2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010049**

參展科別　數學

作品名稱　**當 Frieze 遇上 Fibonacci**

得獎獎項　大會獎：三等獎

就讀學校　新北市立江翠國民中學

指導教師　顏榮皇

作者姓名　高佳晏

關鍵字　<u>轉換、*MinMax*、不變量</u>

作者簡介

我是高佳晏，目前就讀新北市江翠國民中學二年級。

平時的我喜歡閱讀科普相關書籍，也喜歡與有相同愛好數學的朋友一起解決數學難題，解決難題的興奮感與成就感總令我欲罷不能。很榮幸我有機會參加這次的台灣國際科展，與來自各地的數學高手互相交流，拓展自己的學術見聞。

最後，感謝一路上教導我的指導老師、教授及家人。

當 Frieze 遇上 Fibonacci

摘要

本作品研究 Frieze pattern :特定梯形中內含菱形的結構，其中梯形的第 1 列及最後列都是 1，且結構中形成菱形的四個角的數字 a 、b 、c 、d ,都滿足 $a\times c=b\times d+1$。

利用中學教材多項式四則運算，本研究進行結構分析與並透過兩種不同的轉換給出 n 層週期的證明。使用 *MinMax* 方法得到每個結構的代表數列。發現

(1) 可找到一個完全由費氏數列組成之 Frieze Pattern，且此組代表數列為所有可能結構中的代表數列包含了最大的數字。

(2) n 層的結構中第二列的 $n+1$ 個數字和的不變量。

(3) 在整個結構扣除上下兩列之後，任意連續 $n+1$ 行，1 出現的數目與 2 一樣多。

Frieze meet Fibonacci

Abstract

A Frieze pattern is a specific trapezoid containing the diamond structure, in which the four vertices of the diamond are labeled as the numbers a、b、c、d satisfying $a \times c = b \times d + 1$。

This study presents that the structure of a Frieze pattern can be analyzed by four arithmetic operations of polynomials in the high school teaching materials, and we employ two transformations to prove the period of nth-layer Frieze patterns.

Applying $MinMax$ method to represent a Frieze pattern, there three new results are found:

(1) A Frieze pattern only consists of the Fibonacci numbers.

(2) The sum of the second row in the nth layer of Frieze pattern is invariant.

(3)Excluding the top and bottom rows, the multiplicity of 1 and 2 are identical.

壹、研究動機

自然界可以很容易的看到Frieze Patterns，如花豹花紋、欄杆花紋、音樂符號。
已知Frieze patterns有7種形式，本研究屬於其中一種，[5]。Coxeter對於Frieze patterns，提出證明，[6}。國內的科學展覽研究則在2012年8月2日台灣科學教育館辦理的教師研習被提出來，如圖4，[9]。
筆者在2014年7月向全國科學展覽提出＜數字夾心餅>作品，[10]。本篇則繼續延續探討Frieze 圖案，嘗試以中學教材證明Frieze圖案的性質。同時，將費氏數列交錯的填入生成數列後，研究圖案的長相與性質，並探討Frieze 圖案中若干個不變量。


圖1、花豹花紋


圖2、欄杆花紋


圖3、音樂符號

題目1.1

請觀察圖4結構。

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5
2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3
1 5 2 2 5 1 4 4 1 5
2 3 1 3 2 1 5 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

圖4

貳、通則

經過多次嘗試，發現圖 4 是由許多小菱形所構成。

菱形排列成上下底都為 1、第一列有 w 個 1、列數有 n 層的梯形。同時，每個菱形的四個角均有自然數所構成數字 a 、b 、c 、d ，如圖 5，且滿足

$$a \times c = b \times d + 1 \text{。} \tag{1}$$

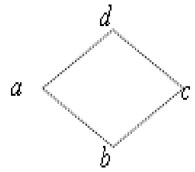


圖 5

等式 1 表示，如圖 6 的黃色區域，

2x5=3x3+1；4x4=5x3+1；

5x2=3x3+1；5x1=2x2+1。

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5

2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4

3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3

1 5 2 2 5 1 4 4 1 5

2 3 1 3 2 1 5 1 2

1 1 1 1 1 1 1 1

圖 6

為方便研究，將圖 4 著色如圖 7。

將圖 7 座標訂定為由上而下的列數，由左而右數過來的個數，筆者會有

$G^{7}_{2,5}$=5，以粉紅色標示；$G^{7}_{3,4}$=4，以黃色標示；

$G^{7}_{3,5}$=4，以綠色標示； $G^{7}_{4,4}$=3，以藍色標示。

第一列 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

第二列 1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5

第三列 2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4

… 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3

1 5 2 2 5 1 4 4 1 5

2 3 1 3 2 1 5 1 2

1 1 1 1 1 1 1 1

圖 7

規定

定義 2.1

$G_{i,j}^{n}$ 表示 n 層梯形中的第 i 列第 j 行的數字。

由式子 1，得到本作品所研究的對象及其通則如下：

通則 2.2

給定某一個 n 層梯形結構:

最上面的第一列全部擺 1，第二列填入任意的自然數，第三列到第 i 列數字依照

$$G_{i,j}^{n} \times G_{i,j+1}^{n} = G_{i-1,j+1}^{n} \times G_{i+1,j}^{n} + 1 \text{。其中，} 3 \le i \le n-1 \text{。} \qquad (2)$$

圖上的第一列的兩旁沒有使用到此通則。

若第 i 列所產生數字都是自然數，且最後一列都是 1，則是本研究將研究的 Frieze Patterns。

参、文獻探討

1. Frieze groups 已知有 7 種形式。本研究屬於「PMA2」型，如圖 8，實線箭頭是平移 ，虛線是反射，鑽石是 180 度旋轉，[5]。

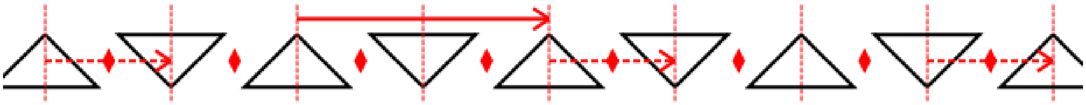


圖 8、「PMA2」型

2. Coxeter 對於 Frieze patterns，提出證明。通則 2.2 所填入第 2 列的自然數，就是凸 $n+1$ 邊形各個頂點內接三角形的數量，[6]。
3. Coxeter 發現 Frieze patterns 斜邊的任意 3 個整數的倍數關係[7]。
4. Henry 利用雙遞迴證明 Frieze patterns 的週期是 $n+1$，[6]。
5. 因為 Coxeter 對於 Frieze patterns 提出定義，所以本研究將直觀觀察非同構的組數「1、1、4、6、19、49」輸入數列大全，得到一般式 $a(n)$：

$$a(n)=\frac{C_{n+1}}{n+3}+\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}+\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}$$，其中，C_n 為第 n 個卡特蘭數。 (3)

當 n 為奇數，一般式要加上 $\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}$；

當 n 為 3 的倍數，一般式要加上 $\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}$。

肆、研究目的

如題目 1.1，圖 4，本研究則是討論 Frieze Patterns 的一種數學形式。筆者嘗試：

(一)不引用 Coxeter 對於 Frieze patterns 的証明。

由圖 4 的數字關係找到通則，發展轉換，證明給定 n 層結構的周期。並藉由 *MinMax* 方法，找出給定 n 層結構，最大數值的代表數列。同時，將費氏數列交錯的填入代表數列，研究其數學結構的。最後，提出給定 n 層結構，任意連續 $n+1$ 行，扣除上下兩列之後，數值是 1 的數量與數值是 2 的數量相同。

(二)引用 Coxeter 對於 Frieze patterns 的証明，[6]。

探討給定 n 層結構第 2 列任意連續 $n+1$ 個整數和的不變量。並藉以探討 Frieze patterns 的結構退化。

伍、研究過程

(一)結構分析

1. 存在性：　給定n層結構尋找一種填入結構的方法。
2. 生成數列：利用通則 2.2 定義生成數列，並嘗試利用生成數列分析結構的特性。
3. 數論特性：研究相鄰數字的整數特性。
4. 結構建置：提出兩個相鄰生成數列是自然數，則此結構會成立的論述。

(二)轉換：

1. 轉換運算：利用相鄰數字的連續 3 個數之間倍數關係，構造轉換的運算方法。
2. 同構判斷：藉著轉換運算，以判斷兩個生成數列是否同構。

(三)週期問題

1. 週期證明：利用轉換及通則 2.2 的定義，證明給定n層結構的週期為$n+1$。
2. 小週期　：若$n+1$不是質數，則會有小於$n+1$的小週期的觀察。
3. 退化　：　利用式子(1) $a\times c=b\times d+1$討論n層結構的退化情形。

(四)非同構組數：

1. 直觀觀察：給定n層的非同構組數為$S(n)$，觀察$n\le 8$非同構的組合，並探討上下界與文獻中「數列大全」的關係。
2. 引用 Conway 和 Coxeter 定理，藉以探討非同構組數的一個上界。
3. 降階關係：利用生成數列的互質特性探討組數問題的降階關係。

(五) $MinMax$ ：

1. 代表數列：以 $MinMax$ 的演算法找出數學結構的代表數列。
2. 排序:　　規定代表數列的前後大小順序，並規定n層第k個的代表數列為$G^{n,k}$ 。

(六) $G^{n,s(n)}$:

1. 以費氏數列交錯填入生成數列，為$G^{n,s(n)}$ ，
2. 對於代表數列$G^{n,S(n)}$所形成數學結構對應的第 2 列以某一個 1 開始連續$n+1$個數列稱為$GL^{n,S(n)}$ 。探討$GL^{n,S(n)}$的性質。
3. 討論$GL^{n,S(n)}$圖案的構造與性質。

(七)不變量:

1. 引用 Conway 和 Coxeter 定理，討論n層第 2 列連續$n+1$個整數和的不變量。
2. 討論$G^{n,s(n)}$圖案任意連續$n+1$行第 2 列至第$n-1$列，1 的數量和 2 的數量相等。

(八)應用：提出 Freizer Patterns 的生活應用。

陸、結構分析

給定n層結構，可使用下列的演算方法構造某一種數學結構，並利用數學歸納法證明之。

演算方法 6.1

給定自然數n，第 2 列先擺 1，然後擺 2 連續$n-2$次，再放一個 1，最後擺一個$n-1$，就可以構成一種n層的一般式。

如圖 9 是演算方法 6.1 時，$n=7$的例子。

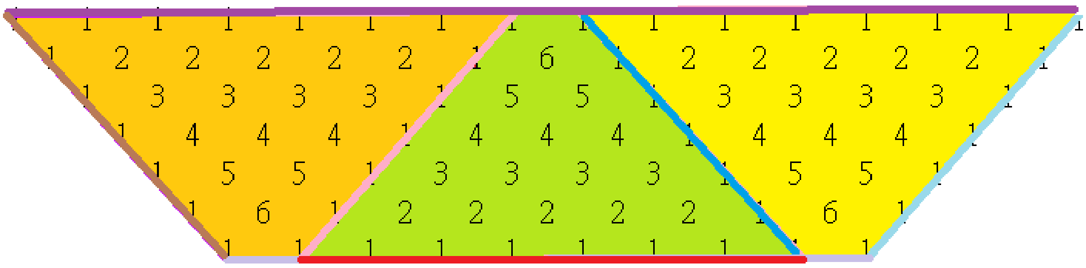


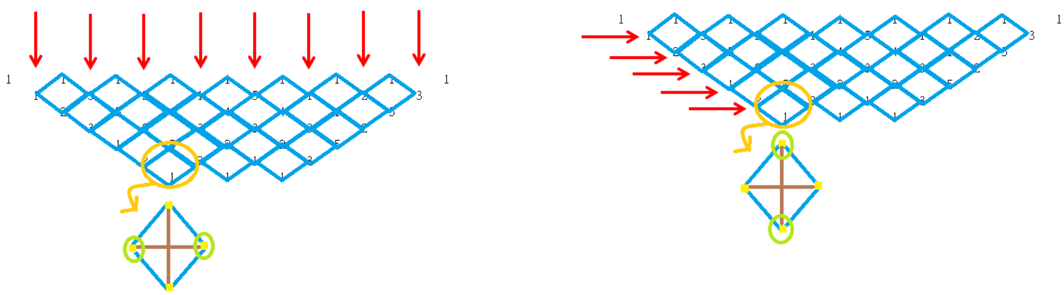
圖 9

觀察圖 9，

$$G_{i,1}^{n}=1，1\le i\le 7。$$

從圖形的第 2 列去構造梯形，如圖 10 的甲。後來觀察到圖 9 的第 1 行都是由 1 組成的數列，所以猜測也可以從第一行去構造，如圖 10 的乙。

因此，圖 10 的甲和圖 10 的乙，均可以當筆者的研究策略。



甲　　乙

圖 10

透過通則 2.2 及等式 2，得到

定理 6.2

$$G^{n}_{i,j+1}=\frac{G^{n}_{i-1,j+1}\times G^{n}_{i+1,j}+1}{G^{n}_{i,j}}\text{。}$$

