2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010054

參展科別　數學

作品名稱　從 Avoid 數列到類巴斯卡三角形

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　國立南科國際實驗高級中學

指導教師　王志誦

作者姓名　郭競友

關鍵字　巴斯卡三角形、數列

作者簡介

我是郭競友，就讀國立南科國際實驗高級中學二年級數理實驗班，因為崇拜參加數學競賽的學長姐們，選擇加入數學科專題研究，也擔任過數學研究社社長，常常因為同學提了一個問題而聚集在一起討論。我平常喜歡聽音樂，尤其是蕭敬騰，沒事也喜歡演奏大提琴和曼陀林，偶爾也喜歡畫畫和看金光布袋戲，除了數學，我也喜歡物理和歷史。

摘要

本文研究找出t個不同物$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做直線排列，則避免x_1x_1連續、x_2x_2連續、x_3x_3連續、…、x_jx_j連續之計算方法，後來發現學者 **Tanya Khovanova** 於網頁資料[4]討論過這種問題並給出遞迴式，而我更進一步得到下列結果：

1. t個不同物$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做直線排列，避免$x_1\cdots x_1$連續$(m個x_1)$、避免$x_2\cdots x_2$連續$(m個x_2)$、…、避免$x_j\cdots x_j$連續$(m個x_j)$之遞迴式，$j\le t$，則:

   (1) $n<m$，$A_n=t^n$

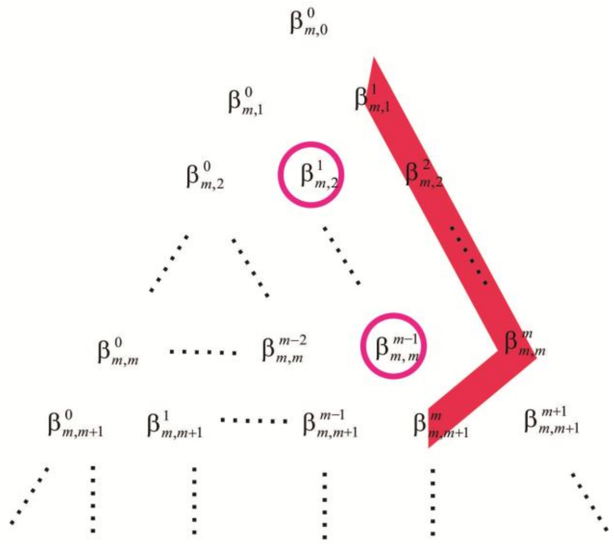
   (2) $n=m$，$A_n=t^n-j$

   (3) $n>m$，$A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_{n+1})+(t-j)A_n$

2. 除了用遞迴式解題外，我創造出一個用類巴斯卡三角形解決全文所有題目的特殊方法：設$\beta^{i}_{m,n}$表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，出現i個$x_1或x_2或.....或x_j$，並避免$x_1\cdots x_1$連續$(m個x_1)$、避免$x_2\cdots x_2$連續$(m個x_2)$、…、避免$x_j\cdots x_j$連續$(m個x_j)$之排列方法數，$j\le t$，則:

$$\beta^{i}_{m,n+m}=\beta^{i}_{m,n+m-1}+\beta^{i-1}_{m,n+m-2}+....+\beta^{i-m+1}_{m,n}+(j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1}+\beta^{i-2}_{m,n+m-2}+....+\beta^{i-m+1}_{m,n+1})$$

Example :下圖為$\beta^{m}_{m,m+1}=\beta^{m}_{m,m}+\beta^{m-1}_{m,m-1}+....+\beta^{1}_{m,1}+(j-1)(\beta^{m-1}_{m,m}+\beta^{m-2}_{m,m-1}+....+\beta^{1}_{m,2})$



Avoiding consecutive x_j and pascal's triangle-like method

Abstract

My research is to find out calculation of $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$ (it can be chosen repeatly), avoiding x_1x_1 、 x_2x_2 、 x_3x_3 、 … 、 x_jx_j. However, Tanya Khovanova[4] had discussed this problem, and provided recurrence relation since 2007 on her website. As a result, I furtherly extend my studies, and get the conclusion below.

1. A_n is the number of permutation of length n choosing from $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$ (can be chosen repeatly), avoiding $x_1 \dots x_1\ (m\ times)$ 、 $x_2 \dots x_2\ (m\ times)$ 、…、 $x_j \dots x_j\ (m\ times)$, $j \le t$, then :

   (1) $n < m$: $A_n = t^n$ (2) $n = m$: $A_n = t^n - j$

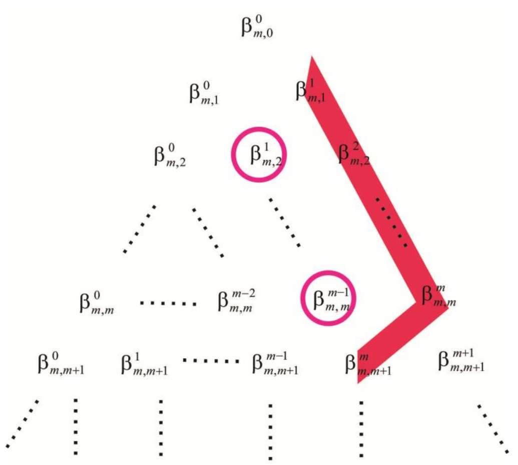
   (3) $n > m$: $A_{n+m} = (t-1)(A_{n+m-1} + A_{n+m-2} + \dots\dots + A_{n+1}) + (t-j)A_n$

2. In addition to the recurrence relation, I create a special way of using pascal's triangle-like method to solve all problems in the text.

