2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010013

參展科別　數學

作品名稱　圓圓不絕的三角問題

－三角形分割內切圓性質探討

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立科學工業園區實驗高級中學

新竹市立建功高級中學

指導教師　魏子超

作者姓名　李承軒、翁如萱

關鍵字　分割內切圓、分切解、分割線

作者簡介

(一)李承軒

(二)翁如萱

(一) 我是李承軒，目前就讀竹科實中高一五班，參加這次國際科展的目的是為了獲得自己發表以及報告經驗，並且檢視自己在數學方面的能力是否充足。在這次的科展研究過程之中，我面對到了許多困難，我個人認為最大的難點是證明性質，由於題目的變化性太廣而不知如何下手。然而，在經過多方嘗試之後，最終還是將其解決了，我也在此次的研究中得到成就感以及十足的收穫。

(二) 我是翁如萱，目前就讀於新竹建功高中高一七班。在國二一次偶然機會接觸了數學科展，見識到數學的浩瀚之美，從最初只是學校的習題演練，到後來的一個專題研究，甚至是今天的國際科展，我都獲益良多。然而，路途並不完全順遂，無法與學校課業取得平衡，與同組組員爭吵，都曾經使我厭倦。不過現在回首過去，頓時領悟，這一切的挑戰，豈不是造就今日作品的養分？期許自己能在這次比賽中，可以有所增長。

Abstract

An arbitrary base triangle with inscribed-circle of radius R is divided from one of its vertex into two sub-triangles which have smaller inscribed circles of radii r_1 and r_2 respectively. We define the division of the base triangle as a division- solution if sum of the areas of the two smaller inscribed circles, equals to the inscribed circle area of the base triangle, i.e. $R^2 = r_1^2 + r_2^2$. In this research, we study division-solution for triangle. For right triangles, the division by the line from the right-angle vertex and being normal to the hypotenuse is proved to be a division-solution. Furthermore, if these two sub-inscribed circles mentioned above switch their positions, it is surprising that this configuration is also a solution. Most importantly, we aim to deal with the general case, arbitrary triangles. For arbitrary triangles, we provide the demonstrations in detail to prove that we can only get as many as two division- solutions from one vertex. Moreover, we acquire a simple but powerful discriminant which can easily judge whether division- solutions exist or not. To our surprised, we find out that any division- solutions are in pair, or we can say any solution after switching the two sub-inscribed circles is still a solution. In this research, ruler and compass constructions are also investigated to make the study more clearly.

摘要

任意三角形我們可以從其中一個頂點作分割線將其分割為兩個三角形，若分割三角形的兩個（子）內切圓面積和與原三角形的內切圓面積相等，我們稱此分割法為分切解。以直角三角形為例，很明顯的，對斜邊作高的分割方式為一分切解，更進一步的研究，我們發現將其子三角形的內切圓位置互換，其所得依然為一合法的解(稱為交換解)。有了這樣的經驗，我們試圖將問題推廣至更一般性的情況，對於任意三角形，我們證明了以一頂點分割至多存在二分切解，進而，在這樣不失一般性的假設之下，我們推導出簡潔的判別式以判斷針對一頂點是否存在分切解；更甚，我們證實了交換解對任一三角形依然成立。最後我們也發展出針對直角三角形之分切解的尺規作圖法。

壹、研究動機

「共邊三角形的內切圓」這份作品，引發了我們對於三角形的分割內切圓的興趣，文中提到直角三角形以直角頂點切割情況，在兩分割內切圓面積相等時會有最大值，而我們馬上聯想到是否有可能兩分割（子）三角形之內切圓面積和與原（母）三角形之內切圓面積相同，於是便利用軟體繪圖，發現這真是一門有趣的學問。這份作品的原始版本曾參與一年前的新竹市科展，當初我們只完成了唯二性與交換解的部分，不過經過一年的研究，我們加以推廣至任意三角形，更開心的是還找到了判別三角形是否有解的判別式，以及其他的特殊性質。本文所採用之專有名詞例如分切解、交換解等，茲定義於本文肆、研究過程或方法的一、名詞解釋中。

貳、研究目的

一、直角三角形及任意三角形分切解數目以及交換解性質探討。

二、推導用以判斷三角形是否存在分切解的判別式。

三、探討一個三角形最多可由幾個頂點切割有解。

四、利用尺規作圖作出鈍角等腰三角形以及直角三角形的分切解。

五、探討直角三角形以非直角頂點切割以及分割內切圓面積和極值問題。

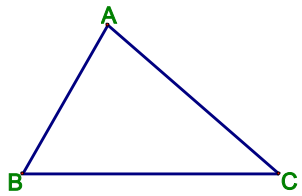
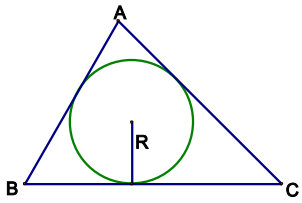
參、研究設備與器材

GSP4.0 幾何畫板、Word2007、紙、筆、電腦

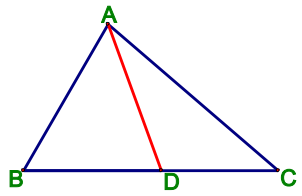
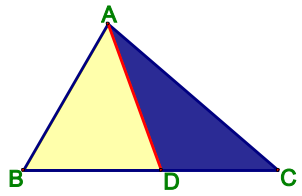
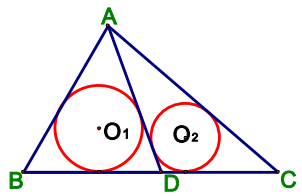
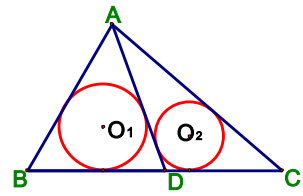
肆、研究過程或方法

一、名詞解釋

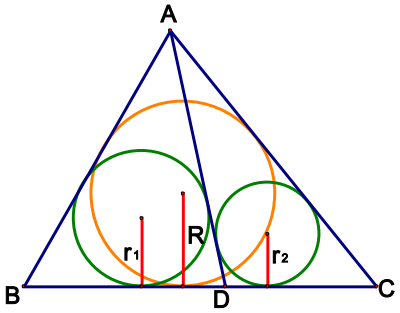
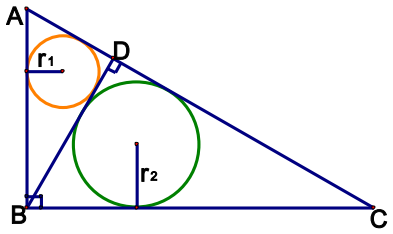
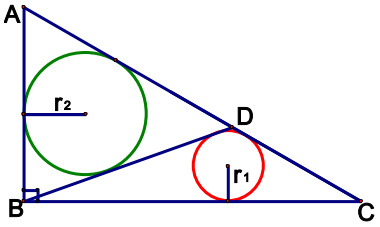
(一) 原三角形及原內切圓：

原三角形	未經分割的三角形稱為**原三角形**	
原內切圓	原三角形的內切圓稱為**原內切圓**	

(二) 分割：

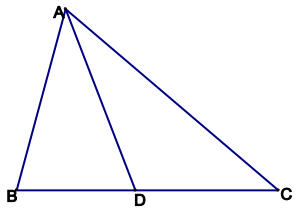
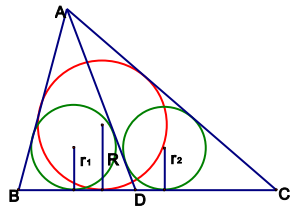
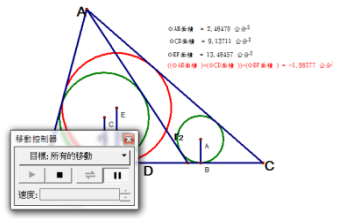
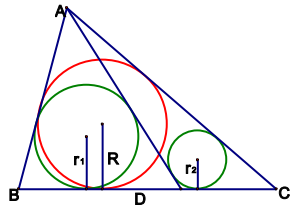
分割線	三角形的一個頂點與其對邊上一動點作連線段，則此線段稱**分割線**	
分割三角形	以分割線分割出的兩三角形，稱為**分割三角形**	
分割內切圓	分割三角形的內切圓，稱為**分割內切圓**	
分割角	被分割的角即稱為**分割角** （以右圖為例，∠A 為分割角）	