依通則 2.2，考慮圖 11、圖 12，

$$cd=af+1\text{，}\gcd(a,c)=1\text{，}\gcd(c,f)=1\text{，}\gcd(d,f)=1\text{，}\gcd(a,d)=1\text{。}$$
$$kl=jm+1\text{，}\gcd(j,k)=1\text{，}\gcd(k,m)=1\text{，}\gcd(l,j)=1\text{，}\gcd(l,m)=1\text{。}$$

得到

定理 6.3(斜向任意數字互質)

在構造好的梯形中，任意斜向的連續二個數字互質。

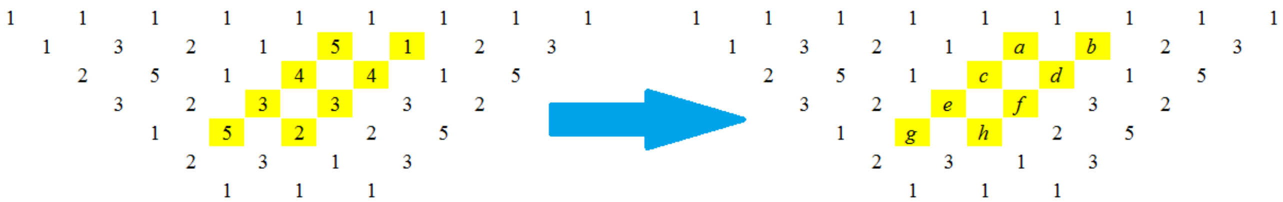


圖 11

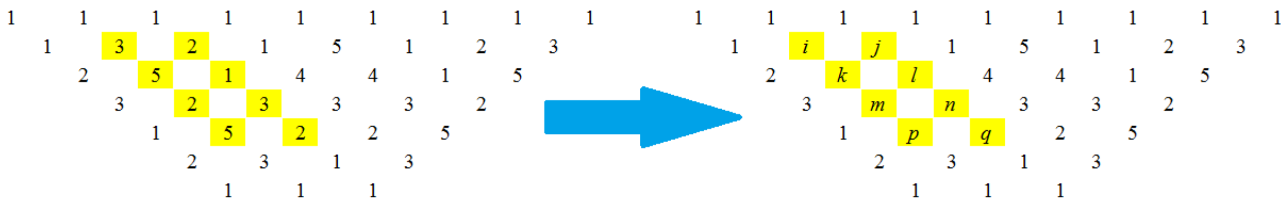


圖 12

在 Frieze patterns 的研究歷史上，Coxeter 也同樣的提出下列的性質，Frieze patterns 斜邊的任意 3 個整數的倍數關係[7]。

定理 6.4(斜向連續三個數字的倍數關係)

梯形結構中，不考慮上端的兩旁，斜向的連續三個數字，兩旁數字和是中間數字的倍數。

【證明】

不失一般性，如圖 11，將證明 f 整除 $d+h$。依通則 2.2，得到

$$cd = af+1\text{，}ef = ch+1\text{，則}$$

$$a=\frac{cd-1}{f}\text{，且 }e=\frac{ch+1}{f}\text{，}$$

$$a+e=\frac{cd-1+ch+1}{f}=\frac{c(d+h)}{f}=c\times\frac{d+h}{f}\text{。}$$

$$a+e=c\times\frac{d+h}{f}\in N$$

依定理 6.3，得到

$$\frac{a+e}{c}=\frac{d+h}{f}\in N\text{。} \tag{4}$$

同理，如圖 12，將證明 m 整除 $k+p$。

依通則 2.2，得到

$$kl=jm+1\text{，}mn=lp+1\text{，}$$

$$j=\frac{kl-1}{m}\text{，且 }n=\frac{lp+1}{m}\text{，}$$

$$j+n=\frac{kl-1+lp+1}{m}=\frac{l(k+p)}{m}=l\times\frac{k+p}{m}\text{。}$$

依定理 6.3，得到

$$\frac{j+n}{l}=\frac{k+p}{m}\in N\text{。} \tag{5}$$

□

柒、生成數列

考慮圖 4，取前 8 個數列，如圖 13 及圖 14。

$$
\begin{aligned}
&(1,1,2,3,1,2,1)\\
&\to (1,3,5,2,5,3,1)\\
&\to (1,2,1,3,2,1,1)\\
&\to (1,1,4,3,2,3,1)\\
&\to (1,5,4,3,5,2,1)\\
&\to (1,1,1,2,1,1,1)\\
&\to (1,2,5,3,4,5,1)\\
&\to (1,3,2,3,4,1,1)\\
&\to (1,1,2,3,1,2,1)
\end{aligned}
$$

圖 13

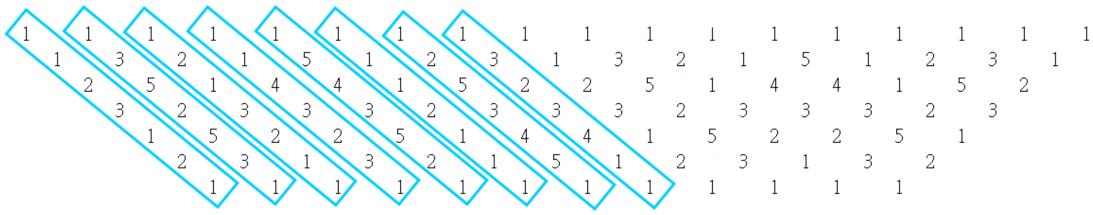


圖 14

筆者發現這 8 個數列所生成的結構都相同。

規定

定義 7.1
給定n層梯形結構的任意一行數列稱為生成數列。

捌、轉換

考慮通則 2.2，$G^n_{i,j} \times G^n_{i,j+1} = G^n_{i-1,j+1} \times G^n_{i+1,j} + 1$，$G^n_{1,j} = 1 = G^n_{n,j}$，$1 \le i \le n$，$\forall j \in N$。

得到

$G^n_{0,j} = 0 = G^n_{n+1,j}$。其中，$\forall j \in N$ ……………………………(6)

如圖 15 及圖 16 的示意圖。

```
1     1     1     1     1     1
   a     c     e     b     d
      b     d     a     c
         1     1     1
            0
```

圖 15

```
1     1     1     1     1     1
   a     c     e     b     d
      b     d     a     c
         1     1     1
            0
```

圖 16

再考慮圖 11，式子 4，$\dfrac{a+e}{c} = \dfrac{d+h}{f} \in N$，及

圖 12，式子 5，$\dfrac{j+n}{l} = \dfrac{k+p}{m} \in N$；和式子 6，$G^n_{0,j} = 0 = G^n_{n+1,j}$，

得到

定理 8.1(斜向連續 3 個數字與第 2 列數字的關係)

n 層結構中，$G^n_{2,j} = \dfrac{G^n_{i-1,j+2} + G^n_{i+1,j}}{G^n_{i,j+1}} \in N$，$1 \le i \le n$，$\forall j \in N$ 同時，

$$G^n_{2,j} = \frac{G^n_{i,j-i+2} + G^n_{i+2,j-i+2}}{G^n_{i+1,j-i+2}} \in N \text{，} 1 \le i \le n \text{，} \quad \forall j \in N \text{。}$$

依定理 8.1，$G^n_{2,j} = \dfrac{G^n_{i-1,j+2} + G^n_{i+1,j}}{G^n_{i,j+1}} \in N$。通則 2.2 及等式 2，$G^n_{i,j} \times G^n_{i,j+1} = G^n_{i-1,j+1} \times G^n_{i+1,j} + 1$。

4 個變項中，若 3 個有相鄰三個數是自然數的倍數關係則第 4 個自然數也一定有相鄰三個數的倍數關係。可以依序證明 $G^n_{i-1,j+2}$ 是自然數。

得到

定理 8.2(構造新的數學結構的準則)

給定第一行的生成數列填入自然數，若其生成的第二行全部出現自然數，則可構成數學結構。

取圖 4 的第 1 行數列 $(1,1,2,3,1,2,1)$，依據定理 8.1，得到

$1=\dfrac{0+1}{1}$；

$3=\dfrac{1+2}{1}$，如圖 17，綠色數字；

$2=\dfrac{1+3}{2}$；

$1=\dfrac{2+1}{3}$；

$5=\dfrac{3+2}{1}$；

$1=\dfrac{1+1}{2}$；

$2=\dfrac{2+0}{1}$，如圖 17，橘色數字，0 為虛擬的數字。

依定理 8.1 可以把數列 $(1,1,2,3,1,2,1)$ 轉換成數列 $(1,3,2,1,5,1,2)$。

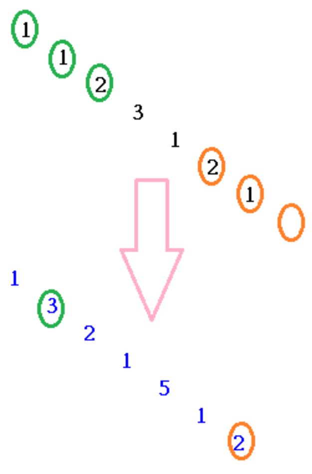


圖 17

規定

定義 8.3(R轉換)

給定一個n層數學結構第j行的數列$(G^n_{1,j},G^n_{2,j},G^n_{3,j},G^n_{4,j},\ldots,G^n_{n-2,j},G^n_{n-1,j},G^n_{n,j})$依照

$$R^n_{i,j-i+1}=G^n_{2,j}=\frac{G^n_{i,j-i+2}+G^n_{i+2,j-i+2}}{G^n_{i+1,j-i+2}}\in N \text{ ，其中， } G^n_{0,j}=0=G^n_{n+1,j} \text{ ，} 1\le i\le n \text{ ，} j\in N$$

轉換成$(R^n_{1,j},R^n_{2,j},R^n_{3,j},R^n_{4,j},\ldots,R^n_{n-2,j},R^n_{n-1,j},R^n_{n,j})$稱為$R$轉換。

也就是，可以將圖 4 的R轉換如圖 18 及圖 19。

$$\begin{gathered}
(1,1,2,3,1,2,1)\to(1,3,2,1,5,1,2)\\
(1,3,5,2,5,3,1)\to(3,2,1,5,1,2,3)\\
(1,2,1,3,2,1,1)\to(2,1,5,1,2,3,1)\\
(1,1,4,3,2,3,1)\to(1,5,1,2,3,13)\\
(1,5,4,3,5,2,1)\to(5,1,2,3,1,3,2)\\
(1,1,1,2,1,1,1)\to(1,2,3,1,3,2,1)\\
(1,2,5,3,4,5,1)\to(2,3,1,3,2,1,5)\\
(1,3,2,3,4,1,1)\to(3,1,3,2,1,5,1)
\end{gathered}$$