   $\beta^{i}_{m,n}$ is the number of permutation of length n choosing from $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$ (can be chosen repeatly), concluding i number of $\{x_1, x_2, x_3, .., x_j\}$, avoiding $x_1 \dots x_1\ (m\ times)$ 、 $x_2 \dots x_2\ (m\ times)$ 、 … 、 $x_j \dots x_j\ (m\ times)$ ， $j \le t$ ，then:

   $$\beta^{i}_{m,n+m} = \beta^{i}_{m,n+m-1} + \beta^{i-1}_{m,n+m-2} + \dots + \beta^{i-m+1}_{m,n} + (j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1} + \beta^{i-2}_{m,n+m-2} + \dots + \beta^{i-m+1}_{m,n+1})$$

   Example : $$\beta^{m}_{m,m+1} = \beta^{m}_{m,m} + \beta^{m-1}_{m,m-1} + \dots + \beta^{1}_{m,1} + (j-1)(\beta^{m-1}_{m,m} + \beta^{m-2}_{m,m-1} + \dots + \beta^{1}_{m,2})$$



壹、 研究動機

為了推廣文獻[6]沒有完成的問題，到避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$ 、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之排列方法數，以及在以上條件中之三角形的各種特性。

貳、研究目的

一、找出 t 個不同物 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$ 、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之計算方法。

二、由避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 探討**類似巴斯卡三角形**之特殊情況。

參、研究器材及設備

一、電腦軟體　二、紙筆

肆、研究過程

一、名詞定義:

(一)避免 $a \cdots a$ 連續 $(m個a)$:

允許 aa 連續、 aaa 連續、⋯⋯、 $a \cdots a$ 連續 $(m-1個a)$ ，但不允許 m個以上a 連續。

Example:

避免 3333 連續 (4個3) ， $\{1,2,3,..,6\}$ 去組成長度為 8 的數字組合有幾種?

答案包含 33111111、33311111，但是不包含 33331111、33333111、33333311、33333331、33333333 等等。

(二) A_0

定義 $A_0 = 1$ 。

二、文獻探討

研究問題之背景:
這問題可延伸為:

A_n 表示用 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$(可重複選取)選取 n 個並做直線排列，$j \le t$，則避免 x_1x_1 連續、x_2x_2 連續、x_3x_3 連續、⋯、x_jx_j 連續之方法數遞迴式為 $A_{n+2} = (t-1)A_{n+1} + (t-j)A_n$

這是已知結果，描述語法雖然有些不同，但國外學者 **Tanya Khovanova** 早已證過，請參考文獻[4]網頁資料，可以看到不同敘述下的漂亮證明。
接著下面內容將推廣討論已知結果。

三、t 個不同物 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$ (可重複選取)選出 n 個做直線排列，避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$

引理 1.

D_n 表示從 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, .., x_t\}$(可重複選取)選取 n 個並做排列，且前 $(n-1)$ 個位置均屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_j\}$，第 n 項屬於 $\{x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, .., x_t\}$，且避免 $x_1 \cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2 \cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、⋯、避免 $x_j \cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之方法數，則:

1. 若 $n \le m$，$D_n = j^{n-1}(t-j)$
2. 若 $n > m$，$D_n = (j-1)(D_{n-1} + D_{n-2} + ... + D_{n-m+1})$

Proof:

1. 若 $n \le m$:

若第 1 個位置不屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，則 $D_1 = (t-j)$

若第 1 個位置屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，第 2 位置不屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，則 $D_2 = j(t-j)$

若第 1、2 個位置屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，第 3 位置不屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，則 $D_3 = j^2(t-j)$

………

若第 1 到 $(n-1)$ 個位置屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，第 n 位置不屬於 $\{x_1, x_2, x_3, .., x_t\}$，則

$D_n = j^{n-1}(t-j)$，故得證。

2. 若 $n > m$:

(1) $n = m+1$

$$D_{m+1} = j^m(t-j) - j(t-j) = (j-1)(t-j)(j^{m-1} + j^{m-2} + \ldots.. + j)$$

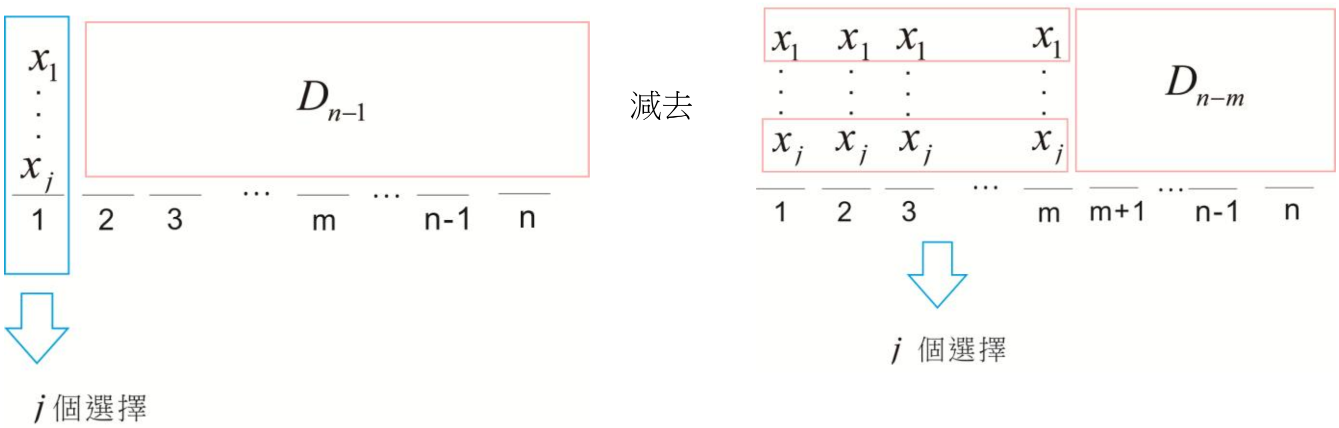
$$= (j-1)[j^{m-1}(t-j) + j^{m-2}(t-j) + \ldots.. + j(t-j))$$

$$= (j-1)(D_m + D_{m-1} + \ldots. + D_4 + D_3 + D_2)$$

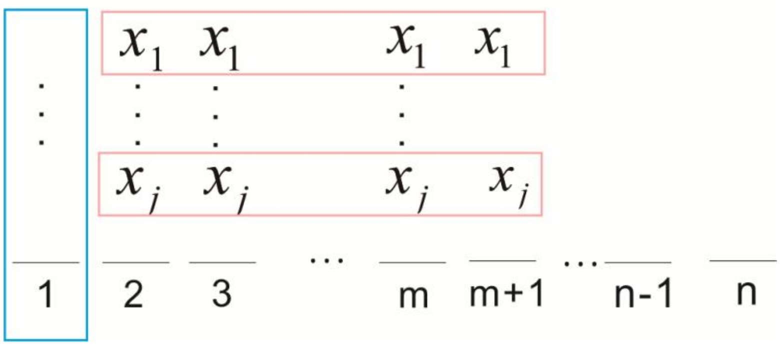
(2) $n > m+1$

D_n可拆成第1個位置和後面的D_{n-1}，第1個位置有 j 種選擇，但為了避免$x_i \ldots.. x_i$ (m個x_i)，

$i \in \{1,2,3,\ldots..,j\}$， 所以要減去 j 種D_{n-m}的組合 ，如下圖所示。



但是其實上述過程有多減的問題，因為若在第$m+1$個位置是x_i ，會跟第 2 個到第m個位置形成 $x_i \ldots. x_i$ (m個x_i) ，所以要加回1個D_{n-m} 。