(三)分切解：

分切解	若原三角形之兩分割內切圓面積和，與原內切圓面積相等，便稱兩分割內切圓為一組分切解($r_1{}^2 + r_2{}^2 = R^2$)。	
高切解	直角三角形若以斜邊上的高作切割，就會成為一組分切解，因此稱為高切解。	
交換解	找到一組分切解後，將兩圓分別所切的邊交換後，若仍為一分切解，則稱其為交換解。*(※為了與上圖作比較，故以直角三角形為例子，交換解仍存在於任意三角形)*	

二、研究方法：利用 GSP 幾何畫版觀察分割內切圓之方法

分切解的作圖方式：

文字敘述		圖例
1	將一頂點與其對邊上一動點作連線	
2	分別作原內切圓與兩分割內切圓	
3	利用GSP的移動點功能，並度量圓的面積，再利用計算機運算，以觀察內切圓的面積變化	
4	當兩分割內切圓的面積和，與原內切圓面積相等時，即為分切解	

二、基本性質探討

【性質一】直角三角形必定存在高切解，

且其分割內切圓與原內切圓半徑比與三角形邊長比相等。

簡述：利用直角三角形子母性質，來證明**高切解**存在性。

證明：

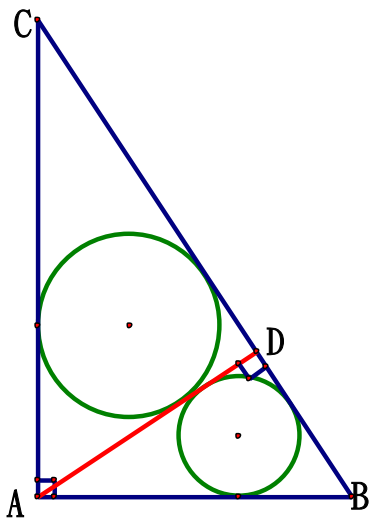
△ ABC~ △ DAC~ △ DBA

∴△ABC 內切圓半徑：△DAC 內切圓半徑：△DBA 內切圓半徑

$= \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$ (即為△ABC 和△DAC 和△DBA 分別對應的斜邊)

直角三角形兩分割內切圓與原內切圓半徑比＝原三角形邊長比

故必定存在高切解



【性質二】直角三角形的高切解必存在交換解

簡述:

我們已知直角三角形必存在一個高切解，而經由軟體的操作我們發現，直角三角形的高切解存在了一個交換解，因此我們想證明出直角三角形的高切解必定存在交換解這個性質。而證明的方式是先將 r_1 所切的邊從 b 改為 a，並假設另一分割內切圓的半徑為m，接著用 r_1 表示 l 的長度，再將 r_2 代入 m，也同樣用它表示 l 的長度，如果兩者表示出的 l 相同，代表此分割線是存在的，亦即交換解是存在的。

假設：

1.高切解：

假設：$\angle ABC = \alpha, \overline{AB} = a, \overline{BC} = c, \overline{AC} = b$ ，$a = c\cos\alpha, b = c\sin\alpha$(以 c 表示)

二分割內切圓半徑分別為r_1、r_2

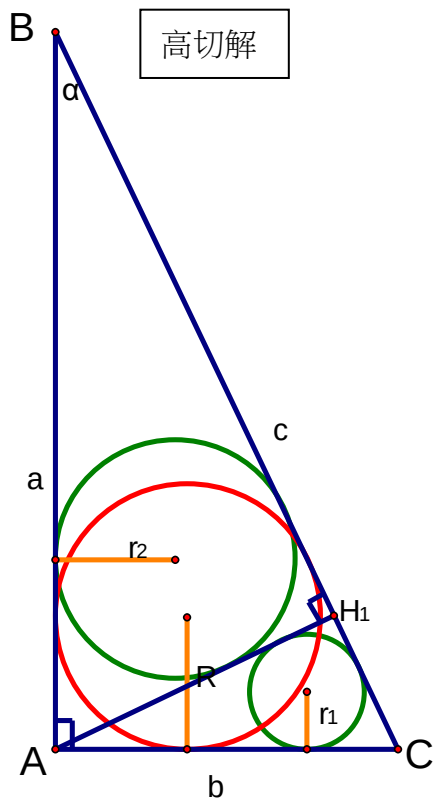
又推導出該組高切解內切圓之半徑 (假設已知條件為α, c,R) 。

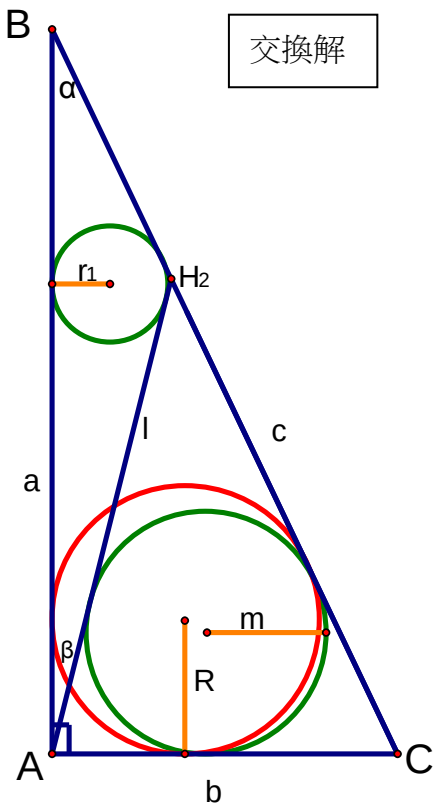
$r_1 = R\sin\alpha = c\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ $r_2 = R\cos\alpha = c\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ （$R = c\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$）

2.交換解：

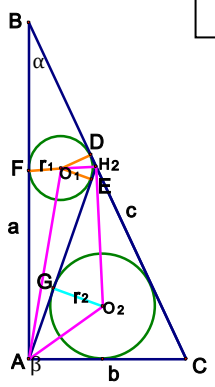
假設：$\angle ABC = \alpha, \angle BAH_2 = \beta, \overline{AB} = a, \overline{BC} = c, \overline{AC} = b, \overline{AH_2} = l$

二分割內切圓半徑分別為r_1、m





證明：



r_1 所表示的 l

$\angle O_1EA, \angle O_1FA, \angle O_1DE = 90°$

$\angle O_1AE = \frac{\beta}{2}$

$\angle EH_2O_1 = \frac{180-\alpha-\beta}{2}, \angle H_2O_1E = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$l=\overline{EA} + \overline{EH_2}$

$= r_1 \tan\frac{\alpha+\beta}{2} + r_1 \cot\frac{\beta}{2}$

$=r_1(\tan\frac{\alpha+\beta}{2} + \cot\frac{\beta}{2})$

r_2 所表示的 l

$\angle AGO_2 = 90°, \angle O_2AG = 45° - \frac{\beta}{2}$

$\angle AH_2C = \alpha + \beta$, $\angle GH_2O_2=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$l=\overline{GA} + \overline{GH_2}$

$=m\cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right) + m\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

$=m(\cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right) + \cot\frac{\alpha+\beta}{2})$

為了求出 l 之大小，必須先求出一些三角函數值

求$\cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right)$：

$$b - r_2\cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = r_2\cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$c\sin\alpha - c\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = c\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\cot\left(45° - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$1 - \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\cot\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\cot(45° - \frac{\beta}{2})$$ 左右同÷ $c\sin\alpha$