圖 18

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5

2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4

3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3

1 5 2 2 5 1 4 4 1 5

2 3 1 3 2 1 5 1 2

1 1 1 1 1 1 1 1

1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1

3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1

2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1

1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1

5 1 2 3 1 3 2 1 5 1

1 2 3 1 3 2 1 5 1

2 3 1 3 2 1 5 1

圖 19、R轉換

再依定理 8.1，原來梯形結構的第 2 列數字經過 R 轉換後，變成新的梯形結構的第 1 列。同時，新的梯形結構的第 1 列的數列，依序出現在其他各列。

得到

定理 8.4(R 轉換與第 2 列的關係)

$R_{i,j-i+1}^{n}=G_{2,j}^{n}$。

同理，依定理 8.1，式子 1，$a\times c=b\times d+1$，自然數乘法具有交換性；

得到

定義 8.5(L 轉換)

給定一個 n 層數學結構，數列 $(G_{1,j+n-1}^{n},G_{2,j+n-2}^{n},G_{3,j+n-3}^{n},\ldots,G_{n-2,j+2}^{n},G_{n-1,j+1}^{n},G_{n,j}^{n})$ 依照

$$L_{i,j-1}^{n}=G_{2,j}^{n}=\frac{G_{i-1,\,j+2}^{n}+G_{i+1,\,j}^{n}}{G_{i,\,j+1}^{n}}\in N\text{，其中，}G_{-1,m}^{n}=0=G_{n+1,m}^{n}\text{，}1\le k\le n\text{，}j\in N\text{，}m\in N$$

轉換成 $(L_{1,j+n-1}^{n},L_{2,j+n-2}^{n},L_{3,j+n-3}^{n},\ldots,L_{n-2,j+2}^{n},L_{n-1,j+1}^{n},L_{n,j}^{n})$ 稱為 L 轉換。

依定理 8.1，如圖 20，得到

定理 8.6(L 轉換與第 2 列的關係)

$L^n_{i,j-1} = G^n_{2,j}$，$1 \le k \le n$。

1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
	1		3		2		1		5		1		2		3		1		3		2		1		5	
		2		5		1		4		4		1		5		2		2		5		1		4		
			3		2		3		3		3		2		3		3		3		2		3			
				1		5		2		2		5		1		4		4		1		5				
					2		3		1		3		2		1		5		1		2					
						1		1		1		1		1		1		1		1						

1		2		3		1		3		2		1		5		1		2		3		1		3		2
	1		2		3		1		3		2		1		5		1		2		3		1		3	
		1		2		3		1		3		2		1		5		1		2		3		1		
			1		2		3		1		3		2		1		5		1		2		3			
				1		2		3		1		3		2		1		5		1		2				
					1		2		3		1		3		2		1		5		1					
						1		2		3		1		3		2		1		5						

圖 20

玖、週期

本研究將利用通則 2.2 及前面所敘述的轉換，提出週期為 $n+1$ 的證明。

定理 9.1（週期）

給定 n 層結構有 $G_{i,j}^{n}=G_{i,n+1+j}^{n}$，其中 $1\le i\le n$ 且 $\forall j\in N$。

【證明】

第一部分：依定理 8.1，$G_{n-1,j}^{n}=\dfrac{G_{n-1,j}^{n}+G_{n+1,j}^{n}}{G_{n,j}^{n}}=R_{n,j}^{n}=R_{1,n+j-1}^{n}=\dfrac{G_{0,j+n-1}^{n}+G_{2,j+n-1}^{n}}{G_{1,j+n-1}^{n}}=G_{2,j+n-1}^{n}$。

如圖 21，圖 21，紅點的數值經過 R 轉換後和黃點的數值相同。

即 $G_{n-1,j}^{n}=G_{2,j+n-1}^{n}$。如圖 23。

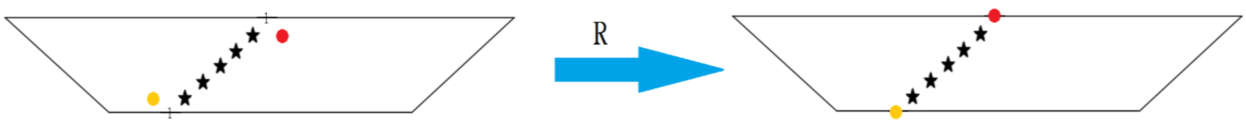


圖 21

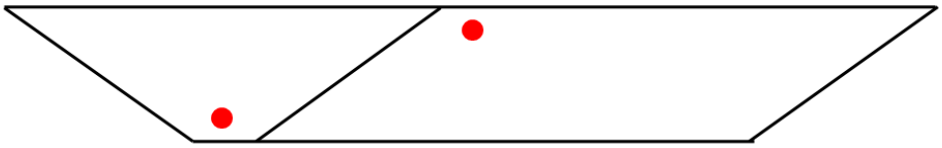


圖 22

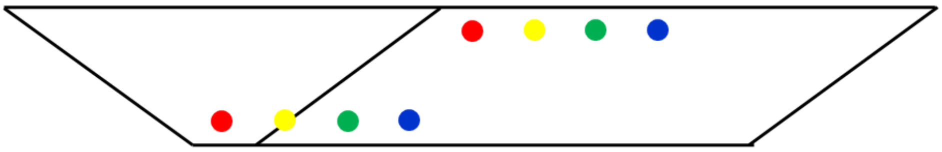


圖 23

第二部分：考慮 $G^n_{n,j}=1=G^n_{1,j+n}$ ，$G^n_{n-2,j+1}=\dfrac{G^n_{n-1,j}\times G^n_{n-1,j+1}-1}{G^n_{n,j}}=\dfrac{G^n_{2,j+n-1}\times G^n_{2,j+n}-1}{G^n_{1,j+n}}=G^n_{3,j+n-1}$ ，

依第一部分的證明，兩個紅點的數值相同，兩個黃點的數值也相同，如圖 24。
依通則三，兩個藍色點數值相同，如圖 25，
重覆運算，得到兩個相同顏色點的數值均相同，如圖 26。

可逐步證明 $G^n_{n-i+1,j}=G^n_{i,j+n-i+1}$ 。如圖 27。

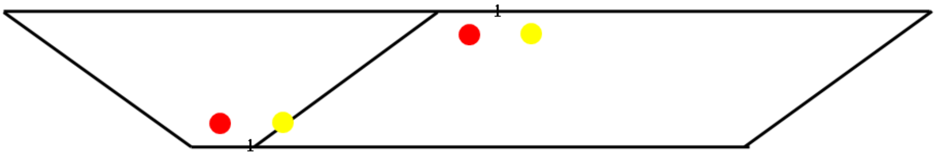


圖 24

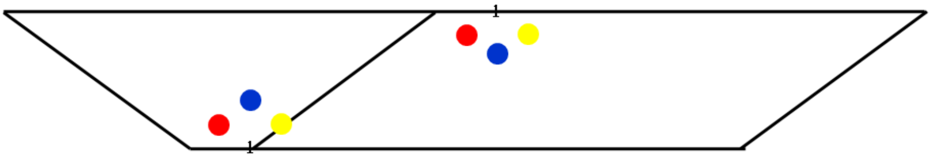


圖 25

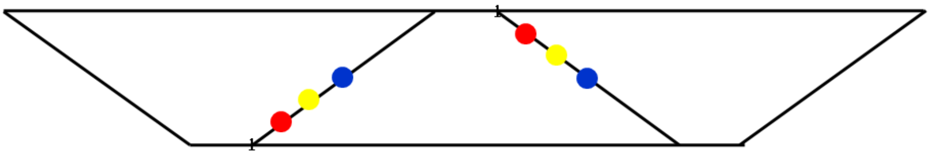


圖 26

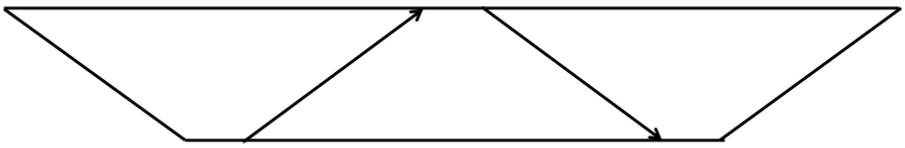


圖 27

第三部分：依定理 8.1，$G^n_{2,j}=\dfrac{G^n_{0,j+2}+G^n_{2,j}}{G^n_{1,j+1}}=L^n_{1,j+1}=L^n_{n,j+1}=\dfrac{G^n_{n-1,j+2}+G^n_{n+1,j}}{G^n_{n,j+1}}=G^n_{n-1,\ j+2}$，即

如圖 28，圖 29，紅點的數值經過 L 轉換後和黃點的數值相同。

即 $G^n_{2,j}=G^n_{n-1,\ j+2}$，如圖 30。

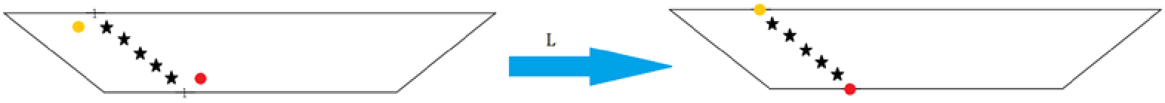


圖 28

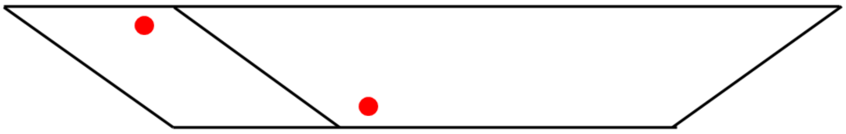


圖 29

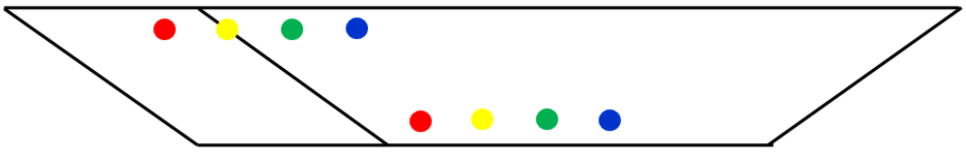


圖 30

第四部分：考慮 $G^n_{1,j+1}=1=G^n_{n,j+2}$，$G^n_{3,j}=\dfrac{G^n_{2,j}\times G^n_{2,j+1}-1}{G^n_{1,j+1}}=\dfrac{G^n_{n-1,j+2}\times G^n_{n-1,j+3}-1}{G^n_{n,j+2}}=G^n_{n-2,j+3}$。

依第二部分的證明，兩個紅點的數值相同，兩個黃點的數值也相同，如圖 31。
依通則三，兩個藍色點數值相同，如圖 32，
重覆運算，得到兩個相同顏色點的數值均相同，如圖 33。

可逐步證明 $G^n_{i,j}=G^n_{n-i+1,j+i}$。如 34。

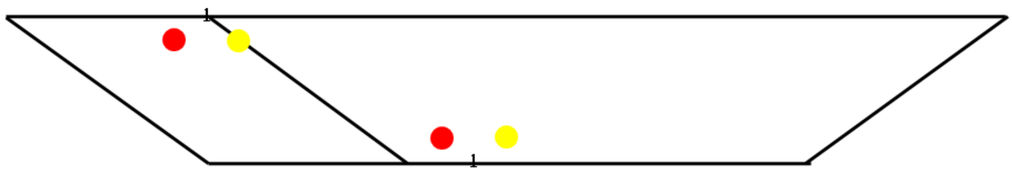


圖 31

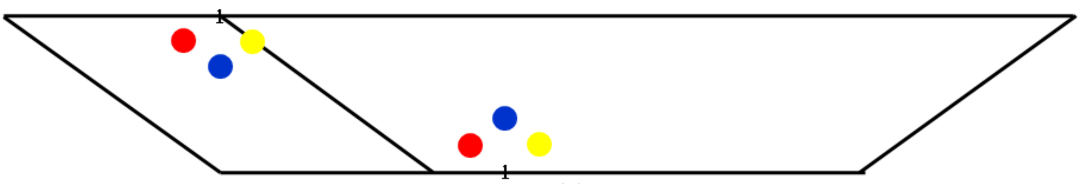


圖 32

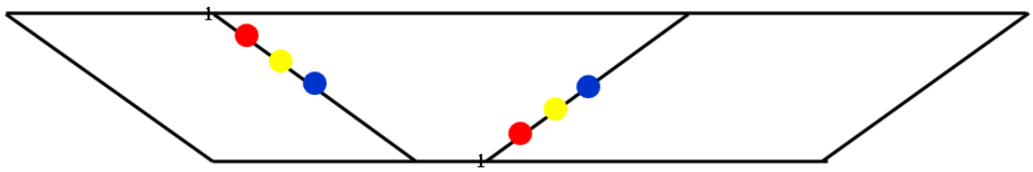


圖 33

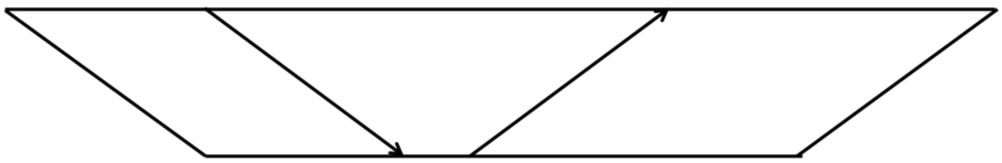


圖 34

第五部分：依第二部分及第四部分，得到 $G^n_{i,j}=G^n_{n-i+1,j+i}=G^n_{i,n+1+j}$，其中 $1\le i\le n$，$\forall\ j\in N$。

