2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010004

參展科別　數學

作品名稱　百動不如一靜

－固定策略玩家對奈許均衡的影響

得獎獎項　大會獎：四等獎

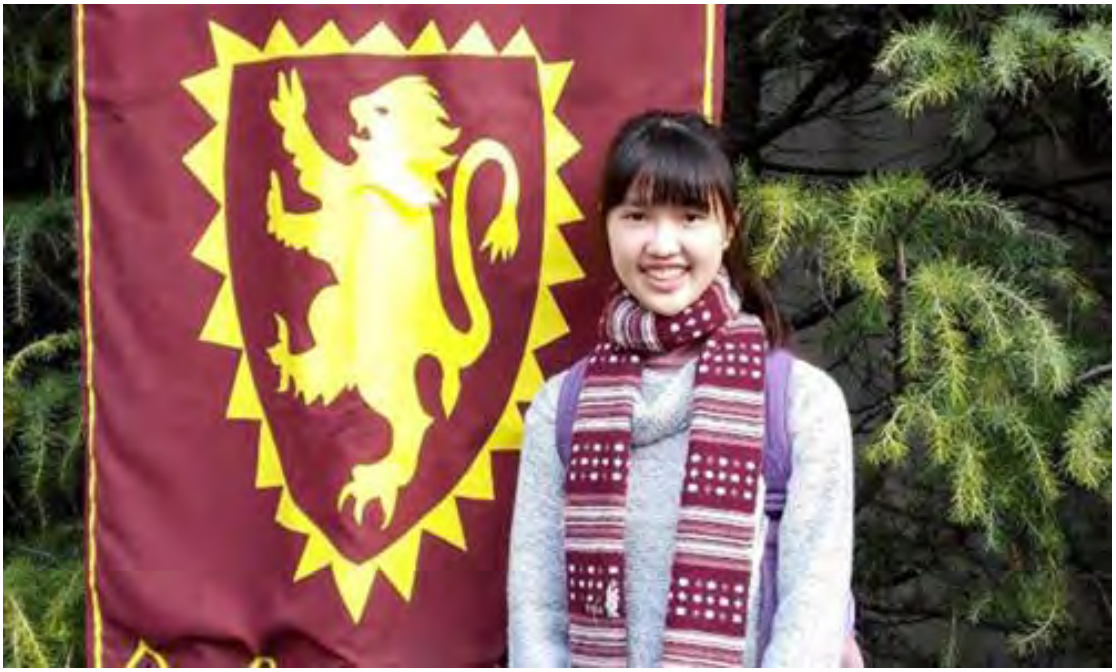
就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　謝怡君、吳承彥

作者姓名　林宛萱、黃伊晨、黃毅瑄

關鍵字　奈許均衡、沙灘賣冰模型、保證獲利

作者簡介



我是林宛萱，是新竹女中二年級的學生。在所有科目中，對數理方面比較感興趣，之前也有做過生物與化學的科展。雖然在數學方面表現並沒有特別突出，但平時喜歡思考一些有趣的數學問題，也會閱讀一些數學叢書，目前對於經濟方面比較有興趣。

這次很高興有機會可以參加國際科展，與各地的學生切磋交流，也有機會和教授分享我們的作品，非常榮幸。

我是黃伊晨，目前就讀於新竹女中二年級。在國中時有曾經想要做數學科展，但最後選擇了地科組。升上高中後，再一次有機會接觸科展，決定嘗試數學組。在研究的過程中，雖然會有很多需要付出勞力，但並不會因此而感到厭煩，覺得能從中獲得樂趣，並且可以學習到在課業、科展、社團中取得平衡。我本身很喜歡小孩，所以參加了一個每學期就會到國小辦一次營隊的社團，很喜歡付出的感覺。很高興這次能參加國際科展，能結交不同地方的朋友，以及交流大家的科展成果及想法。

我是黃毅瑄，目前就讀於新竹女中二年級。我討厭背東西但喜歡思考，對數字的感覺也很敏銳，並且喜歡解題後的成就感，因此理科相較於文科較為突出；雖然在國小國中時也有做過科展，但是我第一次嘗試做數學的，覺得很有趣，也能讓自己沉浸在其中。而課後閒暇時間我喜歡運動、唱歌和跳舞。

很慶幸自己有這次機會參與國際科展的盛會，能夠多方面地和各地學生交流，拓展自己地視野，真的十分榮幸。

摘要

在沙灘賣冰問題中，假設遊客平均分布在長度為 1 的沙灘上，並且沙灘上的攤販不論品質或價格都相同。因此遊客只會依據距離遠近選擇攤販；攤販則會為了擁有最大客源而不斷移動，直到任何移動皆不會使利益增加為止，這就是所謂的奈許均衡。

已知兩個攤販會集中在沙灘正中央，而三個攤販時無法達到均衡，四家或五家攤販會形成唯一一種均衡，若有六家以上的攤販則可能有不只一種均衡。由五家攤販的例子我們觀察到，若是選擇在$\frac{1}{2}$處固定不動，當其他四家攤販達成均衡時，就可以分得最大的利益範圍。因此，我們試著在三個攤販的情形中固定其中一家攤販的位置，發現若其中一個攤販在$\frac{1}{4}$的位置固定不動，則剩餘兩個攤販會集中在$\frac{3}{4}$形成均衡。此時固定攤販可以分得$\frac{1}{2}$，其餘兩家則各得$\frac{1}{4}$。於是在接下來的研究中，我們試著將此發現推廣至一般性。

我們研究發現，固定攤販的設攤位置，可以決定奈許均衡的存在性──使沒有均衡的例子產生均衡，或者破壞原本有的均衡；亦可以影響均衡的型態。最後我們提出了一個保證獲利的策略，使得採取適當的固定位置必定得到優於平均的利益。同時也證明了此策略為固定攤販獲利最大值(Max Minimum)，成功的將固定攤販利益最大值的情形推廣至一般化，並歸納出固定攤販位於各範圍時所形成的均衡以及利益範圍。

Abstract

In Hotelling's Location Model, we assume that the length of the beach is 1, customers are spread equally along the beach, and all vendors on the beach sell products of the same quality and price. Therefore each customer will always choose the nearest stand, while each of the vendors always relocates his stand to maximize his own market share by drawing the largest number of customers until they reach the Nash equilibrium.

It's known that in equilibrium, all members of a two-vendor market will gather in the middle of the beach, while no equilibrium exists when the number of vendors is three. However, we note that when the location of a vendor is fixed at the position $\frac{1}{4}$, the other two vendors will gather at the position $\frac{3}{4}$ due to self-interest, and thereby forms an equilibrium state. In this case, the market share of the vendor with a fixed position is 50%, significantly larger than the market average. We are interested in the influence of such a fixed-position vendor on the whole market and each vendor's profit.

Our analysis shows that the equilibrium outcome, including the existence and the patterns of Nash equilibrium, will be determined by the strategy of the vendor with a fixed position. Namely, a new equilibrium could be generated or an existing equilibrium might be destroyed by adding such a fixed-location vendor. Moreover, we introduce a profit-guaranteed strategy such that a profit higher than average can be ensured by adopting a proper fixed position.

壹、前言

一、　研究動機

在上數學課時，老師曾跟我們提起有關於經濟學上的沙灘賣冰理論。沙灘賣冰理論是在探討不同的攤販為獲得最大利益而會不斷改變自己的策略，當攤販不再變動時便達到奈許均衡。這個理論可解釋眾多人類行為，從企業對產品價格的設置，到選舉時候選人政治光譜的設定，皆可以沙灘賣冰理論來為其行為模式解釋。

我們在研究此模型時，想到若加入『不會隨著其他競爭者改變策略』的玩家，如同在沙灘賣冰模型中加入固定攤販，是否依舊可以形成均衡？於是我們試著找出固定攤販對奈許均衡存在性的影響，及其與其他攤販的獲利關係為何。

二、　研究目的

(一) 探討不同攤販數形成的奈許均衡及文獻回顧

(二) 探討固定攤販對奈許均衡的影響

(三) 固定攤販的保證獲利

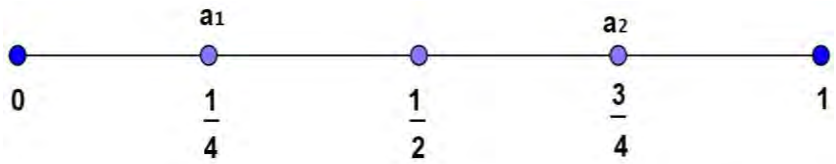
三、研究設備與器材

紙、筆、電腦、Geogebra

貳、研究過程與方法

在沙灘賣冰模型中，我們假設遊客是平均分布在沙灘上，且沙灘長度為 1，而沙灘上的攤販不論品質或價格都是相同的，因此遊客只會依據距離的遠近而選擇去較近的攤販消費。攤販則會為了擁有最大客源以獲得最大利益而不斷移動，直到任何移動皆不會使利益增加後便停下。當所有攤販都靜止時，便形成了奈許均衡。

奈許均衡(Nash equilibrium)是賽局理論中一種解的概念，以兩個攤販(a_1, a_2)的沙灘賣冰模型為例，理想的狀態是兩人分別設攤於$a_1 = \frac{1}{4}$與$a_2 = \frac{3}{4}$，這樣所有遊客為了買冰所走的距離都不會超過$\frac{1}{4}$，兩人也各分得$\frac{1}{2}$均等的利潤。



但事實上兩個攤販不會停在這個位置，因為只要往對方移動一點，就可以得到更多一點的客源。於是兩個攤販會不停往中間移動，直到兩人都停在$\frac{1}{2}$。此時不論哪一個人離開$\frac{1}{2}$，所得到的利益都會變小，因此兩個攤販便會固定在$\frac{1}{2}$的位置，不再移動。這就是奈許提出來的『均衡』概念。

定義(奈許均衡)：

假設一個賽局總共有 n 個參與者，每個參與者個策略空間分別為 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，報酬函數為 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，其中 $f_k : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$。當一組 $(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$，滿足

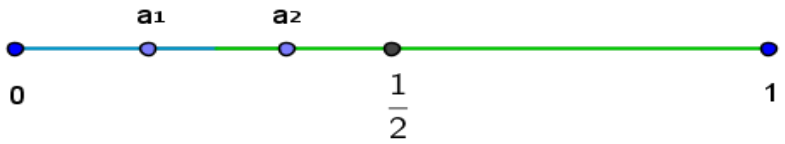
$$f_k(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_k^*, \cdots, a_n^*) \geq f_k(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_k, \cdots, a_n^*) \ \ \forall a_k \in S_k, k = 1, 2, \cdots, n,$$

則稱此策略組合$(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*)$為這個賽局的一組奈許均衡。

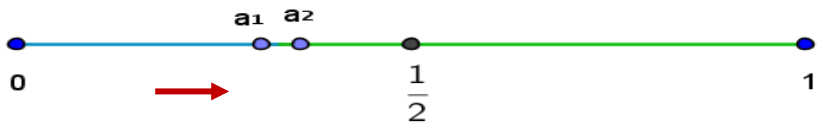
奈許均衡又稱為非合作賽局平衡，亦即在此種情況下沒有任何一個參與者可以透過獨自行動而增加收益。將此概念運用在我們的模型中，我們假設所有攤販的條件都是相同的，並且是各攤販的位置和移動策略均是共同知識 (common knowledge) ，因此我們不探討攤販是如何移動到均衡點，只探討攤販位於何點會達成均衡。