求$\tan(45° - \frac{\beta}{2})$

Define: $g(\alpha) = \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

$$\tan\gamma = \tan\left(45° - \frac{\beta}{2}\right) = \left[\frac{g(\alpha)}{1-g(\alpha)\cot\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

Define: $h(\alpha) = \left[\frac{g(\alpha)}{1-g(\alpha)\cot\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$

求$\tan\beta$

$$\tan(90° - \beta) = \tan 2\gamma = \frac{2\left[\frac{g(\alpha)}{1-g(\alpha)\cot\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]}{1-\left[\frac{g(\alpha)}{1-g(\alpha)\cot\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]^2}$$ *(倍角公式)*

$\tan(90° - \beta) = \cot\beta = \frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}$ *(餘角關係)*, $\tan\beta = \frac{1-h^2(\alpha)}{2h(\alpha)}$ *($\cot\beta$ 為$\tan\beta$之倒數)*

求$\tan\frac{\beta}{2}$

$\tan\beta = \frac{2\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$ *(倍角公式)*

$1 - \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2}{\tan\beta}\tan(\frac{\beta}{2})$ *(展開上式)*

$\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{2}{\tan\beta}\tan(\frac{\beta}{2}) - 1 = 0$

$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{-\frac{2}{\tan\beta}\pm\sqrt{\frac{4}{\tan^2\beta}+4}}{2}$ *(利用公式解)*

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\beta}}-\frac{1}{\tan\beta}$$ *(取正，由於是在討論 0 到 90 度的狀況)*

$$=\sqrt{1+\left(\frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}\right)^2}-\frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}\left(\text{由上}\frac{1}{\tan\beta}=\cot\beta=\frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}\right)$$

$$=\sqrt{1+\frac{4h^2(\alpha)}{1-2h^2(\alpha)+h^4(\alpha)}}-\frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}$$

$$=\frac{1+h^2(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}-\frac{2h(\alpha)}{1-h^2(\alpha)}$$

$$=\frac{[1-h(\alpha)]^2}{1-h^2(\alpha)}$$

$$=\frac{1-h(\alpha)}{1+h(\alpha)}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-h(\alpha)}{1+h(\alpha)}\ ,\cot\frac{\beta}{2}=\frac{1+h(\alpha)}{1-h(\alpha)}$$

Define: $k(\alpha)=\tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\left[\frac{1-h(\alpha)}{1+h(\alpha)}\right]}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1-h(\alpha)}{1+h(\alpha)}\right]}$(和角公式)

Define: $x=\tan\frac{\alpha}{2}$ 　　將前面的函數改以 x 表示

$$g(\alpha)=\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}{1+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}{\frac{1+x^2+1-x^2+2x}{1+x^2}}$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)(2+2x)}\ ****** \ g(\alpha)=\frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)(x+1)}$$

$$\frac{1}{h(\alpha)}=\frac{1-g(\alpha)\cot\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{g(\alpha)}$$

$$=\frac{1}{g(\alpha)}-\cot\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{2(1+x^2)(x+1)}{(1-x^2)^2}-\frac{1+x}{1-x}\left(\cot\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+1}{\cot\frac{\alpha}{2}-1}\ \text{差角公式, 並代入}x=\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1-x)}-\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\frac{2(1+x^2)-(1+x)(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x)}\ ****** \ \frac{1}{h(\alpha)}=\frac{x^3+3x^2-x+1}{(1-x^2)(1-x)}$$

$$\frac{1+h(\alpha)}{1-h(\alpha)}=\frac{1-h(\alpha)+2h(\alpha)}{1-h(\alpha)}$$

$$=1+\frac{2h(\alpha)}{1-h(\alpha)}$$

$$=1+\frac{2}{\frac{1}{h(\alpha)}-1}$$

$$=1+\frac{2}{\frac{x^3+3x^2-x+1}{(1-x^2)(1-x)}-1}\left(代入\frac{1}{h(\alpha)}=\frac{x^3+3x^2-x+1}{(1-x^2)(1-x)}\right)$$

$$=1+\frac{2}{\frac{4x^2}{x^3-x^2-x+1}}$$

$$=1+\frac{x^3-x^2-x+1}{2x^2}\ ******\ \frac{1+h(\alpha)}{1-h(\alpha)}=\frac{x^3+x^2-x+1}{2x^2}$$

$$k(\alpha)=\tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{x+\frac{2x^2}{x^3+x^2-x+1}}{1-x\times\frac{2x^2}{x^3+x^2-x+1}}$$

$$=\frac{x^4+x^3-x^2+x+2x^2}{-x^3+x^2-x+1-2x^3}$$

$$=\frac{x^4+x^3+x^2+x}{(-x+1)(x^2+1)}*****\ \mathbf{k(\alpha)=\frac{x^2+x}{1-x}}$$

證明以r_2代入 m 所求出的 l (l_2)等於以r_1求出的 l (l_1)

$$\mathbf{l_1=r_1\left(\tan\frac{\alpha+\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)}=r_1\left(k(\alpha)+\frac{1+h(\alpha)}{1-h(\alpha)}\right)=\frac{2cx(-x+1)}{(1+x^2)^2}\left(\frac{x^2+x}{1-x}+\frac{x^3+x^2-x+1}{2x^2}\right)$$

$$=\frac{cx(-x+1)}{(1+x^2)^2}\left(\frac{2x^2(x+1)}{(1-x)}+\frac{x^3+x^2-x+1}{x}\right)=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)$$

$$\mathbf{l_2=m\left(\cot\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)+\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=m\left(\frac{1}{h(\alpha)}+\frac{1}{k(\alpha)}\right)=r_2\left(\frac{1}{h(\alpha)}+\frac{1}{k(\alpha)}\right)$$

$$=\frac{cx(1+x)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\left[\frac{1-x}{x^2+x}+\frac{x^3+3x^2-x+1}{(1-x^2)(1-x)}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{cx(-x+1)}{(1+x^2)^2}\left[\frac{x^3+3x^2-x+1}{1-x}+\frac{(1-x)^2}{x}\right)\Bigg]=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)$$

$$\because\ \frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)$$

$$\therefore\ \mathbf{l_1=l_2}$$

成功證明出直角三角形的高切解必定存在交換解

【性質三】若任意三角形存在分切解，則最多只會有兩組分切解的存在（唯二性）

簡述：

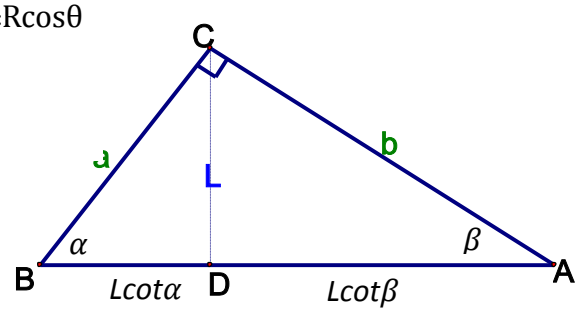
從 GSP 作圖過程中我們發現，直角三角形最多只有兩組分切解(高切解、交換解)。於是我們也試驗了任意三角形，發現若此三角形存在分切解，最多也只會有兩組分切解，為了證明「唯二性」這個性質，我們利用($\theta_1+\theta_2=90-\frac{\alpha+\beta}{2}$)列出$\sin\theta$的方程式(n 次方程式有 n 個解)。如此可知任意三角形最多有幾組分切解。

若發現$\sin\theta$的方程式為二次方程式，便可證明任意三角形分切解的唯二性。

PS.若D點在三角形的頂點上時，無法稱為分切解。

假設： $\angle CBA=\alpha,\ \angle BAC=\beta\ \angle I_1CB=\theta_1,\ \angle I_2CA=\theta_2$(假設已知$\alpha,\beta,c$)

