2016 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010001

參展科別　數學

作品名稱　命中「助」定－間接互助模型的探討

得獎獎項　大會獎：二等獎

就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　謝怡君、鐘培碩

作者姓名　李思賢、林宜嫺、黃庭筠

關鍵字　互助模型、演化機制、機率

作者簡介

我是李思賢，目前就讀新竹女中二年級。

國中時受到老師啟發，對理化產生極大的興趣，因此在進入竹女後考上了數資班，沒想到會被分配到數學組。相對之下，這是個我比較不熟悉的領域，然而在一次次討論中，我漸漸發現課本裡的數學只是冰山一角，感謝當時的陰錯陽差，讓我有機會一窺數學的美，也希望這次比賽能收穫滿滿！

我是林宜嫺，目前就讀新竹女中二年級。

我覺得做數學專題是一個很奇妙的過程，結合了過去各單元所學，創造出一個與平時寫題目全然不同的結果，能把「助人行為」用數學表示，甚至畫出圖形。這次很榮幸能參加國際科展，與各界好手交流分享，也希望你會喜歡我們的作品！

我是黃庭筠，目前就讀新竹女中二年級。

平時喜愛閱讀，喜歡一頭栽進書中世界的那種感覺。原本以為自己是個標準的文組人，但上高中後陰錯陽差進入了數資班，遇到一群志同道合的朋友，並加入了數學組。這次很榮幸能參加國際科展，希望在研究以及與各參賽者切磋的過程中，能讓我對數學有更深一層的認識，也謝謝怡君老師和培碩老師的指導。

摘要

每個人都有需要幫助的時候，當你遇到一個需要幫助的人，你會如何反應呢？有些人總是樂於助人，有些人選擇獨善其身，有些人則是會先觀察對方是什麼樣的人再做決定。這些不同的決定會交織成出什麼樣的故事呢？

我們假設社會上有三種人：

總是願意幫助別人的 Cooperators、

永遠不幫助別人的 Defectors、

依據人們過往的行為來決定是否幫助對方的 Discriminators；

由於 cooperator 和 defector 的行為是固定的，顯然 discriminator 的助人行為會有決定性的影響，因此我們從學者 Berger 的論文出發，修改 discriminator 決定是否幫助他人的判斷準則，架構了兩種間接互助模型並與 Berger(2011)的工作做比較，觀察這些改變的影響，計算三種人的比例與彼此幫助率的關係。

Discriminator 遇到不同的人會有不同的決定，隨著時間的推進，Berger 在論文中已證明了他們的行為會趨於一致，並提出一種演化機制，探討三種族群之間的流動。那麼在我們提出的兩種模型中，discriminator 的行為是不是也會趨於一致呢？因此我們證明了 discriminator 助人行為的收斂，也提出了一個新的演化機制，試圖用不同的觀點詮釋三種族群間的流動。

在我們的互助模型中，當使用 Berger(2011)的演化機制時，演化行為只受 discriminator 佔全體比例的大小影響；然而若使用我們提出的演化機制，不論 discriminator 的比例為何，演化行為只會由 cooperator 與 defector 的比值決定。如此，我們便能刻劃出：可以使模型中所有的人至終演化成為 cooperators，理想中大同世界的範圍。

Abstract

When you come across someone who needs help, will you give him/her a hand, cast a cold eye, or help based on his/her previous reputation?

Based on the assumption that a society consists of *cooperators*, who altruistically help those in need, *discriminators*, who help those who have previously provided help, and indiscriminate *defectors*, we introduce two frameworks for indirect reciprocity and compare them with the one by Berger (2011). We study the influence of discriminators with variant strategies on altruistic behavior among people, and demonstrate the relation between the ratio of society constituents and the helping probability of discriminators. We also introduce a new behavior evolution rule to interpret the change of human's behavior in a different way.

一、 前言

(一) 研究動機

在一次專題討論中，我們接觸到了一篇研究「互助賽局」的經濟學論文，對其結合人性所假設的社會模型條件與三種不同性格之人所占比例的演化過程之關聯產生興趣。我們開始思考這篇論文中對社會的假設是否真的接近社會現況，以及我們是否能建構出更加接近現實的模型，參考 Berger(2011)的模型設定並結合高一所學的「機率」及「二項式定理」展開了研究，並試著用不同的觀點描繪出三種人的演化行為。

(二) 研究目的

探討 discriminator 的行為判斷準則對間接互助(利他)模型的影響，以及 cooperator、defector 及 discriminator 所占的比例在演化機制中扮演的角色。

(三) 研究設備與器材

1.器材：紙、筆、電腦

2.軟體：Geogebra、Microsoft Office

二、 研究方法與過程

(一) 間接互助模型

基本假設：

(1) 社會上的人可以歸類為三種：

1. 必定幫助他人的合作者 cooperator
2. 絕對不幫助他人的疏離者 defector
3. 依據對方過往名聲，決定是否給予幫助的鑑別者 discriminator

並且其組成比例依序為 $x, y, z\ (x+y+z=1)$。

(2) 每次有幫助人的決心，但力有未逮之機率為 $\alpha\ (0 \le \alpha < 1)$。換言之，即便有心助人，其助人的成功機率只有 $\overline{\alpha} = 1-\alpha$。

(3) 決定不幫助人的時候，因為發生失誤而不小心助人的機率為零。

1. Berger(2011)的模型：

假設：

(1) 當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取兩次，只要其中至少有一次他幫助了別人，discriminator 就會視這個人為好人，並決定給予幫助。《判準 1》

(2) 當助人成功時，會帶給助人者自身利益減損 c 單位效用(utility)，而此時受到幫助的人其效用可提升 b 單位，並且 $b > c > 0$。

想像著隨著時間推進，$t = 0, 1, 2, \cdots$，機運會持續隨機地將社會成員與以配對，使其面臨是否幫助他人的情境。在離散時間 t 時，cooperator，defector 及 discriminator 成功助人的機率分別為 $\overline{\alpha} = 1-\alpha$，0 及 p_t。由於 p_t 會隨時間更動，首先要考慮的問題便是隨著時間推進，p_t 是否會趨於穩定？ (假設 $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$。)

定理 1 (Berger)： p_t **必定收斂至一不動點 p (穩定態)，並且 p 滿足**

$$p = \overline{\alpha}\left[(1-\alpha^2)x + p(2-p)z\right] \qquad \textbf{(1-1.1)}$$

於是，長期而言 cooperator，defector 及 discriminator 名聲好的機率為 $1-\alpha^2$，0 及 $1-(1-p)^2 = p(2-p)$，獲得幫助的機率期望值則分別為 $x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}(1-\alpha^2)$，$x\overline{\alpha}$ 及 $x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}p(2-p)$。而他們所獲得效益的期望值則分別為

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}(1-\alpha^2)\right]b - \overline{\alpha}c, \\ \Pi_2 &= x\overline{\alpha}b, \\ \Pi_3 &= \left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}p(2-p)\right]b - pc. \end{aligned} \qquad \text{(1-1.2)}$$

其中，
$$p = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2\overline{\alpha}z}+\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2\overline{\alpha}z}\right)^2+\left(1-\alpha^2\right)\dfrac{x}{z}}, & \text{當 } z>0 \\ \overline{\alpha}(1-\alpha^2)x, & \text{當 } z=0. \end{cases} \qquad \text{(1-1.3)}$$

但我們認為作者對「discriminator 只挑取兩次行為作觀察」的設定不甚合理，為什麼不是觀察三次或者更多呢？或者，如果同樣挑選兩次觀察，但是把 discriminator 的判準改成「如果對方兩次都幫助別人就一定幫助他；若兩次只有一次幫助別人，則幫助他的機率為 $\frac{1}{2}$；兩次都沒有助人才不幫助他。」呢？

因此，我們接著討論當互助模型中，discriminator 決定是否幫助別人的判準條件改變時，對人們的互助行為會有什麼影響。

2.“觀察三次以上”的間接互助模型：

我們先討論觀察三次的情形，假設：

《判準 2》
當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取三次，如果其中至少有兩次他幫助了別人，discriminator 就會視這個人為好人，並決定給予幫助。反之，則決定不幫助他。

我們同樣假設在離散時間 t 時，discriminator 成功助人的機率為 p_t，而 cooperator 及 defector 成功助人的機率分別會是 $\overline{\alpha}=1-\alpha$ 和 0。同時我們以 c_t 表示隨機選出的一個 discriminator 過去(時間點 0, 1, ⋯, $t-1$ 時)助人次數的期望值，並以 a_t 表示其過去幫助人的頻率(即成功助人的機率，故 $a_t=\frac{c_t}{t}$)；並以 $g_x(t)$ 、 $g_y(t)$ 以及 $g_z(t)$ 表示隨機選出的一個 cooperator、defector 及 discriminator 在離散時間 t 時名聲很好(即受觀察的三次中，有兩次以上助人行為)的機率，則

$$
\begin{aligned}
&g_x(t)=(1-\alpha)^3+C_2^3(1-\alpha)^2\alpha=(1-\alpha)^2(1+2\alpha),\\
&g_y(t)=0,\\
&g_z(t)=a_t^{\ 3}+C_2^3a_t^{\ 2}(1-a_t)=-2a_t^{\ 3}+3a_t^{\ 2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
p_t&=\overline{\alpha}\left[x\cdot g_x(t)+y\cdot g_y(t)+z\cdot g_z(t)\right]\\
&=\overline{\alpha}\left[x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)+z(-2a_t^{\ 3}+3a_t^{\ 2})\right]
\end{aligned}
$$