所以 $D_n = j\,D_{n-1} - j\,D_{n-m} + D_{n-m} = j\,D_{n-1} - (j-1)D_{n-m}$ ，可以推得下面結果:

$$D_{n+m} - D_{n+m-1} = (j-1)(D_{n+m-1} - D_n)$$

$$D_{n+m-1} - D_{n+m-2} = (j-1)(D_{n+m-2} - D_{n-1})$$

……

$$D_{n+2}-D_{n+1}=(j-1)(D_{n+1}-D_{n-m+2})$$

$$D_{n+1}-D_{n}=(j-1)(D_{n}-D_{n-m+1})$$

$$D_{n}-D_{n-1}=(j-1)(D_{n-1}-D_{n-m})$$

……

$$D_{2m+2}-D_{2m+1}=(j-1)(D_{2m+1}-D_{m+2})$$

$$D_{2m+1}-D_{2m}=(j-1)(D_{2m}-D_{m+1})$$

$$D_{2m}-D_{2m-1}=(j-1)(D_{2m-1}-D_{m})$$

……

$$D_{m+3}-D_{m+2}=(j-1)(D_{m+2}-D_{3})$$

$$D_{m+2}-D_{m+1}=(j-1)(D_{m+1}-D_{2})$$

將上述累加可以得到

$$D_{n+m}-D_{m+1}=(j-1)(D_{n+m-1}+D_{n+m-2}+....+D_{n+1})-(j-1)(D_{m}+D_{m-1}+....+D_{4}+D_{3}+D_{2}) \quad (*)$$

另外由(1)可知 $D_{m+1}=j^{m}(t-j)-j(t-j)=(j-1)(t-j)(j^{m-1}+j^{m-2}+.....+j)$

$$=(j-1)[j^{m-1}(t-j)+j^{m-2}(t-j)+.....+j(t-j))$$

$$=(j-1)(D_{m}+D_{m-1}+....+D_{4}+D_{3}+D_{2}) \quad (\#)$$

所以由(∗)與(♯)可得 $D_{n+m}=(j-1)(D_{n+m-1}+D_{n+m-2}+....+D_{n+1})$，故得證。

引理 2.

A_n 表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，避免$x_1\cdots x_1$連續$(m\text{個}x_1)$、避免$x_2\cdots x_2$連續$(m\text{個}x_2)$、$\cdots$、避免$x_j\cdots x_j$連續$(m\text{個}x_j)$的組合數，$j\le t$，則:

$$A_n = D_1A_{n-1}+D_2A_{n-2}+.....+D_{n-1}A_1+D_n+\frac{D_{n+1}}{t-j}$$

Proof:

(1) 第1個位置不屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$則有D_1A_{n-1}種方法；

(2) 第1個位置屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，但第2個位置不屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，則有D_2A_{n-2}種方法；

(3) 第1、2個位置屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，但第3個位置不屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，則有D_3A_{n-3}種方法；

………

(n-1) 第1到第$(n-2)$個位置屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，但第$(n-1)$個位置不屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，則有$D_{n-1}A_1$種方法；

(n) 第1到第$(n-1)$個位置屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，但第n個位置不屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，則有D_n種方法；

(n+1) 第1到第n個位置屬於$\{x_1,x_2,x_3,..,x_j\}$，可看成D_{n+1}前n個位置的變化，有$\frac{D_{n+1}}{t-j}$種方法

所以$A_n = D_1A_{n-1}+D_2A_{n-2}+.....+D_{n-1}A_1+D_n+\frac{D_{n+1}}{t-j}$ 。

定理 1.

A_n 表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，避免$x_1\cdots x_1$連續$(m\text{個}x_1)$、避免$x_2\cdots x_2$連續$(m\text{個}x_2)$、$\cdots$、避免$x_j\cdots x_j$連續$(m\text{個}x_j)$的組合數，$j\le t$，則:

1. $n<m$，$A_n=t^n$
2. $n=m$，$A_n=t^n-j$
3. $n>m$，$A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_{n+1})+(t-j)A_n$

Proof:

由引理 2 可知

$$A_{n+m}=D_1A_{n+m-1}+D_2A_{n+m-2}+.....+D_{n+m-1}A_1+D_{n+m}+\frac{D_{n+m+1}}{t-j}$$

$$A_{n+m-1}=D_1A_{n+m-2}+D_2A_{n+m-3}+.....+D_{n+m-2}A_1+D_{n+m-1}+\frac{D_{n+m}}{t-j}$$

$$A_{n+m-2}=D_1A_{n+m-3}+D_2A_{n+m-4}+.....+D_{n+m-3}A_1+D_{n+m-2}+\frac{D_{n+m-1}}{t-j}$$

……

$$A_{n+1}=D_1A_n+D_2A_{n-1}+.....+D_nA_1+D_{n+1}+\frac{D_{n+2}}{t-j}$$

可推得:

$$A_{n+m}=(t-j)A_{n+m-1}+j(t-j)A_{n+m-2}+.....+j^{m-1}(t-j)A_n+D_{m+1}A_{n-1}+....$$
$$+D_{n+m-1}A_1+D_{n+m}+\frac{D_{n+m+1}}{t-j} \qquad ....(1)$$

$$A_{n+m-1}=(t-j)A_{n+m-2}+j(t-j)A_{n+m-3}+.....+j^{m-1}(t-j)A_{n-1}+D_{m+1}A_{n-2}+....$$
$$+D_{n+m-2}A_1+D_{n+m-1}+\frac{D_{n+m}}{t-j} \qquad ....(2)$$