原內切圓半徑 R, 兩分割切內切圓半徑$r_1=R\sin\theta, r_2=R\cos\theta$



令$\overline{CD}=L$, 且 L 垂直於$\overline{AB}$

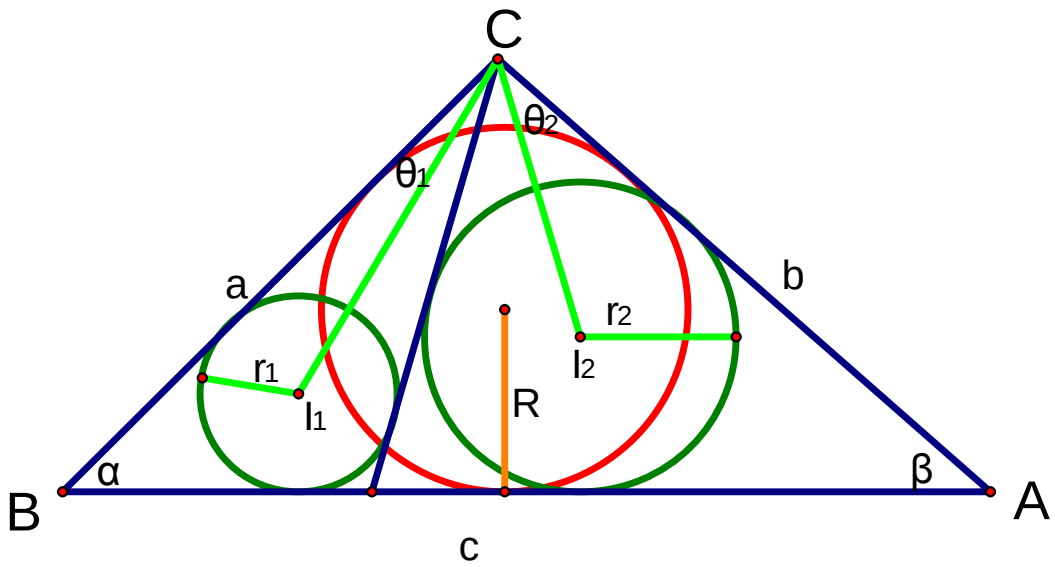
$\overline{BD}=Lcot\alpha, \overline{AD}=Lcot\beta$

而$Lcot\alpha\ +Lcot\beta=c\ \therefore \boldsymbol{L}=\frac{c}{cot\alpha+cot\beta}$

$\mathbf{a}=Lcsc\alpha=\frac{csc\alpha}{cot\alpha+cot\beta}c=\frac{\frac{sec\alpha}{tan\alpha}}{\frac{tan\alpha+tan\beta}{tan\alpha tan\beta}}c=\frac{sec\alpha tan\beta}{tan\alpha+tan\beta}c$ 同理, $\boldsymbol{b}=\frac{sec\alpha tan\alpha}{tan\alpha+tan\beta}c$

三角形的面積$=\frac{1}{2}c\times L=\frac{1}{2}c^2\frac{tan\alpha tan\beta}{tan\alpha+tan\beta}$

$$R=\frac{2Area}{a+b+c}=\frac{c^2\frac{tan\alpha tan\beta}{tan\alpha+tan\beta}}{\frac{sec\alpha tan\beta}{tan\alpha+tan\beta}c+\frac{sec\alpha tan\alpha}{tan\alpha+tan\beta}c+\frac{tan\alpha+tan\beta}{tan\alpha+tan\beta}c}=\frac{c\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}$$



證明：

$\mathbf{R^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2}$(分切解的成立)

$\tan\theta_1 = \frac{r_1}{a - r_1\cot\frac{\alpha}{2}}, \tan\theta_2 = \frac{r_2}{b - r_2\cot\frac{\beta}{2}}$

以兩種不同的表示方法表示$\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

(1)$\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \tan\left(90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{r_1\left(b - r_2\cot\frac{\beta}{2}\right) + r_2\left(a - r_1\cot\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(a - r_1\cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(b - r_2\cot\frac{\beta}{2}\right) - r_1r_2}$

(2)$\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}$

將兩種表示方法作交叉相乘:

$$\left[\left(a - r_1\cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(b - r_2\cot\frac{\beta}{2}\right) - r_1r_2\right]\left[1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right]$$

$$= \left[r_1\left(b - r_2\cot\frac{\beta}{2}\right) + r_2\left(a - r_1\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= r_1\left[b\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_2\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + 1\right)\right] + r_2\left[a\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_1\left(\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2} + 1\right)\right]$$

(作交叉相乘，並且將其因式分解)

$$\left[ab - ar_2\cot\frac{\beta}{2} - br_1\cot\frac{\alpha}{2} + r_1r_2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - r_1r_2\right]\left[1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right]$$

$$= r_1\left[b\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_2\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + 1\right)\right] + r_2\left[a\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_1\left(\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2} + 1\right)\right]$$

（將原式展開）

$$\left[ab - ar_2\cot\frac{\beta}{2} - br_1\cot\frac{\alpha}{2} + r_1r_2\left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - 1\right)\right]$$

$$-\left[ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} - ar_2\tan\frac{\alpha}{2} - br_1\tan\frac{\beta}{2} + r_1r_2\left(1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= r_1\left[b\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_2\left(\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + 1\right)\right] + r_2\left[a\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) - r_1\left(\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2} + 1\right)\right]$$

（因式分解）

$$\left[ab - ar_2\cot\frac{\beta}{2} - br_1\cot\frac{\alpha}{2} + r_1r_2\left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$-\left[ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + r_1r_2\left(-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= r_1\left(b\tan\frac{\alpha}{2} - r_2\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\right) + r_2\left(a\tan\frac{\beta}{2} - r_1\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\right)$$

（利用等量減法公理，消去相同式子）

$$ab - ar_2\cot\frac{\beta}{2} - br_1\cot\frac{\alpha}{2} + r_1r_2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + r_1r_2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$$

$$= r_1\,b\tan\frac{\alpha}{2} - r_1r_2\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + r_2a\tan\frac{\beta}{2} - r_1r_2\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

（展開式子）

$$r_1r_2\left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\right)-r_1\left(b\cot\frac{\alpha}{2}+b\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-r_2\left(a\cot\frac{\beta}{2}+a\tan\frac{\beta}{2}\right)+ab\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)=0$$

（移項並且因式分解）

$$\sin\theta\cos\theta R^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)\left(\tan\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)-\cos\theta Rb\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\theta Ra\left(\tan\frac{\beta}{2}-\cot\frac{\beta}{2}\right)+ab\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)=0$$

（代入$r_1=R\sin\theta, r_2=R\cos\theta$）

得到方程式

$$\left[\sin\theta R\left(\tan\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)-b\right]\left[\cos\theta R\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)-a\right]-ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=0$$

Define：上式 $(A\sin\theta+B)(C\cos\theta+D)-E=0$

其中:

$$A=R\left(\tan\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)=R\frac{2}{\sin\beta}=\frac{C\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times\frac{2}{\sin\beta}$$

$$B=-b=-\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C$$

$$C=R\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)=R\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{C\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times\frac{2}{\sin\alpha}$$

$$D=-a=-\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C$$

$$E=ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{1}{c}\left(\frac{E}{A\sin\theta+B}-D\right)$$

將cosθ 換成sinθ 得一sin θ的方程式：

$$1-\sin^2\theta=\frac{1}{c^2}\left(\frac{(E-AD\sin\theta-BD)^2}{(A\sin\theta+B)^2}\right)$$

$$C^2(1-\sin^2\theta)(A\sin\theta+B)^2$$

$$=(E-AD\sin\theta-BD)^2$$

$$=-2ADE\sin\theta+2ABD^2\sin\theta-2BDE+E^2+A^2D^2\sin^2\theta+B^2D^2$$

得一四次方程式：

$$-A^2C^2\sin^4\theta-2ABC^2\sin^3\theta+(A^2C^2-B^2C^2-A^2D^2)\sin^2\theta$$
$$+2(ABC^2+ADE-ABD^2)\sin\theta+B^2C^2+2BDE-B^2D^2-E^2=0$$