於是，我們同樣要計算：隨著時間的推進，p_t 是否會收斂到不動點 p ？

考慮 $x, y, z>0$ 且 $\alpha\geq 0$ 的情況，並假設 $p_0=p_1=p_2=\frac{1}{2}$。在時間點 $t+1$ 時，因為 $c_{t+1}=c_t+p_t$，所以

$$
\begin{aligned}
a_{t+1}&=\frac{c_{t+1}}{t+1}=\frac{c_t+p_t}{t+1}=\frac{t\cdot a_t}{t+1}+\frac{p_t}{t+1}\\
&=\frac{t}{t+1}a_t+\frac{1}{t+1}p_t
\end{aligned}
$$

這告訴我們：a_{t+1} 的值必定介於 a_t 和 p_t 之間。

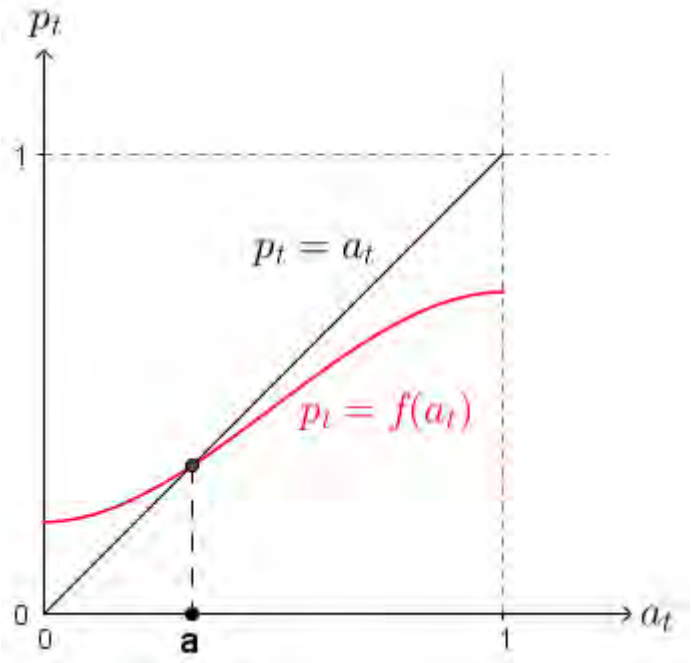
如果我們將 p_t 視為變數 a_t 的一個函數

$$\begin{aligned} p_t = f(a_t) &= \bar{\alpha}\left[x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)+z(-2a_t^3+3a_t^2)\right] \\ &= \bar{\alpha}\left[-2za_t^3+3za_t^2+x(1-\alpha)^2(1+2\alpha)\right] \end{aligned}$$

由於 $f(0)=\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x>0$，而

$$\begin{aligned} f(1) &= \bar{\alpha}\left[z+(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right] \\ &\le z+(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2x \\ &= z+(1-\alpha^2)^2x \\ &\le z+x\le 1 \end{aligned}$$

並且 $f'(a_t)=\bar{\alpha}\left[-6za_t^2+6za_t\right]=6\bar{\alpha}za_t\left(1-a_t\right)$。由於在 $0\le a_t\le 1$ 之間，$0\le a_t(1-a_t)\le\frac{1}{4}$，所以 $0\le f'(a_t)\le\frac{3\bar{\alpha}z}{2}$，故可得知若 $\bar{\alpha}z\le\frac{2}{3}\Rightarrow f'(a_t)\le 1$，則 $p_t=f(a_t)$ 的圖形與直線 $p_t=a_t$ 在 $(0,1)$ 間有唯一的交點，如下圖一所示。



圖一

如圖一，橫軸為 a_t，縱軸為 p_t，$p_t=f(a_t)$ 與 $p_t=a_t$ 的圖形交於(a,a)，其中 $0<a<1$。
當 $0\le a_t<a$ 時，$a_t<p_t<a$，因此 $a_t<a_{t+1}<p_t<a\Rightarrow a_t\nearrow a$，
當 $a<a_t\le 1$ 時，$a_t>p_t>a$，因此 $a_t>a_{t+1}>p_t>a\Rightarrow a_t\searrow a$，
而當 $a_t=a$ 時，$p_t=a_t=a$，因此 $a_{t+1}=a=a_t$ 為一個不動點，此時

$$a=\bar{\alpha}\left[-2za^3+3za^2+(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right]$$

整理得到三次方程式 $2\bar{\alpha}za^3-3\bar{\alpha}za^2+a-\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x=0$

$$\Leftrightarrow\ 2\bar{\alpha}za^3-3\bar{\alpha}za^2+a-\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x=0$$

帶入公式解得知：當 $\bar{\alpha}z\le\frac{2}{3}\Rightarrow(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z})^2+(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z})^3>0$，則此方程式有唯一的實根

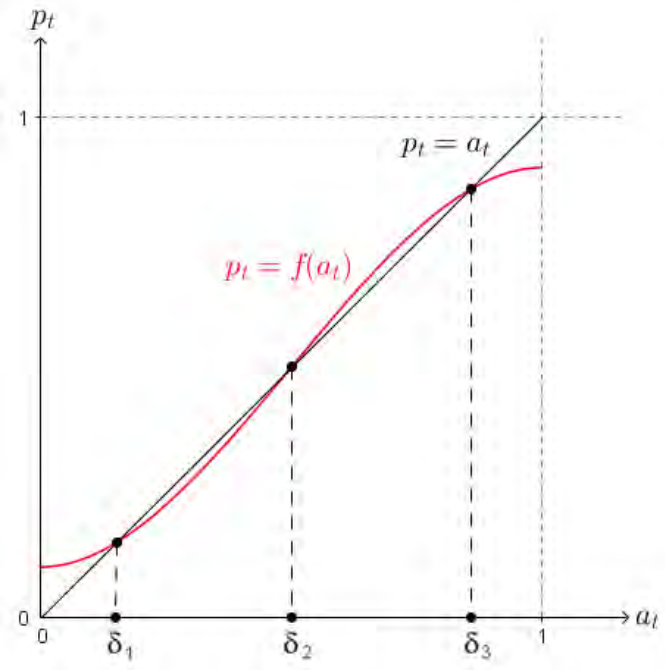
$$a=\frac{1}{2}+\sqrt[3]{\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}+\sqrt{(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z})^2+(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z})^3}}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z}-\sqrt{(\frac{2\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x+\bar{\alpha}z-1}{8z})^2+(\frac{2-3\bar{\alpha}z}{12\bar{\alpha}z})^3}}$$

並且 $0<a<1$，故

$$p=\lim_{t\to\infty}p_t=\lim_{t\to\infty}f(a_t)=f(a)=a$$

可以得到 p_t 會收斂至一個不動點 $p=a$。

然而，$p_t=f(a_t)$ 與 $p_t=a_t$ 的圖形在 $(0,1)$ 之間也可能有三個交點。如下圖二所示：若 $p_t=f(a_t)$ 與 $p_t=a_t$ 的圖形交於 $(\delta_1,\delta_1),(\delta_2,\delta_2),(\delta_3,\delta_3)$ 三點，其中 $0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<1$，



圖二

當 $0\le a_t<\delta_1$ 時，$a_t<p_t<\delta_1$，因此 $a_t<a_{t+1}<p_t<\delta_1\Rightarrow a_t\nearrow\delta_1$，

當 $\delta_1<a_t<\delta_2$ 時，$a_t>p_t>\delta_1$，因此 $a_t>a_{t+1}>p_t>\delta_1\Rightarrow a_t\searrow\delta_1$，

當 $\delta_2<a_t<\delta_3$ 時，$a_t<p_t<\delta_3$，因此 $a_t<a_{t+1}<p_t<\delta_3\Rightarrow a_t\nearrow\delta_3$，

當 $\delta_3<a_t\le1$ 時，$a_t>p_t>\delta_3$，因此 $a_t>a_{t+1}>p_t>\delta_3\Rightarrow a_t\searrow\delta_3$，

而當 $a_t=\delta_1$ 或 δ_2 或 δ_3 時，$p_t=a_t$，因此 $a_{t+1}=a=a_t$ 為不動點。故可得知：

當 $0\le a_t<\delta_2$，a_t 會收斂到 δ_1，而當 $\delta_2<a_t\le1$，a_t 會收斂到 δ_3，

只有 $a_t=\delta_2$ 時，a_t 才會收斂到 δ_2。

由於我們假設 $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$，故 $a_3 = \frac{1}{2}$。因此，若 $\delta_2 > \frac{1}{2}$，則 a_t 收斂到 δ_1，此時

$$p = \lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} f(a_t) = f(\delta_1) = \delta_1 \text{；}$$

若 $\delta_2 < \frac{1}{2}$，則 a_t 收斂到 δ_3，此時

$$p = \lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} f(a_t) = f(\delta_3) = \delta_3 \text{；}$$

而當 $\delta_2 = \frac{1}{2}$，則 a_t 收斂到 δ_2，此時

$$p = \lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} f(a_t) = f(\delta_2) = \delta_2 \text{。}$$

其中 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 是

$$a = \overline{\alpha}\left[-2za^3 + 3za^2 + (1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right]$$

的三個實根，並且 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < 1$。

定理 2：當 disciminator 照著《判準 2》幫助別人時，p_t 必定收斂至一不動點 p，其中 p 是方程式

$$a = \overline{\alpha}\left[-2za^3 + 3za^2 + (1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right] \qquad \textbf{(1-2.1)}$$

在 $(0,1)$ 間的實根。

若上式(1-2.1)在 $(0,1)$ 間有三實根 $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$，則

$$p = \begin{cases} \delta_1, \text{ 當 } \delta_2 > \frac{1}{2}, \\ \delta_2, \text{ 當 } \delta_2 = \frac{1}{2}, \\ \delta_3, \text{ 當 } \delta_2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