………………

$$A_{n+1}=(t-j)A_n+j(t-j)A_{n-1}+.....+j^{m-1}(t-j)A_{n-m+1}+D_{m+1}A_{n-m}+....$$
$$+D_nA_1+D_{n+1}+\frac{D_{n+2}}{t-j} \qquad ....(m)$$

進一步再推得:

$$(j-1)A_{n+m-1}=(j-1)(t-j)A_{n+m-2}+j(j-1)(t-j)A_{n+m-3}+.....+j^{m-1}(j-1)(t-j)A_{n-1}+$$
$$(j-1)D_{m+1}A_{n-2}+....+(j-1)D_{n+m-2}A_1+(j-1)D_{n+m-1}+\frac{(j-1)D_{n+m}}{t-j} \qquad ....(2)\times(j-1)$$

……

$$(j-1)A_{n+1}=(j-1)(t-j)A_n+j(j-1)(t-j)A_{n-1}+.....+j^{m-1}(j-1)(t-j)A_{n-m+1}+$$
$$(j-1)D_{m+1}A_{n-m}+.....+(j-1)D_nA_1+(j-1)D_{n+1}+\frac{(j-1)D_{n+2}}{t-j} \qquad ....(m)\times(j-1)$$

由引理 1 可知 $D_n=(j-1)(D_{n-1}+D_{n-2}+.....+D_{n-m+1})$

將上述算式計算 $(1)-(j-1)((2)+(3)+......+(m))$ 後可得

$$A_{n+m}-(j-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+......+A_{n+1})=(t-j)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+......+A_n)$$

$$\Rightarrow A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+......+A_{n+1})+(t-j)A_n$$

Example 1: 從 $B=\{x_i|1\le i\le 6, i\in N\}$ 取 5 個作直線排列(可重複選取)，避免 $x_1x_1x_1$ 連續、$x_2x_2x_2$ 連續、$x_3x_3x_3$ 連續的方法有多少種?

Sol:顯然 $A_0=1$，$A_1=6$，$A_2=36$，

由定理 5 可得 $A_{n+3}=5(A_{n+2}+A_{n+1})+3A_n$

$A_3=5(A_2+A_1)+3A_0=5(36+6)+3\times 1=213$，

$A_4=5(A_3+A_2)+3A_1=5(213+36)+3\times 6=1263$，

$A_5=5(A_4+A_3)+3A_2=5(1263+213)+3\times 36=7488$，故有 7488 種方法。

當只避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 時，所形成的遞迴式相當漂亮，是**定理 1.** 的特例

文獻[6]的定理 3.，內容如下:

A_n 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 的組合數，$j\le t$，其遞迴式為:

$$A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_n)$$

Example 2. 從 $B=\{x_i|1\le i\le 10, i\in N\}$ 取 6 個作直線排列(可重複)，避免 $x_3x_3x_3x_3$ 連續的方法數有多少種?

$A_0=1$，$A_1=10$，$A_2=100$，$A_3=1000$，由定理 1 可得 $A_{n+4}=9(A_{n+3}+A_{n+2}+A_{n+1}+A_n)$

推得，$A_4=9(A_3+A_2+A_1+A_0)=9\times(1000+100+10+1)=9999$，

$A_5=9(A_4+A_3+A_2+A_1)=9\times(9999+1000+100+10)=99981$

$A_6=9(A_5+A_4+A_3+A_2)=9\times(99981+9999+1000+100)=999720$，

故有 999720 種方法。

四、避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 與類巴斯卡三角形

定理 2.（類巴斯卡三角形定理）

設 $\beta^{i}_{m,n}$ 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，出現 i 個 $x_1或x_2或.....或x_j$ ，並避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$ 、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之排列方法數， $j\le t$ ，則:

$$\beta^{i}_{m,n+m}=\beta^{i}_{m,n+m-1}+\beta^{i-1}_{m,n+m-2}+....+\beta^{i-m+1}_{m,n}+(j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1}+\beta^{i-2}_{m,n+m-2}+....+\beta^{i-m+1}_{m,n+1})$$

Proof: A_n 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$ 、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 的組合數;

下表為 A_n 與 $\beta^{i}_{m,n}$ 的關係，可知 $A_n=\sum_{i=0}^{n}\beta^{i}_{m,n}\times(t-j)^{n-i}$

	沒有出現 $x_1或x_2....或x_j$	出現 1 個 $x_1或x_2....或x_j$	出現 2 個 $x_1或x_2....或x_j$	出現 3 個 $x_1或x_2....或x_j$	出現 4 個 $x_1或x_2....或x_j$	⋯
A_0	$\beta^{0}_{m,0}$					
A_1	$\beta^{0}_{m,1}(t-j)$	$\beta^{1}_{m,1}$				⋯
A_2	$\beta^{0}_{m,2}(t-j)^2$	$\beta^{1}_{m,2}(t-j)$	$\beta^{2}_{m,2}$			⋯
A_3	$\beta^{0}_{m,3}(t-j)^3$	$\beta^{1}_{m,3}(t-j)^2$	$\beta^{2}_{m,3}(t-j)$	$\beta^{3}_{m,3}$		⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

由定理 1 可知:

$$A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_{n+1})+(t-j)A_n$$
$$=(t-j)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_n)+(j-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+.....+A_{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n+m}\beta^{\,i}_{\,m,\,n+m}\times(t-j)^{n+m-i}$$