由於sin θ =0, 1時，動點會在頂點上，不過此狀況並不屬於分切解，所以我們必須證明出此四次方程式包含這兩組解，才能將它化為一個二次方程式

（1） 代入 $\sin\theta=0$後，若要使此方程式成立，則常數項為 0：

$$B^2C^2-B^2D^2+2BDE-E^2=0$$

$$\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2\left(\frac{C\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times\frac{2}{\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2$$

$$+2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2-\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C\right)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}=0$$

(代入上面所假設的 A、B、C、D、E)

$$\left[\frac{2}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times(\tan\alpha+\tan\beta)\right]^2=1-2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

(利用等量除法公理之後，移項)

$$\left[\frac{2}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times(\tan\alpha+\tan\beta)\right]^2=\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)^2$$

（差平方公式）

Define: $\tan\frac{\alpha}{2}=x\ \tan\frac{\beta}{2}=y$

且 $\frac{2}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times(\tan\alpha+\tan\beta)>0$

平方之後，取正值或負值只要一種成立，此等式便會成立，故先取正值。

開根後移項：

$$2(\tan\alpha+\tan\beta)=(1-xy)(\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta)$$

將每一項換成x、y的形式：

$$2\left(\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}\right)=(1-xy)\left(\frac{2y}{1-y^2}\times\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}\times\frac{1+y^2}{1-y^2}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}\right)$$

（各個三角函數值的轉換可以利用作直角三角形的方式輔助思考）

同乘$(1-x^2)(1-y^2)$再化簡：

$$4[x(1-y^2)+y(1-x^2)]=(1-xy)[2y(1+x^2)+2x(1+y^2)+2x(1-y^2)+2y(1-x^2)]$$

$$4(x-xy^2+y-x^2y)=(1-xy)(4y+4x)$$

同乘$\frac{1}{4}$展開方程式：

$x-xy^2+y-x^2y=y-xy^2+x-x^2y\rightarrow 0=0$（合，故存在$\sin\theta=0$這組解）

（2） 代入 $\sin\theta=1$後，若要使此方程式成立，則各項係數和為 0：

$$-A^2C^2-2ABC^2+A^2C^2-B^2C^2-A^2D+2(ABC^2-ABD^2+ADE)=0$$

$$-b^2(R\frac{2}{\sin\alpha})^2-a^2\left(R\frac{2}{\sin\beta}\right)^2+2a^2b\left(R\frac{2}{\sin\beta}\right)^2+2\left(R\frac{2}{\sin\beta}\right)(-a)\left(ab\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)=0$$

$$-Rb^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2-Ra^2\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)^2+a^2b\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)-a^2b\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)=0$$

$$2R\left(\frac{c\sec\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)=a^2b\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\right)\left(\frac{\sec\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)^2\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)\left(\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\right)(\tan\alpha+\tan\beta)=\tan\alpha\tan\beta\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

Define：$x=\tan\frac{\alpha}{2}$，$y=\tan\frac{\beta}{2}$

將上式改以 x,y 表示:

$$\tan\alpha=\frac{2x}{1-x^2},\tan\beta=\frac{2y}{1-y^2},\sec\alpha=\frac{1+x^2}{1-x^2},\sec\beta=\frac{1+y^2}{1-y^2}$$

$$2\left(\frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)}{\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}}\right)\left(\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}\right)=\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)(1-xy)$$

$$2\left(\frac{4xy}{2y(1+x^2)+2x(1+y^2)+2y(1-x^2)+2x(1-y^2)}\right)\left(\frac{2x(1-y^2)+2y(1-x^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}\right)=(1-xy)\frac{4xy}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$$2\left(\frac{1}{4x+4y}\right)[2x(1-y^2)+2y(1-x^2)]=1-xy$$

$$\frac{1}{x+y}(x-xy^2+y-x^2y)=1-xy$$

$$1-xy=1-xy$$

$0=0$(合，故存在**$\sin\theta=1$這組解**)

綜合以上的證明，我們發現此四次方程式有$\sin\theta=0,1$兩組解，由於它不符合分切解的條件，所以可以將它化為一個二次方程式，而我們也成功證明出任意三角形分切解的唯二性。

【性質四】若任意三角形存在分切解，則其分切解必定存在交換解。

簡述：

我們前面已經證明出任意三角形分切解數目的唯二性，而根據前面研究可知直角三角形的高切解存在一個交換解，因此我們也想知道任意三角形的分切解是否同樣存在交換解，而我們的證明方式是利用到前面的二次方程式，假如方程式的兩根平方和為 1，則可證明出它的分切解必定存在交換解。

證明：

由前面「**直角三角形有兩組分切解**」證明過程中得知：

$$-A^2C^2-2ABC^2+A^2C^2-B^2C^2-A^2D+2(ABC^2-ABD^2+ADE)=0$$

Define:F+G+H+I=0

其中: $\mathbf{F=-A^2C^2}$

$\mathbf{G=-2ABC^2}$

$\mathbf{H=(A^2C^2-B^2C^2-A^2D)}$

$\mathbf{I=2(ABC^2-ABD^2+ADE)}$

根據前面的證明，我們知道這個四次方程式存在 $\sin\theta=1,0$ 這兩組解，因此我們將此四次方程式除以 $\sin\theta=1,0$：

$$(F\sin^3\theta+G\sin^2\theta+H\sin\theta+I)\div(\sin\theta-1)=[F\sin^2\theta+(G+F)\sin\theta+(H+G+F)]$$

兩根平方和的表示方法：

$$\left(\frac{-(G+F)+\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\right)^2+\left(\frac{-(G+F)-\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\right)^2$$

利用乘法公式，可得 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，故試求兩根的和平方以及乘積：

$$\frac{-(G+F)+\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\times\frac{-(G+F)-\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}$$

$$=\frac{1}{4F^2}[(G+F)^2-(G+F)^2+4F(H+G+F)]$$

$$=\frac{H+G+F}{F}$$

$$\left[\frac{-(G+F)+\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}+\frac{-(G+F)-\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\right]^2$$

$$=\frac{(G+F)^2}{F^2}$$

$$\left(\frac{-(G+F)+\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\right)^2+\left(\frac{-(G+F)-\sqrt{(G+F)^2-4F(H+G+F)}}{2F}\right)^2$$

$$=\frac{(G+F)^2}{F^2}-2\times\frac{H+G+F}{F}$$

$$=1+\left(\frac{G^2+2GF}{F^2}-2\times\frac{H+G+F}{F}\right)$$

$$=1+\frac{1}{F^2}(G^2-2FH-2F^2)$$

$$=1+\frac{1}{F^2}[(-2ABC^2)^2-2(-A^2C^2)(A^2C^2-B^2C^2-A^2D^2)-2(-A^2C^2)^2]$$

$$=1+\frac{1}{F^2}\{4A^2B^2C^2-2[-A^2C^2(-B^2C^2-A^2D^2)]\}$$

$$=1+\frac{2A^2C^2}{F^2}(B^2C^2-A^2D^2)$$

將前面所假設的 **A**、**B**、**C**、**D** 代入式子中：

$$A=R\left(\tan\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)=R\frac{2}{\sin\beta}=\frac{C\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times\frac{2}{\sin\beta}$$

$$B=-b=-\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}C$$

$$C=R\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)=R\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{C\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta\sec\alpha+\tan\alpha\sec\beta+\tan\alpha+\tan\beta}\times\frac{2}{\sin\alpha}$$

$$D=-a=-\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}C$$

$$1+\frac{2A^2C^2}{F^2}(B^2C^2-A^2D^2)$$

$$=1+\frac{2A^2C^2}{F^2}(2b^2R^2\csc^2\alpha-2a^2R^2\csc^2\beta)$$

$$=1+\frac{2R^2A^2C^4}{F^2}\left[\left(\frac{\tan\alpha\sec\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)^2\csc^2\alpha-\left(\frac{\tan\beta\sec\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}\right)^2\csc^2\beta\right]$$

$$=1$$

我們證明出這二次方程式的兩根平方和為 **1**，也就是任意三角形的分切解必存在交換解。

【性質五】判別式

簡述：

在我們知道直角三角形存在分切解後，我們便好奇究竟三角形在什麼限制條件下有分切解存在，而利用 GSP 作圖後，發現正三角形是不存在的，而鈍角三角形是必定存在的，因此最初我們提出了一個假設就是分割角在 90°以上時才有分切解，不過這只是一個很粗略的假設，因為當我們以 89°切割時，也是存在分切解的，所以不可以直接以角度作推斷，於是我們試推導代數不等式以判斷三角形是否存在分切解。