如圖 35。

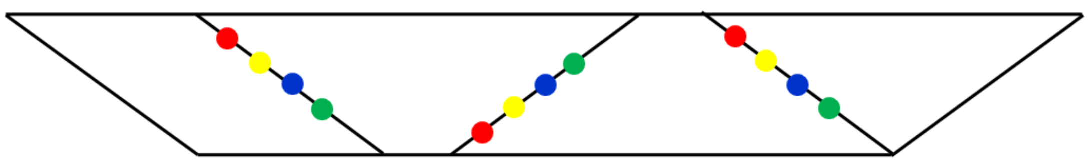


圖 35

□

由定理 9.1 可得到，

定理 9.2

數列 $\left(1, G^n_{2,1}, G^n_{3,1}, G^n_{4,1}, \ldots G^n_{n-1,1}, 1\right)$ 填入第 1 行，若第 2 行是自然數，則 $G^n_{i,1} = G^n_{n-i+1,i+1}$，$1 \le i \le n$。

考慮圖 4 的結構，定理 9.1 的證明過程，規定

定義 9.3

給定 n 層數學結構，$G^n_{i,j} = G^n_{n-i+1,j+i} = G^n_{i,n+1+j}$ 稱為 PMA2 型。

圖 36 圖 37，就是以圖 4 為例的 PMA2 型。其他 PMA2 型的特性，詳如附錄一。

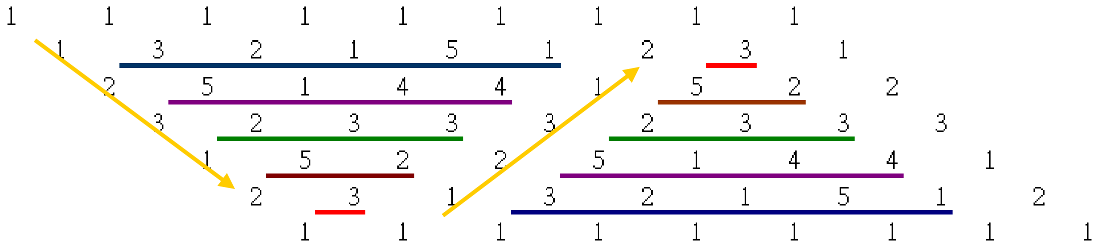


圖 36

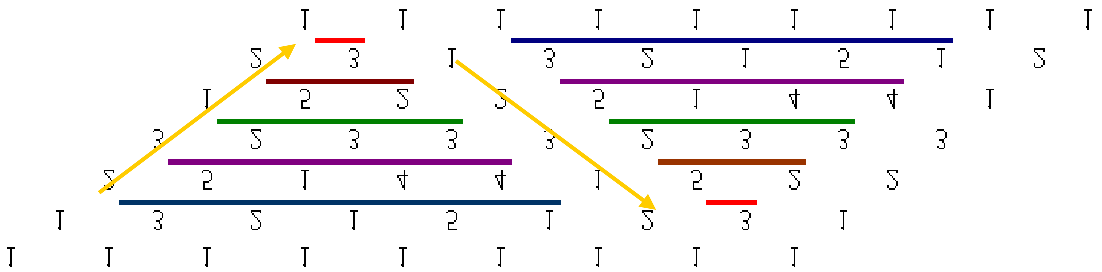


圖 37

拾、同構

規定

定義 10.1

符號$\cong$為同構。

即，3 層生成數列$(1,1,1)\cong(1,2,1)$表示$(1,1,1)$所生成數學結構和$(1,2,1)$所生成數學結構是相同。
4 層生成數列$(1,1,1,1)\cong(1,2,1,1)\cong(1,1,2,1)$。
5 層生成數列$(1,1,1,1,1)\cong(1,2,1,2,1)$。
6 層生成數列$(1,1,1,2,1,1)\cong(1,1,2,1,2,1)$或$(1,1,2,1,1,1)\cong(1,2,1,2,1,1)$。

利用定理 8.1、定理 8.4 及定理 8.6，得到

判斷準則 10.2(是否同購的判斷依據)

兩個相異的生成數列可以構成兩個數學結構。若這個兩個相異的生成數列經過R轉換後，新的數列的數值前後順序相同，則這兩個相異的生成數列所構成的數學結構相同。

規定

定義 10.3

給定n層數學結構，非同構的組數為$S(n)$。

不考慮上下翻轉，梯形結構中，3 層的組數是 1 組；$S(3)=1$，如附錄圖 2。
4 層的組數是 1 組；$S(4)=1$，如附錄圖 3。
5 層的組數是 4 組；$S(5)=4$，如附錄圖 4。

計算非同構組數過程，使用定理 8.2 建構梯形結構，再利用判斷準則 10.2 的R轉換避免同構發生，得到，

$S(3)=1$，$S(4)=1$，$S(5)=4$，$S(6)=6$。$S(7)=19$，$S(8)=49$。

壹拾壹、Conway 和 Coxeter 定理

當筆者把『1、1、4、6、19、49』輸入數字大全，發現有 2 種一般式的解釋。
再深入研究，筆者得到 Conway 和 Coxeter 曾經對 Freizer Patterns 提出一個定理。筆者採納式子 3 的一般式，[6]。

引理 11.1(Conway 和 Coxeter 定理，[6])

本研究的 n 層數字梯形第二列任意連續 $n+1$ 個數，和從下列方式產生的數列之間，存在一種對射。對於一個內部分割成 $n-1$ 個三角形的凸 $n+1$ 邊形，每一頂點帶有一數值表示含該頂點的三角形數目，依順(逆)時鐘取每一頂點的數值，可得一組 $n+1$ 個數的數列。

利用引理 11.1，可將圖 4 的第 2 列 (1,3,2,1,5,1,2,3) 轉換成圖 38。

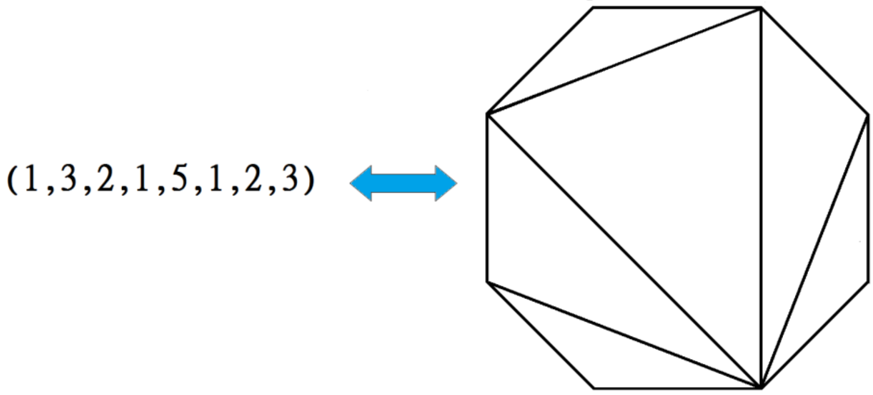


圖 38

從定理 9.1 可知本研究的 n 層結構，第二列數列的週期為 $n+1$。再依據引理 11.1，給定凸 $n+1$ 多邊形可以分割成 $n-1$ 個三角形。每個三角形剛好是 3 個頂點。

得到

定理 11.2(第 2 列的不變量)

給定 n 層結構，第 2 列的連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$。

再考慮 R 轉換和 L 轉換都是對射的轉換，定理 11.2 所提到的不變量不受 R 轉換和 L 轉換的影響，還是維持新的梯形結構任何一列，連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$。

得到

定理 11.3

給定 n 層結構，經過 R 轉換後，新的梯形結構任何一列，連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$。
給定 n 層結構，經過 L 轉換後，新的梯形結構任何一列，連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$。

請考慮演算方法 6.1 找尋存在性的方法，及引理 11.1，可得到

定理 11.4

給定 $n \geq 3$ 層的梯形結構，第 2 列任意一個數字可填入的上界為 $n-1$。

【證明】

給定 n 層結構，給定一個頂點，為了要讓該點內接三角形個數達到最大，必須由該點和其他 $n-2$ 個頂點作 $n-2$ 條對角線，則內接三角形為 $n-1$ 個。也就是此 $n+1$ 個自然數的極大值為 $n-1$。

此時，內接 1 個三角形的頂點有 2 個，內接 2 個三角形的頂點有 $(n-2)$ 個，內接 $n-1$ 個三角形的頂點有 1 個。

□

請注意多邊形的頂點內接三角形個數至少要 1 個，筆者會有

$$\frac{3(n-1)}{n+1} \geq 1 \text{，} 3n-3 \geq n+1 \text{，} n \geq 2 \text{。}$$

得到，Frieze Patterns 退化情形，即

事實 11.5

當 $n=1$，筆者可以規定每逢第 $4k+1$ 列填入全部填入 1，

第 $4k-1$ 列全部填入-1，

每個偶數列都填入 0，

就可以得到式子(1)的條件。

當 $n=2$，筆者必須要定義第-1 列及第 3 列全部填入 0，方可以得到式子(1)的規定。

此時，第 1 列全部填入 1，而第 2 列填入三角形的內接三角形頂點的個數。

也就是，三角形每個頂點都是 1 個的時候，得到 2 層的結構。只有一組，週期是 1。

請考慮表 1，在自然數體系，質數只有兩個正因數，得到

定理 11.6

給定n層結構

1. 若$n+1$是質數時，則給定n層的週期均為$n+1$。
2. 若$n+1>4$不是質數時，則給定n層的週期為$n+1$或是$n+1$的因數。

定理 11.7

給定n層結構，若結構出現小週期l_d，則$n+1=l_d \times d$，其中，l_d及$d \in N$。

此時，第 2 列數字讀週期$l_d=\dfrac{n+1}{d}$，這些連續l_d的數字中最小值為 1，

第 2 列任意連續l_d的整數和為$\dfrac{3(n-1)}{d}$。

表 1、3 層至 8 層數學結構的週期

n層	$S(n)$	$n+1$	原始數學結構中第 2 列數字出現比$n+1$小的週期		
3	1	4			
4	1	5，質數			
5	4	6	(1，3)，	(1，3，2)，	(1，2，3)
6	6	7，質數			
7	19	8	(1，2，2，4)， (1，3，3，2)，	(1，2，3，3)， (1，4，2，2)	(1，3，1，4)
8	49	9	(1，2，4)，	(1，4，2)	

再考慮定理 11.2，得到

定理 11.9(非同構組數的上界)