一、 沙灘賣冰模型的奈許均衡：

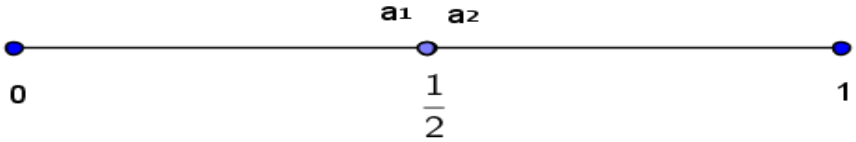
(一) 2 個攤販：



<圖 1-1.1>

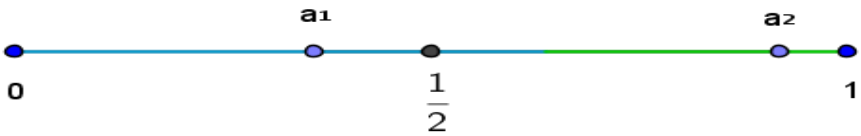


<圖 1-1.2>

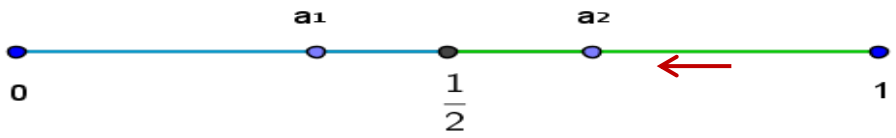


<圖 1-1.3>

若有兩家攤販 a_1、a_2 在沙灘上，若兩攤販位於 $\frac{1}{2}$ 同側，如<圖 1-1.1>所示，a_1、a_2 的利益範圍分別為藍色線段和綠色線段。則獲利較少的攤販 a_1 會往獲利較多的攤販 a_2 移動以獲得更大利益，如<圖 1-1.2>所示，直到兩點於非 $\frac{1}{2}$ 處重合時，其中一點必會往較長線段移動，而另外一點也會不斷跟進，直到兩點皆位於 $\frac{1}{2}$ ，如<圖 1-1.3>，移動後不會增加利益，便形成均衡。



<圖 1-1.4>



<圖 1-1.5>

若兩攤販分別位於$\frac{1}{2}$兩側，如<圖 1-1.4>，a_1、a_2的利益範圍分別為藍色線段和綠色線段。在這個情況下，兩個攤販會往$\frac{1}{2}$靠近，如<圖 1-1.5>所示。如果兩攤販在$\frac{1}{2}$處相遇，則兩點便會於此點形成均衡。如果兩攤販非位於$\frac{1}{2}$，則會與先前的情況一樣，其中一點必會往較長線段移動，而另外一點也會不斷跟進，直到兩點皆位於$\frac{1}{2}$，形成均衡。

因此我們可知不論兩者起始為何，必不斷往$\frac{1}{2}$移動，以獲得最大消費群。最後當兩攤販於$\frac{1}{2}$相遇時，因移動必減少利益，故兩攤販會在$\frac{1}{2}$處停止移動。當攤販因移動不會獲得更大利益因此停止移動時，便達到了奈許均衡。

結論：$n=2$ 時，均衡點為 $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2}$，且 a_1、a_2 可分得的利益範圍均為$\frac{1}{2}$。

證明： $n=2$ 且 $S_1=S_2=[0,1]$，則，

$$f_1(a_1,a_2)=\begin{cases}\frac{a_1+a_2}{2}, & if\ a_1<a_2\\ \frac{1}{2}, & if\ a_1=a_2\\ 1-\frac{a_1+a_2}{2}, & if\ a_1>a_2\end{cases}，\quad f_2(a_1,a_2)=\begin{cases}1-\frac{a_1+a_2}{2}, & if\ a_1<a_2\\ \frac{1}{2}, & if\ a_1=a_2\\ \frac{a_1+a_2}{2}, & if\ a_1>a_2\end{cases}。$$

因為 $f_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\geq f_1(a_1,\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{a_1+\frac{1}{2}}{2}, & if\ a_1<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & if\ a_1=\frac{1}{2}\\ 1-\frac{a_1+\frac{1}{2}}{2}, & if\ a_1>\frac{1}{2}\end{cases}$，且

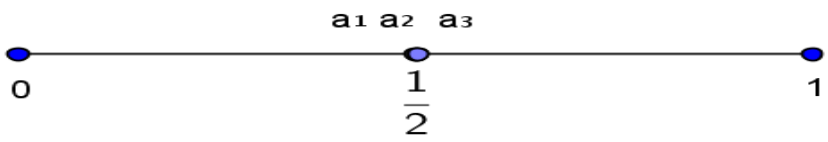
$$f_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\geq f_2(\frac{1}{2},a_2)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}+a_1}{2}, & if\ a_2<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & if\ a_2=\frac{1}{2}\\ 1-\dfrac{\frac{1}{2}+a_1}{2}, & if\ a_2>\frac{1}{2}\end{cases},$$

故 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 為此模型的一組亦是唯一的奈許均衡。■

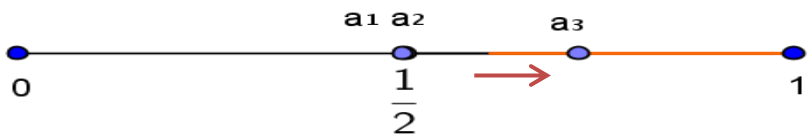
(二) 三個攤販：

三個攤販形成的可能均衡有三種可能：

1. 三攤販共點：

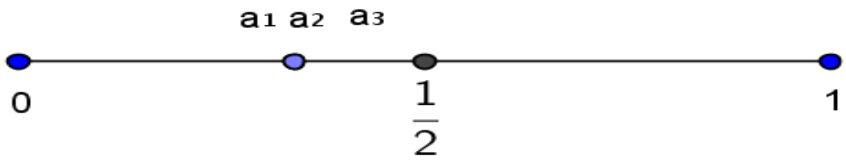


<圖 1-2-1.1>

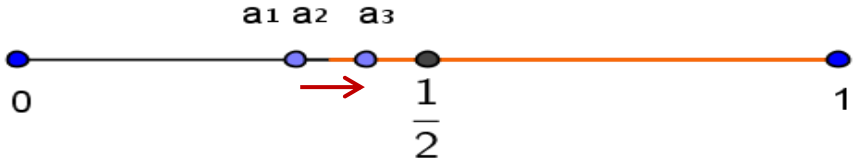


<圖 1-2-1.2>

當三個攤販於 $\frac{1}{2}$ 處共點時<圖 1-2-1.1>，每個攤販各得 $\frac{1}{3}$ 的利益，而此時若有一個攤販離開此點，則由於遊客會至較近之攤販消費，其必可獲得大於 $\frac{1}{3}$ 的利益<圖 1-2-1.2>，因此若三攤販共在 $\frac{1}{2}$ 處時，必有攤販會移動。



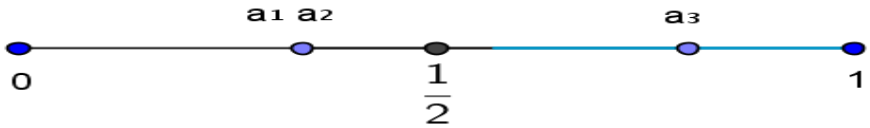
<圖 1-2-1.3>



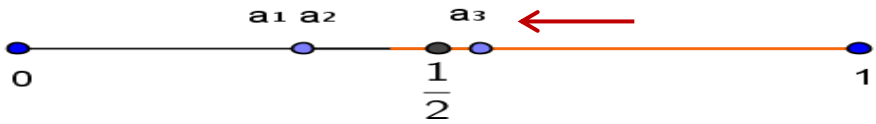
<圖 1-2-1.4>

若三個攤販非處 $\frac{1}{2}$ 的位置時<圖 1-2-1.3>，三個攤販同樣各可分得 $\frac{1}{3}$，而其中一攤販若往較長的一段沙灘移動<圖 1-2-1.4>，則其利益範圍為橘色線段，且其移動後獲利範圍必大於 $\frac{1}{3}$，於此情形攤販亦會移動。因此當三攤販共點時攤販必會移動，不會有均衡。

2. 兩攤販共點，另一攤販獨立：



<圖 1-2-2.1>

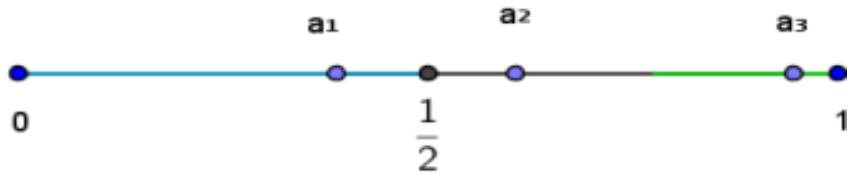


<圖 1-2-2.2>

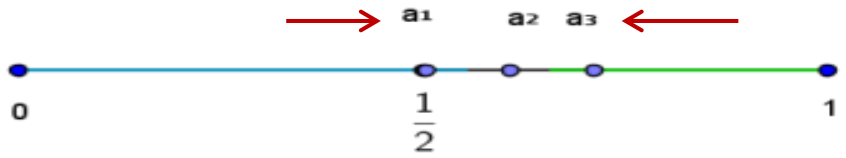
若是兩個攤販共點，兩個攤販 a_1、a_2 的利益範圍各為 $\frac{a_1+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}$，當 $\frac{a_1+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}$ 小於 a_1 時，a_1、a_2 只要往 0 處移動一點，便可獲得 $a_1+\frac{a_1+a_2}{2}$ 的利益，所以兩個攤販會分開。在此情況下兩個共點，一個獨立攤販不會形成均衡。若是 $\frac{a_1+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}$ 大於 a_1 時，因為離開後只能獲得少於 a_1 的利益，則兩點便不會分開，此時，由於共點與獨立攤販之間的利益需平分，因此獨立的攤販會不斷往兩個攤販的共點靠近，以瓜分更大的利益範圍。由<圖 1-2-2.1>和<圖 1-2-2.2>可知， a_3 原本的利益範圍為<圖 1-2-2.1>的藍色線段，移動

後其獲利範圍為<圖 1-2-2.2>的橘色線段，所以 a_3 往 a_1、a_2 靠近必可獲得較大利益。而當 a_3 不斷接近 a_1、a_2 時，獲利會漸漸變大，當其獲利大於 $\frac{1}{2}$ 時，a_1、a_2 的利益 $\frac{a_1+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}$ 必小於 $\frac{1}{2}$。此時，若聚集的兩個攤販其中一個會移動到 a_3 的另一邊，瓜分 a_3 的利益，必可獲得大於 $\frac{a_1+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}$ 的利益，所以在這種情況下，三個攤販亦無法形成均衡。綜合以上所有情形，證明兩攤販共點，一攤販獨立的情況下不會形成奈許均衡。

3. 三攤販皆不共點：



<圖 1-2-3.1>



<圖 1-2-3.2>

當三個攤販皆不共點時，其獲利範圍如<圖 1-1-3.1>所示，a_1、a_2、a_3 的利益範圍分別為藍色線段、黑色線段、綠色線段。在這個情況下 a_1、a_3 若往 a_2 靠近，則可獲得更多利益，如<圖 1-1-3.2>所示，移動後 a_1 和 a_3 的獲利範圍便增加了，而當 a_2 的獲益範圍不斷被壓縮時，其有可能移動到 a_1 或 a_3 的另一邊，瓜分他們的利益，使 a_1 或 a_3 取代 a_2 的位置。因此我們可以知道，在三個攤販皆不共點的情況下，不會形成奈許均衡。

綜合以上三種情形，我們知道在三攤販共點、兩攤販共點一攤販獨立或三攤販不共點的情況下皆不會形成均衡，因此三個攤販不可能形成均衡。

結論：$n=3$ 時，奈許均衡不存在。

並且根據上面的討論，我們可以得到以下的引理：

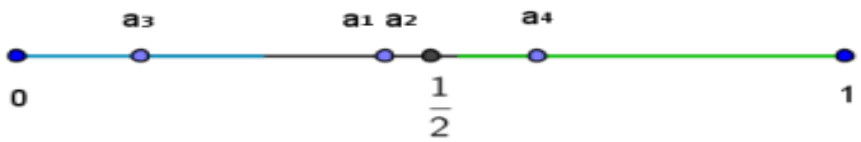
引理 1：達成均衡時，在任何一個位置上，最多只會有兩個攤販共點，並且共點攤販左右兩側分得的區域相等。