利用 GSP 觀察各類三角形 → 發現正三角形無解，及鈍角三角形必定有解 → 假設只有分割角為直角與鈍角有解 → 確認假設，觀察一分割角為 89°的三角形是否有解 → 發現此分割角為 89°的三角形有解 → 此假設需被修正 → 推導出一代數不等式作為判別式

已知二次方程式如下(見前面證明):

令$x = \sin\theta$

$Fx^2 + (G+F)x + (F+G+H) = 0$

假設 $x_{1,2} = \varepsilon \pm \delta,\ \varepsilon = \frac{-(G+F)}{2F}$, $\delta = \frac{\sqrt{(G+F)^2 - 4F(F+G+H)}}{2F}$ (若δ為實數，則定義其為非負實數)

1. **δ為實數的判別式**

利用$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$(性質四)，

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(\varepsilon^2 + \delta^2) = 1$

δ 為實數的條件為$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \varepsilon = \frac{-(G+F)}{2F} = \frac{-1}{2} - \frac{G}{2F} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

因為 $\frac{G}{F} = \frac{-2ABC^2}{-A^2C^2} = \frac{2B}{A} = \frac{-2b}{R\frac{2}{\sin\beta}} = -\frac{b}{R}\sin\beta = \frac{-h}{R}$ (h 為 c 上的高)，

所以$\varepsilon = \frac{-1}{2} - \frac{G}{2F} = \frac{-1}{2} + \frac{h}{2R}$, 由於$2R < h$，故$\varepsilon > \frac{1}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$必定成立。

又 $\frac{-1}{2} - \frac{G}{2F} = \frac{-1}{2} + \frac{h}{2R} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sqrt{2} + 1 \ge \frac{h}{R}$$

$\sqrt{2}+1 \geq \frac{h}{\frac{2Area}{a+b+c}}$ (Area 為三角形的面積)

$$\sqrt{2}+1 \geq \frac{h(a+b+c)}{ch}$$

$$\sqrt{2}+1 \geq \frac{a+b+c}{c}$$

$c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ ，**此式為δ為實數的判別式。**

利用餘弦定理:$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (γ是c的對角角度) 代入$c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

可得$2(a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma) \geq a^2 + b^2 + 2ab$

$a^2 + b^2 \geq 2ab + 4ab\cos\gamma$

$(a-b)^2 \geq 4ab\cos\gamma$

$\cos\gamma \leq \frac{(a-b)^2}{4ab}$ ，此式也等價為δ 為實數的判別式，鈍角三角形必符合。

2. 證明δ為實數必存在一解

假設δ 為實數，

因 ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$(性質四)，$x_1 = \varepsilon + \delta < 1$，

又 $\varepsilon > \frac{1}{2}$，所以 $\delta < \frac{1}{2}$。

$0 < x_2 = \varepsilon - \delta < 1$，$x_2$為一解，得證。

若符合判別式，則必有一解。

【性質六】任意三角形的分切解必存在交換解

假設三角形存在分切解但這組分切解不存在交換解，

因為存在分切解所以δ是實數，且依據定義δ為非負實數。

因為 ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ (性質四)， 而$x_1 < 1,\ x_2 < 1$

所以 $x_{1,2} = \varepsilon \pm \delta$ 為一正(分切解)一負(非交換解),

又 $\varepsilon > \frac{1}{2} > 0$(參見性質五證明)

1. **若x_1非交換解，$\boldsymbol{\varepsilon + \delta < 0}$**，$\delta < \frac{-1}{2}$(矛盾，因為δ為非負實數)。

2. **若x_2非交換解，$\boldsymbol{\varepsilon - \delta < 0}$**，$\delta > \frac{1}{2}$，$x_1 = \varepsilon + \delta > 1$ (矛盾，因為x_1非分切解)

根據反證法，三角形分切解則必存在交換解。

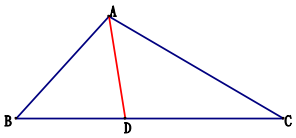
搭配性質五，若符合判別式，則兩解同時成立。

【性質七】一個三角形中最多只有兩個分割角可以使分切解成立。

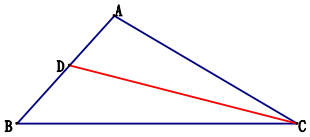
簡述：

前面的研究我們主要以該三角形的最大角作為分割角，而我們也很好奇那若以其它的角作為分割角，是否也會存在分切解? 我們先以 GSP 針對直角三角形進行測試，發現當以非直角頂點切割時就不存在分切解了，接著我們也想將此問題延伸至任意三角形。我們的目標是利用代數不等式，證明出一個三角形最多只有兩個分割角可以使分切解成立。

直角三角形以非直角頂點切割無解 → 延伸至任意三角形的問題



以∠A分割時有解



以∠C分割是否有解？

先假設以三角形的其中一個頂點切割有解:

$$c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}} \rightarrow a \leq \sqrt{2}c - b$$

再假設以另一個頂點切割有解:

$$a \geq \frac{c+b}{\sqrt{2}}$$

將$a \leq \sqrt{2}c - b$代入

$$\sqrt{2}c - b \geq a \geq \frac{c+b}{\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}c - b \geq \frac{c+b}{\sqrt{2}}$$

$c - b(1+\sqrt{2}) \geq 0$ (有可能成立)

若以第三個頂點切割仍存有分切解，則

$$b \geq \frac{a+c}{\sqrt{2}}$$

將第二個解的關係式化簡

$$a \geq \frac{c+b}{\sqrt{2}} \rightarrow b \leq \sqrt{2}a - c$$

將 $b \leq \sqrt{2}a - c$ 和 $b \leq \sqrt{2}c - a$ 分別代入 $b \geq \frac{a+c}{\sqrt{2}}$

$a - c(1+\sqrt{2}) \geq 0 \rightarrow a > c$,

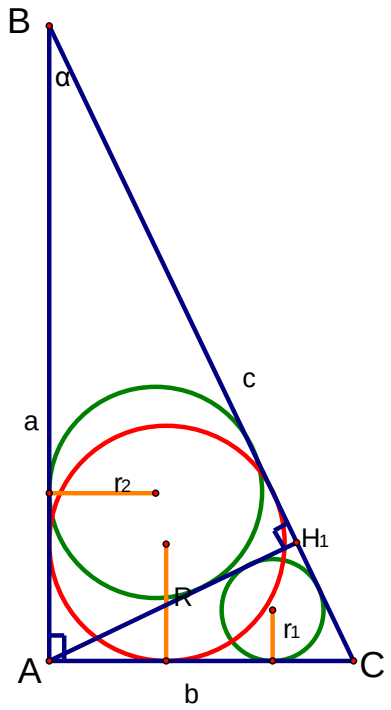
$c - a(1+\sqrt{2}) \geq 0 \rightarrow c > a$ (矛盾)