$S(n) \le C_n^{3n-4}$ 。

【證明】

第一部分，直觀觀察， $S(3)=1$ ， $S(4)=1$ ， $S(5)=4$ ， $S(6)=6$ ， $S(7)=19$ 。

第二部分，當 $n \ge 3$ ，第 2 列中任意連續 $n+1$ 個數字和為 $3n-3$ 。

連續 $n+1$ 個自然數和是 $3n-3$ 的組合，則 $n+1$ 個非負整數和為 $3n-3-(n+1)=2n-4$ 。

$S(n) \le C_n^{3n-4}$ 。得証。

□

再考慮將 $\left(G_{1,j}^n G_{2,j}^n, G_{3,j}^n, \ldots G_{n-1,j}^n G_{n,j}^n\right)$ 填入第 j 行。由通則 2.2 及定理 6.4 得知，

$$G_{n-1,j}^n \mid G_{n-2,j}^n + G_{n,j}^n \text{ ，}$$

$$G_{n-1,j}^n \mid (G_{n-2,j}^n + 1)$$

$$G_{n-1,j}^n = G_{n-2,j}^n + 1 \text{ 或 } G_{n-1,j}^n < G_{n-2,j}^n + 1 \text{ ，}$$

即，

n 層梯形結構，將 $\left(G_{1,j}^n, G_{2,j}^n, G_{3,j}^n, \ldots G_{n-1,j}^n G_{n,j}^n\right)$ 填入第 j 行，

若 $G_{n-1,j}^n = G_{n-2,j}^n + 1$ ，則 $S(n-1) = S(n)$ ；

若 $G_{n-1,j}^n < G_{n-2,j}^n + 1$ ，則 $S(n-1) < S(n)$ 。

規定

定義 11.10

$U(n) = S(n) - S(n-1)$ 。

研究題目 1.1 的 n 層結構非同構的組數問題等價於研究 $U(n)$ 問題。

壹拾貳、以 *MinMax* 方法尋找代表數列

當筆者沒有得到 Conway 和 Coxeter 引理時，討論非同構組數，需要克服兩個問題

第一個問題：是否同構?

筆者利用 R 轉換和 L 轉換得到同構判斷準則 10.2。

第二個問題：如何建構 Frieze Patterns?

筆者利用定理 6.2，從生成數列填入自然數。同時，使用電腦生成梯形結構時，可以利用定理 8.2，給定第一行的生成數列填入自然數，若其生成的第二行全部出現自然數，則可構成數學結構。

為了使用窮舉法，必須利用生成數列特性，對於 $G_{i,j}^{n}$ 的數值，有所規範。

先討論「代表數列」。

觀察圖 4，第 1 個生成數列取最大值為 3，第 2 個生成數列取最大值為 5，
第 3 個生成數列取最大值為 3，第 4 個生成數列取最大值為 4，
第 5 個生成數列取最大值為 5，第 6 個生成數列取最大值為 2，
第 7 個生成數列取最大值為 5，第 8 個生成數列取最大值為 4，
取這些最大值{3、5、3、4、5、2、5、4}中的最小值為 2。
此時，最小值為 2 位置所在的生成數列(1、1、1、2、1、1、1)。