所以長期而言，cooperator，defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值分別為 $x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$，$x\overline{\alpha}$ 及 $x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha}\left(-2p^3 + 3p^2\right)$，而他們所獲得效益的期望值則分別為

$$\Pi_1 = \left[x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)\right]b - \overline{\alpha}c,$$
$$\Pi_2 = x\overline{\alpha}b,$$
$$\Pi_3 = \left[x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha}\left(-2p^3 + 3p^2\right)\right]b - pc.$$

在這個模型中，雖然 discriminator 成功助人的機率 p_t 仍然會收斂，然而要得知其確實收斂到那一個不動點，與方程式 $2\overline{\alpha}za^3 - 3\overline{\alpha}za^2 + a - \overline{\alpha}^3(3-2\overline{\alpha})x = 0$ 在 $(0,1)$ 之間有幾個實根，以及其實根值的大小有關。必須透過複雜的計算才能得知 discriminators 的行為，可以想見，若是挑選四次以上的行為來觀察，就要解四次方程式，計算會更為困難。我們推測這就是原作者 Berger 只選擇挑兩次來觀察的原因。

因此我們在下一小節中再次更改了 discriminator 決定是否助人之判準，提出另一個新的模型。

3.“按照比例決定”的間接互助模型：

假設：

《判準 3-1》
當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的行為，並從中隨機挑取兩次，如果兩次他都幫助了別人，則 discriminator 就決定幫助他，若是其中只有一次他幫助了別人，則 discriminator 決定要幫助他的機率為 $\frac{1}{2}$，但若他兩次都沒有幫助別人，discriminator 就選擇不幫助他。

我們同樣假設在離散時間 t 時，discriminator 成功助人的機率為 p_t，而 cooperator 及 defector 成功助人的機率分別會是 $\overline{\alpha}=1-\alpha$ 和 0。同時我們以 c_t 表示一個 disciminator 過去(時間點 0, 1, ⋯, $t-1$ 時)助人次數的期望值，並以 a_t 表示其過去助人的頻率(即成功助人的機率，故 $a_t=\frac{c_t}{t}$)。

我們接著要證明隨著時間的推進 p_t 會收斂到不動點 p。

定理 3：當 disciminator 照著《判準 3-1》幫助別人時，p_t 必定收斂至一不動點 p。

$$p=\frac{\overline{\alpha}^2 x}{1-\overline{\alpha}z} \tag{1-3.1}$$

證明：

考慮 $x, y, z>0$ 且 $\alpha\geq 0$ 的情況。假設隨機選出一位 discriminator 在離散時間 t 時決定幫助另一位 cooperator 的機率為 $g_x(t)$，而決定幫助另一位 discriminator 的機率為 $g_z(t)$，則

$$\begin{aligned} g_x(t) &= (1-\alpha)^2+C_1^2\alpha(1-\alpha)\cdot\frac{1}{2} \\ &= 1-2\alpha+\alpha^2+\alpha-\alpha^2 \\ &= 1-\alpha \end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned} g_z(t) &= a_t^{\,2}+C_1^2 a_t(1-a_t)\cdot\frac{1}{2} \\ &= a_t^{\,2}+a_t-a_t^{\,2} \\ &= a_t \end{aligned}$$

由於 discriminator 絕對不會幫助 defector，所以

$$p_t=\overline{\alpha}\left[x\cdot g_x(t)+z\cdot g_z(t)\right]=\overline{\alpha}\left[x(1-\alpha)+z\cdot a_t\right].$$

而在時間點 $t+1$ 時，因為 $c_{t+1}=c_t+p_t$，所以我們可以得到

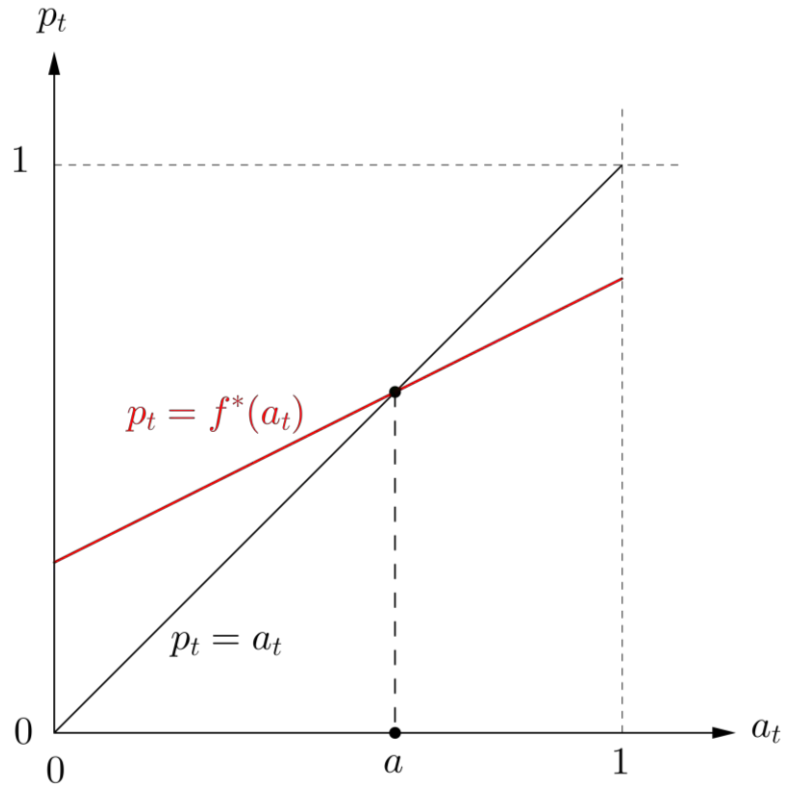
$$\begin{aligned} a_{t+1} &= \frac{c_{t+1}}{t+1}=\frac{c_t+p_t}{t+1}=\frac{t\cdot a_t}{t+1}+\frac{p_t}{t+1} \\ &= \frac{t}{t+1}a_t+\frac{1}{t+1}p_t \end{aligned}$$

這告訴我們：a_{t+1} 的值必定介於 a_t 和 p_t 之間。

如果我們將 p_t 視為變數 a_t 的一個函數

$$p_t = f^*(a_t) = \bar{\alpha}\left[x(1-\alpha) + z\cdot a_t\right]$$
$$= \bar{\alpha}z\cdot a_t + \bar{\alpha}^2 x.$$

因為 $\bar{\alpha}z > 0$，又 $f^*(0) = \bar{\alpha}^2 x > 0$ 且 $f^*(1) = \bar{\alpha}^2 x + \bar{\alpha}z \le x + z < 1$，可得知 $p_t = f^*(a_t)$ 的圖形為一斜率為正的直線，且與直線 $p_t = a_t$ 在 $(0,1)$ 間有唯一的交點。



圖三

如圖三，橫軸為 a_t，縱軸為 p_t，$p_t = f^*(a_t)$ 與 $p_t = a_t$ 的圖形交於點 (a, a)。由於 $0 \le a_t \le 1$，我們可以觀察到：

當 $0 \le a_t < a$ 時，$a_t < p_t < a$，因此 $a_t < a_{t+1} < p_t < a \Rightarrow a_t \nearrow a$，

當 $a < a_t \le 1$ 時，$a_t > p_t > a$，因此 $a_t > a_{t+1} > p_t > a \Rightarrow a_t \searrow a$，

而當 $a_t = a$ 時，$p_t = a_t = a$，因此 $a_{t+1} = a = a_t$ 為一個不動點，此時

$$a = \bar{\alpha}\left[(1-\alpha)\ x + z\cdot a\right]，\qquad (1\text{-}3.2)$$

整理得到一次方程式 $(1-\alpha)^2 x + (1-\alpha)za - a = 0$，故

$$a = \frac{(1-\alpha)^2 x}{1-(1-\alpha)z} = \frac{\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}，$$

並且 $p = \lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} f^*(a_t) = a = \dfrac{\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}$。

當 p_t 達到穩定時，cooperator，defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值分別為 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)$，$x\bar{\alpha}$ 及 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p$，其中 $p = \dfrac{\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}$。

而他們所獲得效益的期望值則分別為

$$\Pi_1 = \left[x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha}(1-\alpha) \right] b - \overline{\alpha} c,$$
$$\Pi_2 = x\overline{\alpha} b,$$
$$\Pi_3 = \left[x\overline{\alpha} + z\overline{\alpha} p \right] b - pc.$$

接著，我們將模型推廣到觀察 n 次：

假設：

《判準 3-2》

當 discriminator 遇到需要幫助的人，會觀察這個人過去有機會助人時的的行為，並從中隨機挑取 n 次，如果 n 次中他幫助了別人 k 次，則 discriminator 幫助他的機率為 $\frac{k}{n}$。

我們延續前面的使用的符號，假設一位 discriminator 在時間點 t 時決定幫助另一位 cooperator 的機率為

$$\begin{aligned}
g_x(t) &= \sum_{k=1}^{n} C_k^n \cdot (1-\alpha)^k \cdot \alpha^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-\alpha)^k \cdot \alpha^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot (1-\alpha)^k \cdot \alpha^{n-k} \\
&= (1-\alpha) \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha^{n-k} \\
&= (1-\alpha)\left[(1-\alpha)+\alpha\right]^{n-1} \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

而 discriminator 在時間點 t 時決定幫助另一位 discriminator 的機率為

$$\begin{aligned}
g_z(t) &= \sum_{k=1}^{n} C_k^n \cdot a_t^{\,k} \cdot (1-a_t)^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot a_t^{\,k} \cdot (1-a_t)^{n-k} \\
&= a_t \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^{n-1} \cdot a_t^{\,k-1} \cdot (1-a_t)^{n-k} \\
&= a_t
\end{aligned}$$