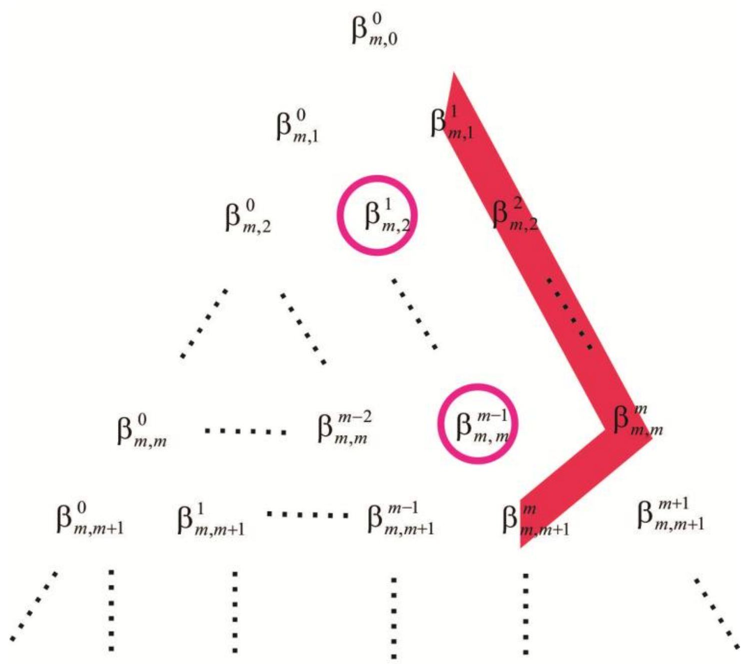
$$=(t-j)(\sum_{i=0}^{n+m-1}\beta^{\,i}_{\,m,\,n+m-1}\times(t-j)^{n+m-1-i}+.....+\sum_{i=0}^{n}\beta^{\,i}_{\,m,\,n}\times(t-j)^{n-i})$$
$$+(j-1)(\sum_{i=0}^{n+m-1}\beta^{\,i}_{\,m,\,n+m-1}\times(t-j)^{n+m-1-i}+.....+\sum_{i=0}^{n+1}\beta^{\,i}_{\,m,\,n+1}\times(t-j)^{n+1-i})$$

推得:

$$\beta^{\,i}_{\,m,n+m}=\beta^{\,i}_{\,m,n+m-1}+\beta^{\,i-1}_{\,m,n+m-2}+....+\beta^{\,i-m+1}_{\,m,n}+(j-1)(\beta^{\,i-1}_{\,m,n+m-1}+\beta^{\,i-2}_{\,m,n+m-2}+....+\beta^{\,i-m+1}_{\,m,n+1})$$

故得證。

Example :下圖為 $\beta^{\,m}_{\,m,m+1}=\beta^{\,m}_{\,m,m}+\beta^{\,m-1}_{\,m,m-1}+....+\beta^{\,1}_{\,m,1}+(j-1)(\beta^{\,m-1}_{\,m,m}+\beta^{\,m-2}_{\,m,m-1}+....+\beta^{\,1}_{\,m,2})$



Example 3: 從 $B=\{x_i|1\le i\le 4, i\in N\}$ 取 5 個作直線排列(可重複選取),避免 $x_1x_1x_1$ 連續、$x_2x_2x_2$ 連續、$x_3x_3x_3$ 連續的方法有多少種?

（法一） $A_{n+m}=(t-1)(A_{n+m-1}+A_{n+m-2}+\ldots..+A_{n+1})+(t-j)A_n$

Sol:顯然 $A_0=1$， $A_1=4$， $A_2=16$，由定理 1 可得 $A_{n+3}=3(A_{n+2}+A_{n+1})+A_n$

$A_3=3(A_2+A_1)+A_0=3(16+4)+1=61$，

$A_4=3(A_3+A_2)+A_1=3(61+16)+4=235$，

$A_5=3(A_4+A_3)+A_2=3(235+61)+16=904$，故有 904 種方法

（法二）

Sol: 由定理 2 可知:

$$\beta^{\,i}_{\,m,n+m}=\beta^{\,i}_{\,m,n+m-1}+\beta^{\,i-1}_{\,m,n+m-2}+\ldots+\beta^{\,i-m+1}_{\,m,n}+(j-1)(\beta^{\,i-1}_{\,m,n+m-1}+\beta^{\,i-2}_{\,m,n+m-2}+\ldots+\beta^{\,i-m+1}_{\,m,n+1})$$

$$A_n=\sum_{i=0}^{n}\beta^{\,i}_{\,m,n}\times(t-j)^{n-i}$$

推得 $\beta^{\,i}_{\,3,5}=\beta^{\,i}_{\,3,4}+\beta^{\,i-1}_{\,3,3}+\beta^{\,i-2}_{\,3,2}+2(\beta^{\,i-1}_{\,3,4}+\beta^{\,i-2}_{\,3,3})$

且 $A_5=\sum_{i=0}^{5}\beta^{\,i}_{\,3,5}\times(4-3)^{5-i}=\sum_{i=0}^{5}\beta^{\,i}_{\,3,5}$

首先先算出:

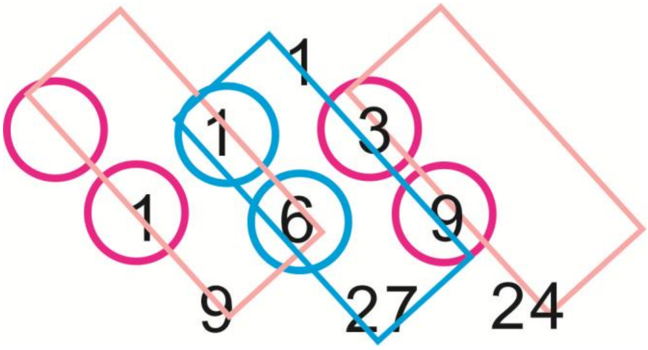
1

1 3

1 6 9

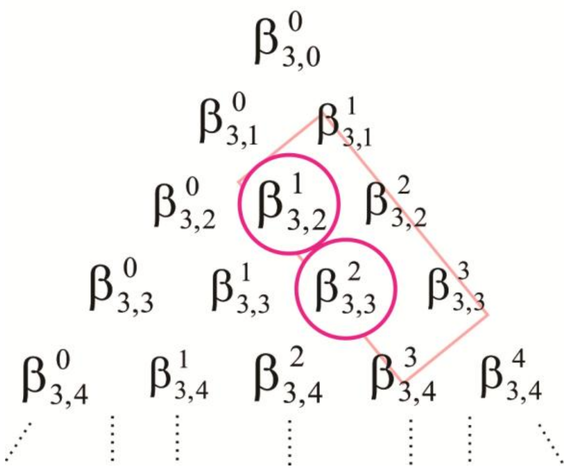
接著利用 $\beta^{\,i}_{\,3,5}=\beta^{\,i}_{\,3,4}+\beta^{\,i-1}_{\,3,3}+\beta^{\,i-2}_{\,3,2}+2(\beta^{\,i-1}_{\,3,4}+\beta^{\,i-2}_{\,3,3})$ 很快可得到下面