即，

圖 4 的代表數列為(1、1、1、2、1、1、1)， 如圖 39，綠色框框。。

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   3   2   1   5   1   2   3   1   3   2   1   5
    2   5   1   4   4   1   5   2   2   5   1   4
      3   2   3   3   3   2   3   3   3   2   3
        1   5   2   2   5   1   4   4   1   5
          2   3   1   3   2   1   5   1   2
            1   1   1   1   1   1   1   1
```

圖 39

觀察，$3 \le n \le 5$，n 層數學結構的代表數列，如附錄三。

建構

演算方法 12.1(*minmax* 方法)

第一步：找出 n 層數學結構全部的非同構梯形結構。

第二步：尋找 n 層第 k 個數學結構第 j 列生成數列最大值，記為為 $e^{n}_{k,j}$ 。

第三步：將 n 層第 k 個數學結構的 $e^{n}_{k,j}$ 數值中選擇最小值，記為 e^{n}_{k} 。

第四步：比較 $G^{n,k}$ 的大小，其步驟如下

將給定 n 層所有的代表數列列出。
依通則 2.2，生成數列的第 1 個數字與第 n 個數列都需要填入 1，不做比較。
先比較代表數列的第 2 個數字大小，由小排到大，
再比較代表數列的第 3 個數字大小，由小排到大，
依序重覆比較代表數列第 i 個數字大小，由小排到大。

給定 n 層第 k 個大小的代表數列，記為 $G^{n,k}$ 。

得到

代表數列 $G^{3,1}$=（1、1、1），e^{3}_{1}=1。
代表數列 $G^{4,1}$=（1、1、1），e^{4}_{1}=1。
代表數列 $G^{5,1}$=（1、1、1、1、1），e^{5}_{1}=1。
代表數列 $G^{5,2}$=(1、1、1、2、1)，e^{5}_{2}=2。
代表數列 $G^{5,3}$=(1、1、2、1、1)，e^{5}_{3}=2。
代表數列 $G^{5,4}$=(1、2、1、1、1)，e^{5}_{4}=2。

考慮 6 層代表數列，

代表數列 $G^{6,1}$ =(1、1、1、1、1、1)，e_1^6=1。
代表數列 $G^{6,2}$ =(1、1、1、1、2、1)，e_2^6=2。
代表數列 $G^{6,3}$ =(1、1、1、2、1、1)，e_3^6=2。
代表數列 $G^{6,4}$ =(1、1、2、1、1、1)，e_4^6=2。
代表數列 $G^{6,5}$ =(1、2、1、1、1、1)，e_5^6=2。
代表數列 $G^{6,6}$ =(1、2、1、1、2、1)，e_6^6=2。 (7)

請注意式子 7，發現：

$G_i^{6,6} = G_{6-i}^{6,6}$，$1 \le i \le 6$ (8)

$G^{6,6}$ =(1、2、1、1、2、1)≅(1、2、5、8、3、1)。 (9)

式子 9，(1、2、5、8、3、1)。由費氏數列交錯填入。

考慮 7 層代表數列，$G^{7,1}$=(1、1、1、1、1、1、1)，e_1^7=1； (10)

$G^{7,2}$=(1、1、1、1、1、2、1)，e_2^7=2；

$G^{7,3}$=(1、1、1、1、2、1、1)，e_3^7=2；

$G^{7,4}$=(1、1、1、1、2、3、1)，e_4^7=3；

$G^{7,5}$=(1、1、1、1、3、2、1)，e_5^7=3；

$G^{7,6}$=(1、1、1、2、1、1、1)，e_6^7=2； (11)

$G^{7,7}$=(1、1、1、2、1、2、1)，e_7^7=2；

$G^{7,8}$=(1、1、2、1、1、1、1)，e_8^7=2；

$G^{7,9}$=(1、1、2、1、2、1、1)，e_9^7=2；

$G^{7,10}$=(1、1、2、1、1、2、1)，e_{10}^7=2；

$G^{7,11}$=(1、2、1、1、1、1、1)，e_{11}^7=2；

$G^{7,12}$=(1、2、1、1、2、1、1)，e_{12}^7=2；

$G^{7,13}$=(1、2、1、2、1、1、1)，e_{13}^7=2；

$G^{7,14}$=(1、2、1、1、1、2、1)，e_{14}^7=2；

$G^{7,15}$=(1、2、1、2、1、2、1)，e_{15}^7=2；

$G^{7,16}$=(1、2、3、1、1、1、1)，e_{16}^7=3；

$G^{7,17}$=(1、2、1、1、2、3、1)，e_{17}^7=3；

$G^{7,18}$=(1、3、2、1、1、1、1)，e_{18}^7=3；

$G^{7,19}$=(1、3、2、1、1、2、1)，e_{19}^7=3。 (12)

請注意

式子 10 就是圖 9 的結構的代表數列。

式子 11 就是圖 4 的結構的代表數列。

式子 12 的結構，編號為第 7 層第 19 個代表數列。

依定理 8.1，定理 8.4、定理 8.6 及判斷準則 10.2，透過轉換，發現代表數列的數值可以和第 2 列的數值發生對射。

得到

定理 12.2

給定 n 層結構，給定第 k 組的結構，其代表數列存在且唯一。

壹拾參、費氏數列

再考慮式子 12，觀察$G^{7,19}$所形成的結構，給筆者幾個訊息

$S(7)=19$ 。 (13)
$G^{7,19}$=(1、3、2、1、1、2、1)≅（1、2、5、13、8、3、1)。 (14)
數列（1、2、5、13、8、3、1）分別由 2、3、5、8、13 交錯排列。 (15)
e_{19}^{7}=3，3 為費氏數列第 4 個數字。 (16)

規定$F(n)$為費氏數列第n個數字，且$F(1)=F(2)=1$，依式子 13、式子 14 及式子 15，

發現

$G^{7,19}$=(1、3、2、1、1、2、1)=（$F(2)$、$F(4)$、$F(3)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(3)$、$F(2)$）

筆者將使用費氏數列填入$G^{7,k}$以建構數學結構，並使用下列已知的 Cassini 恆等式，其證明方式為已知，如附錄五。

定理 13.1

$F(n)\times F(n)=F(n+1)\times F(n-1)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

定理 13.2

$F(n+3)\times F(n)=F(n+2)\times F(n+1)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

定理 13.3

$F(n+4)\times F(n)=F(n+2)\times F(n+2)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

壹拾肆、Fibonacci Freize Patterns

規定

定義 14.1

給定 n 層結構，$\{\, e_k^n$ ；$1 \le k \le S(n) \,\}$ 中的最大值為 $e(n)$ 。

也就是

定理 14.2

$e(n) = e_{S(n)}^n$ 。

為方便討論 $G^{n,k}$ ，規定

定義 14.3

$G^{n,k}$ 第 i 列第 j 行為 $G_{i,j}^{n,k}$ 。

利用定理 8.2，給定第一行的生成數列填入自然數，若其生成的第二行全部出現自然數，則可構成數學結構。

依式子 13、式子 14 及式子 15，考慮以交錯填入費氏數列得到一個數學結構。

即，新填入 $G_{i,j}^{n,k}$ ，如表 2，

當 $n = 4l - 1$，則新填入 $G_{l,j}^{4l-1,k} = F(2l) = e_k^{4l-1}$ 。

當 $n = 4l$ ，　則新填入 $G_{3l,j}^{4l,k} = G_{l,j}^{4l,k} = F(2l) = e_k^{4l}$ 。

當 $n = 4l + 1$，則新填入 $G_{l+1,j}^{4l+1,k} = F(2l+1) = e_k^{4l+1}$ 。

當 $n = 4l + 2$ ，則新填入 $G_{3l+2,j}^{4l+2,k} = G_{l+1,j}^{4l+2,k} = F(2l+1) = e_k^{4l+1}$ 。

表 2、$G_{i,j}^{n,k}$

$4l-1$	$4l$	$4l+1$	$4l+2$	$4l+3$
$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$
$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$
$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$
$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$
		$F(2l)$	$F(2l)$	$F(2l)$
$F(2l)$	$F(2l)$	$F(2l+1)$	$F(2l+1)$	$F(2l+2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$F(2l+1)$
				$\cdots$
$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$
$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$
$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$
$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$
$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$	$F(1)$
$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$	$F(3)$
$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$	$F(5)$
$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$	$F(7)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	$F(2l-1)$	$F(2l-1)$	$F(2l-1)$	$F(2l-1)$
$F(2l-1)$	$F(2l)$	$F(2l)$	$F(2l+1)$	$F(2l+1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$F(2l)$	$F(2l)$
			$\cdots$	$\cdots$
$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$	$F(8)$
$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$	$F(6)$
$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$	$F(4)$
$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$	$F(2)$

由表 2，我們的到一個代表數列由費氏數列交錯填入的數學結構，先說明演算方法如下，再證明該演算方法所構成的結構是存在，最後，證明這個演算方法所構成的結構就是$G^{n,S(n)}$。

演算方法 14.4

$G_{i,j}^{n,k}$ 的建構方法，分成四個部份，同時，規定$G_{1,j}^{n,k}=1=G_{n,j}^{n,k}$，$\forall j\in N$。

第一部份：當$n=4l-1$，$l\in N$。

當$n=3$，$G_{i,j}^{3,S(3)}$=(1、1、1)=($F(2)$、$F(1)$、$F(1)$)。

當$n=4l-1\geq 7$時，設$1\leq i\leq l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2i)$。 (17)

設$l+1\leq i\leq 2l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(2l-i)+1)$。 (18)

設$2l+1\leq i\leq 3l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(i-2l)-1)$。 (19)

設$3l+1\leq i\leq 4l-1$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(4l-i))$。 (20)

第二部份：當$n=4l$，$l\in N$。

當$n=4$，$G_{i,j}^{4,S(4)}$=(1、1、1、1)=($F(2)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(2)$)。

當$n=4l\geq 8$時，設$1\leq i\leq l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2i)$。 (21)

設$l+1\leq i\leq 2l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(2l-i)+1)$。 (22)

設$2l+1\leq i\leq 3l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(i-2l)-1)$。 (23)

設$3l+1\leq i\leq 4l$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(4l-i+1))$。 (24)

第三部份：當 $n=4l+1$，$l\in N$。

當 $n=5$，$G_{i,j}^{5,S(5)}$=(1、2、1、1、1)=($F(2)$ 、 $F(3)$ 、 $F(1)$ 、 $F(1)$ 、 $F(2)$)。

當 $n=4l+1\geq 9$，設 $1\leq i\leq l$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2i)$ 。 (25)

設 $l+1\leq i\leq 2l+1$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(2l-i)+3)$ 。 (26)

設 $2l+2\leq i\leq 3l+1$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(i-2l)-1)$ 。 (27)

設 $3l+2\leq i\leq 4l+1$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(4l-i+2))$ 。 (28)

第四部份：當 $n=4l+2$，$l\in N$。

當 $n=6$，$G_{i,j}^{6,S(6)}$=(1、2、1、1、2、1)=($F(2)$、$F(3)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(3)$、$F(2)$)。

當 $n=4l+2\geq 10$，設 $1\leq i\leq l+1$，$G_{i,j}^{n,k}=F(2i)$ 。 (29)

設 $l+2\leq i\leq 2l+1$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(2l-i)+3)$ 。 (30)

設 $2l+2\leq i\leq 3l+2$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(i-2l)-1)$ 。 (31)

設 $3l+3\leq i\leq 4l+2$ ，$G_{i,j}^{n,k}=F(2(4l-i+3))$ 。 (32)

□

定理 14.5

依演算方法 14.4 填入的 $G^{n,k}$ 可以可以建構一個數學結構。

【證明】

想證明 $G^{n,k}_{i,j+1} \in N$ ，$1 \le i \le n$ 。

依演算方法 14.4，規定 $G^{n,k}_{1,j+1} = G^{n,k}_{n,j+1} = 1 = F(2) = F(1) \in N$ 。

分成四部份討論:利用依演算方法 14.4 建構的 $G^{n,l}$，再利用定理 13.1、定理 13.2 及定理 13.3，

分別證明 $G^{n,k}_{i,j+1}$ 以費氏數列交錯填入。

第一部份：當 $n = 4k - 1$ ，$k \in N$ 。

當 $n = 3$ ，$G^{3,S(3)}_{i,j+1}$=(1、2、1)=($F(1)$ 、 $F(3)$ 、 $F(2)$)。

當 $n = 4k - 1 \ge 7$ ，設 $1 \le i \le k - 1$ ，$G^{n,k}_{i,j+1} = F(2i) \in N$ 。

設 $k \le i \le 2k - 2$ ，$G^{n,k}_{i,j+1} = F(2(2k - i) + 1) \in N$ 。

設 $2k - 1 \le i \le 3k - 1$ ，$G^{n,k}_{i,j+1} = F(2(i - 2k) - 1) \in N$ 。

設 $3k - 1 \le i \le 4k - 1$ ，$G^{n,k}_{i,j+1} = F(2(4k - i)) \in N$ 。

第二部份：當 $n=4k$ ， $k\in N$ 。

當 $n=4$ ， $G_{i,j+1}^{4,S(4)}$=(1、2、3、1)=($F(1)$ 、 $F(3)$ 、 $F(4)$ 、 $F(2)$)。

當 $n=4k\geq 8$ ，設 $1\leq i\leq k-1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2i)\in N$ 。

設 $k\leq i\leq 2k-2$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(2k-i)+1)\in N$ 。

設 $2k-1\leq i\leq 3k-1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(i-2k)-1)\in N$ 。

設 $3k\leq i\leq 4k$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(4k-i+1))\in N$ 。

第三部份：當 $n=4k+1$ ， $k\in N$ 。

當 $n=5$ ， $G_{i,j+1}^{5,S(5)}$=(1、2、5、3、1)=($F(1)$ 、 $F(3)$ 、 $F(5)$ 、 $F(4)$ 、 $F(2)$)。

當 $n=4k+1\geq 9$ ，設 $1\leq i\leq k-1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2i)\in N$ 。

設 $k\leq i\leq 2k-2$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(2k-i)+1)\in N$ 。

設 $2k-1\leq i\leq 3k$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(i-2k)-1)\in N$ 。

設 $3k\leq i\leq 4k+1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(4k-i+2))\in N$ 。

第四部份：當 $n=4k+2$ ， $k\in N$ 。

當 $n=6$ ， $G_{i,j+1}^{6,S(6)}$=(1、1、2、5、3、1)=($F(1)$ 、 $F(1)$ 、 $F(3)$ 、 $F(5)$ 、 $F(4)$ 、 $F(2)$)。

當 $n=4k+2\geq 10$ ，設 $1\leq i\leq k-1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2i)\in N$ 。

設 $k\leq i\leq 2k-1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(2k-i)+1)\in N$ 。

設 $2k\leq i\leq 3k+1$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(i-2k)-1)\in N$ 。

設 $3k+2\leq i\leq 4k+2$ ， $G_{i,j+1}^{n,k}=F(2(4k-i+3))\in N$ 。

所有的 $G_{i,j+1}^{n,k}$ 都是費氏數列交錯排列。而費氏數列均為自然數。

再依定理 8.2，給定第一行的生成數列填入自然數，若其生成的第二行全部出現自然數，則可構成數學結構。得證。

□

觀察n層結構，得到

定理 14.6

演算方法 14.4 所建構的數學結構$G^{n,k}=G^{n,S(n)}$。

【證明】

觀察$3\le n\le 7$，得到n層結構的代表數列

3 層只有 1 組非同構，$G^{3,1}$=（1、1、1）=（$F(2)$、$F(1)$、$F(1)$）。

4 層只有 1 組非同構，$G^{4,1}$=（1、1、1、1）=（$F(2)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(2)$）。

5 層有 4 組非同構， $G^{5,4}$=(1、2、1、1、1）=（$F(2)$、$F(3)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(2)$）。

6 層有 6 組非同構， $G^{5,6}$=(1、2、1、1、2、1）=（$F(2)$、$F(3)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(3)$、$F(2)$）。

7 層有 19 組非同構， $G^{7,19}$=(1、3、2、1、1、2、1）

=（$F(2)$、$F(4)$、$F(3)$、$F(1)$、$F(1)$、$F(3)$、$F(2)$）。

假設$n=4k+l$，均可以讓$G^{n,k}=G^{n,S(n)}$。

當$n=4(k+1)+l$，可以依表 2 的方式填入。

再依照定理 13.1、定理 13.2、定理 13.3 及定理 36，新填入的費氏數列為最大值。

依照數學歸納法，得證。

□

可仿照定理 14.5 的證明過程，再依照定理 13.1、定理 13.2 及定理 13.3，得到

定理 14.7

代表數列$G^{n,S(n)}$所建構的數學結構，均是以費氏數列的形式產生。

由演算方法 14.4，得到依照定理 31、定理 12.2、定理 13.1，可見構一個結構。也就是，

演算方法 14.8

一個以費氏數列交錯填入的生成數列可以形成一個數學結構。

第一步，給定n層結構， 第 1 列數字及第n列數字均填入數字 1。