由於 discriminator 絕對不會幫助 defector，所以

$$p_t = \overline{\alpha}\left[x \cdot g_x(t) + z \cdot g_z(t)\right] = \overline{\alpha}\left[x(1-\alpha) + z \cdot a_t\right].$$

得到**與使用《判準 3-1》完全一樣的結果！**

並且，我們可以從 $g_x(t)=1-\alpha$ 以及 $g_z(t)=a_t$ 發現：

如果 discriminator 使用《判準 3-2》，將觀察到的助人比例做為決定幫助對方的機率，無論選擇觀察幾次，得到的結果都會跟『只觀察一次』就決定是否幫助他一樣。

這使得我們提出來的判準辦法可以不受觀察次數的限制，不論觀察幾次，都有唯一的不動點，而且不論每位 discriminator 決定觀察幾次，只要三種人的比例和助人成功率決定了，其成功助人的機率都會收斂到同一個 p。而且其公式簡單易算，因此我們認為這是一個較佳的間接互助模型。

(二) 演化機制

在 Berger(2011)的模型中，假設助人成功時，會帶給助人者自身利益減損 c 單位效用(utility)，而此時受到幫助的人其效用可提升 b 單位，並且 $b > c > 0$，因此，根據三種人的人數比例(x, y, z)，可得到其獲得效益的期望值，計算出三種人的最佳回應範圍(Best-response regions)，並將其當作一種演化機制。比如說，在某個人數比例(x, y, z)時，若 cooperator 的效益期望值最高，則這種人的人數便會增加；反之，效益期望值較低的族群，則人數會減少。

根據 Berger(2011)，cooperator、defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值則分別為 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)$，$x\bar{\alpha}$ 及 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p)$。而他們所獲得效益的期望值則分別為：

$$\Pi_1=\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)\right]b-\bar{\alpha}c,\ \Pi_2=x\bar{\alpha}b,\ \Pi_3=\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p)\right]b-pc\ ,$$

故可得到三種人的最佳回應區域(*best response regions*)：

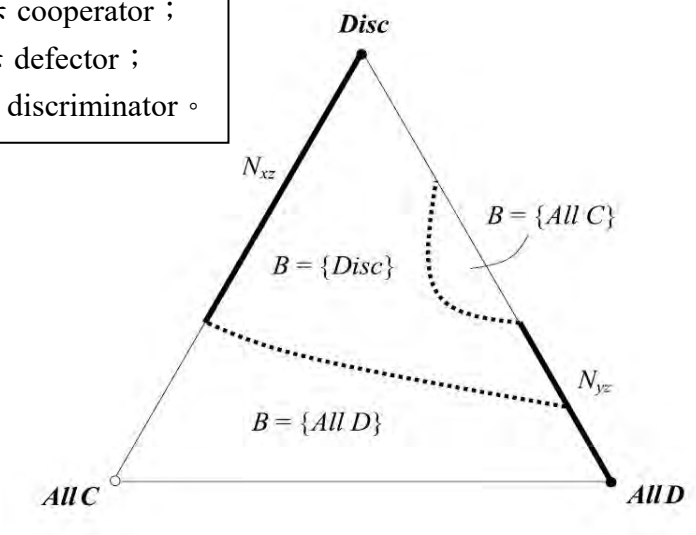
- 當 $\begin{cases} y=0 \\ z\geq\frac{c}{b} \end{cases}$ 或 $x\leq\frac{(z-\frac{c}{b})(\frac{b-c}{b}-z)}{z}$ 時，cooperator 有最大利益，
- 當 $z\leq\frac{c(b-c)}{2b(b-c)-b^2x}$ 時，defector 有最大利益，
- 當 $x\geq\frac{(z-\frac{c}{b})(\frac{b-c}{b}-z)}{z}$ 且 $z\geq\frac{c(b-c)}{2b(b-c)-b^2x}$ 時，discriminator 有最大利益。

以 $\alpha=0, b=3c$ 為例，

- 當 $\begin{cases} y=0 \\ z\geq\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $x\leq\frac{(3z-1)(2-3z)}{9z}$ 時，cooperator 有最大利益，
- 當 $z\leq\frac{2}{12-9x}$ 時，defector 有最大利益，
- 當 $x\geq\frac{(3z-1)(2-3z)}{9z}$ 或 $z\geq\frac{2}{12-9x}$ 時，discriminator 有最大利益。

並且其最佳回應區域如下圖四：

其中 ***All C*** 表示 cooperator；
All D 表示 defector；
而 ***Disc*** 表示 discriminator。



圖四

我們也將這種演化機制帶入“按照比例決定”的間接互助模型，得到以下結果：由定理 3，當達到穩定時，cooperator、defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值分別為

$$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)\text{，}x\bar{\alpha}\text{ 及 }x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p\text{，其中 }p=\frac{\bar{\alpha}^2x}{1-\bar{\alpha}z}$$

而他們所獲得效益的期望值則分別為

$$\Pi_1=\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)\right]b-\bar{\alpha}c,\ \Pi_2=x\bar{\alpha}b,\ \Pi_3=\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p\right]b-pc.$$

由式子(1-3.2)，可得 $p=\bar{\alpha}\left[(1-\alpha)x+zp\right]\Leftrightarrow\bar{\alpha}zp=p-\bar{\alpha}(1-\alpha)x$，故

$$\begin{aligned}x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p&=x\bar{\alpha}+p-\bar{\alpha}(1-\alpha)x=p+\bar{\alpha}\alpha x\\ \Rightarrow\Pi_3&=\left[p+\bar{\alpha}\alpha x\right]b-pc=(b-c)p+\bar{\alpha}\alpha bx.\end{aligned}$$

cooperator 為最佳策略時，$\Pi_1\geq\Pi_2$ 且 $\Pi_1\geq\Pi_3$，因此

$$\begin{aligned}&\Pi_1=\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)\right]b-\bar{\alpha}c=x\bar{\alpha}b+z\bar{\alpha}^2b-\bar{\alpha}c\geq x\bar{\alpha}b\\ &\Leftrightarrow z\bar{\alpha}^2b\geq\bar{\alpha}c\Leftrightarrow z\geq\frac{c}{\bar{\alpha}b}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\Pi_1\geq\Pi_3\Leftrightarrow x\bar{\alpha}b+z\bar{\alpha}^2b-\bar{\alpha}c\geq(b-c)p+\bar{\alpha}\alpha bx\\ &\Leftrightarrow x\bar{\alpha}b-\bar{\alpha}\alpha bx+z\bar{\alpha}^2b-\bar{\alpha}c\geq(b-c)p\\ &\Leftrightarrow x\bar{\alpha}(1-\alpha)b+z\bar{\alpha}^2b-\bar{\alpha}c\geq(b-c)p\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}^2 bx + \bar{\alpha}^2 bz - \bar{\alpha}c \geq (b-c)p = \frac{(b-c)\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}$$

$$\Rightarrow \left[\bar{\alpha}bx + \bar{\alpha}bz - c\right]\left(1-\bar{\alpha}z\right) \geq \bar{\alpha}(b-c)x \ \left(\because 1-\bar{\alpha}z > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}(b-c)x - \bar{\alpha}bx\left(1-\bar{\alpha}z\right) = \bar{\alpha}\left(\bar{\alpha}bz - c\right)x \leq \left(\bar{\alpha}bz - c\right)\left(1-\bar{\alpha}z\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{\alpha}bz - c\right)\left(1-\bar{\alpha}z - \bar{\alpha}x\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}bz \geq c \ \left(\because 1-\bar{\alpha}z - \bar{\alpha}x \geq 1-z-x > 0\right)$$

因此，當 $z \geq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，成為 cooperator 是最佳回應。

defector 為最佳策略時，$\Pi_2 \geq \Pi_3$ 且 $\Pi_2 \geq \Pi_1$，故

$$\Pi_2 = x\bar{\alpha}b \geq \Pi_3 = (b-c)p + \bar{\alpha}\alpha bx$$

$$\Leftrightarrow x\bar{\alpha}\left(1-\alpha\right)b = x\bar{\alpha}^2 b \geq (b-c)p = \frac{(b-c)\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}$$

$$\Leftrightarrow b\left(1-\bar{\alpha}z\right) \geq (b-c)$$

$$\Leftrightarrow b\bar{\alpha}z \leq b-(b-c) = c$$

$$\Leftrightarrow z \leq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$$

而 $\Pi_2 \geq \Pi_1 \Leftrightarrow z \leq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$，故可得知：當 $z \leq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，成為 defector 是最佳回應。