(三) 四個攤販：

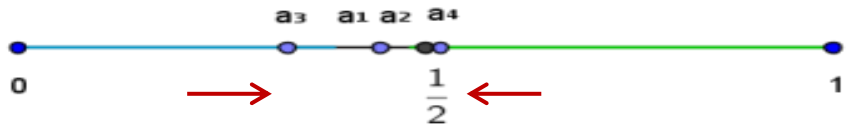
根據定理 1，四個攤販形成的均衡只可能有三種情形：

1. 兩個攤販共點，兩個攤販獨立：

(1) 共點攤販位於獨立攤販中間：



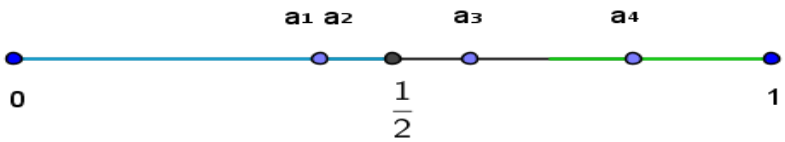
<圖 1-3-1.1>



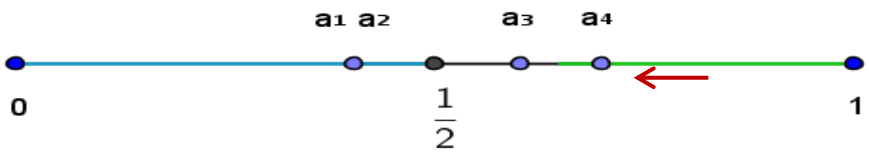
<圖 1-3-1.2>

此情形<圖 1-3-1.1>所示，兩獨立攤販的利益分別為藍色線段和綠色線段。由於各攤販的利益只會被鄰近攤販影響，因此在觀察利益時，我們只觀察共點攤販與獨立攤販，使得此情形與三個攤販中，兩個攤販共點，一攤販獨立的情形相同，因此可知兩個獨立攤販移動可獲得較大利益，如<圖 1-3-1.2>所示，兩攤販利益分別為藍色線段與綠色線段。

(2) 共點攤販非位於獨立攤販之間：



<圖 1-3-1.3>

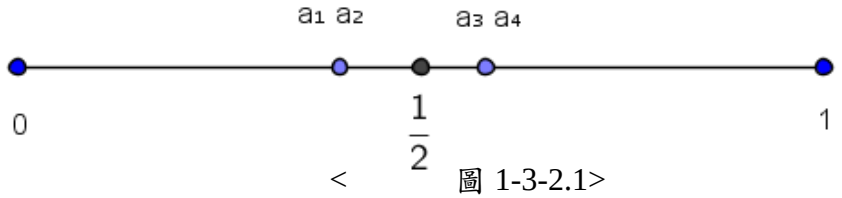


<圖 1-3-1.4>

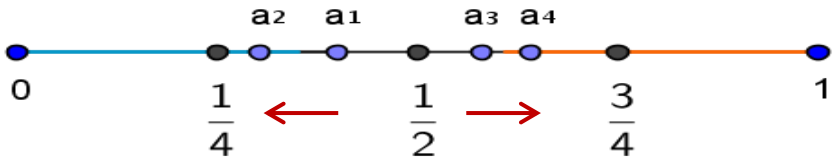
兩個攤販共點，兩個攤販獨立且共點攤販非位於獨立攤販中間的情況如<圖 1-3-1.3>所示。此時，獨立攤販 a_4 會往鄰近攤販靠近，瓜分更多利益，如<圖 1-3-1.4>所示，因此獨立攤販 a_4 會移動，不會形成均衡。而若是觀察共點攤販 a_1、a_2，這兩個攤販亦不會停留在一起，其中一攤販若離開此點，便可獲得更大利益，如同先前三個攤販中，兩個攤販共點，一攤販獨立的情形。因此可知此種情況不會有均衡。

綜合以上兩種情況，可知道在兩個攤販共點，兩個攤販獨立的情況下不會形成均衡。

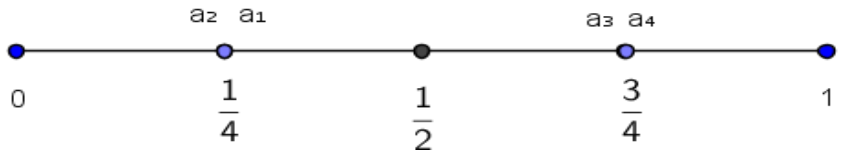
2. 攤販兩兩共點：



<圖 1-3-2.1>



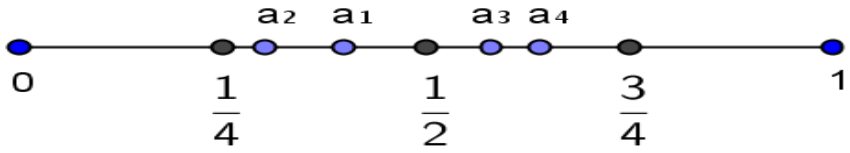
<圖 1-3-2.2>



<圖 1-3-2.3>

當攤販兩兩共點如<圖 1-3-2.1>時，必有攤販往兩側移動以獲得更大利益，如<圖 1-3-2.2>所示。而當有攤販離開此點，如<圖 1-3-2.2>中 a_2、a_4，則 a_1、a_3 因 a_2、a_4 移走，其獲利範圍減少，所以跟著移動到 a_2、a_4 的位置。若當 a_1、a_2、a_3、a_4 兩兩分別位於 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 處，如<圖 1-3-2.3>所示，此時每個攤販各可分得 $\frac{1}{4}$ 的利益，而攤販只要離開此點，獲得的利益必少於 $\frac{1}{4}$，所以沒有攤販會移動，便形成了奈許均衡。

3. 攤販皆不共點：



<圖 1-3-3.1>

攤販皆不共點如<圖 1-3-3.1>時，最邊緣的兩個攤販 a_2、a_4 必會往相鄰攤販靠近，以獲得更多利益，所以所有攤販皆不共點時，不可能形成均衡。

綜合以上三種可能，四個攤販形成的奈許均衡形式必為攤販兩兩聚集，均衡點 (a_1,a_2,a_3,a_4) 為 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ 。

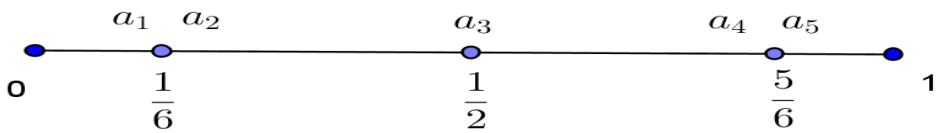
結論：$n=4$ 時，均衡點 (a_1,a_2,a_3,a_4) 為 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ 。

並且根據上面的討論，我們可以得到以下的引理：

引理 2：在均衡時，最靠近兩端點的攤販必定兩兩共點。

(四) 五個攤販：

根據《引理 2》，五個攤販的奈許均衡必定為 $(2,1,2)$ ，即獨立攤販位於兩共點攤販之間的型態。當達到均衡時，假設 $a_1=a_2=a<a_3<a_4=a_5=1-b$ ，其中 $0<a,b<1$，顯然 $a=b$，$\frac{a+a_3}{2}=2a$ 且 $1-\frac{a_3+(1-b)}{2}=2(1-b)$，故 $a=b=\frac{1}{6}$ ，如<圖 1-4.1>。



<圖 1-4.1>

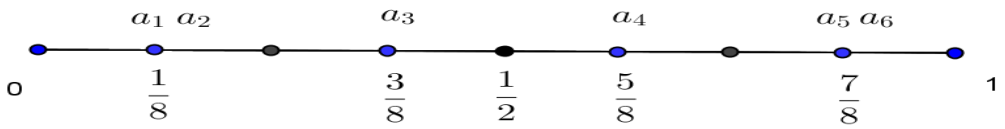
結論：$n=5$ 時，均衡點為 $(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ 。

並且根據上面的討論，我們可以得到以下的引理：

引理 3：均衡時，若最左側的共點攤販位於 a ，則與他們相鄰的攤販會位於 $3a$ ，而最右側的共點攤販位於 $1-a$ ，並且與他們相鄰的攤販會位於 $1-3a$ 。

(五) 六個攤販：

根據先前的結果，我們不難推測當 $n=6$ 時，$(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ 會是一組奈許均衡。然而這不會是唯一個奈許均衡，事實上，對任意 $\frac{1}{8}\le a\le\frac{1}{6}$，$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)=(a,a,3a,1-3a,1-a,1-a)$ 都會是奈許均衡，如<圖 1-5.1>所示。



<圖 1-5.1>

根據 Eaton - Lipsey(1975)，當攤販數大於 5 時，形成的均衡可能有無限多組解，並且均衡形成的充要條件如下：

定理 1(Eaton - Lipsey**)：沙灘賣冰模型中均衡形成的充分必要條件為：**

1. **任一攤販的獲利不大於任一攤販的兩倍。**
2. **距端點最近之攤販必為共點攤販。**

二、 固定攤販對奈許均衡的影響

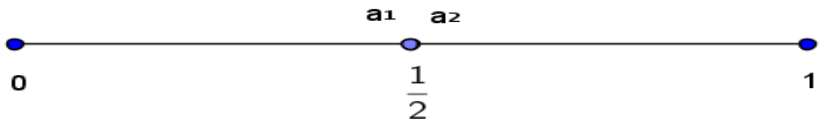
由先前的結果可得知，3 個攤販沒有均衡。然而，我們發現若其中一個攤販在 $\frac{1}{4}$ 的位置固定不動，則剩餘兩個攤販會在 $\frac{3}{4}$ 共點，達到一個均衡，此時固定攤販可以分得 $\frac{1}{2}$，其餘兩家則各得 $\frac{1}{4}$。因此，我們試著在 n 個攤販的沙灘賣冰模型中，加入一個固定不動的攤販，討論固定攤販的位置會對均衡產生何種影響，並探求其獲益和流動攤販相比，是否較為有利。

在以下討論中，為了方便起見，我們假設達成均衡時，1 個固定攤販位於 b，n 家流動攤販則位於 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，其中 $0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le 1$，而其所獲得的利益分別為 $f_b, f_1, \cdots, f_n$。在各均衡情形中，我們將固定攤販表示為 b 代替、單獨

流動攤販為 1、共點流動攤販為 2、固定攤販與一流動攤販共點為 b+1，例如沙灘上由左至右依序為固定攤販、單獨流動攤販、單獨流動攤販、共點流動攤販，我們便將其表示為(b,1,1,2)。並且根據對稱性，我們只討論$0 \le b \le \frac{1}{2}$的情形。

(一) 1 個固定攤販+1 家流動攤販

當$b \ne \frac{1}{2}$時，流動攤販會在固定攤販旁邊空間較長的一側並向他靠近，但不會共點，故此時沒有奈許均衡。因此，均衡態只有一種$b = a_1 = \frac{1}{2}$，如<圖 2-1.1>。



<圖 2-1.1>

(二) 1 個固定攤販+2 家流動攤販

<圖 2-2.1>

根據引理一～三，形成均衡時，只有$b < a_1 = a_2$，或$a_1 = a_2 < b$兩種可能，根據對稱性，不妨假設$b \le \frac{1}{2} \Rightarrow b < a_1 = a_2$，如<圖 2-2.1>所示。若$a_1 = a_2 = 1 - a$，則$b = 1 - 3a$，此時$f_b(b, 1-a, 1-a) = b + a = 1 - 2a$，$f_1 = f_2(b, 1-a, 1-a) = a$。

根據定理 1，我們可以得到以下關係式：

$$0 \le b = 1 - 3a \le a \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le a \le \frac{1}{3} \text{ 且 } 0 \le b \le \frac{1}{4},$$

加上對稱性，故均衡存在的充分必要條件是

$$0 \le b \le \frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{4} \le b \le 1。$$

結論：$n=2$ 時，均衡產生在

$$(b,a_1,a_2)=\begin{cases}\left(b,\dfrac{b+2}{3},\dfrac{b+2}{3}\right), & 當\ 0\le b\le\dfrac{1}{4}\\ \left(b,\dfrac{b}{3},\dfrac{b}{3}\right), & 當\ \dfrac{3}{4}\le b\le 1\end{cases}$$

並且，三家攤販所分得的利益分別為

$$f_b\left(b,\frac{2+b}{3},\frac{2+b}{3}\right)=\frac{1-2b}{3}，f_1=f_2\left(b,\frac{2+b}{3},\frac{2+b}{3}\right)=\frac{1-b}{3}，當\ 0\le b\le\frac{1}{4}，$$