第二步，當$2\le i\le\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil$，第$i$個數字填入$F(2(i-1))$。

第三步，當$\left\lceil\dfrac{n+1}{2}\right\rceil+1\le i\le n-1$，第$i$個數字填入$F(2(n-i)+1)$。

定義 14.9

依照演算方法 14.8 所建構的生成數列，記為 $MaxG^{n,k}$ 。

比較演算方法 14.4 所構造 $G^{n,S(n)}$ 及演算方法 14.8 所構造的結構 $MaxG^{n,k}$ 。

規定由左而右數行數，越右邊則行數越大。發現

事實 14.10

設 $G^{n,S(n)}$ 位於第 n 層第 $S(n)$ 個結構第 j 行， $MaxG^{n,S(n)}$ 位於第 n 層第 k 個結構第 m 行，則

當 $n=2k-1\geq 3$ 時，一個小周期為 k ， $m=j+\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$ 。

當 $n=2k\geq 4$ 時，　一個周期為 $n+1$ ， $m=j+\left[\dfrac{k}{2}\right]\times(-1)^k$ 。

事實 14.11

$MaxG^{n,S(n)}=MaxG^{n,k}\cong G^{n,S(n)}$ 。

觀察 $3\leq n\leq 7$ 的結構，如附錄六，利用演算方法 14.8，一個以費氏數列交錯填入的生成數列可以形成一個數學結構。

發現

猜想 14.12

給定 n 層數學結構中，任意一個位置，其數值最大為 $F(n)$ 。

得到

定理 14.13

$e(n)=e^n_{S(n)}=F(\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil)$，其中，$F(\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil)$ 為第 $\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$ 個費氏數列，且 $F(1)=F(2)=1$。

【證明】

直觀觀察得到，$e(3)=e(4)=1$，$e(5)=e(6)=2$，$e(7)=e(8)=3$，

規定 $F(1)=F(2)=1$，如表 2，得到

當 $n=4k-1\geq 3$，填 $F(2k)$ 到 $G^{n,S(n)}_{k,j}$，$e^n=e^n_{S(n)}=F(2k)$。

當 $n=4k\geq 4$，　填 $F(2k)$ 到 $G^{n,S(n)}_{3k,j}$，$e^n=e^n_{S(n)}=F(2k)$。

當 $n=4k+1\geq 5$，填 $F(2k+1)$ 到 $G^{n,S(n)}_{k+1,j}$，$e^n=e^n_{S(n)}=F(2k+1)$。

當 $n=4k+2\geq 6$，填 $F(2k+1)$ 到 $G^{n,S(n)}_{3k+1,j}$，$e^n=e^n_{S(n)}=F(2k+1)$。

□

定理 14.14

$e(n)=e(n-2)+e(n-4)$，$\forall n\geq 7$，且 $F(1)=F(2)=1$。

【證明】

當 $n=2k+1\geq 7$，$e(n)=F(\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+1+1}{2}\right\rceil)=F(k+1)$；

$e(n-2)=F(\left\lceil\frac{n+1-2}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+2-2}{2}\right\rceil)=F(k)$；

$e(n-4)=F(\left\lceil\frac{n+1-4}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+2-4}{2}\right\rceil)=F(k-1)$；

此時，$F(k+1)=F(k)+F(k-1)$，即，$e(n)=e(n-2)+e(n-4)$。

當 $n=2k\geq 8$，　$e(n)\ =F(\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil)=F(k)$；

$e(n-2)=F(\left\lceil\frac{n+1-2}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+1-2}{2}\right\rceil)=F(k-1)$；

$e(n-4)=F(\left\lceil\frac{n+1-4}{2}\right\rceil)=F(\left\lceil\frac{2k+1-4}{2}\right\rceil)=F(k-2)$；

此時，$F(k)=F(k-1)+F(k-2)$，即，$e(n)=e(n-2)+e(n-4)$。

□

嘗試不使用 Conway 和 Coxeter 引理，要把所有可能的結構找出來。對於生成數列，其間的數值必須要有所限制。下列的演算方法，提出一個可以遵循的規則。

演算方法 14.15

給定 n 層結構，做電腦的窮舉法填入代表數列，對於 $G_{i,j}^{n,k}$ 的填入方法如下

1. 通則 2.2： $G_{1,j}^{n,k}=1=G_{n,j}^{n,k}$ 。

2. 定理 6.3： gcd（ $G_{i,j}^{n,k}$ ， $G_{i+1,j}^{n,k}$)=1，其中，$2\le i\le n-2$ 。

4. 定理 6.4： $\dfrac{G_{i-1,j}^{n,k}+G_{i+1,j}^{n,k}}{G_{i,j}^{n,k}}\in N$ 。

5. 定理 8.2：給定第一行的生成數列填入自然數，若其生成的第二行全部出現自然數，則可構成數學結構。

6. 判斷準則 10.2：兩個相異的生成數列可以構成兩個數學結構。若這個兩個相異的生成數列經過 R 轉換後，新的數列的數值前後順序相同，則這兩個相異的生成數列所構成的數學結構相同。

7. 定理 14.13：當 $2\le i\le n-1$，則 $1\le G_{i,j}^{n,;k}\le F\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$，其中，$F(\left[\dfrac{n+1}{2}\right])$ 為第 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 個費氏數列。

壹拾伍、$GL^{n,S(n)}$ 圖案

再透過 Conway 和 Coxeter 引理，討論 $GL^{n,S(n)}$ 所建構的圖案。規定

定義 15.1

$G^{n,S(n)}$ 所形成數學結構對應的第 2 列以某一個 1 開始連續 $n+1$ 個數列稱為 $GL^{n,S(n)}$ 。

也就是規定，$GL^{n,S(n)}=G_{2,j}^{n,S(n)}$ ，其中，第 2 列是以某一個 1 開始的連續 $n+1$ 個數字。

$G^{n,S(n)}$ 及 $GL^{n,S(n)}$ Freizer 圖案分成四部分討論：

當 $n=4l-1$ 時的 $G^{n,S(n)}$ 及 $GL^{n,S(n)}$ ，如下

設 $n=4l-1=3$ ，$G^{3,S(3)}=$（1、1、1）， $GL^{3,S(3)}=$(1、2、1、2)，如圖 39。

設 $n=4l-1=7$ ，$G^{7,S(7)}=$(1、3、2、1、1、2、1)，

$GL^{7,S(7)}=$(1、2、3、3、1、2、3、3)，如圖 40。

設 $n=4l-1\geq 11$ ，$G^{n,S(n)}$ 的表現方式如式子 17、式子 18、式子 19 及式子 20。

$GL^{n,S(n)}$ 的表現方式為 2 個小週期，每個小週期是先依序填入 1 及 2，再連續填入 $2l-2$ 個 3。合計 $GL^{n,S(n)}$ 有 2 個 1，2 個 2 及 $4l-4$ 個 3。

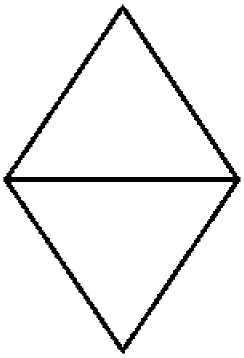


圖 39

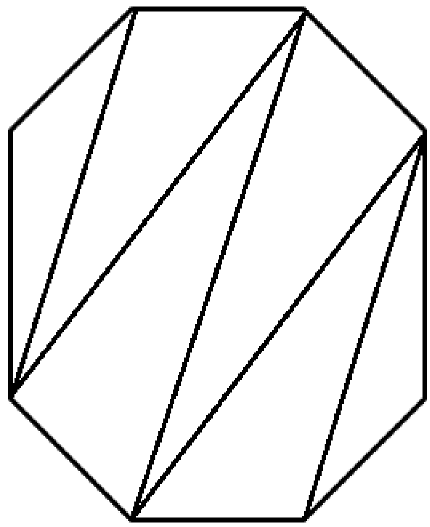


圖 40

當 $n=4l$ 時的 $G^{n,S(n)}$ 及 $GL^{n,S(n)}$，如下

設 $n=4l=4$，$G^{4,S(4)}=$(1、1、1、1)，

$GL^{4,S(4)}=$(1、3、1、2、2)，如圖 41。

設 $n=4l=8$，$G^{8,S(8)}=$(1、3、2、1、1、2、3、1)，

$GL^{8,S(8)}=$(1、3、3、3、1、2、3、3、2)，如圖 42。

設 $n=4l\geq 12$，$G^{n,S(n)}$ 的表現方式如式子 21、式子 22、式子 23 及式子 24。

$GL^{n,S(n)}$ 的表現方式為 2 種方式

(1) 先填 1 個 1，再填 $2l-1$ 個 3。

(2) 先填 1、2，再填 $2l-2$ 個 3，最後再填 2。

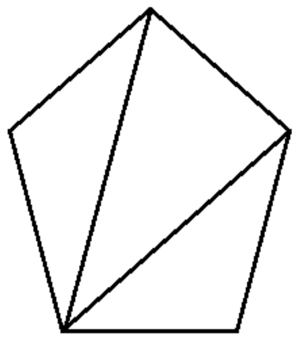


圖 41

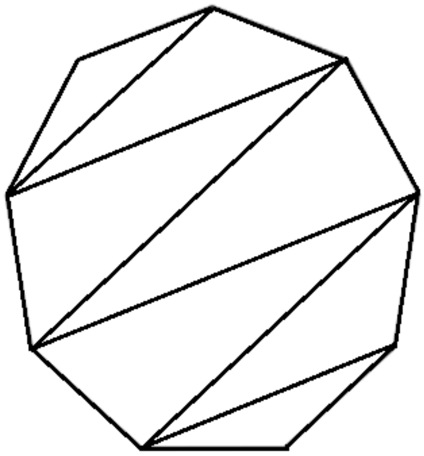


圖 42

當 $n=4l+1$ 時的 $G^{n,S(n)}$ 及 $GL^{n,S(n)}$ ，如下

設 $n=4l+1=5$ ， $G^{5,S(5)}=$(1、2、1、1、1)，

$GL^{5,S(5)}=$(1、3、2、1、3、2)，如圖 43。

設 $n=4l+1=9$ ， $G^{9,S(9)}=$(1、3、5、2、1、1、2、3、1)，

$GL^{9,S(9)}=$(1、3、3、3、2、1、3、3、3、2)，如圖 44。

設 $n=4l+1\geq 13$，$G^{n,\mathrm{S(n)}}$ 的表現方式如式子 25、式子 26、式子 27 及式子 28。

$GL^{n,S(\mathrm{n})}$ 的表現方式為 2 個小週期，每個小週期是先依序填入 1，再連續填入 $2l-1$ 個 3，最後再填入 2。合計 $GL^{n,S(\mathrm{n})}$ 有 2 個 1，2 個 2 及 $4l-2$ 個 3。

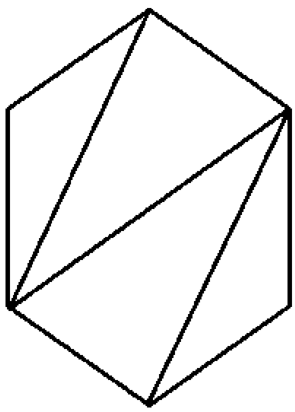


圖 43

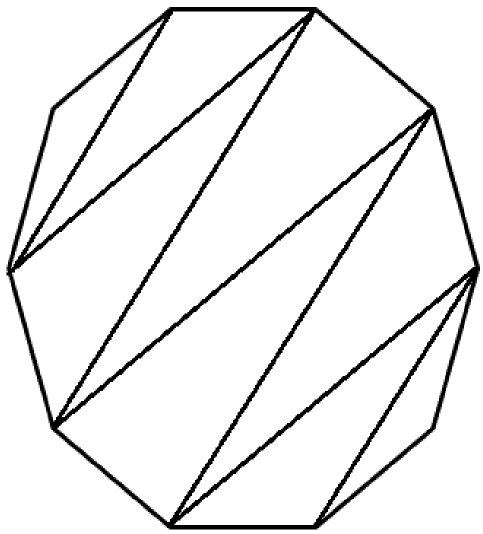


圖 44

當 $n=4l+2$ 時的 $G^{n,S(n)}$ 及 $GL^{n,S(n)}$，如下

設 $n=4l+2=6$，$G^{6,S(6)}=$（1、2、1、1、2、1），

$GL^{6,S(6)}=$（1、3、3、1、2、3、2），如圖 45。

設 $n=4l+2=10$，$G^{10S(10)}=$（1、3、5、2、1、1、2、5、3、1），

$GL^{10,S(10)}=$（1、3、3、3、3、3、1、2、3、3、3、3、3），如圖 46。

設 $n=4l+2\geq 14$，$G^{n,S(n)}$ 的表現方式如式子 29、式子 30、式子 31 及式子 32。

$GL^{n,S(n)}$ 的表現方式為 2 種方式

（1）先填 1 個 1，再填 $2l$ 個 3。

（2）先填 1 個 1，再填 2，再填 $2l-1$ 個 3 最後填入 1 個 2。

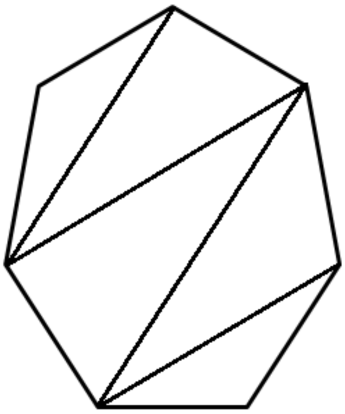


圖 45

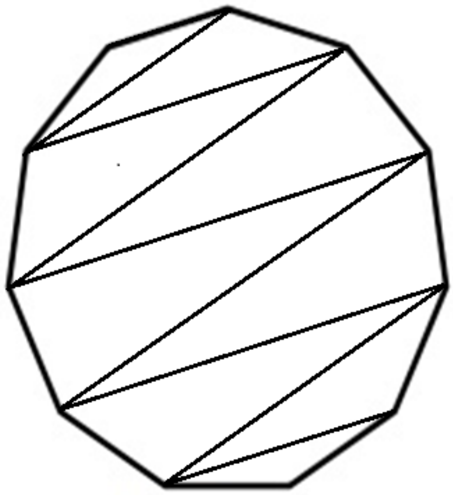


圖 46

得到

演算方法 15.2

對於 $GL^{n,S(n)}$ 所形成的 Freizer 圖案，分成兩種填入方法填入第 2 列：

奇數 $n=2l-1\geq 3$，分成兩部分，這兩部分均相同，小週期為 $\dfrac{n+1}{2}=l$。

每部分的填法，先填 1；2，再填 $l-1$ 個 3。

偶數 $n=2l\geq 4$， 分成兩部分，週期總和為 $n+1=2l+1$。

第一部分，先填入 1，2，再填入 $l-2$ 個 3，最後填入 2。

第二部分，先填入 1，再連續填入 $l-1$ 個 3。

再比較 n 層結構，針對 $G^{n,1}$ 與 $G^{n,S(n)}$ 所構成的結構，得到表 3 的比較。

表 3、$G^{n,1}$ 與 $G^{n,S(n)}$ 的比較

	$G^{n,1}$	$G^{n,S(n)}$
代表數列	由 n 個 1 構成 $G^{n,1}$。	演算方法 14.4，將費氏數列交錯填入代表數列，如表 2 所示，構成 $G^{n,S(n)}$。
第 2 列	依演算方法 6.1，先擺 1，然後擺 2 連續 $n-2$ 次，再放一個 1，最後擺一個 $n-1$，填入第 2 列，$GL^{n,1}$。	如上述的演算方法 15.2，分成兩種填入方法填入第 2 列 $GL^{n,S(n)}$。

壹拾陸、代表數列的衍化

考慮由n層代表數列升階到$n+1$層代表數列的變化情形。

考慮 3 層衍化至 4 層，

$G^{3,S(3)}$=(1、1、1)，$e(4)=1$，

此時，1 填入$G^{3,S(3)}$任何 1 個 1 均相同。

因此，$G^{4,k}$ 只有 1 組，而實際上$G^{4,1}$=(1、1、1、1)= $G^{4,S(4)}$ 。

考慮 4 層衍化至 5 層，

$G^{4,k}$ 只有 1 組，而實際上$G^{4,S(4)}$=(1、1、1、1)。$e(5)=2$，

此時，填入$G^{4,S(4)}$任何 1 個 1 均相同，也就是，

$G^{5,1}$=(1、1、1、1、1)，如附錄圖 7 (33)

再考慮$e(5)=2$，2 可以填入$G^{4,S(4)}$=(1、1、1、1)中間，有 3 處。

因此，$G^{5,2}$=(1、1、1、2、1)，如附錄圖 8。 (34)

$G^{5,3}$=(1、1、2、1、1)，如附錄圖 9。 (35)

$G^{5,4}$=(1、2、1、1、1)，如附錄圖 10。 (36)

5 層結構，總共有 4 組，而$G^{5,4}$=(1、2、1、1、1)= $G^{5,S(5)}$ 。

再考慮 5 層衍化至 6 層，$e(6)=2$，再考慮定理 6.3， 給定生成數列，相鄰兩個數字互質。得到

式子 34 的$G^{5,1}$=(1、1、1、1、1)，可以填入 1 個 1 衍化出

$G^{6,1}$=(1、1、1、1、1、1)，如附錄圖 11。 (37)

式子 34 的 $G^{5,1}$=(1、1、1、1、1)，可以填入 1 個 2 衍化出

$G^{6,2}$=(1、1、1、1、2、1)，如附錄圖 12。 (38)

$G^{6,3}$=(1、1、1、2、1、1)，如附錄圖 13。 (39)

$G^{6,4}$=(1、1、2、1、1、1)，如附錄圖 14。 (40)

$G^{6,5}$=(1、2、1、1、1、1)，如附錄圖 15。 (41)

式子 36，$G^{5,4}$，填入第 2 個 2， $G^{6,6}$=(1、2、1、1、2、1)，如附錄圖 16。 (42)

或式子 34，$G^{5,2}$，填入第 2 個 2，$G^{6,6}$=(1、2、1、1、2、1)，如附錄圖 16。 (43)

依式子 42 及式子 43，$G^{5,4}$ 及 $G^{5,2}$，透過 2 種方式，得到 $G^{6,6}$=(1、2、1、1、2、1)=$G^{6,S(6)}$。

事實上，6 層結構有 6 組。

得到一個方法，在沒有引用 Conway 和 Coxeter 引理，可使代表數列由 n 層衍化至 $n+1$ 層。

演算方法 16.1(代表數列的衍化方法)

第一步：給定 $n \geq 3$ 層，在代表數列 $G_{i,j}^{n,k}$ 與 $G_{i+1,j}^{n,k}$ 之間添加 1 個自然數 l。

其中，$1 \leq i \leq n-1$，$1 \leq l \leq e(n)$。

第二步：檢查填入後新的代表數列，依照

定理 6.3，相鄰兩個數字互質。

定理 6.4，$\dfrac{G_{i-1,j}^{n+1,k} + G_{i+1,j}^{n+1,k}}{G_{i,j}^{n+1,k}} \in N$。

定理 8.2，連續兩個生成數列都是自然數，則這個結構會成立。

也就是新的代表數列所生成後數列必須要是自然數。

判斷準則 10.2 兩個相異的生成數列可以構成兩個數學結構。若這個兩個相異的生成數列經過 R 轉換後，新的數列的數值前後順序相同，則這兩個相異的生成數列所構成的數學結構相同。

此一判斷準則成立，則保證代表數列的唯一性。

依上述方法，可使代表數列由 n 層衍化至 $n+1$ 層。

壹拾柒、不變量

依據引理 11.1(Conway 和 Coxeter 定理)，筆者可以得到
給定n層結構，第 2 列的連續$n+1$個數字和為$3n-3$。
給定n層結構，經過R轉換後，新的梯形結構任何一列，連續$n+1$個數字和為$3n-3$。
給定n層結構，經過L轉換後，新的梯形結構任何一列，連續$n+1$個數字和為$3n-3$。

在本章節，筆者再提一個數量的不變量，如附錄五。
發現當$3 \le n \le 7$，任意連續$n+1$行，計算第 2 列至第$n-1$列，

代表黃色 1 的數量等於代表橘色 2 的數量。

考慮代表數列均為 1 所填入的結構為$G^{n,1}$，就是依照演算方法 6.1 所建構的結構，得到

定理 17.1

$G^{n,1}$的任意連續$n+1$個生成數列，只考慮第 2 列到第$n-1$列數值是 1 的數量和數值是 2 的數量是相同。

【證明】
不失一般性，參考圖 9，得到
$G_{i,j}^{n,1}=1$，$\forall\ i \in\ N$。只考慮第 3 列到第$n-1$列，$G_{i,j}^{n,1}=1$，數值是 1 的數量為$n-2$個。
依 PMA2 型特性，只考慮第 2 列到第$n-1$列，數值是 1 的數也是$n-2$個。
合計數值是 1 的數量是$2(n-2)=2n-4$。
依演算方法 6.1，第 2 列填入$n-2$個 2 且第$n-1$列填入$n-2$個 2。
即，2 的數量為$2(n-2)=2n-4$。
再考慮圖 9，當$3 \le l \le n-1$，只考慮第 2 列到第$n-1$列，數值是l各有$2(n-l)$個。
得到，數值是 1 的數量是$2n-4$。
數值是 2 的數量是$2n-4$。
得證。

□

再考慮 $G^{n,S(n)}$ Freizer 圖案週期為 $n+1$，計算第 2 列至第 $n-1$ 列。

得到

定理 17.2

給定 n 層數學結構中，$G^{n,S(n)}$ 任意連續 $n+1$ 個生成數列，只考慮第 3 列到第 $n-1$ 列數值是 1 的數量和數值是 2 的數量是相同。

【證明】

當奇數 $n=2l-1\geq 3$ 時， $G^{n,S(n)}$ 的小週期為 $\dfrac{n+1}{2}$。如圖 47。

給定一個小週期，屬於 2 的數量比 1 的數量多 1 個的行數有 1 行。
給定一個小週期，屬於 1 的數量比 2 的數量多 1 個的行數有 1 行。
給定一個小週期，屬於 1 的數量比 2 的數量等於 1 個的行數有 $l-1$ 行。

當偶數 $n=2l\geq 4$ 時， $G^{n,S(n)}$ 的週期為 $n+1$。如圖 48。

給定一個週期，屬於 2 的數量比 1 的數量多 1 個的行數有 2 行。
給定一個週期，屬於 1 的數量比 2 的數量多 1 個的行數有 2 行。
給定一個週期，屬於 1 的數量比 2 的數量等於 1 個的行數有 l 行。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	1	2	3	3	3	3	3	3	1	2	3	3	3
8	8	2	1	5	8	8	8	8	8	2	1	5	8	8	8
21	5	1	2	13	21	21	21	21	5	1	2	13	21	21	21
13	2	1	5	34	55	55	55	13	2	1	5	34	55	55	55
5	1	2	13	89	144	144	34	5	1	2	13	89	144	144	34
2	1	5	34	233	377	89	13	2	1	5	34	233	377	89	13
1	2	13	89	610	233	34	5	1	2	13	89	610	233	34	5
1	5	34	233	377	89	13	2	1	5	34	233	377	89	13	2
2	13	89	144	144	34	5	1	2	13	89	144	144	34	5	1
5	34	55	55	55	13	2	1	5	34	55	55	55	13	2	1
13	21	21	21	21	5	1	2	13	21	21	21	21	5	1	2
8	8	8	8	8	2	1	5	8	8	8	8	8	2	1	5
3	3	3	3	3	1	2	3	3	3	3	3	3	1	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 47

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	1	2	3	3	3	3	3	3	2	1	3	3	3	3
8	8	2	1	5	8	8	8	8	8	5	1	2	8	8	8	8
21	5	1	2	13	21	21	21	21	13	2	1	5	21	21	21	21
13	2	1	5	34	55	55	55	34	5	1	2	13	55	55	55	55
5	1	2	13	89	144	144	89	13	2	1	5	34	144	144	144	34
2	1	5	34	233	377	233	34	5	1	2	13	89	377	377	89	13
1	2	13	89	610	610	89	13	2	1	5	34	233	987	233	34	5
1	5	34	233	987	233	34	5	1	2	13	89	610	610	89	13	2
2	13	89	377	377	89	13	2	1	5	34	233	377	233	34	5	1
5	34	144	144	144	34	5	1	2	13	89	144	144	89	13	2	1
13	55	55	55	55	13	2	1	5	34	55	55	55	34	5	1	2
21	21	21	21	21	5	1	2	13	21	21	21	21	13	2	1	5
8	8	8	8	8	2	1	5	8	8	8	8	8	5	1	2	8
3	3	3	3	3	1	2	3	3	3	3	3	3	2	1	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 48

□

猜想 17.3

給定n層數學結構中，任意連續$n+1$個生成數列，只考慮第 3 列到第$n-1$列數值是 1 的數量是$2n-4$，同樣的，數值是 2 的數量也是$2n-4$。

壹拾捌、應用

日常生活，身分證及信用卡都使用檢查碼確定資料是否正確。而在現實的時空，無線傳輸是一種趨勢。

以本研究所討論的結構，特別討論生成數列的特性，可以讓筆者利用不同非同構的生成數列當作檢查碼。

不失一般性， 7 層的數學結構，筆者可以先送$(1,1,2,3,1,2,1)$數列當做資料最前面 7 個數字。再規定$(1,1,2,3,1,2,1)\cong(1,a,b,c,d,e,1)$，且以$(1,a,b,c,d,e,1)$當作最後 7 個數字，當作檢查碼，以確定如圖 49 所示。

本研究所建議的檢查碼措施，依據需要選擇取n層結構的一個生成數列，當作最前面n個數字並以最後n個數字。兩個同構的數列做檢查碼，其間的數字不需要使用n的倍數資料，增加無線傳輸的方便。

同時，筆者可以利用本研究梯形結構生成數列，當作資料傳輸否正確的工具。

