{n-2} & B_{n-2} & B_{n-2} \quad A_{n-2} \end{array}$$

重疊部分有一列的塗色和其他兩列對偶,所以 $AAA(n,2^{n-2})=0$

Case 3: 當 $2s>2^{n-1}$

因為
$$\begin{array}{lll} A & s & a_{n-1}(t) \quad B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \quad 2^n-2s \\ A & & A_{n-1}(t) \quad A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \quad 2^{n-1}+t \\ A & 2^{n-1}+t & B_{n-1}(t+1,2t) \quad b_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{array}$$

重疊的地方可分為兩部分

$a_{n-1}(t)$ $\qquad$ $B_{n-1}(t+1,2t)$

$A_{n-1}(t)$ 的部分各列可上下互換，所以可視為 $A_{n-1}(t)$

$B_{n-1}(t+1,2t)$ $\qquad$ $a_{n-1}(t)$

又 A,B 塗色互補,可將 A,B 完全調換成 $A_{n-1}(t+1,2t)$

$B_{n-1}(t)$

$b_{n-1}(t)$

此部分等於 $ABB(n-1,s)$

$$B_{n-1}(2^{n-1}-2t)$$

另一部分 $A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t)$ 因為各列可上下互換,可置換成

$$b_{n-1}(2^{n-1}-2t)$$

$$\begin{array}{c} b_{n-1}(2^{n-1}-2t) \\ A_{n-1}(t+1,2^{n-1}-t) \\ B_{n-1}(2^{n-1}-2t) \end{array}$$

此排列方法等於 $2\alpha(n-2,s)-\Delta(n-1,s)$, $2^{n-2}<s<2^{n-1}$ 。

綜合 Case 1 2 3 並對所有的 s 作累加，可得

$$AAA(n)=ABB(n-1)+AAB(n-1)+2\alpha(n-2)-\Delta(n-1)$$

6. 引理 6 證明：

$$\begin{cases} \mathrm{ABB(n)=2ABA(n-1)+\Gamma(n-1)+2^{n-2}} & (1) \\ \mathrm{ABA(n)=ABB(n-1)+AAB(n-1)+\Delta(n-1)} & (2) \\ \mathrm{AAB(n)=2AAA(n-1)+2\beta(n-1)+\Gamma(n-1)} & (3) \\ \mathrm{AAA(n)=ABB(n-1)+AAB(n-1)+2\alpha(n-2)-\Delta(n-1)} & (4) \end{cases}$$

令數列 $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ 表示 $a_n=ABB(n)+AAB(n)$ ， $b_n=ABA(n)+AAA(n)$

則由上列(1),(3)式相加得

$$a_n=2b_{n-1}+2\beta(n-2)+2^{n-2} \qquad (5)$$

第(2)式及第(4)式分別變成：

$$ABA(n)=a_{n-1}+\Delta(n-1) \qquad (6)$$

及

$$AAA(n)=a_{n-1}+2\alpha(n-2)-\Delta(n-1) \qquad (7)$$

相加可得

$$b_n=2a_{n-1}+2\alpha(n-2) \qquad (8)$$

考慮 $\begin{cases} a_n=2b_{n-1}+2\beta(n-2)+2^{n-2} \\ b_n=2a_{n-1}+2\alpha(n-2) \end{cases}$ 由*引理 2*，

得 $\begin{cases} a_n=2b_{n-1}+2\cdot 4^{n-3}+2^{n-2} & (9) \\ b_n=2a_{n-1}+2\left(4^{n-3}-2^{n-3}\right) & (10) \end{cases}$

利用(9)及(10)可得

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2b_{n-1} + 2\cdot 4^{n-3} + 2^{n-2} \\
&= 4a_{n-2} + 4\alpha(n-3) + 2\cdot 4^{n-3} + 2^{n-2} \\
&= 4a_{n-2} + 4^{n-3} - 2^{n-2} + 2\cdot 4^{n-3} + 2^{n-2} \\
&= 4a_{n-2} + 3\cdot 4^{n-3} \\
a_{n-2} &= 4a_{n-4} + 3\cdot 4^{n-5} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

又 $a_2 = ABB(2) + AAB(2) = 1 + 0 = 1$，

$b_2 = \mathrm{AAB}(2) + \mathrm{AAA}(2) = 0 + 0 = 0$

累加遞迴得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^{n-2} + 3\cdot \sum_{i=\frac{n-2}{2}}^{n-3} 4^i \\
&= 2^{n-2} + 3\cdot \frac{4^{\frac{n-2}{2}}\left(4^{\frac{n-2}{2}} - 1\right)}{4-1} \\
&= 4^{n-2}
\end{aligned}
$$

代回(10)，可得

$b_n = 2a_{n-1} + 2\left(4^{n-3} - 2^{n-3}\right) = 2\cdot 4^{n-3} + 2\cdot 4^{n-3} - 2\cdot 2^{n-3} = 4^{n-2} - 2^{n-2}$ 。

再代回(1)~(4)，得証

$\mathrm{ABA}(n) = a_{n-1} + \Delta(n-1) = 4^{n-3} + 4^{n-3} - 2^{n-3} = 2\cdot 4^{n-3} - 2^{n-3}$

$\mathrm{AAA}(n) = a_{n-1} + 2\alpha(n-2) - \Delta(n-1) = 4^{n-3} + 2\cdot 4^{n-3} - 2^{n-2} - 4^{n-3} + 2^{n-3} = 2\cdot 4^{n-3} - 2^{n-3}$

$\mathrm{ABB}(n) = 2\mathrm{ABA}(n-1) + \Gamma(n-1) + 2^{n-2} = 4^{n-3} - 2^{n-3} + 4^{n-3} + 2^{n-2} = 2\cdot 4^{n-3} + 2^{n-3}$

$\mathrm{AAB}(n) = 2\mathrm{AAA}(n-1) + 2\beta(n-2) - \Gamma(n-1) = 4^{n-3} - 2^{n-3} + 2\cdot 4^{n-3} - 4^{n-3} = 2\cdot 4^{n-3} - 2^{n-3}$

六、參考文獻

1. *Steve Butler, Ron Graham, Linyuan Lu, Unrolling Residues to Avoid Progression Mathematics Magazine 87 (2014), 83-94.*
2. *Linyuan Lu, Xing Peng, Monochromatic 4-term arithmetic progressions in 2-colorings of Zn, J. Combin. Theory Ser.A, 119 (5) 2012,1048-1065.*
3. *Steve Butler, Ron Graham, Linyuan Lu, Finding Patterns Avoiding Many Monochromatic Constellations, Experimental Mathematics 19 (2010), number 4, 399-411*
4. *Tom C. Brown, Bruce M. Landman, Monochromatic Arithmetic Progressions With Large Differences, Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999), no. 1, 21--35.*

【評語】010020

本作品考慮二元字串的 K=AP 計數。其漸進的理論是一個已知的結果。本文設計一個利用 Thue-Morse 數列的著色，精確地解決了在此情形下 3-AP 的技術問題，並且檢驗了 4-AP 和 5-AP 的主要項。利用 Thue-Morse 是不錯的創意。