或

$$f_b\left(b,\frac{b}{3},\frac{b}{3}\right)=\frac{3-2b}{3}，f_1=f_2\left(b,\frac{b}{3},\frac{b}{3}\right)=\frac{b}{3}，當\ \frac{3}{4}\le b\le 1。$$

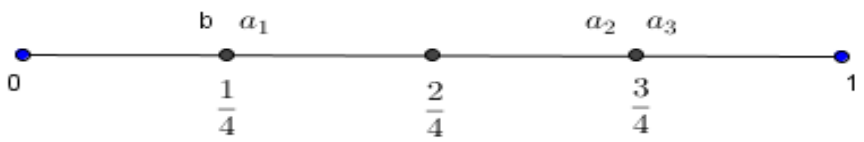
由此可知，當 $x=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$，時 b 可獲得最大利益，此時均衡態為

$(b,a_1,a_2)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，並且 $f_b=\frac{1}{2}, f_1=f_2=\frac{1}{4}$。而當 $x=0$ 或 1 時，b 有最小利益，此時 $f_b=f_1=f_2=\frac{1}{3}$。

(三) 1 個固定攤販+3 家流動攤販

根據對稱性，我們同樣假設 $b\le\frac{1}{2}\Rightarrow b\le a_1<a_2=a_3$，則前面的引理和定理告訴我們，1 個固定攤販+3 家流動攤販只有如<圖 2-3-1.1>或<圖 2-3-2.1>二種情形。

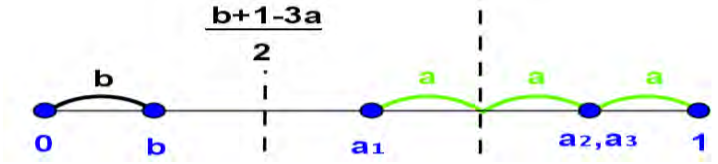
1. $b=a_1<a_2=a_3$：



<圖 2-3-1.1>

若均衡時兩兩共點，根據前面的討論我們可以得知均衡點為 $\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$，故 $(b,a_1,a_2,a_3)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$，此時 $f_b=f_1=f_2=f_3=\frac{1}{4}$。

2. $b < a_1 < a_2 = a_3$：



<圖 2-3-2.1>

根據引理 3，我們可以假設均衡時 $a_1 = 1-3a, a_2 = a_3 = 1-a$，此時

$$f_b = \frac{b+1-3a}{2},\ f_1 = \frac{1-b-a}{2},\ f_2 = f_3 = a\ 。$$

由於 $b \ge 0, b+3a < 1$，且根據定理 1，我們可以得到：

$$\begin{cases} b \le a \\ \dfrac{b+1-3a}{2} \le 2b \Leftrightarrow a+b \ge \dfrac{1}{3} \\ a \le \dfrac{1-a-b}{2} \Leftrightarrow 3a+b \le 1 \end{cases}$$

因此 $b+3b \le b+3a < 1$ 及 $a+a \ge a+b \ge \frac{1}{3}$，故 $0 < b < \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{6} \le a < \frac{1}{3}$。

結論：當 $n=3$ 且 $b \le \frac{1}{2}$ 時，均衡產生在

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ **或** $(b, a_1, a_2, a_3) = (b, 1-3a, 1-a, 1-a)$

其中 $0 \le b < \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \le a < \frac{1}{3}$ **且** $b \le a$。

並且，四家攤販所分得的利益分別為

$f_b = f_1 = f_2 = f_3 = \frac{1}{4}$，當 $b = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$

或 $f_b = \frac{b+1-3a}{2},\ f_1 = \frac{1-b-a}{2},\ f_3 = f_4 = a$，

當 $0 \le b < \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \le a < \frac{1}{3}$ **且** $b \le a$。

由此可知，當 $b = \frac{1}{4}$ 時，固定攤販有確定利益 $\frac{1}{4}$。而當 $a = b = \frac{1}{6}$，則 b 有最大利益 $\frac{1}{3}$，此時奈許均衡為 $(b, a_1, a_2, a_3) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$，並且

$$f_b = f_1 = \frac{1}{3},\ f_2 = f_3 = \frac{1}{6}\ 。$$

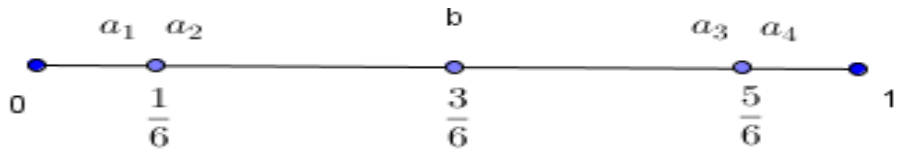
然而當 $b=\frac{1}{6}$ 時，對任意的 $\frac{1}{6}\le a<\frac{1}{3}$ ，$(b,a_1,a_2,a_3)=(\frac{1}{6},1-3a,a,a)$ 都會是奈許均衡，因此當固定攤販位於 $\frac{1}{6}$ 時，其最大獲利為 $\frac{1}{3}$ ，最小獲利則會大於 $\frac{1}{6}$ 。

(四) 1 個固定攤販+4 家流動攤販

如同先前的討論，$n=4$ 時，奈許均衡有四種可能，我們同樣假設 $0\le b\le\frac{1}{2}$ ，則 $a_1=a_2<b<a_3=a_4$ 、$b<a_1=a_2<a_3=a_4$ 、$b=a_1<a_2<a_3=a_4$ 或 $b<a_1<a_2<a_3=a_4$ ：

1. $a_1=a_2<b<a_3=a_4$ ：

根據先前討論，在此情況下只有一個唯一的奈許均衡如<圖 2-4-1.1>：

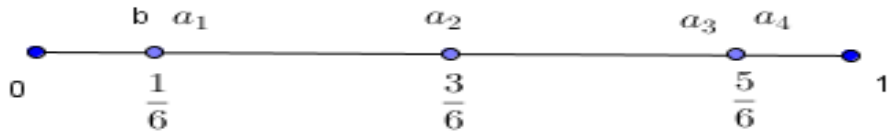


<圖 2-4-1.1>

此時 $(a_1,a_2,b,a_3,a_4)=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ ，並且 $f_b=\frac{1}{3},\ f_1=f_2=f_3=f_4=\frac{1}{6}$ 。

2. $b=a_1<a_2<a_3=a_4$ ：

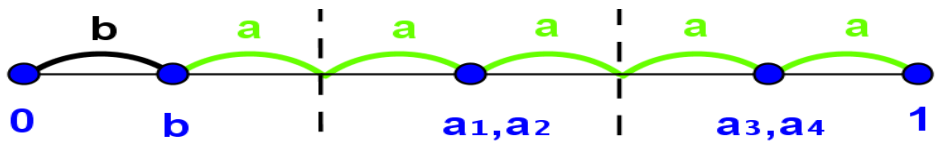
假設均衡時 $b=a_1,a_3=a_4=1-a$ ，則 $a_2=3b=1-3a$ 由於 $a\le b$ 且 $b\le a$ ，所以 $b=a=\frac{1}{6}$ ，故在這種情況下只有一個唯一的奈許均衡如<圖 2-4-2.1>：



<圖 2-4-2.1>

此時 $(b,a_1,a_2,a_3,a_4)=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ ，並且 $f_b=f_1=f_3=f_4=\frac{1}{6},\ f_2=\frac{1}{3}$ 。

3. $b<a_1=a_2<a_3=a_4$ ：



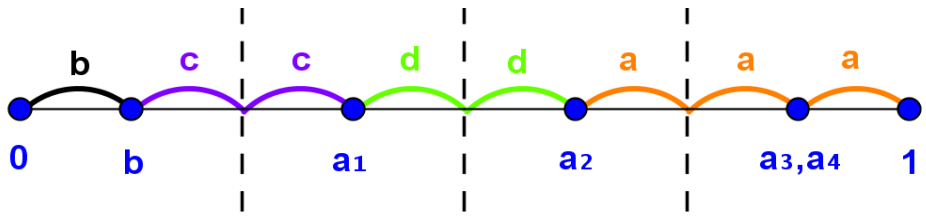
<圖 2-4-3.1>

如<圖 2-3-3.1>，假設均衡時 $a_1=a_2=1-3a, a_3=a_4=1-a$ ，則 $b=1-5a$ 。因為 $0\le b\le a$ ，則 $b+5b\le b+5a\le 1\Rightarrow b\le\frac{1}{6}$ 且 $\frac{1}{6}\le a<\frac{1}{5}$ 。此時均衡為

$$(b, a_1, a_2, a_3, a_4)=(1-5a, 1-3a, 1-3a, 1-a, 1-a)\text{，}$$

並且 $f_b=1-4a,\ f_1=f_2=f_3=f_4=a$ 。

4. $b<a_1<a_2<a_3=a_4$ ：



<圖 2-4-4.1>

如<圖 2-4-4.1>，假設均衡時 $a_1=b+2c, a_2=1-3a, a_3=a_4=1-a$ ，並令 $d=\frac{1-b-2c-3a}{2}$ ，則此時 $f_b=b+c,\ f_1=c+d,\ f_2=d+a,\ f_3=f_4=a$ 。

根據定理 1，可得知 $b\le a, c\le a, d\le a$ 且 $c+d\ge a,$ 。因為

$$d=\frac{1-b-2c-3a}{2}\le a\Rightarrow 5a+b+2c\ge 1\text{，}$$

故 $5a+a+2a\ge 5a+b+2c\ge 1$ ，因此 $a\ge\frac{1}{8}$ 。又

$$c+d=c+\frac{1-b-2c-3a}{2}\ge a\Rightarrow 5a+b\le 1\text{，}$$

故 $5b+b\le 5a+b\le 1$ ，因此 $b\le\frac{1}{6}$ 。

由 2.～4. 我們可以得知，若固定攤販位於 $b=\frac{1}{6}$ 時，其最大利益為 $\frac{1}{3}$ ，最小利益則是 $\frac{1}{6}$ 。然而，若固定攤販位於 $b=\frac{1}{2}$ ，則可得到確定獲利 $\frac{1}{3}$ ，又根據定理 1，$f_b\le f_k,\ \forall k=1,2,3,4$ ，而 $f_b+f_1+f_2+f_3+f_4=1$ ，故 $f_b\le\frac{1}{3}$ ，此時固定攤販的利益 $\frac{1}{3}$ 為最大值。

結論：當 $n=4$ 且 $b\le\frac{1}{2}$ 時，奈許均衡存在的充分必要條件是

$$b=\frac{1}{2}\text{ 或 }0\le b\le\frac{1}{6}\text{ 。}$$

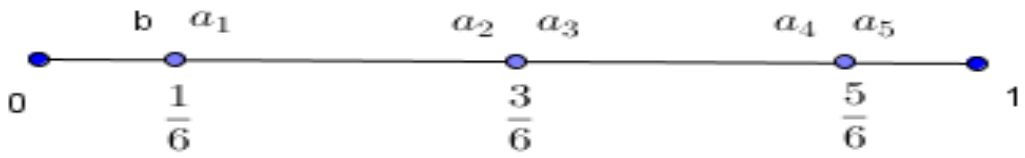
且當 $b=\frac{1}{2}$ 時，固定攤販可以確定得到其獲利的最大值 $\frac{1}{3}$ 。

(五) 1 個固定攤販+5 家流動攤販

隨著攤販數的增加，均衡型態也跟著複雜了起來，為了簡化，我們同樣假設固定攤販位於 $b\le\frac{1}{2}$ ，則均衡時可能的型態有以下六種：

1. 兩兩共點 $(b=a_1<a_2=a_3<a_4=a_5$ 或 $a_1=a_2<b=a_3<a_4=a_5)$：

根據前一章的討論，此種型態(2,2,2)的均衡解必定如<圖 2-5-1.1>。

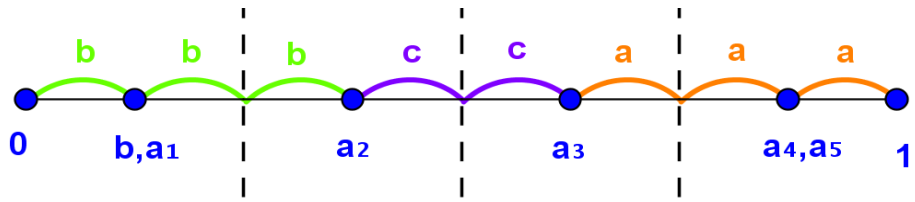


<圖 2-5-1.1>

故 (b,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) or $(a_1,a_2,b,a_3,a_4,a_5)=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ ，