(小秘訣:圓圈處要乘 2)



再進一步可以得到

1
1　3
1　6　9
1　9　27　24
1　12　54　102　66
1　15　90　261　357　180



$$A_5=\sum_{i=0}^{5}B_{3,5}^{i}(t-j)^{5-i}=1\times1^5+15\times1^4+90\times1^3+261\times1^2+357\times1^1+180\times1^0$$

$$=1+15+90+261+357+180=904$$

所以本題答案共有 904 種方法數。

當只避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 時的類巴斯卡三角形之圖形相當漂亮，是定理 2. 的特例

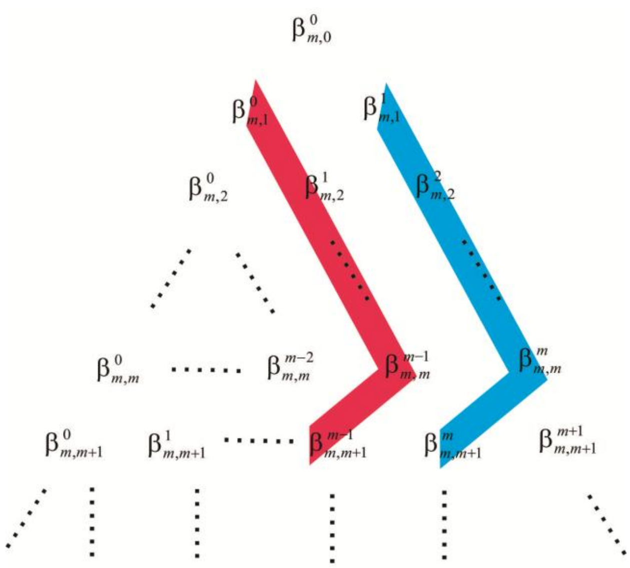
文獻[6]的類聖誕節襪子定理包含於定理 2.，文獻[6]的定理如下:

$\beta_{m,n}^{i}$ 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做直線排列，有 i 個 x_j，避免 $x_j\cdots x_j$ 連續

$(m個x_j)$ 的方法數， $j\le t$ ，則有:

$$\beta_{m,n+m}^{i}=\beta_{m,n+m-1}^{i}+\beta_{m,n+m-2}^{i-1}+\beta_{m,n+m-3}^{i-2}+\dots\dots+\beta_{m,n}^{i-m+1}$$

可寫成類似巴斯卡三角形的結構與說明如下(引述自文獻[6]):



由 $\beta^{i}_{m,\,n+m}=\beta^{i}_{m,\,n+m-1}+\beta^{i-1}_{m,\,n+m-2}+\beta^{i-2}_{m,\,n+m-3}+\ldots\ldots+\beta^{i-m+1}_{m,\,n}$ 搭配上圖後，可以找到很多**聖誕節襪子**，這跟高中翰林版第 2 冊 2-4 的二項式定理提到的聖誕節襪子定理有異曲同工之妙。下圖取自參考資料[5]，下面就是一隻聖誕節襪子。

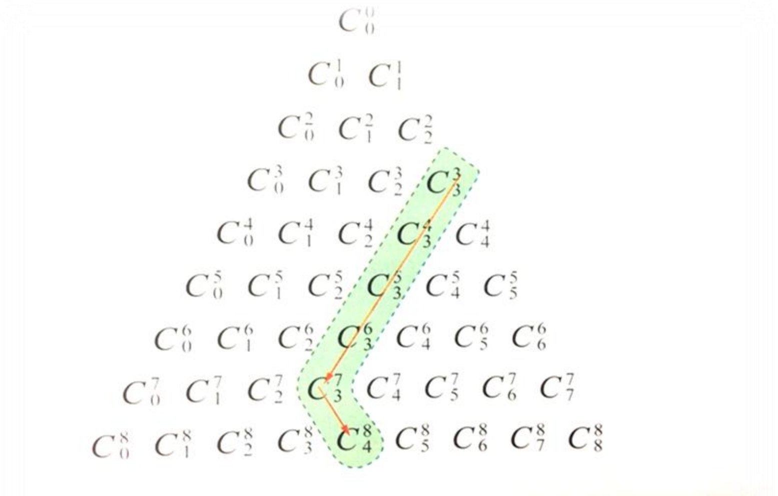


圖 43

Example 4：引述自文獻[6](出自文獻[2]P.28 第 13 題)

在 *MISSISSIPPI* 中的所有字母有多少個安排沒有連續的 S？

Sol:可改題為長度 11 中有 4 個 S，則 S 的排法是與 $\beta^{4}_{2,11}$ 相同。

已知 $\beta^{i}_{m,\,n+m}=\beta^{i}_{m,\,n+m-1}+\beta^{i-1}_{m,\,n+m-2}+\beta^{i-2}_{m,\,n+m-3}+\ldots\ldots+\beta^{i-m+1}_{m,\,n}$

推得 $\beta^{i}_{2,\,n+2}=\beta^{i}_{2,\,n+1}+\beta^{i-1}_{2,\,n}$

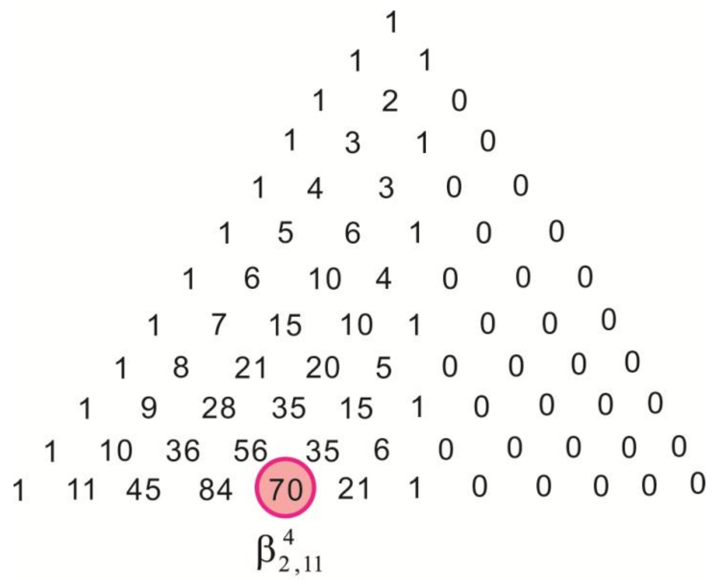
先算出:

1
1 1
1 2 0

再利用 $\beta^{i}_{2,\,n+2}=\beta^{i}_{2,\,n+1}+\beta^{i-1}_{2,\,n}$ 得到:

1
1 1
1 2 0
3 1

最後得到:



S 的排法為 $\beta^{4}_{2,11}=70$ 另外 $MIIIPPI$ 的排法為 $\frac{7!}{1!4!2!}=105$，

故本題答案為 $70\times105=7350$ 。

五、$\beta^{i}_{2,i}$ mod (t-j)同餘關係

定理 3.

設 $\beta^{i}_{2,n}$ 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，出現 i 個 x_1或x_2或.....或x_j ，並避免 $x_1\,x_1$ 連續、避免 $x_2\,x_2$ 連續、⋯、避免 $x_j\,x_j$ 連續之排列方法數， $j\le t$ ，$(t-j)$是質數，$(t-j，j-1)=(t-j，j-2)=1$，則:

$$\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+....+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$$

Poof:

由費馬小定理可知：$t-j \;\Big|\; \left((j-1)^{t-j-1}-1\right)$

$\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+....+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}$

$$= j(j-1)^{i-1}+j(j-1)^{i}+j(j-1)^{i+1}+....+j(j-1)^{t-j+i-3}=\frac{j(j-1)^{i-1}\left((j-1)^{t-j-1}-1\right)}{j-2}$$

(1) $j-2 \mid j$

$$\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+\dots+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}=\frac{j(j-1)^{i-1}\left((j-1)^{t-j-1}-1\right)}{j-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$$

(2) $j-2$ 不是 j 的因數

$\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+\dots+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}$ 為整數，推得 $\left((j-1)^{t-j-1}-1\right)$ 是 $j-2$ 的倍數，又已知

$t-j \mid \left((j-1)^{t-j-1}-1\right)$，且 $(t-j，j-2)=1$，所以 $(j-2)(t-j) \mid \left((j-1)^{t-j-1}-1\right)$

$$\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+\dots+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}=\frac{j(j-1)^{i-1}\left((j-1)^{t-j-1}-1\right)}{j-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$$

定理 4.

A_n 表示用 $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_t\}$ (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_1\ x_1$ 連續、避免 $x_2\ x_2$ 連續、⋯、避免 $x_j\ x_j$ 連續的組合數，$j\le t$，$(t-j)$ 是質數，$(t-j，j-1)=(t-j，j-2)=1$，則:

$$A_i+A_{i+1}+\dots+A_{t-j+i-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$$

Poof:

由 $A_n=\sum_{i=0}^{n}\beta^{i}_{2,n}\times(t-j)^{n-i}$ 可知 $A_n\equiv\beta^{n}_{2,n} \pmod{t-j}$

$$A_i+A_{i+1}+\dots+A_{t-j+i-2}\equiv\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+\dots+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$$

Example 5: 從 $B=\{x_i \mid 1\le i\le 8, i\in N\}$ 取 n 個作直線排列(可重複選取)，避免 x_1x_1 連續、x_2x_2 連續、x_3x_3 連續的情形如下:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 3 & & & & \\
1 & 6 & 6 & & & \\
1 & 9 & 21 & 12 & & \\
1 & 12 & 45 & 60 & 24 & \\
1 & 15 & 78 & 171 & 156 & 48
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\beta^{0}_{2,0} & & & & \\
\beta^{0}_{2,1} & \beta^{1}_{2,1} & & & \\
\beta^{0}_{2,2} & \beta^{1}_{2,2} & \beta^{2}_{2,2} & & \\
\vdots & & & & \\
\beta^{0}_{2,t-j-1} & \cdots\cdots & \beta^{t-j-3}_{2,t-j-1} & \beta^{t-j-2}_{2,t-j-1} & \beta^{t-j-1}_{2,t-j-1}
\end{array}$$

$$3+6+12+24\equiv 0 \pmod{5}$$

伍、研究結果與討論

一開始為了推廣文獻[4]的研究，也就是計算避免 $x_1\ x_1$ 連續、避免 $x_2\ x_2$ 連續、⋯、避免 $x_j\ x_j$ 連續的組合數，發展為計算避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 的組合數(定理 1)，為此，我先計算取 n 個並做排列，且前 $(n-1)$個位置均屬於 $\{x_1, x_2, x_3,.., x_j\}$，第$n$項屬於 $\{x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3},.., x_t\}$，且避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之方法數(引理 1)，再推得 $A_n = D_1A_{n-1} + D_2A_{n-2} + ... + D_{n-1}A_1 + D_n + \frac{D_{n+1}}{t-j}$ (引理 2)，最後證得定理 1。

同一個問題，換另一種角度切入，得到 $A_n = \sum_{i=0}^{n} \beta^{i}_{m,n} \times (t-j)^{n-i}$，其中發現很有趣的三角形，後續花了很多時間研究三角形，發現了

$\beta^{i}_{m,n+m} = \beta^{i}_{m,n+m-1} + \beta^{i-1}_{m,n+m-2} + ... + \beta^{i-m+1}_{m,n} + (j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1} + \beta^{i-2}_{m,n+m-2} + ... + \beta^{i-m+1}_{m,n+1})$ (定理 2)

以及 $\beta^{i}_{2,i} + \beta^{i+1}_{2,i+1} + \beta^{i+2}_{2,i+2} + ... + \beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2} \equiv 0 \pmod{t-j}$(定理 3)。

以下是我的研究結果:

一、A_n 表示用 $\{x_1, x_2, x_3,.., x_t\}$(可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 的組合數，$j \le t$，則:

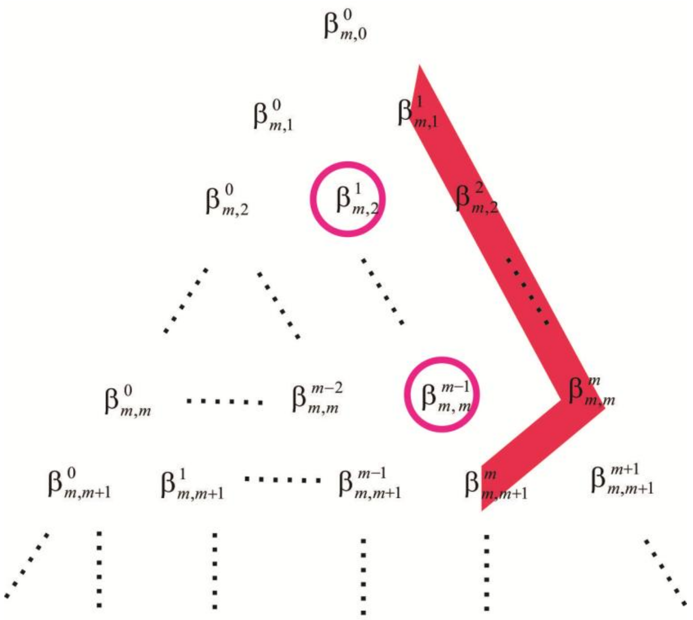
1. $n < m$，$A_n = t^n$　　2. $n = m$，$A_n = t^n - j$

3. $n > m$，$A_{n+m} = (t-1)(A_{n+m-1} + A_{n+m-2} + ... + A_{n+1}) + (t-j)A_n$

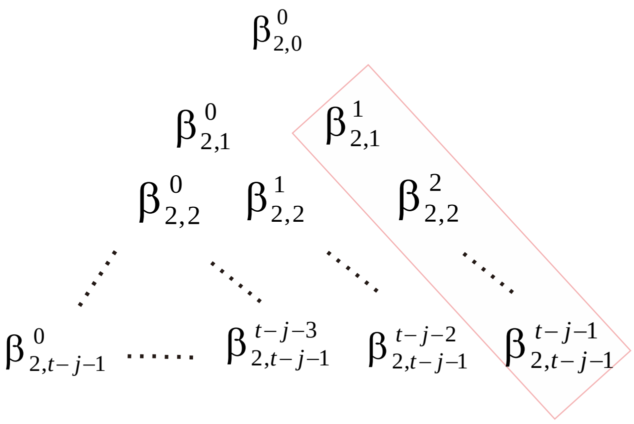
二、設 $\beta^{i}_{m,n}$ 表示用 $\{x_1, x_2, x_3,.., x_t\}$(可重複選取)選取 n 個並做排列，出現 i 個 $x_1或x_2或.....或x_j$，並避免 $x_1\cdots x_1$ 連續 $(m個x_1)$、避免 $x_2\cdots x_2$ 連續 $(m個x_2)$ 、⋯、避免 $x_j\cdots x_j$ 連續 $(m個x_j)$ 之排列方法數，$j \le t$，則:

$$\beta^{i}_{m,n+m} = \beta^{i}_{m,n+m-1} + \beta^{i-1}_{m,n+m-2} + ... + \beta^{i-m+1}_{m,n} + (j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1} + \beta^{i-2}_{m,n+m-2} + ... + \beta^{i-m+1}_{m,n+1})$$

Example :下圖為$\beta^{m}_{m,m+1}=\beta^{m}_{m,m}+\beta^{m-1}_{m,m-1}+....+\beta^{1}_{m,1}+(j-1)(\beta^{m-1}_{m,m}+\beta^{m-2}_{m,m-1}+....+\beta^{1}_{m,2})$



三、設$\beta^{i}_{2,n}$表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，出現i個x_1或x_2或.....或x_j，並避免$x_1\,x_1$連續、避免$x_2\,x_2$連續、⋯、避免$x_j\,x_j$連續之排列方法數，$j\le t$，$(t-j)$是質數，$(t-j，j-1)=(t-j，j-2)=1$，則: $\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+....+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t-j)$



四、A_n表示用$\{x_1,x_2,x_3,..,x_t\}$(可重複選取)選取n個並做排列，避免$x_1\,x_1$連續、避免$x_2\,x_2$連續、⋯、避免$x_j\,x_j$連續的組合數，$j\le t$，$(t-j)$是質數，$(t-j，j-1)=(t-j，j-2)=1$，則: $A_i+A_{i+1}+.....+A_{t-j+i-2}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ t-j)$

陸、結論與未來展望

接下來我想往當 m 不同時的方向發展，讓題目更完整，也想將這份作品裡的 A_n、D_n 和 $\beta^{i}_{m,n}$ 應用在其它題型，解各種題目。

除了 $\beta^{i}_{m,n+m}=\beta^{i}_{m,n+m-1}+\beta^{i-1}_{m,n+m-2}+\ldots+\beta^{i-m+1}_{m,n}+(j-1)(\beta^{i-1}_{m,n+m-1}+\beta^{i-2}_{m,n+m-2}+\ldots+\beta^{i-m+1}_{m,n+1})$ (定理 2)以及同餘關係 $\beta^{i}_{2,i}+\beta^{i+1}_{2,i+1}+\beta^{i+2}_{2,i+2}+\ldots+\beta^{t-j+i-2}_{2,t-j+i-2}\equiv 0 \pmod{t-j}$ (定理 3)，希望可以發現三角形中更多的祕密。

柒、參考文獻

[1] Ralph P.Grimaldi(簡國清譯),　Discrete and Combinatorial Mathematics : An Appplied Introduction, 5/e

[2]Alan Tucker. *Applied Combinatorics*, 5th Edition.

[3]2012高中數學教師研習成長工作坊研習資料

[4]http://www.tanyakhovanova.com/RecursiveSequences/RecursiveSequencesProofs.html#common

[5] 游森棚、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明(2013)。普通高級中學數學課本第2冊。台南市，翰林書局。

[6]第13屆旺宏科學獎。從Avoid數列到類巴斯卡三角形。

【評語】010054

本作品是研究找出 t 個不同物品中選出 n 個做直線排列，在避開適當規定後有多少種不同的方法數。這是一個經研究很久的排列問題，創新性略嫌不足；整體數學的表示基本上正確，值得肯定。