接著考慮位於邊界的情況：

(1) 當 $z=0$，$x \neq 0$，$p = \frac{\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z} = \bar{\alpha}^2 x$

$$\prod_1 = \left[x\bar{\alpha} + z\bar{\alpha}(1-\alpha)\right]b - \bar{\alpha}c = x\bar{\alpha}b - \bar{\alpha}c$$

$$\prod_2 = x\bar{\alpha}b$$

$$\prod_3 = \left[x\bar{\alpha} + z\bar{\alpha}p\right]b - pc = x\bar{\alpha}b - \bar{\alpha}^2 xc$$

$$\bar{\alpha}c > \bar{\alpha}^2 xc > 0$$

$$x\bar{\alpha}b > x\bar{\alpha}b - \bar{\alpha}^2 xc > x\bar{\alpha}b - \bar{\alpha}c$$

$$\Pi_2 > \Pi_3 > \Pi_1$$

可得成為 defector 是最佳回應

(2) 當 $y=0$，$x\neq 0$，$\overline{\alpha}z\neq 1$，$p=\dfrac{\overline{\alpha}^2 x}{1-\overline{\alpha}z}$

$$\Pi_1=\left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}(1-\alpha)\right]b-\overline{\alpha}c=x\overline{\alpha}b+z\overline{\alpha}^2 b-\overline{\alpha}c=x\overline{\alpha}b+\overline{\alpha}(z\overline{\alpha}b-c)$$

$$\Pi_2=x\overline{\alpha}b$$

$$\Pi_3=\left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}p\right]b-pc=x\overline{\alpha}b+\overline{\alpha}\cdot\frac{\overline{\alpha}x}{1-\overline{\alpha}z}\cdot(z\overline{\alpha}b-c)$$

$$\because 0<\overline{\alpha}x=\overline{\alpha}(1-\mathrm{y}-\mathrm{z})=\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\,\mathrm{z}\leq 1-\overline{\alpha}z \quad \therefore 0<\frac{\overline{\alpha}x}{1-\overline{\alpha}z}\leq 1$$

$\therefore \Pi_1>\Pi_3>\Pi_2 \quad if \quad z>\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}\wedge\alpha\neq 0$，成為 cooperator 是最佳回應；

$\Pi_1=\Pi_3>\Pi_2 \quad if \quad z>\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}\wedge\alpha=0$，成為 cooperator 或 discriminator 皆是最佳回應；

$\Pi_2>\Pi_3>\Pi_1 \quad if \quad z<\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}\wedge\alpha\neq 0$，成為 defector 是最佳回應；

$\Pi_2>\Pi_3=\Pi_1 \quad if \quad z<\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}\wedge\alpha=0$，成為 defector 是最佳回應。

(3) 當 $x=0$，$\overline{\alpha}z\neq 1$，$p=\dfrac{\overline{\alpha}^2 x}{1-\overline{\alpha}z}=0$

$$\Pi_1=\left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}(1-\alpha)\right]b-\overline{\alpha}c=z\overline{\alpha}^2 b-\overline{\alpha}c=\overline{\alpha}(z\overline{\alpha}b-c)$$

$$\Pi_2=x\overline{\alpha}b=0$$

$$\Pi_3=\left[x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}p\right]b-pc=0$$

當 $z>\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}$，$\Pi_1>\Pi_2=\Pi_3$，成為 cooperator 是最佳回應；

當 $z<\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}$，$\Pi_2=\Pi_3>\Pi_1$，成為 defector 或 discriminator 皆是最佳回應；

當 $z=\dfrac{c}{\overline{\alpha}b}$，$\Pi_1=\Pi_2=\Pi_3$，三種人效益相當。

(4) 當 $z=1$，$x,y=0$，此時 $p_t=\overline{\alpha}\cdot z\cdot g_z(t)=\overline{\alpha}\cdot a_t$，

若 $\alpha=0,\overline{\alpha}=1$，則 $\tilde{p}=\dfrac{1}{2}$。(因為 $p_1=\dfrac{1}{2}=a_1$，$\dfrac{1}{2}=p_1\leq a_{1+1}\leq a_1=\dfrac{1}{2}$)

若 $\alpha\neq 0,\overline{\alpha}\neq 1$，則 $\tilde{p}=0$。

$$\Pi_1 = \left[x\bar{\alpha} + z\bar{\alpha}(1-\alpha)\right]b - \bar{\alpha}c = \bar{\alpha}(\bar{\alpha}b - c)$$
$$\Pi_2 = x\bar{\alpha}b = 0$$
$$\Pi_3 = \left[x\bar{\alpha} + z\bar{\alpha}p\right]b - pc = \bar{\alpha}pb - pc = p(\bar{\alpha}b - c)$$

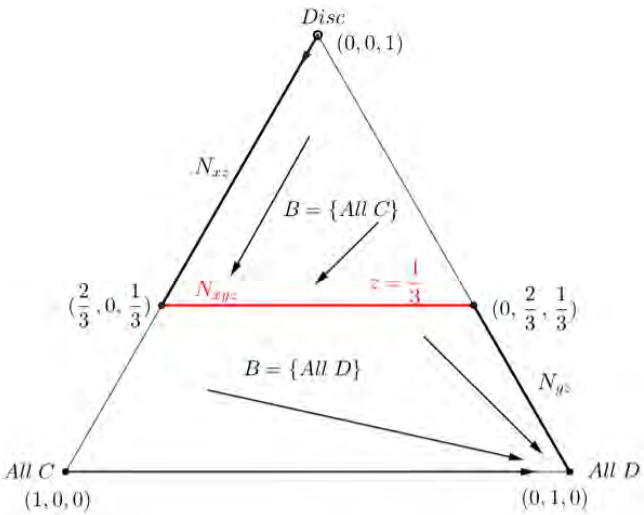
若 $\alpha = 0, \bar{\alpha} = 1$，$\Pi_1 > \Pi_3 > \Pi_2$，成為 cooperator 是最佳回應。

若 $\alpha \neq 0, \bar{\alpha} \neq 1$，$\Pi_1 > \Pi_2 = \Pi_3$，成為 cooperator 是最佳回應。

故可得到三種人的最佳回應區域(*best response regions*)：

- 當 $z \geq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，***All C*** 為最佳回應。
- 當 $z \leq \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，***All D*** 為最佳回應。
- 當 $\begin{cases} y = 0, z \neq 1, \alpha = 0 \\ z \geq \frac{c}{\bar{\alpha}b} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0 \\ z \leq \frac{c}{\bar{\alpha}b} \end{cases}$ 或 $z = \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，***Disc*** 為最佳回應。

我們同樣以 $\alpha = 0, b = 3c$ 為例，可以得到最佳回應區域如下圖五：



圖五

在我們的模型中，若按照 Berger(2011)的演化機制，當 discriminator 的比例 z 低於 $\frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，人們會因為自身獲得的效益選擇當 defector，因此 discriminator 的比例會更低，選擇成為 defector 的人會更多，至終所有人都會變成 defector。當 $z > \frac{c}{\bar{\alpha}b}$ 時，cooperator 的效益最高，人們會傾向幫助別人。但是，演化的結果會使得 cooperator 變多，也會使得 discriminator 的比例變少。直到 $z = \frac{c}{\bar{\alpha}b}$，此時三種人的效益一樣好，因此可能維持平衡。

然而我們認為助人行為不是如此「理性」的行為，反而我們相信「情感」的因素更可能影響三種人的演化，因此，我們試著提出一個不同的演化機制：

假設：

《演化機制》

1. 經過一段時間後，如果一個人需要幫助時得到幫助的比例大於 H，則他會受到鼓勵而更樂於助人，defector 會因此轉變為 discriminator，discriminator 會決定成為 cooperator，而 cooperator 則會繼續當 cooperator。
2. 反之，若一個人得到的幫助比例小於 L，則他會變得比較冷漠，從 cooperator 變成一個 discriminator，或者由 discriminator 變成一個 defector。

1. Berger(2011)的模型：

由於長期而言 cooperator，defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值分別為 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)$，$x\bar{\alpha}$ 及 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p)$，其中

$$p=1-\frac{1}{2\bar{\alpha}z}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{2\bar{\alpha}z}\right)^2+\left(1-\alpha^2\right)\frac{x}{z}}\ ,$$

故我們可以得到：

(1) cooperator 變成 discriminator 的條件：$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)<L$

(2) defector 變成 discriminator 的條件：$x\bar{\alpha}>H$

(3) discriminator 的演化：

根據定理 1，$p=\bar{\alpha}\left[(1-\alpha^2)x+p(2-p)z\right]$，故 discriminator 獲得幫助的機率期望值

$$\begin{aligned} x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p) &= x\bar{\alpha}+p-\bar{\alpha}(1-\alpha^2)x \\ &= p+\bar{\alpha}\alpha^2 x \end{aligned}$$

因此

discriminator 變成 cooperator 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha^2 x>H$；

discriminator 變成 defector 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha^2 x<L$。

因為 cooperator 獲得幫助的機率大於 discriminator，又 defector 獲得幫助的機率會小於 discriminator，所以我們可以得知，只有當 discriminator 獲得幫助的機率期望值

$$p+\bar{\alpha}\alpha^2 x>H \text{ 或者 } p+\bar{\alpha}\alpha^2 x<L$$

的時候，才有機會啟動演化機制。

我們先看 $\alpha=0$ 的例子：此時，discriminator 獲得幫助的機率期望值為 $p+\overline{\alpha}\alpha^2 x=p$ ，故

- discriminator 變成 cooperator 的條件為 $1-\frac{1}{2z}+\sqrt{(1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}}>H$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}}>H-(1-\frac{1}{2z})$$

$$\Leftrightarrow z>\frac{1}{2(1-H)} \ \ or \ \ (1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}>H^2-2H(1-\frac{1}{2z})+(1-\frac{1}{2z})^2$$

$$\Leftrightarrow z>\frac{1}{2(1-H)} \ \ or \ \ x>H^2z-2H(z-\frac{1}{2})=H(H-2)z+H$$

$$\Leftrightarrow z>\frac{1}{2(1-H)} \ \ or \ \ x+H(2-H)z>H.$$

- discriminator 演化成 defector 的條件為 $1-\frac{1}{2z}+\sqrt{(1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}}<L$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}}<L-(1-\frac{1}{2z})\text{，}$$