並且 $f_b=f_1=f_2=f_3=f_4=f_5=\frac{1}{6}$ 。

2. $b=a_1<a_2<a_3<a_4=a_5$ ：(2,1,1,2)



<圖 2-5-2.1>

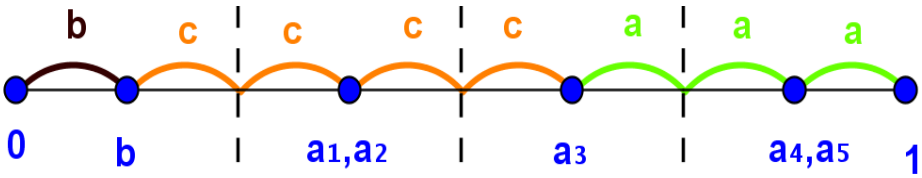
如<圖 2-5-2.1>所示，根據引理三，奈許均衡為

$$(b,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(b,b,3b,1-3b,1-b,1-b)\text{ ，}$$

其中 $0<b<\frac{1}{6}$ ，並且 $f_b=f_1=f_4=f_5=b,\ f_2=f_3=\frac{1-4b}{2}$ 。

令 $c=\frac{1-6b}{2}$ 由定理 1，可得 $c=\frac{1-6b}{2}\le b$ ，故 $b\ge\frac{1}{8}$ 。

3. $b<a_1=a_2<a_3<a_4=a_5$ ：(1,2,1,2)



<圖 2-5-3.1>

如<圖 2-5-3.1>所示，設均衡時 $a_1=a_2=b+2c,\ a_3=b+4c,\ a_4=a_5=1-a$ ，

由引理三，可得 $a_3=b+4c=1-3a$ ，因此 $c=\frac{1-b-3a}{4}$ 。

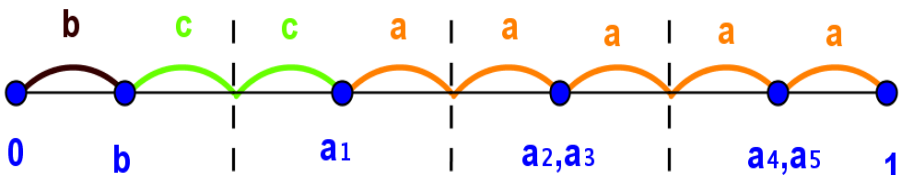
$$f_b=b+c,\ f_1=f_2=c,\ f_3=c+a,\ f_4=f_5=a \text{ 。}$$

根據定理 1，可得 $b\le a, b\le c, c\le a$ 且 $a\le c$ ，

故 $a=c$ ，而且 $b=1-7a$ 。因此

$$7a+a\ge 7a+b=1\Rightarrow a\ge\frac{1}{8}\Rightarrow b=1-7a\le\frac{1}{8}$$

4. $b<a_1<a_2=a_3<a_4=a_5$ ：(1,1,2,2)



<圖 2-5-4.1>

如<圖 2-5-4.1>所示，設均衡時

$a_4=a_5=1-a,\ a_2=a_3=1-3a,\ a_1=1-5a,\ a<\frac{1}{5}$ ，並令 $c=\frac{1-b-5a}{2}$ ，則

$$f_b=b+c,\ f_1=c+a,\ f_2=f_3=f_4=f_5=a \text{ 。}$$

根據定理 1，可得 $b\le a$ 且 $c\le a$ ，因此

$$c=\frac{1-b-5a}{2}\le a\Rightarrow 7a+b\ge 1 \text{ ，}$$

則 $7a+a\ge 7a+b\ge 1$，故 $\frac{1}{8}\le a<\frac{1}{5}$，又 $b+5b\le b+5a<1$，可以得到 $b<\frac{1}{6}$。

5. $b<a_1<a_2<a_3<a_4=a_5$：(1,1,1,1,2)

<圖 2-5-5.1>

如<圖 2-5-5.1>，設均衡時

$a_1=b+2c,\ a_2=b+2c+2d,\ a_3=1-3a,\ a_4=a_5=1-a$，並令

$e=\frac{1-b-3a-2c-2d}{2}$，則

$$f_b=b+c,\ f_1=c+d,\ f_2=d+e,\ f_3=e+a,\ f_4=f_5=a\ 。$$

根據定理 1 可得知：

$$\begin{cases} a\ge b,\ a\ge c,\ a\ge d,\ a\ge e, \\ c+d\ge a,\ c+d\ge b,\ c+d\ge e, \\ d+e\ge a,\ d+e\ge b,\ d+e\ge c. \end{cases}$$

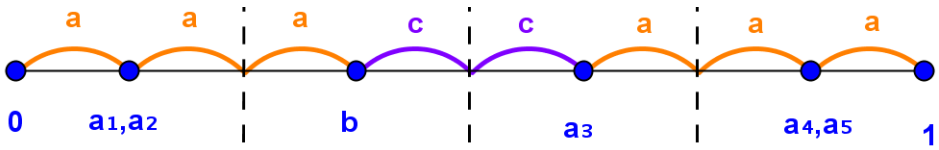
故 $a\ge e=\frac{1-b-3a-2c-2d}{2}\Rightarrow 5a+b+2c+2d\ge 1$

$\therefore\ 5a+a+2a+2a\ge 5a+b+2c+2d\ge 1\Rightarrow a\ge\frac{1}{10}$

又 $c+d=\frac{1-b-2d-2e-3a}{2}\ge a\Rightarrow 5a+b+2e\le a$

$\therefore\ 5b+b\le 5a+b<5a+b+2e\le 1\Rightarrow b<\frac{1}{6}$

6. $a_1=a_2<b<a_3<a_4=a_5$：(2,1,1,2)



<圖 2-5-6.1>

如<圖 2-5-6.1>所示，根據引理三，設均衡時，

$$a_1=a_2=a,\ b=3a,\ a_3=1-3a,\ a_4=a_5=1-a,\ \ a<\frac{1}{6}，$$

並令 $c=\dfrac{1-6a}{2}$ ，則

$$f_1=f_2=f_4=f_5=a,\ f_b=f_3=a+c\ 。$$

由定理 1，$a\ge c=\dfrac{1-6a}{2}\Rightarrow a\ge\dfrac{1}{8}$ ，又 $b=3a$ ，故 $\dfrac{3}{8}\le b<\dfrac{1}{2}$ 。

結論：當 $n=5$ 且 $b\le\dfrac{1}{2}$ 時，奈許均衡存在的充分必要條件是

$$0\le b\le\frac{1}{6}\ \text{或}\ \frac{3}{8}\le b\le\frac{1}{2}\ 。$$

並且當 $b=\dfrac{1}{6}$ 或 $\dfrac{1}{2}$ 時，固定攤販可以得到確定獲利 $\dfrac{1}{6}$ ；

而當 $b=\dfrac{3}{8}$ 時，固定攤販可以確定得到其獲利的最大值 $\dfrac{1}{4}$ 。

觀察上面的結果，我們發現，固定攤販所在的位置不但可以決定奈許均衡是否存在—使沒有均衡的情況產生均衡，也可以破壞原有的均衡；還能決定均衡解的型態。並且，從 2 到 5 家流動攤販的例子中，固定攤販都可以藉由選取的位置得到保證獲利。因此我們希望能進一步得到固定攤販的保證獲利模式。

三、 固定策略的保證獲利

在沙灘賣冰模型中，假設有 n 家流動攤販 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及 1 個固定攤販 b 。

(1) 當 $n=1$ 時，固定攤販必須位於 $\dfrac{1}{2}$ 的位置，才能產生均衡，並可獲利 $\dfrac{1}{2}$ 。

(2) 當 $n=2$ 時，固定攤販若選取 $\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}$ 的位置，就可獲得最大利益 $\dfrac{1}{2}$ 。

(3) 當 $n=3$ 時，若固定攤販選取 $\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}$ 的位置，可以得到確定獲利 $\dfrac{1}{4}$ ；若想要獲得最大利益 $\dfrac{1}{3}$ ，則必須選取 $\dfrac{1}{6}$ 或 $\dfrac{5}{6}$ 的位置，此時獲利會介於 $\dfrac{1}{6}$ 到 $\dfrac{1}{3}$ 之間。

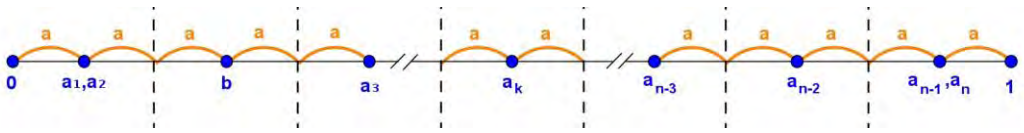
(4) 當 $n=4$ 時，固定攤販若選取 $\dfrac{1}{2}$ 的位置，就可獲得最大利益 $\dfrac{1}{3}$ 。

(5) 當 $n=5$ 時，固定攤販若選取 $\dfrac{3}{8}$ 或 $\dfrac{5}{8}$ 的位置，則可獲得最大利益 $\dfrac{1}{4}$ 。

(6) 當 $n \geq 6$ 時，透過觀察 $n=4$ 和 $n=5$ 的例子，發現固定攤販的最大保證獲利都在位於最兩側共點攤販的隔壁，也就是(2, 1, …1,2)的型態。若假設 $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ 且 $a_1 = a_2 = a, b = 3a$，則最大保證獲利發生在 a 有最小值的時候。因此我們猜測：固定攤販應選擇 $\frac{3}{2(n-1)}$ 的位置。

經由計算和證明，我們得到下列定理：

定理 2：當 $n \geq 4$ 時，若固定攤販位於 $\frac{3}{2(n-1)}$，則流動攤販存在唯一的奈許均衡，如<圖 3.1>所示，並且固定攤販可獲得確定利益 $\frac{1}{n-1}$。



<圖 3.1>

證明：如<圖 3.1>所示，顯然

$$(a_1, a_2, b, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n) = (\frac{1}{2n-2}, \frac{1}{2n-2}, \frac{3}{2n-2}, \frac{5}{2n-2}, \cdots, \frac{2n-3}{2n-2}, \frac{2n-3}{2n-2})$$

會是一組奈許均衡。接下來我們要證明這會是唯一的均衡。

當 $b = \frac{3}{2(n-1)}$，則均衡解可能為 $a_1 = a_2 < b$，或 $b \leq a_1$。

(1) 若 $b \leq a_1$，設 $a_{n-1} = a_n = 1-a$，則根據引理 3，

$$a_{n-2} = 1-3a,$$

又定理 1 告訴我們：

$$a \geq b \text{ 且 } f_k \geq a, \quad \forall 1 \leq k \leq n-2,$$

則

$$f_b + \sum_{k=1}^{n} f_k \geq b + nb = \frac{3(n+1)}{2(n-1)} > \frac{3}{2},$$

顯然與 $f_b+\sum_{k=1}^{n} f_k=1$ 矛盾。故不存在此種型態的奈許均衡。

(2) 而當 $a_1=a_2<b$ 時，因為 $b=\dfrac{3}{2(n-1)}$ ，則根據引理 3，

$$a_1=a_2=\frac{1}{2(n-1)} \text{ 且 } a_{n-1}=a_n=1-\frac{1}{2(n-1)} \text{ ，}$$

並且

$$f_1=f_2=f_{n-1}=f_n=\frac{1}{2(n-1)} \text{ 。}$$

由於

$$f_b+\sum_{k=1}^{n} f_k=1 \Rightarrow f_b=\begin{cases} 1-\dfrac{4}{2(n-1)}-\sum_{k=3}^{n-2} f_k, & \text{當} n\geq 5, \\ 1-\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{3}, & \text{當} n=4. \end{cases}$$