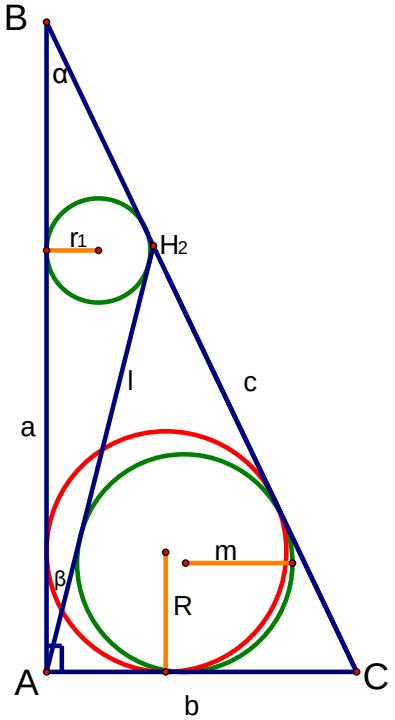
故任意三角形最多只有兩個頂點作為分割角時有解。

伍、研究分析與討論

一、以尺規作圖作出直角三角形兩組分切解

(一) 原理與證明：直角三角形兩分切解分割線之長度和與原三角形之斜邊長相等。





已知：一直角三角形 ABC，$\angle A$為直角，$\overline{AH_1}$為$\overline{BC}$邊上的高，$\overline{AH_2}$為交換解之分割線

求證：$\overline{AH_1}+\overline{AH_2}=\overline{BC}$

證明：

由「直角三角形必存在交換解」證明過程中得知

直角三角形以斜邊上的高$\overline{AD}$為 $c\sin\alpha\cos\alpha$，

交換解分割線$\overline{AE}$為 $\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)$

$\overline{AE}+\overline{AD}$

$$=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)+c\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$

$$=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1)+c\times\frac{2x}{1+x^2}\times\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^3+2x^2-2x+1+2x-2x^3)$$

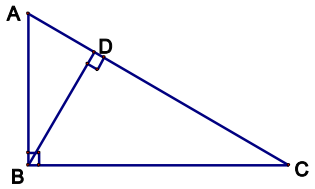
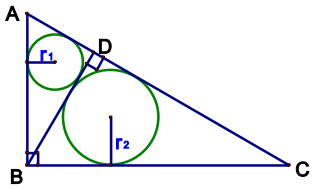
$$=\frac{c}{(1+x^2)^2}(x^4+2x^2+1)$$

$=c$(斜邊)

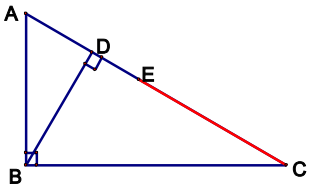
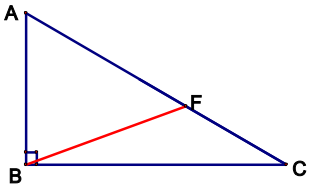
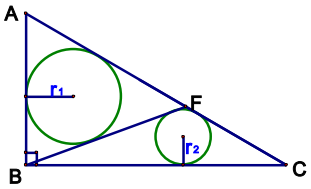
得證直角三角形兩分切解分割線之長度和與原三角形之斜邊長相等

(一) 作圖：

第一階段：高切解尺規作圖

步驟	作法	圖例
1	直角三角形有一分切解為高切解 作一條$\overline{AC}$上的高$\overline{BD}$。	
2	作兩分割內切圓，即滿足 $r_1{}^2 + r_2{}^2 = R^2$，所求為一高切解	

第二階段：交換解尺規作圖

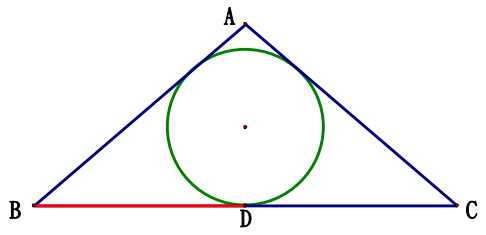
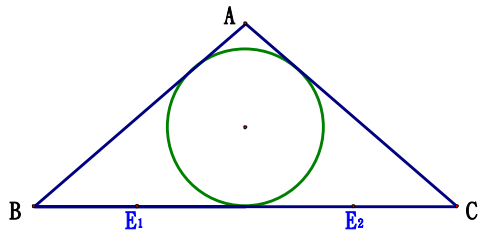
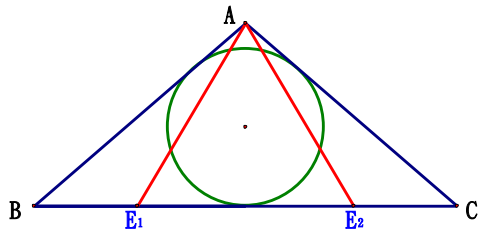
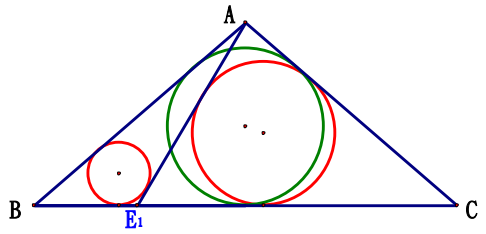
步驟	作法	圖例
1	利用兩分切解分割線長度和=斜邊長 作一條$\overline{CE}$=$\overline{AC}$-$\overline{BD}$。	
2	(1) 以 B 為圓心，$\overline{CE}$為半徑畫弧，設交於$\overline{BC}$上一點 F。 (2) 連接$\overline{BF}$即為交換解的分割線。	
3	分別作兩分割內切圓。此時 $r_1{}^2 + r_2{}^2 = R^2$，所求為一交換解。	

不過此方法，在某些直角三角形上有特例。若交換解之分割線長小於直角三角形的兩股長，則作弧時，斜邊上會有兩個交點，不過利用交換解中兩圓位置交換的概念，仍可以判斷哪一條為交換解時的分割線，故作出交換解依舊是可行的。

二、以尺規作圖作出等腰三角形兩組分切解

(一) 原理：若一等腰三角形有分切解存在,則兩分割線等長,且長度和與切割角對邊相等。

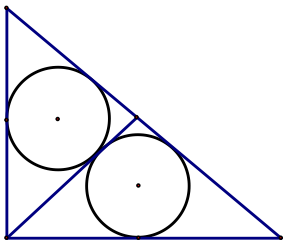
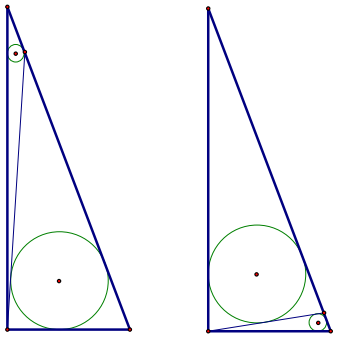
(二) 作圖：

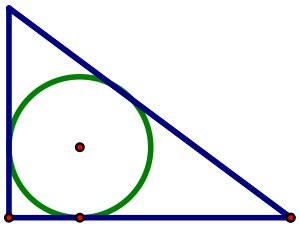
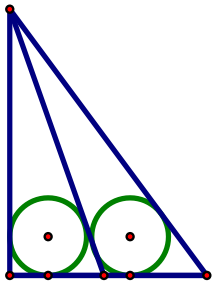
步驟	簡述	圖例
1	因為兩分割線等長且其長度和與切割角的對邊長相等，所以為求出分割線長，先作出$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	
2	以分割角為頂點，$\frac{1}{2}\overline{BC}$為半徑長畫弧	
3	將邊上交點與分割角作連線即為其分割線之位置	
4	作出分割內切圓，即完成等腰三角形之兩分切解尺規作圖 （僅示範其中一分切解）	

三、直角三角形以直角頂點切割、非直角頂點切割時的分割內切圓面積極值

簡述：

從共邊三角形這份作品中，我們可以得知當直角三角形以直角頂點作切割時，兩圓等大則有面積和的最大值，因此我們也好奇它的最小值，以及改以非直角頂點切割時的面積和極值問題。以下的表格為我們的研究結果。