則 $L-(1-\frac{1}{2z})>0 \Rightarrow z<\frac{1}{2(1-L)}$ ，並且

$$(1-\frac{1}{2z})^2+\frac{x}{z}<L^2-2L(1-\frac{1}{2z})+(1-\frac{1}{2z})^2$$

$$\Rightarrow x<L^2z-L(2z-1)$$

$$\Leftrightarrow x+L(2-L)z<L$$

又 cooperator 及 defector 獲得幫助的機率期望值分別為 $x\overline{\alpha}+z\overline{\alpha}(1-\alpha^2)=x+z$ 及

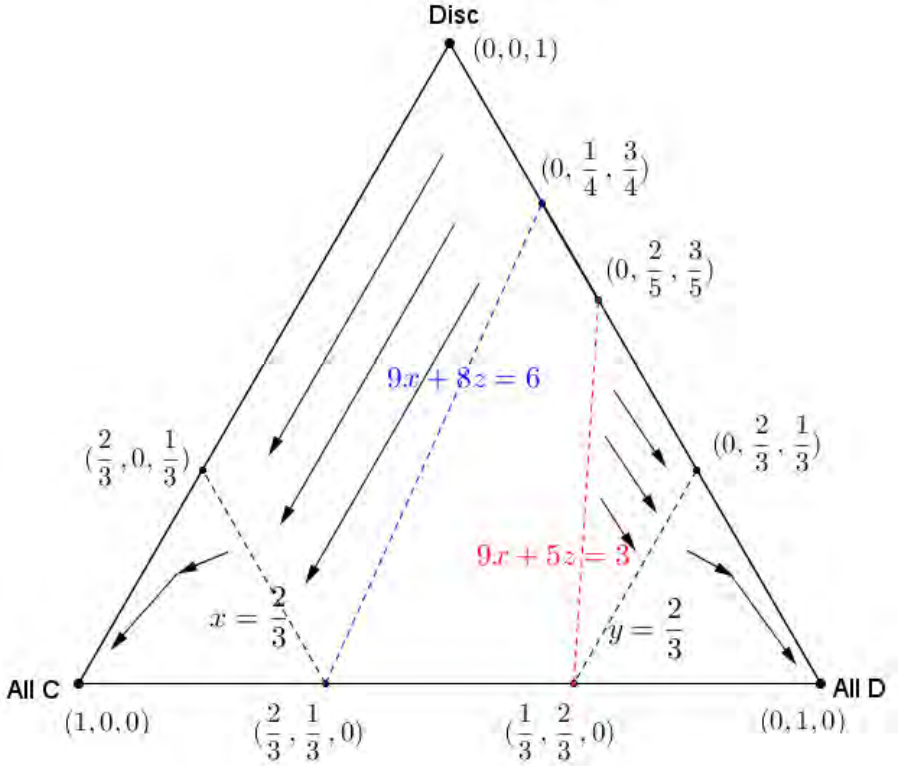
$x\overline{\alpha}=x$ ，因此

- cooperator 變成 discriminator 的條件為 $x+z<L$，又 $x+y+z=1 \Rightarrow 1-y<L \Leftrightarrow y>1-L$
- defector 變成 discriminator 的條件為 $x>H$ 。

若以 $\alpha=0, H=\frac{2}{3}, L=\frac{1}{3}$ 為例代入計算，則可得到：

- discriminator 變成 cooperator 的條件為 $9x+8z>6$ ，
- discriminator 演化成 defector 的條件為 $9x+5z<3$ ，
- cooperator 變成 discriminator 的條件為 $y>\frac{2}{3}$ ，
- defector 變成 discriminator 的條件為 $x>\frac{2}{3}$ 。

因此演化區域圖如下：



圖六

當$9x+8z>6$時，discriminator 漸漸演化為 cooperator，直到 cooperator 的比例 $x>\frac{2}{3}$，defector 也開始演化為 discriminator，再變成 cooperator，至終所有人都成為 cooperator。

反之，若$9x+5z<3$，則 discriminator 會漸漸演化為 defector，直到 defector 的比例 $y>\frac{2}{3}$，cooperator 也會轉變為 discriminator 然後變成 defector，至終所有人都成為 defector。

由於當$9x+8z=6$時，discriminator 獲得幫助的機率期望值正好是$\frac{2}{3}$，因此必定有部分的 discriminator 獲得幫助的比例大於$\frac{2}{3}$，因此 cooperator 的人數會增加，使得演化後$9x+8z>6$，故仍會使所有人漸漸演化為 cooperator。同理，當$9x+5z=3$時，演化的結果也會是全部變成 defector。而當$9x+8z<6$且$9x+5z>3$，由於所有人獲得幫助的機率期望值都介於$\frac{1}{3}$到$\frac{2}{3}$之間，因此不會有演化行為。

2.“按照比例決定”的間接互助模型：

如果 discriminator 照著《判準 3-2》來幫助別人，則 cooperator、defector 及 discriminator 獲得幫助的機率期望值分別為 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)$，$x\bar{\alpha}$ 及 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p$，其中 $p=\dfrac{\bar{\alpha}^2 x}{1-\bar{\alpha}z}$。

我們同樣先討論 discriminator 的演化：因為 p 滿足 $p=\bar{\alpha}\left[(1-\alpha)x+zp\right]$，

故 discriminator 獲得幫助的機率為

$$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p=p+\bar{\alpha}\alpha x\text{。}$$

因此，

- discriminator 變成 cooperator 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha x>H$，
- discriminator 變成 defector 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha x<L$。

又

- cooperator 變成 discriminator 的條件為 $x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)<L$，
- defector 變成 discriminator 的條件為 $\bar{\alpha}x>H$。

而在 $\alpha=0$ 的例子中：discriminator 獲得幫助的機率為 $p=\dfrac{x}{1-z}=\dfrac{x}{x+y}$，

故我們可以得到

- discriminator 變成 cooperator 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha x=p=\dfrac{x}{x+y}>H\Leftrightarrow x>\dfrac{H}{1-H}y$，
- discriminator 變成 defector 的條件為：$p+\bar{\alpha}\alpha x=p=\dfrac{x}{x+y}<L\Leftrightarrow x<\dfrac{L}{1-L}y$。

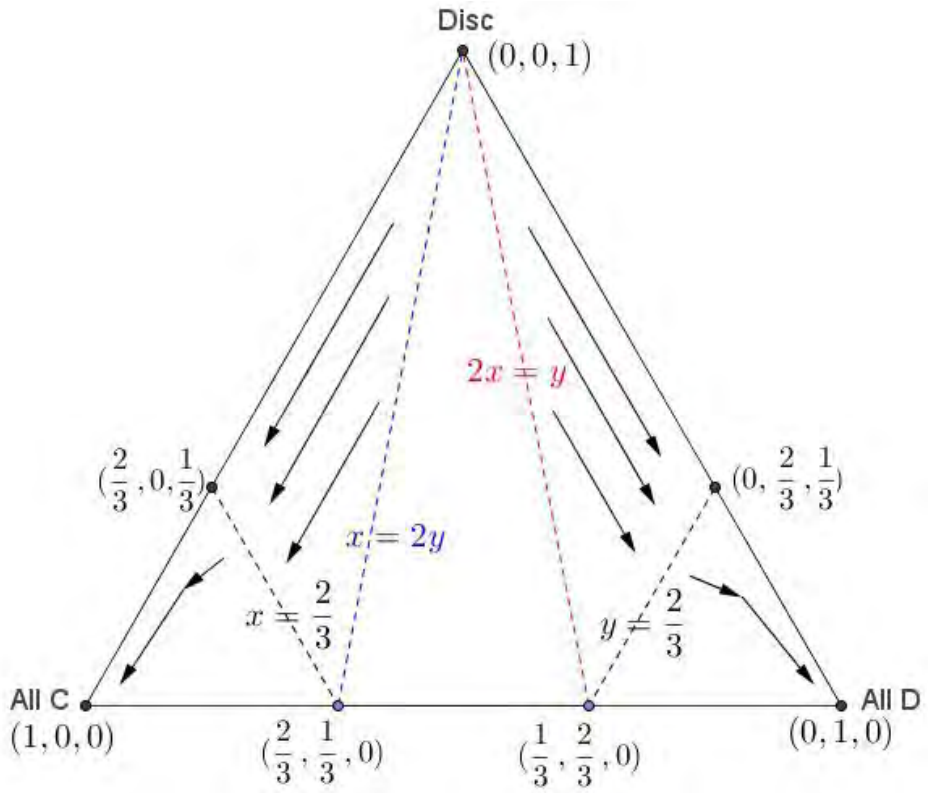
又

- cooperator 變成 discriminator 的條件為 $x+z<L\Leftrightarrow y>1-L$，
- defector 變成 discriminator 的條件為 $x>H$。

我們同樣以 $\alpha=0, H=\dfrac{2}{3}, L=\dfrac{1}{3}$ 為例，此時

- discriminator 變成 cooperator 的條件為：$x>2y$，
- discriminator 變成 defector 的條件為：$y>2x$。
- cooperator 變成 discriminator 的條件為 $y>\dfrac{2}{3}$，
- defector 變成 discriminator 的條件為 $x>\dfrac{2}{3}$。

所以我們可以得到以下的演化區域圖：



圖七

當 $x > 2y$ 時，discriminator 漸漸演化為 cooperator，直到 cooperator 的比例 $x > \frac{2}{3}$，defector 也開始演化為 discriminator，再變成 cooperator，至終所有人都成為 cooperator。反之，若 $y > 2x$，則 discriminator 會漸漸演化為 defector，直到 defector 的比例 $y > \frac{2}{3}$，cooperator 也會轉變為 discriminator 然後變成 defector，至終所有人都成為 defector。也就是說：