又根據定理 1，

$$f_b\leq 2f_1\leq\frac{1}{n-1} \text{ 且 } f_k\leq 2f_1=\frac{1}{n-1},\quad \forall\, 3\leq k\leq n-2$$

$$\Rightarrow f_b=1-\frac{4}{2(n-1)}-\sum_{k=3}^{n-2} f_k\geq 1-\frac{2}{n-1}-\frac{(n-4)}{(n-1)}=\frac{1}{n-1}$$

故

$$f_b=\frac{1}{n-1} \text{ 且 } f_k=\frac{1}{n-1},\quad \forall\, 3\leq k\leq n-2 \text{ ，當 } n\geq 5 \text{ 。}$$

因此我們可以推論：在均衡時，在 b 左側至多只有一組共點攤販。並且

$$(a_1,a_2,b,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n)=(\frac{1}{2n-2},\frac{1}{2n-2},\frac{3}{2n-2},\frac{5}{2n-2},\cdots,\frac{2n-3}{2n-2},\frac{2n-3}{2n-2})$$

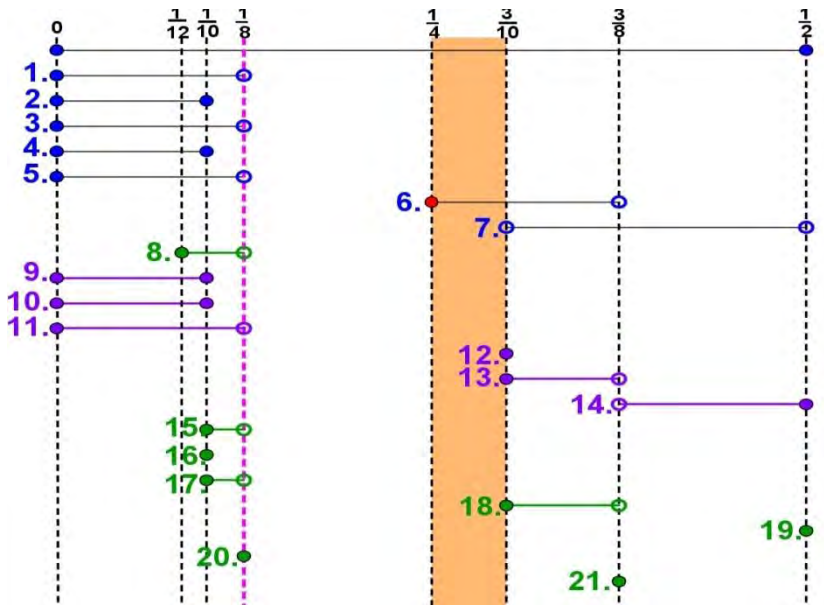
為唯一的奈許均衡。■

為了瞭解當固定攤販位於 $\dfrac{3}{2(n-1)}$ 時，所得到的保證獲利是否為最大值，我們進一步計算分析了 1 個固定攤販+ 7 家流動攤販的例子。

假設均衡時固定攤販位於 b，其餘 7 家流動攤販分別位於 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_6\leq a_7$。首先，我們將所有可能形成奈許均衡的 21 種流動攤販與固定攤販的排列方式列出，求出在各排列方式中可以使均衡存在的 b 之範圍，並且畫成如下<圖 3.2>來挑選出有可能讓固定攤販擁有高於平均值利益的位置。下圖的線段便是固定攤販

在各排列方式中可以使均衡存在的位置 b 之範圍。當 n =7 時，$b=\dfrac{3}{2\times 6}=\dfrac{1}{4}$ 時為我們提出的保證獲利策略，以紅點表示。為了方便起見，我們以(b, 1, 1, 1, 1, 1, 2)表示 $b<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6=a_7$，以(2, b+1, 1, 1, 2)表示

$a_1=a_2<b=a_3<a_4<a_5<a_6=a_7$。而根據對稱性，我們下面只討論 $0\le b\le\dfrac{1}{2}$ 的情形。



<圖 3.2>

1. (b, 1, 1, 1, 1, 1, 2)，範圍 $b<\dfrac{1}{8}$。

2. (b, 2, 1, 1, 1, 2)，範圍 $b\le\dfrac{1}{10}$。

3. (b, 1, 2, 1, 1, 2)，範圍 $b<\dfrac{1}{8}$。

4. (b, 1, 1, 2, 1, 2)，範圍 $b\le\dfrac{1}{10}$。

5. (b, 1, 1, 1, 2, 2)，範圍 $b<\dfrac{1}{8}$。

6. (2, b, 1, 1, 1, 2)，範圍 $\dfrac{1}{4}\le b<\dfrac{3}{8}$。

7. (2, 1, b, 1, 1, 2)，範圍 $\dfrac{3}{10}<b<\dfrac{1}{2}$。

8. (b+1, 1, 1, 1, 1, 2)，範圍 $\dfrac{1}{12}\le b<\dfrac{1}{8}$。

9. (b, 2, 2, 1, 2)，範圍 $b \le \frac{1}{10}$ 。

10.(b, 2, 1, 2, 2)，範圍 $b \le \frac{1}{10}$ 。

11.(b, 1, 2, 2, 2)，範圍 $b < \frac{1}{8}$ 。

12.(2, b, 2, 1, 2)，範圍 $b = \frac{3}{10}$ 。

13.(2, b, 1, 2, 2)，範圍 $\frac{3}{10} \le b < \frac{3}{8}$ 。

14.(2, 1, b, 2, 2)，範圍 $\frac{3}{8} < b \le \frac{1}{2}$ 。

15.(b+1, 2, 1, 1, 2)，範圍 $\frac{1}{10} \le b < \frac{1}{8}$ 。

16.(b+1, 1, 2, 1, 2)，範圍 $b = \frac{1}{10}$ 。

17.(b+1, 1, 1, 2, 2)，範圍 $\frac{1}{10} \le b < \frac{1}{8}$ 。

18.(2, b+1, 1, 1, 2)，範圍 $\frac{3}{10} \le b < \frac{3}{8}$ 。

19.(2, 1, b+1, 1, 2)，範圍 $b = \frac{1}{8}$ 。

20.(b+1, 2, 2, 2)，範圍 $b = \frac{1}{2}$ 。

21.(2, b+1, 2, 2)，範圍 $b = \frac{3}{8}$ 。

如上可見，只有粉色線及橘色區域擁有唯一的點或線段，因此我們可知道擁有唯一均衡解的 b 的位置僅有(2, b+1, 2 ,2)的 $b = \frac{3}{8}$ 及(2, b, 1, 1, 1, 2)的 $\frac{1}{4} \le b < \frac{3}{10}$ ，但由先前的結果得知共點攤販的利益必不大於獨立攤販的利益，所以當 b 共點時(上圖綠色線段及點)所獲得的利益必定不會高於平均值，因此 b 位於粉色線時不會有高於平均值的利益。而橘色線段則是在我們在先前的報告提出的保證獲利，而在此種流動攤販與固定攤販的排列方式中，最大獲利發生在 a

有最小值的時候，因此最大獲利發生在$b=\frac{1}{4}$，且$f_b=\frac{1}{n-1}=\frac{1}{7-1}=\frac{1}{6}$。由上述的結果得知，在唯一解的狀況下，最大獲利與我們的先前假設相符。

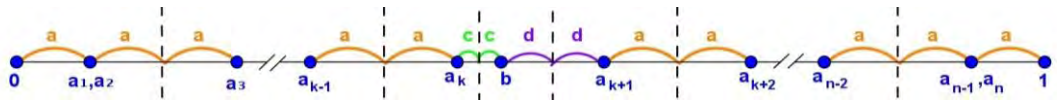
接著我們觀察若 b 的位置可以形成一種以上的均衡，是否有所有解的獲利都比我們提出的保證策略還要好。我們先將與綠色線段重疊的部分及先前所探討的唯一解狀況屏除後，發現剩下(2, 1, b, 1, 1, 2)及(2, 1, b, 2, 2)共同存在的$\frac{3}{8}<b<\frac{1}{2}$。但在(2, 1, b, 1, 1, 2)的情形中，b 位於兩個獨立的流動攤販旁邊，因此非與固定攤販相鄰之流動攤販若向 b 靠近亦可形成均衡，使得 b 獲得的利益會小於平均值，因此此解便不保證可以獲得高於平均的利益。

更進一步觀察，我們可以發現可以形成均衡(2,b,1,1,1,2)與(2,1,b,1,1,2)之 b 的範圍有重疊，因此我們猜測：當 $n\geq 6$ 時，形成均衡 $(2,b,1,\cdots,1,2)$, $(2,1,b,1,\cdots,1,2)$, $(2,1,1,b,\cdots,1,2)$, $\cdots$, $(2,1,1,\cdots,1,b,2)$ 之 b 的範圍會涵蓋所有可能產生更高獲利的位置。

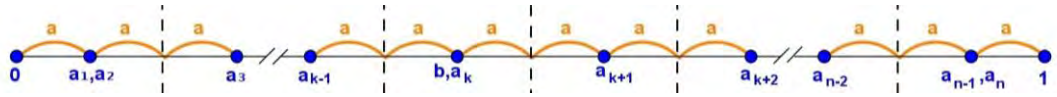
引理 4：當 $n\geq 6$ 時，對任意 $\frac{3}{2n-4}\leq b\leq 1-\frac{3}{2n-4}$，

$a_1=a_2=\frac{1}{2n-4}, a_k=\frac{2k-3}{2n-4}\left(3\leq k\leq n-2\right), a_{n-1}=a_n=\frac{2n-5}{2n-4}$ **會是一組奈許均衡。**

證明：如下<圖 3.3>、<圖 3.4>，顯然不論$\frac{2k-3}{2n-4}<b<\frac{2k-1}{2n-4}\left(3\leq k\leq n-3\right)$，即$a_k<b<a_{k+1}$，或$b=a_k=\frac{2k-3}{2n-4}\left(3\leq k\leq n-2\right)$，均沒有任何流動攤販能藉由單獨移動獲得更大利益，故其為一組均衡解，並且此時固定攤販的獲利為 $f_b=\frac{1}{2n-4}$。



<圖 3.3>



<圖 3.4>

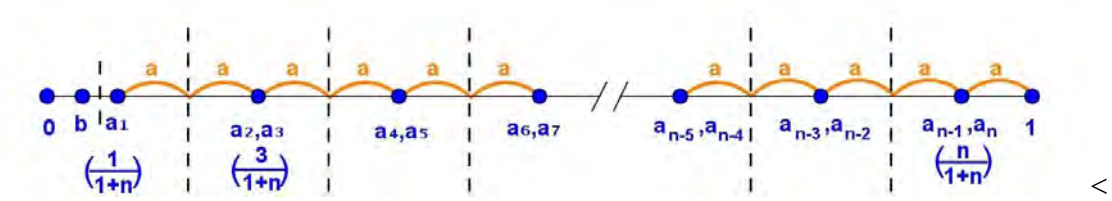
引理 5：當 $n \geq 3$ 時，若 n 為奇數，則對任意 $0 \leq b \leq \dfrac{1}{n+1}$，

$$a_1 = \frac{1}{n+1}, a_{2k} = a_{2k+1} = \frac{2k+1}{n+1}, \forall 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$$ **會是一組奈許均衡；**

若 n 為偶數，則對任意 $0 \leq b \leq \dfrac{1}{n+2}$，

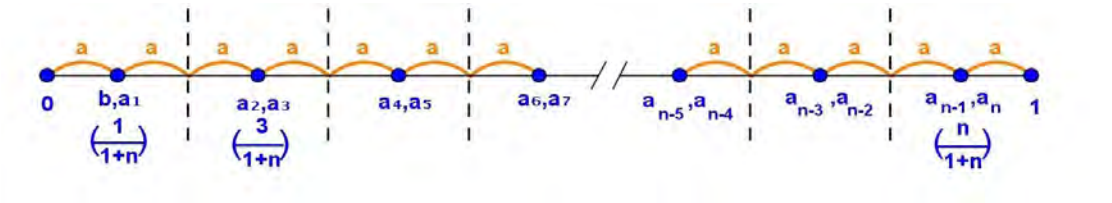
$$a_1 = \frac{1}{n+2}, a_2 = \frac{3}{n+2}, a_{2k-1} = a_{2k} = \frac{2k+1}{n+2}, \forall 2 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$$ **會是一組奈許均衡。**