直角三角形以直角頂點切割		
最大值		兩圓等大
最小值		有交換解的性質

直角三角形以非直角頂點切割		
最大值		由於當動點不在頂點上時 ，$r_1{}^2 + r_2{}^2 - R^2$恆負 所以當動點停在頂點上時有最大值
最小值		兩圓等大

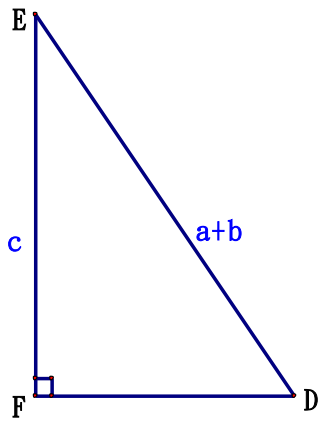
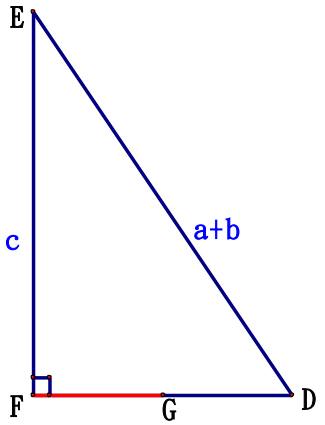
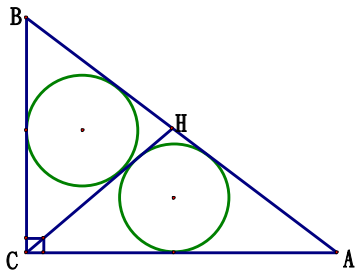
四、以尺規作圖作出直角三角形以直角頂點切割時的最大值

(一) 原理：直角三角形以直角頂點切割,兩分割內切圓大小相等時有面積和最大值。

簡述:

根據第 51 屆作品「共邊三角形的內切圓」，我們得知當直角三角形以直角頂點切割時，兩圓等大會有分割內切圓面積和之最大值。另外，我們也閱讀了「數學傳播」第 35 卷第 4 期之有關三角形內切圓等分線的一些不等式，得到了兩圓等大時的分割線長度公式，我們將這兩個性質結合後，推廣出直角三角形以直角頂點切割時的最大值尺規作圖法。

(二) 作圖:

步驟	作法	圖例
1	利用**等分線公式**$\sqrt{s(s-c)}$ s(半周長)=$\frac{a+b+c}{2}$，c 為對邊長 $\sqrt{s(s-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2-c^2}$ (利用此式可作一直角三角形)	
2	由步驟 2，可知$\overline{FD}$為$\sqrt{(a+b)^2-c^2}$， 因此$\frac{1}{2}\ \overline{FD}=\overline{FG}$即為此分割線長度	
3	(1)以原直角三角形 ABC 的 A 為圓心，分割線長為半徑畫弧，交於$\overline{AB}$上的一點 H (2)連接$\overline{CH}$即為所求(分割線) (3)並分別作出兩分割內切圓 此為兩分割內切圓面積和最大值狀況	

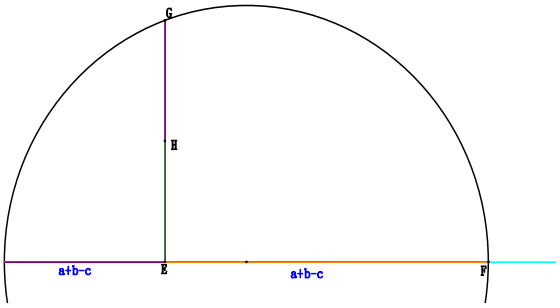
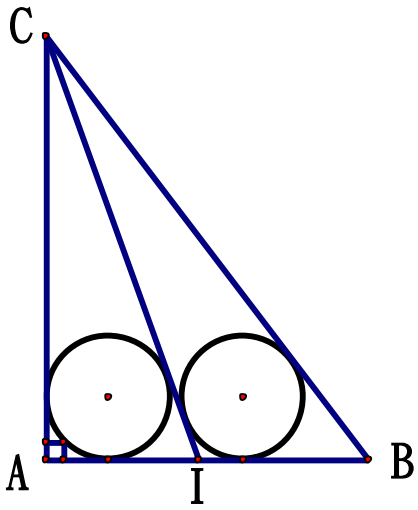
五、以尺規作圖作出直角三角形以非直角頂點切割時的最小值

(一) 原理：直角三角形以非直角頂點切割,兩分割內切圓等大有面積和最小值

簡述:

「共邊三角形的內切圓」這份作品，主要研究為直角三角形以直角頂點切割時的狀況，故我們也好奇以其他頂點切割時的分割內切圓面積和狀況，利用 GSP 作圖後我們發現，當**直角三角形以非直角頂點切割時，兩圓等大會有最小值**，和以直角頂點切割會有最大值的情況相反。而根據「數學傳播」提供的等分線公式，我們又可以研發出以尺規作圖作出直角三角形以非直角頂點切割時的最小值方法。

(二) 作法:

步驟	作法	圖例
1	利用**等分線公式**$\sqrt{s(s-c)}$ s(半周長)=$\frac{a+b+c}{2}$，c 為對邊長 **再利用子母相似性質作出** $\overline{EH}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)}$	
2	(1)以原直角三角形 ABC 的 C 為圓心，$\overline{EH}$為半徑畫弧，交於$\overline{AB}$上的一點 I。 (2)連接$\overline{CI}$即為所求(分割線)。 (3) 分別作出兩分割內切圓。 此為兩分割內切圓面積和最小值狀況。	

陸、研究結果

一、 三角形分切解與交換解的探討結果

◆ 直角三角形必定存在高切解以及交換解。

◆ 任意三角形若有分切解存在則必定有交換解。

◆ 分切解有唯二性。

二、 三角形是否存在分切解之判別式推導結果

◆ 當三角形滿足$\cos\gamma \leq \frac{(a-b)^2}{4ab}$時則存在分切解及其交換解(鈍角三角形必定存在)

三、 一個三角形最多可由幾個頂點切割有解的探討結果

◆ 一個三角形最多只有從兩個頂點分割時有分切解的存在。

五、 利用尺規作圖可作出鈍角等腰三角形以及直角三角形的分切解

◆ 直角三角形時的兩分切解之分割線長度和與斜邊長相等。利用此性質可作出分切解，作法如前文所述。

◆ 等腰鈍角三角形時的兩分割線長度相等，且長度和與鈍角的對邊長相等。利用此性質可作出分切解，作法如前文所述。

六、 直角三角形以不同頂點切割之分切解暨面積極值探討結果如下表

	分切解的存在	最大值	最小值
以直角頂點切割	存在	兩圓等大	未找出明確位子，不過有交換解
以非直角頂點切割	不存在	三角形頂點	兩圓等大

此外兩圓等大的情形也可以利用尺規作圖作出。

柒、未來展望

1.推廣至球面三角形

2.進一步找出任意三角形分切解的尺規作圖法

3.任意三角形的分割內切圓面積和極值

4.試證明出各類狀況(極值)

5.由內切圓推廣至外切圓、歐拉圓、外接圓以及旁切圓

6.加以延伸其特殊性質(連線圖形的逆推問題……)

7.分割內切圓半徑和的變化

捌、參考資料及其他

一、莊健祥，數學傳播，第三十五卷，第四期，第 82-85 頁（2011）。

二、陳俐安、陳品璇，「共邊三角形的內切圓」，第五十一屆全國中小學科展作品（2011）。

三、取自「科展群傑廳」：

http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9275

【評語】010013

本作品討論分割三角形內切圓面積和等於原三角形內切圓面積。作者推出一個三角形角度餘弦值存在分切解的條件，並證明分切解有唯二性。其實從幾何性質來看這些主要結果並不令人感到驚訝，但作者給出的證明卻是從較繁複的解析方式以方程式來處理，建議應多思考一下幾何性質。