- 不論 discriminators 佔全體的比例為何，若 defectors 的比例是 cooperators 的兩倍以上，則至終所有人都會演化成為 defectors；
- 然而，只要 cooperators 的比例是 defectors 的兩倍以上，就可以使模型中所有的人至終演化成為 cooperators，成為理想中的大同世界。
- 比例若介於兩者之間，則會維持原比例不動。

3.“觀察三次”的間接互助模型：

根據公式解的判別式可知當 $\bar{\alpha}z \le \frac{2}{3}$，$2\bar{\alpha}za^3 - 3\bar{\alpha}za^2 + a - \bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x = 0$ 有唯一的實根。反之，若 $\bar{\alpha}z > \frac{2}{3}$，則方程式可能有不只一個實根。我們必須知道實根的個數及其範圍，才有可能計算使用《判準二》之互助模型演化的結果。如果直接帶入公式解，計算太過複雜，不容易得到我們想要的資訊，而我們發現：

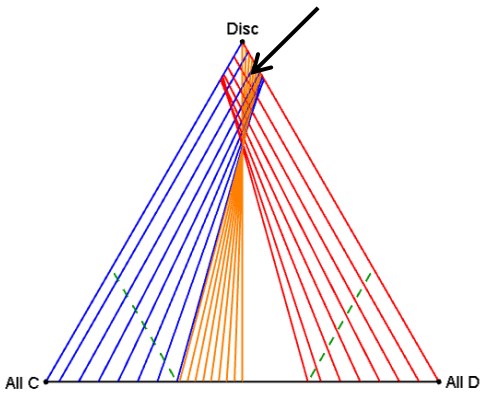
$$2\bar{\alpha}za^3 - 3\bar{\alpha}za^2 + a - \bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x + \bar{\alpha}a^2(3-2\bar{\alpha}a)z = a,$$

即所有使得方程式 $2\bar{\alpha}za^3 - 3\bar{\alpha}za^2 + a - \bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x = 0$ 包含某個實根 δ 的人口比例 (x, y, z) 都會分布在同一個平面 $\bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x + \bar{\alpha}\delta^2(3-2\bar{\alpha}\delta)z = \delta$ 上。

設 δ 為一變數，每一個 δ 代進方程式都會得到一個平面，與平面 $x+y+z=1$ 形成一交線，利用 geogebra「顯示移動蹤跡」的功能，分別找出包含實根 $0 \le \delta \le L$、$L \le \delta \le \frac{1}{2}$、$\frac{1}{2} \le \delta \le H$、$H \le \delta \le 1$ 之平面交線掃過的區域，再由各區域的交集判斷每一個區塊所對應的方程式之解的範圍，就可以得知在此區塊中的人口比例下，discriminator 幫助別人機率的期望值會收斂到哪一個不動點，進而計算並畫出演化區域圖。

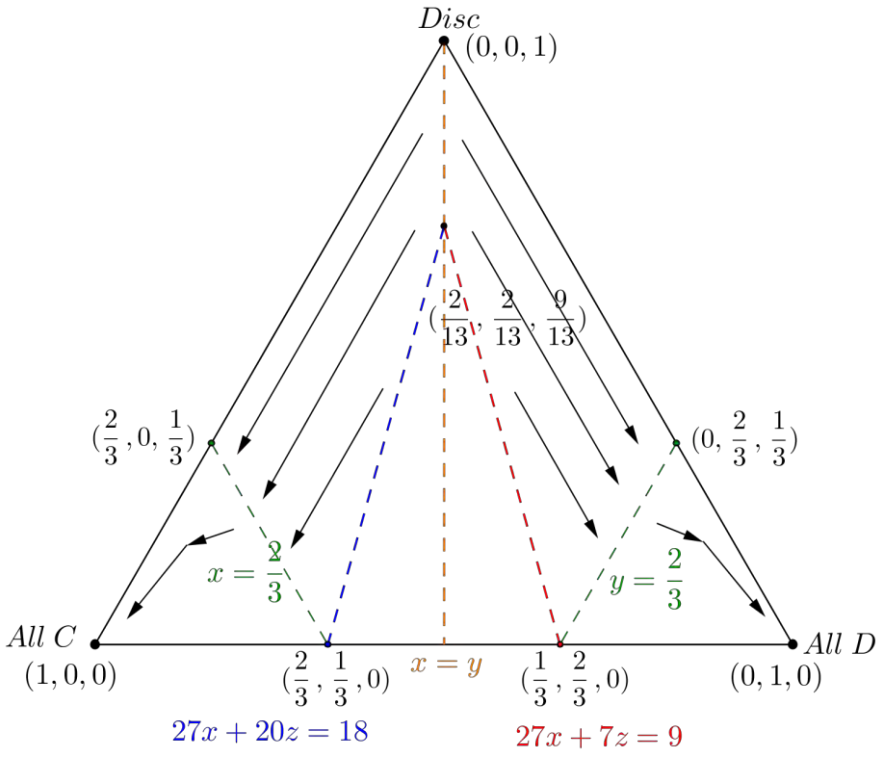
以 $\alpha = 0, H = \frac{2}{3}, L = \frac{1}{3}$ 為例：

因為 $\alpha = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 1$，$p$ 滿足 $2\bar{\alpha}zp^3 - 3\bar{\alpha}zp^2 + p - \bar{\alpha}^3(3-2\bar{\alpha})x = 0 \Rightarrow p = x - 2zp^3 + 3zp^2$，故 discriminator 得到的幫助率為 $x\bar{\alpha} + z\bar{\alpha}\left(-2p^3 + 3p^2\right) = p$，箭頭所指的區塊同時被 $0 \le \delta \le \frac{1}{3}$(紅線)、$\frac{1}{2} \le \delta \le \frac{2}{3}$(橘線)、$\frac{2}{3} \le \delta \le 1$(藍線)通過，代表這個區塊的人口比例代入方程式得到的三個解分別位於這三區，由於 $\delta_2 > \frac{1}{2}$，所以 p_t 會收斂到 δ_1 且 $0 \le \delta_1 \le \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \le p \le \frac{1}{3}$。所以在此人口比例下，discriminator 得到的幫助率 $p \le \frac{1}{3}$，故 discriminator 會演化為 defector。



圖八

所以我們可以得到以下的演化區域圖：



圖九

三、 研究結果與討論

(一) 間接互助模型

我們以 discriminator 決定助人的不同判準，提出了兩個新的模型，並得到以下的結果：

1. 不論使用《判準 2》、《判準 3-1》還是《判準 3-2》作為 discriminator 助人的準則，其成功幫助別人的機率期望值 p_t **都會收斂**到不動點。

2. 如果 discriminator 使用《判準 3-2》，將觀察到的助人比例做為決定幫助對方的機率，無論選擇觀察幾次，得到的結果都會跟『**只觀察一次**』就決定是否幫助他一樣。因此，在這個模型中，即使每位 discriminator 決定觀察的次數不一樣，所有 discriminator 成功幫助別人的機率期望值 p_t 仍會收斂到同一個不動點。

也就是說，**不管每位 discriminator 決定觀察幾次，其助人行為仍會趨於一致。**

3. 三種模型的比較：

(1) 不動點：

不論使用《判準 1》、《判準 2》、《判準 3-1》還是《判準 3-2》作為 discriminator 助人的準則，其成功幫助別人的機率期望值 p_t 都會收斂到一個不動點。

- **Berger(2011)的模型**

當 discriminator 照著《判準 1》幫助別人時，p_t 必定收斂至一不動點 p，並且 p 滿足 $p=\bar{\alpha}\left[(1-\alpha^2)x+p(2-p)z\right]$。

- **“觀察三次”的模型**

當 discriminator 照著《判準 2》幫助別人時，p_t 必定收斂至一不動點 p，其中 p 是 $p=\bar{\alpha}\left[-2zp^3+3zp^2+(1-\alpha)^2(1+2\alpha)x\right]$ 在 $(0,1)$ 間的實根。若此式在 $(0,1)$ 間有三實根 $\delta_1<\delta_2<\delta_3$，則

$$p=\delta_1,\ \text{當}\ \delta_2>\frac{1}{2};\quad p=\delta_2,\ \text{當}\ \delta_2=\frac{1}{2};\quad p=\delta_3,\ \text{當}\ \delta_2<\frac{1}{2}\ 。$$

- **“按照比例決定”的模型**

當 discriminator 照著《判準 3-1》或《判準 3-2》幫助別人時，p_t 都會收斂至同一不動點 p，其中 p 滿足 $p=\bar{\alpha}\left[(1-\alpha)x+zp\right]$，因此 $p=\dfrac{(1-\alpha)^2x}{1-(1-\alpha)z}$。

(2) 互相幫助的機率：

- **Berger(2011)的模型**

被幫助者 \ 幫助者	Cooperator	Defector	Discriminator
Cooperator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}(1-\alpha^2)$
Defector	$\bar{\alpha}$	0	0
Discriminator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}p(2-p)$

- **“觀察三次”的模型**

被幫助者 \ 幫助者	Cooperator	Defector	Discriminator
Cooperator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$
Defector	$\bar{\alpha}$	0	0
Discriminator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}p^2(3-2p)$

- **“按照比例助人”的模型**

被幫助者 \ 幫助者	Cooperator	Defector	Discriminator
Cooperator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}(1-\alpha)$
Defector	$\bar{\alpha}$	0	0
Discriminator	$\bar{\alpha}$	0	$\bar{\alpha}p$

(3) 得到幫助的機率：

判準方法 \ 被幫助者	Cooperator	Defector	Discriminator
判準 1	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)$	$x\bar{\alpha}$	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p)$
判準 2	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$	$x\bar{\alpha}$	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}\left(-2p^3+3p^2\right)$
判準 3-1 或判準 3-2	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)$	$x\bar{\alpha}$	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p$