證明：如<圖 3.5>~<圖 3.8>，顯然其為一組奈許均衡。



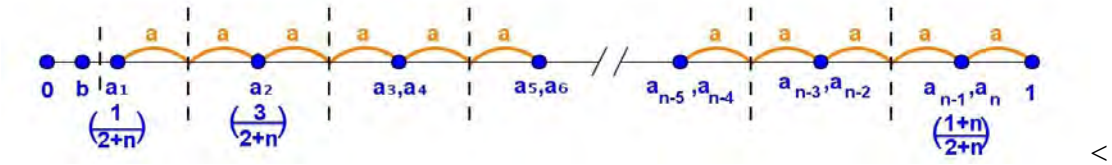
<

圖 3.5>



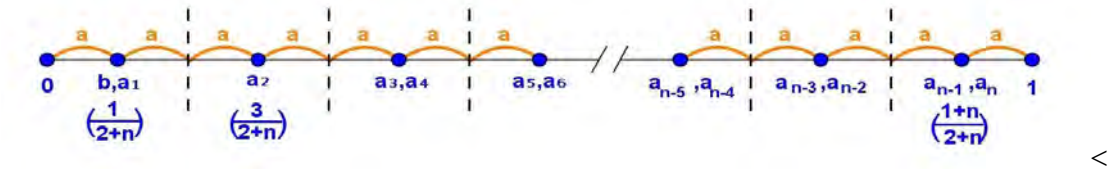
<圖 3.6>

並且此時固定攤販的獲利 $f_b \leq \dfrac{1}{n+1}$。



<

<圖 3.7>



<

<圖 3.8>

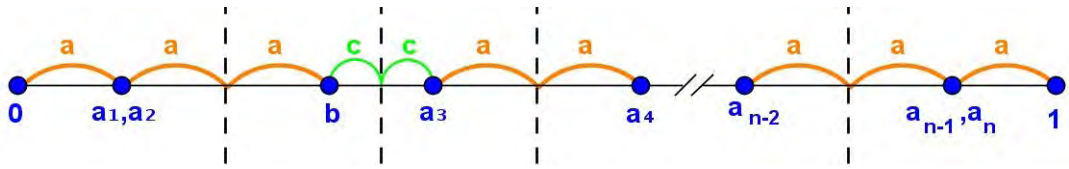
並且此時固定攤販的獲利 $f_b \le \dfrac{1}{n+2}$ 。

引理 6：當 $n \ge 5$ 時，對任意 $\dfrac{3}{2n-2} \le b < \dfrac{3}{2n-4}$ ，

$$a_1 = a_2 = \frac{b}{3},\ a_k = 1 - \frac{(2n-2k-1)b}{3}\ (3 \le k \le n-2),\ a_{n-1} = a_n = 1 - \frac{b}{3}$$ **會是一組奈許均衡。**

證明：如<圖 3.9>，顯然其為一組奈許均衡。此時固定攤販的獲利為

$f_b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(n-3)b}{3}$ ，並且當 $b = \dfrac{3}{2n-2}$ 時固定攤販的獲利有最大值 $\dfrac{1}{n-1}$ 。



<圖 3.9>

引理 7：(i) 在均衡時，設共點攤販所分得的利益為 a ，若兩組共點攤販間僅有奇數家獨立的流動攤販位於 $a_{m+1} < a_{m+2} < \cdots < a_{m+2k+1}$，則此 $2k+1$ 家流動攤販的利益總和

$$\sum_{j=1}^{2k+1} f_{m+j} \ge (2k+2)a$$

(ii) 在均衡時，若固定攤販位於最左側 b 的位置，而他與最近的共點攤販之間若有偶數家獨立攤販位於 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k}$，則此 $2k$ 家流動攤販與固定攤販的利益總和

$$f_b + \sum_{j=1}^{2k} f_j \ge (2k+2)b$$

證明：

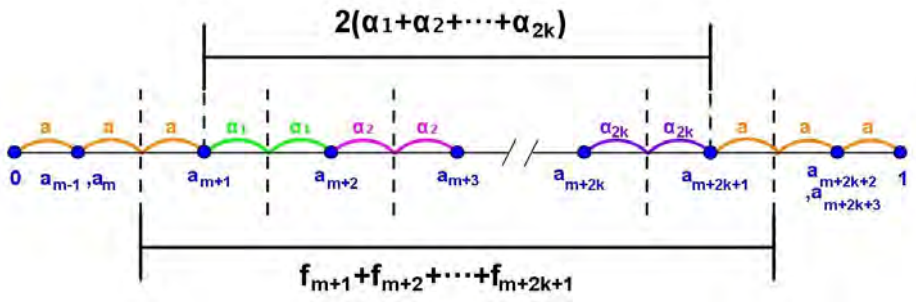
(i) 如<圖 3.10>，設 $\dfrac{a_{m+2} - a_{m+1}}{2} = \alpha_1, \dfrac{a_{m+3} - a_{m+2}}{2} = \alpha_2, \cdots, \dfrac{a_{m+2k+1} - a_{m+2k}}{2} = \alpha_{2k}$ ，

則

$$f_{m+1} = a + \alpha_1,\ f_{m+j} = \alpha_{j-1} + \alpha_j\ \ \forall 2 \le j \le 2k,\ f_{2k+1} = \alpha_{2k} + a.$$

由於獨立攤販的獲利不小於共點攤販，故此$2k+1$家流動攤販的利益總和

$$\sum_{j=1}^{2k+1} f_{m+j} = 2a + 2\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j = 2a + 2\sum_{i=1}^{k} f_{m+2i} \geq (2+2k)a.$$

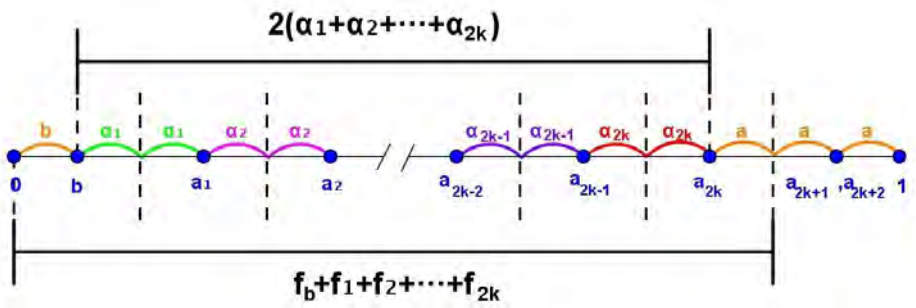


<圖 3.10>

(ii) 如<圖 3.11>，設$\dfrac{a_1-b}{2}=\alpha_1, \dfrac{a_j-a_{j-1}}{2}=\alpha_j, \forall 2\leq j\leq 2k$且共點攤販所分得的利益為$a$，則 $f_b=b+\alpha_1,\ f_j=\alpha_j+\alpha_{j+1}\ \ \forall 1\leq j\leq 2k-1,\ f_{2k}=\alpha_{2k}+a$。

而此$2k$家流動攤販與固定攤販的利益總和

$$f_b+\sum_{j=1}^{2k} f_j = b+2\sum_{j=1}^{2k}\alpha_j + a = b+a+2\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} \geq b+(1+2k)a \geq (2+2k)b. \blacksquare$$



<圖 3.11>

定理 3：當$n\geq 4$時，若n為奇數，則當固定攤販位於$\dfrac{1}{n+1}<b<\dfrac{3}{2n-2}$時，其餘$n$家流動攤販無法形成奈許均衡；

若n為偶數，則當固定攤販位於$\dfrac{1}{n+2}<b<\dfrac{3}{2n-2}$時，其餘$n$家流動攤販無法形成奈許均衡。

證明：

1. 當 n 為奇數，依照均衡時的型態可分為 $b \le a_1$ 或 $a_1 = a_2 < b$ ，兩種情況：

若 $b \le a_1$，設每個共點攤販所分得的利益為 a ，由於獨立攤販的利益不小於共點攤販，並且 $a \ge b > \dfrac{1}{n+1}$ ，故所有攤販的利益總和

$f_b + \sum_{i=1}^{n} f_i \ge b + na \ge (n+1)b > 1$，不合。

若 $a_1 = a_2 < b$ ，設共點攤販的利益 $= f_1 = f_2 = f_{n-1} = f_n = a$ ，則 $a \le \dfrac{b}{3} < \dfrac{1}{2n-2}$ ，且 $0 \le f_b \le 2a$，同時獨立攤販的利益會介於 $[a, 2a]$ 之間，故所有攤販的利益總和 $f_1 + f_2 + f_b + \sum_{i=3}^{n-2} f_i + f_{n-1} + f_n \le 4a + (n-4)\cdot 2a + 2a = (2n-2)a < 1$，也不合。

故當 n 為奇數，且固定攤販位於 $\dfrac{1}{n+1} < b < \dfrac{3}{2n-2}$ 時，其餘 n 家流動攤販無法形成奈許均衡。

2. 當 n 為偶數，我們同樣依照均衡時的型態分為 $b \le a_1$ 或 $a_1 = a_2 < b$，兩種情況：

(1) $a_1 = a_2 < b$

由於 $b < \dfrac{3}{2n-2}$ ，同 1. 的討論，我們可以知道無法形成 $a_1 = a_2 < b$ 型態的均衡。而當 $b \le a_1$ ，我們可以再分成 $b = a_1$ 即 $(b+1, \cdots, 2)$ ，和 $b < a_1 = a_2$ 即 $(b, 2, \cdots, 2)$ 與 $b < a_1 < a_2$ 即 $(b, 1, \cdots, 2)$ 三種。

(2) $b = a_1$ ：

此時共點攤販的利益 $a = b > \dfrac{1}{n+2}$ 。因為 n 是偶數，故均衡時必有奇數家獨立攤販，則必存在奇數家獨立攤販介於兩組共點攤販間，由引理 7 (i)可知，則此 $2k+1$ 家流動攤販的利益總和 $\sum_{j=1}^{2k+1} f_{m+j} \ge (2k+2)a$ ，而其餘 $n-(2k+1)$ 家流動攤販與固定攤販的利益均不小於共點攤販，故所有攤販的利益總和

$$1 = f_b + \sum_{i=1}^{n} f_i \ge a + (2k+2)a + [n-(2k+1)]a = (n+2)a > 1$$，不合。

(3) 若 $b < a_1 = a_2$ 即 $(b, 2, \cdots, 2)$：

此時固定攤販的利益 $f_b = 2b$，而其餘 n 家流動攤販與固定攤販的利益均不小於共點攤販的利益 $a = f_1 = f_2 = b$，故所有攤販的利益總和

$$1 = f_b + \sum_{i=1}^{n} f_i \geq 2b + nb = (n+2)b > 1$$，亦不合。

(4) 若 $b < a_1 < a_2$ 即 $(b, 1, \cdots, 2)$：

此時共點攤販的利益 $a \geq b > \dfrac{1}{n+2}$。因為 n 是偶數，故均衡時必有偶數家獨立攤販，則根據引理 7 (ii)，此 $2k$ 家流動攤販與固定攤販的利益總和 $f_b + \sum_{j=1}^{2k} f_j \geq (2k+2)b$，而其餘 $n-2k$ 家流動攤販的利益均不小於共點攤販，故所有攤販的利益總和

$$1 = f_b + \sum_{i=1}^{n} f_i \geq (2k+2)b + (n-2k)a \geq (n+2)b > 1$$，也不合。

若有奇數家獨立攤販位於固定攤販與其最近的共點攤販之間，則必有奇數家獨立攤販位於兩組共點攤販之間，根據引理 7 (i)，此 $2k+1$ 家流動攤販的利益總和 $\sum_{j=1}^{2k+1} f_{m+j} \geq (2k+2)a$，而其餘 $n-(2k+1)$ 家流動攤販與固定攤販的利益均不小於共點攤販，故所有攤販的利益總和

$$1 = f_b + \sum_{i=1}^{n} f_i \geq a + (2k+2)a + \left[n - (2k+1)\right]a = (n+2)a > 1$$，同樣不合。

由上述討論 1、2、2-(1)～2-(4)可以得知：

當 n 為奇數且固定攤販位於 $\dfrac{1}{n+1} < b < \dfrac{3}{2n-2}$，或 n 為偶數且固定攤販位於 $\dfrac{1}{n+2} < b < \dfrac{3}{2n-2}$ 時，其餘 n 家流動攤販均無法形成奈許均衡。■

由引理四～七及定理三可知：當 $0 \leq b \leq \dfrac{1}{2}$ 的範圍中，除了 $b = \dfrac{3}{2n-2}$ 的範圍之外，其餘位置若可以使均衡存在，都會存在某組均衡，使得固定攤販的利益 $f_b < \dfrac{1}{n-1}$。也就是說，當固定攤販位於 $b = \dfrac{3}{2n-2}$，有最大保證獲利 $f_b = \dfrac{1}{n-1}$。

定理 4：當 $n \geq 4$ 時，若固定攤販位於 $\frac{3}{2(n-1)}$，則流動攤販存在唯一的奈許均衡，如<圖 3.1>所示，此時固定攤販可獲得確定利益 $\frac{1}{n-1}$，並且其為最大保證獲利(MaxMinimum)。

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一)沙灘賣冰模型的奈許均衡：

1. $n=2$ 時，均衡點為 $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2}$，且 a_1、a_2 可分得的利益範圍均為 $\frac{1}{2}$。
2. $n=3$ 時，奈許均衡不存在。
3. $n=4$ 時，均衡點 (a_1,a_2,a_3,a_4) 為 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$，且 a_1,a_2,a_3,a_4 可分得的利益範圍均為 $\frac{1}{4}$。
4. $n=5$ 時，均衡點 (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) 為 $(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$，且 a_1,a_2,a_4,a_5 可分得的利益範圍為 $\frac{1}{6}$，a_3 可分得的利益範圍為 $\frac{1}{3}$。
5. 達成均衡時，在任何一個位置上，最多只會有兩個攤販共點，並且共點攤販左右兩側分得的區域相等。
6. 在均衡時，最靠近兩端點的攤販必定兩兩共點。
7. 均衡時，任兩組共點攤販的利益範圍相等，因此若最左側的共點攤販位於 a，則與他們相鄰的攤販會位於 $3a$，而最右側的共點攤販位於 $1-a$，並且與他們相鄰的攤販會位於 $1-3a$。

(二)固定攤販對奈許均衡的影響

1. $n=2$ 時且 $b \leq \frac{1}{2}$ 時，均衡產生在 $(b, a_1, a_2)=\left(b, \frac{b+2}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

   並且，三家攤販所分得的利益分別為 $f_b=\frac{1-2b}{3}$，$f_1=f_2=\frac{1-b}{3}$。

2. 當 $n=3$ 且 $b\le\frac{1}{2}$ 時，均衡產生在 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ 或

$(b,a_1,a_2,a_3)=(b,1-3a,1-a,1-a)$，其中 $0\le b<\frac{1}{4},\frac{1}{6}\le a<\frac{1}{3}$ 且 $b\le a$。

並且，四家攤販所分得的利益分別為：當 $b=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$, $f_b=f_1=f_2=f_3=\frac{1}{4}$

或當 $0\le b<\frac{1}{4},\frac{1}{6}\le a<\frac{1}{3}$ 且 $b\le a$，$f_b=\frac{b+1-3a}{2}, f_1=\frac{1-b-a}{2}, f_3=f_4=a$。

3. 當 $n=4$ 且 $b\le\frac{1}{2}$ 時，奈許均衡存在的充分必要條件是 $b=\frac{1}{2}$ 或 $0\le b\le\frac{1}{6}$。

且當 $b=\frac{1}{2}$ 時，固定攤販可以確定得到其獲利的最大值 $\frac{1}{3}$。

4. 當 $n=5$ 且 $b\le\frac{1}{2}$ 時，奈許均衡存在的充分必要條件是 $0\le b\le\frac{1}{6}$ 或

$\frac{3}{8}\le b\le\frac{1}{2}$。並且當 $b=\frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$ 時，固定攤販可以得到確定獲利 $\frac{1}{6}$；

而當 $b=\frac{3}{8}$ 時，固定攤販可以確定得到其獲利的最大值 $\frac{1}{4}$。

(三)固定策略的保證獲利

1. 當 $n=1$ 時，固定攤販必須位於 $\frac{1}{2}$ 的位置，才能產生均衡，並可獲利 $\frac{1}{2}$。
2. 當 $n=2$ 時，固定攤販若選取 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 的位置，就可獲得最大利益 $\frac{1}{2}$。
3. 當 $n=3$ 時，若固定攤販選取 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 的位置，可以得到確定獲利 $\frac{1}{4}$；

   若想要獲得最大利益 $\frac{1}{3}$，則必須選取 $\frac{1}{6}$ 或 $\frac{5}{6}$ 的位置，但不保證獲利為 $\frac{1}{3}$。
4. 當 $n=4$ 時，固定攤販若選取 $\frac{1}{2}$ 的位置，就可獲得最大利益 $\frac{1}{3}$。
5. 當 $n=5$ 時，固定攤販若選取 $\frac{3}{8}$ 或 $\frac{5}{8}$ 的位置，則可獲得最大利益 $\frac{1}{4}$。
6. 當 $n\ge 6$ 時，對任意 $\frac{3}{2n-4}\le b\le 1-\frac{3}{2n-4}$，

   $a_1=a_2=\frac{1}{2n-4}, a_k=\frac{2k-3}{2n-4}(3\le k\le n-2), a_{n-1}=a_n=\frac{2n-5}{2n-4}$ 會是一組奈許均衡。

7.當 $n \geq 6$ 時，對任意 $\frac{3}{2n-4} \leq b \leq 1-\frac{3}{2n-4}$ ，

$a_1 = a_2 = \frac{1}{2n-4}, a_k = \frac{2k-3}{2n-4}\left(3 \leq k \leq n-2\right), a_{n-1} = a_n = \frac{2n-5}{2n-4}$ 會是一組奈許均衡。

8.當 $n \geq 3$ 時，若 n 為奇數，則對任意 $0 \leq b \leq \frac{1}{n+1}$ ，

$a_1 = \frac{1}{n+1}, a_{2k} = a_{2k+1} = \frac{2k+1}{n+1}, \forall 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ 會是一組奈許均衡；

若 n 為偶數，則對任意 $0 \leq b \leq \frac{1}{n+2}$ ，

$a_1 = \frac{1}{n+2}, a_2 = \frac{3}{n+2}, a_{2k-1} = a_{2k} = \frac{2k+1}{n+2}, \forall 2 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ 會是一組奈許均衡。

9.當 $n \geq 5$ 時，對任意 $\frac{3}{2n-2} \leq b < \frac{3}{2n-4}$ ，

$a_1 = a_2 = \frac{b}{3}, a_k = 1-\frac{\left(2n-2k-1\right)b}{3}\left(3 \leq k \leq n-2\right), a_{n-1} = a_n = 1-\frac{b}{3}$ 會是一組奈許均衡。

10.當 $n \geq 4$ 時，若 n 為奇數，則當固定攤販位於 $\frac{1}{n+1} < b < \frac{3}{2n-2}$ 時，其餘 n 家流動攤販無法形成奈許均衡；若 n 為偶數，則當固定攤販位於 $\frac{1}{n+2} < b < \frac{3}{2n-2}$ 時，其餘 n 家流動攤販無法形成奈許均衡。

11.在均衡時，設共點攤販所分得的利益為 a ，若兩組共點攤販間有奇數家獨立攤販位於 $a_{m+1} < a_{m+2} < \cdots < a_{m+2k+1}$ ，則此 $2k+1$ 家流動攤販的利益總和 $\sum_{j=1}^{2k+1} f_{m+j} \geq \left(2k+2\right)a$ 。

12.在均衡時，若固定攤販位於最左側 b 的位置，而他與最近的共點攤販之間若有偶數家獨立攤販位於 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k}$ ，則此 $2k$ 家流動攤販與固定攤販的利益總和 $f_b + \sum_{j=1}^{2k} f_j \geq \left(2k+2\right)b$

13.當 $n \geq 4$ 時，若固定攤販位於 $\frac{3}{2(n-1)}$ ，則流動攤販存在唯一的奈許均衡，此時固定攤販可獲得確定利益 $\frac{1}{n-1}$ ，並且其為最大保證獲利。

二、討論

(一) 在三家流動攤販的情況下，我們分別討論了三攤販共點、兩攤販共點一攤販獨立，以及三攤販均不共點這三種情況，會發現當達成均衡時，最多只會有兩個攤販共點，並且共點攤販左右分得的區域相等。

(二) 在四家流動攤販的情況下，根據我們的討論可以得知，在均衡時，最靠近兩端點的攤販必為兩兩共點

(三) 一維直線且沒有固定攤販時，在攤販數為 3 時沒有均衡。

(四) 一維直線且沒有固定攤販時，若所有的攤販均勻分布於直線上，可以達到最大公共利益，但卻不是均衡的形式之一，因為端點攤販須為共點攤販。而因此在均衡形式中，使公共利益最大化的形式為只有端點攤販共點，其餘攤販獨立；使公共利益最小化的形式則是當所有攤販皆為共點攤販。

(五) n 個攤販中有一個攤販"固定不動"時，均衡是否存在，不一定與 $n-1$ 個或 n 個流動攤販是否有均衡相關。

(六) 一維直線且有一固定攤販時，於任何攤販數皆可能形成均衡。

(七) 當有一個固定攤販時，流動攤販的奈許均衡是否存在及均衡的型態只由固定攤販的位置決定。

(八) 當 $n \geq 4$ 時，若固定攤販位於 $\frac{3}{2(n-1)}$，則流動攤販存在唯一的奈許均衡，且固定攤販可獲得確定利益 $\frac{1}{n-1}$，此均衡形式為除兩端攤販共點其餘攤販獨立，為可以達成最大公益的均衡形式，因此我們可以知道，固定攤販可以控制自己的位置使自己獲得一定獲利並有最大公共利益。

(九) 當 $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$ 的範圍中，除了 $b = \frac{3}{2n-2}$ 的範圍之外，其餘位置若可以使均衡存在，都會存在某組均衡，使得固定攤販的利益 $f_b < \frac{1}{n-1}$ 。

肆、結論與應用

若我們將攤販視為商場上的企業，或是政治上不同的政黨，將其位置視為產品定位或是政策取向，奈許均衡的結果可以預測其定位所帶來的利益，或瓜分到的選票支持。而固定攤販可視為不隨著眼前利益而改變策略的公司。我們已證明出固定攤販的最大保證獲利為：當 $n \geq 4$ 時，固定攤販位於 $\frac{3}{2(n-1)}$，且固定攤販獲得利益 $\frac{1}{n-1}$。由我們的結果可以得知，選取適當的固定策略可以保證帶來優於平均的利益，其獲利亦高於可藉由移動獲得更多利益的流動攤販。

伍、未來展望

未來，我們希望能根據市場模型增加固定攤販數，觀察其如何影響均衡結果。我們還希望改變我們的模型。已知在 $n \geq 3$ 的時候，若顧客分布不均勻則可能無法產生均衡，若將顧客不是均勻分布的情況視為不同形狀的沙灘，我們想觀察加入固定攤販後，是否可以產生均衡，並且使用常態分佈以及 M 型(雙峰)分佈的圖形作為我們的模型。希望藉著這兩種常見的分佈圖形，可以將我們的得到的均衡結果應用到更多的層面，得到的結果也能更貼近現實生活。

陸、參考文獻

1. Hotelling, H. (1929), “ Stability in Competition”, *Economic Journal*, Vol. 39, No. 153, pp. 41–57
2. Eaton, B. and Lipsey R. G. (1975), “The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 42, No. 1, pp. 27-49

【評語】010004

本作品討論對局論裡的沙灘賣冰模式的奈許均衡點，作品主要的亮點在於提出一個固定模式的保證獲利。作者也看出一個最大最小獲利模式。本作品以高中生討論對局論相關課題，相當新穎。但以數學技巧而言，多半只是線性方程，作者宜多加討論對局的意義，以及推廣到多人固定模式。