(4) 效益的期望值：

模型 \ 效益	Π_1 Cooperator	Π_2 Defector	Π_3 Discriminator
判準 1	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2)\right]b-\bar{\alpha}c$	$x\bar{\alpha}b$	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p(2-p)\right]b-pc$
判準 2	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha)\right]b-\bar{\alpha}c$	$x\bar{\alpha}b$	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}\left(-2p^3+3p^2\right)\right]b-pc$
判準 3-1 或判準 3-2	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)\right]b-\bar{\alpha}c$	$x\bar{\alpha}b$	$\left[x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}p\right]b-pc$

(二) 演化機制

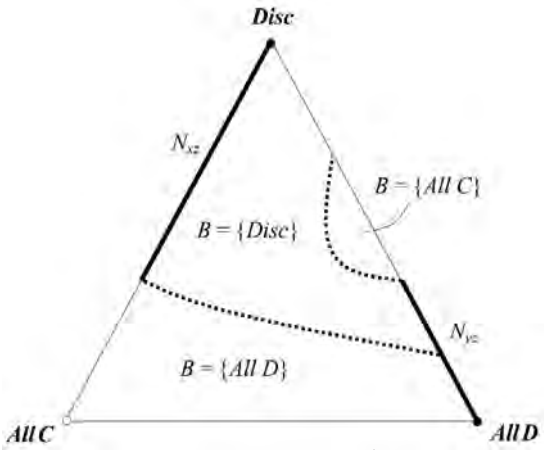
我們在使用《判準 1》及《判準 3-2》的模型中，探討新的演化機制，並與 Berger(2011)的演化機制作比較如下：

1. Berger(2011)的演化機制

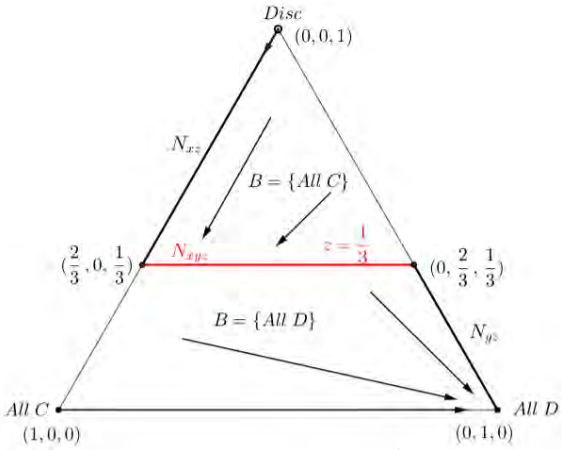
(1) 最佳策略範圍：

模型 / 最佳策略範圍	**Berger(2011)**	**按照比例助人**
All C	$\begin{cases} y=0 \\ z \ge \frac{c}{b} \end{cases}$ 或 $x \le \frac{(z-\frac{c}{b})(\frac{b-c}{b}-z)}{z}$	$z \ge \frac{c}{\alpha b}$
All D	$z \le \frac{c(b-c)}{2b(b-c)-b^2x}$	$z \le \frac{c}{\alpha b}$
Disc	$x \ge \frac{(z-\frac{c}{b})(\frac{b-c}{b}-z)}{z}$ 且 $z \ge \frac{c(b-c)}{2b(b-c)-b^2x}$	$\begin{cases} y=0, z \ne 1, \alpha=0 \\ z \ge \frac{c}{\alpha b} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ z \le \frac{c}{\alpha b} \end{cases}$ 或 $z=\frac{c}{\alpha b}$

(2) 演化區域圖：以 $\alpha=0, b=3c$ 為例



Berger(2011)的模型



"按照比例助人"的模型

2. 我們的演化機制

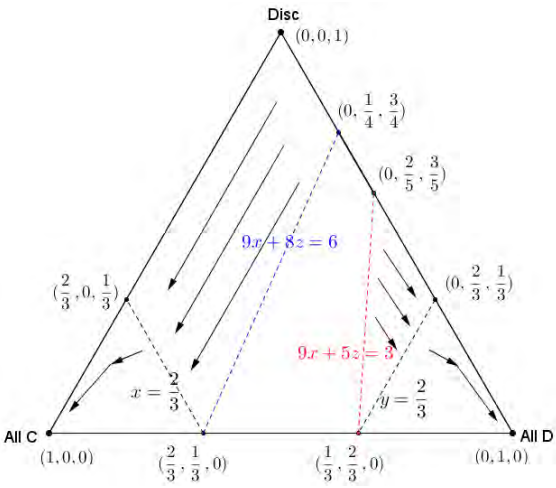
(1) 啟動演化的條件：

模型 / 演化條件	**Berger(2011)**	**按照比例助人**	**觀察三次以上**
Disc → All C	$p+\bar{\alpha}\alpha^2 x > H$	$p+\bar{\alpha}\alpha x > H$	$p-\bar{\alpha}\alpha^2(2\alpha-3)x > H$
All D → Disc	$x\bar{\alpha} > H$	$x\bar{\alpha} > H$	$x\bar{\alpha} > H$
Disc → All D	$p+\bar{\alpha}\alpha^2 x < L$	$p+\bar{\alpha}\alpha x < L$	$p-\bar{\alpha}\alpha^2(2\alpha-3)x < L$
All C → Disc	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha^2) < L$	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha) < L$	$x\bar{\alpha}+z\bar{\alpha}(1-\alpha)^2(1+2\alpha) < L$

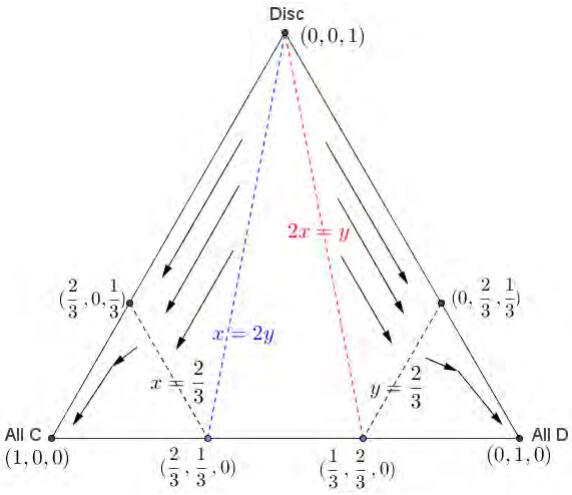
(2) 當 $\alpha=0$ 時：

模型 / 演化條件	**Berger(2011)**	**按照比例助人**	**觀察三次以上**
Disc → All C	$x+H(2-H)z > H$ $or\ \ z > \dfrac{1}{2(1-H)}$	$x > \dfrac{1-H}{H}y$	$p > H$
All D → Disc	$x > H$	$x > H$	$x\bar{\alpha} > H$
Disc → All D	$x+L(2-L)z < L$ 且 $z < \dfrac{1}{2(1-L)}$	$x < \dfrac{1-L}{L}y$	$p < L$
All C → Disc	$y > 1-L$	$y > 1-L$	$y > 1-L$

(3) 演化區域圖：以 $\alpha=0, H=\dfrac{2}{3}, L=\dfrac{1}{3}$ 為例



Berger(2011)的模型



“按照比例助人”的模型

四、 結論與應用

(一)結論

1. 不論使用《判準 2》、《判準 3-1》還是《判準 3-2》作為 discriminator 助人的準則，其成功幫助別人的機率期望值 p_t **都會收斂**到不動點。

2. 如果 discriminator 使用《判準 3-2》，將觀察到的助人比例做為決定幫助對方的機率，無論選擇觀察幾次，得到的結果都會跟『**只觀察一次**』就決定是否幫助他一樣。因此，在這個模型中，即使每位 discriminator 決定觀察的次數不一樣，所有 discriminator 成功幫助別人的機率期望值 p_t 仍會收斂到同一個不動點。

也就是說，**不管每位 discriminator 決定觀察幾次，其助人行為仍會趨於一致。**

3. 在使用《判準 3-2》的模型中，比較兩種演化：

(1) 若按照 Berger(2011)中的機制來演化，其結果**只與 discriminator 佔總人口比例的多寡有關**：以 $\alpha=0, b=3c$ 為例，當 discriminator 的比例 $z<\frac{1}{3}$，人們會全部演化為 defector；而當 $z>\frac{1}{3}$ 時，人們會演化為 cooperator，此時 discriminator 的比例 z 會降低，直到 $z=\frac{1}{3}$，停止演化達到平衡。

(2) 若使用我們提出的演化機制，當 $\alpha=0$ 時，其演化的範圍**與 discriminator 佔總人口比例的多寡無關，只與 cooperator 和 defector 的人口比例 x、y 及兩者的比值有關**：以 $\alpha=0, H=\frac{2}{3}, L=\frac{1}{3}$ 為例，當 $y>2x$ 時，人們會全部演化為 defector；當 $x>2y$ 時，則所有人都會演化為 cooperator。

(二)未來展望

未來我們希望能藉由代入數據觀察，進一步了解幫助他人時失敗率 α 所扮演的角色。也希望可以進行實驗設計，實際調查同學們的行為是否會與我們的模型相符，並可以得知演化標準 H 跟 L 會不會因人而異。

五、 參考文獻

Berger (2010), “Learning to cooperate via indirect reciprocity”, *Games and Economic Behavior*, Vol.72, No.1, p.30-37.

【評語】010001

本作品推廣 Berger 對於社會互助模式的演化機制機率模式探討。作品題材新穎有實用價值，數學上就是求固定點的探討，但作者對於固定點的涵意並未完全理解，是需要加強之處。