```
1 ---------------------------------------- 1
   1                                          a
      2                                          b
         3                                          c
            1                                          d
               2                                          e
                  1 ---------------------------------------- 1
```

圖 49

實作結構。將圖 4 的數字，透過顏色的對應與此結構，得到 Frieze Pattern 的圖案。

如瓷磚的貼上，如圖 50。

如上下均為 1 的淺藍色，夾著各式各樣的藍色，如圖 51。

圖 4 係 7 層結構，其週期為 8，把圖 4 的結構畫成圓形，週而復始如圖 52。

給定 7 層的結構，依照代表數列的順序，可以畫成圓形，如附錄七。

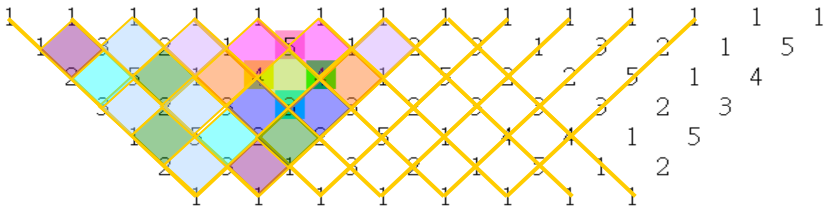


圖 50

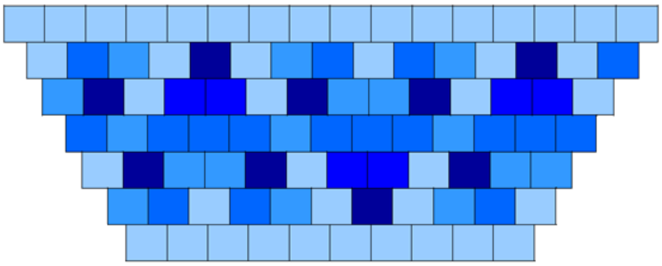


圖 51

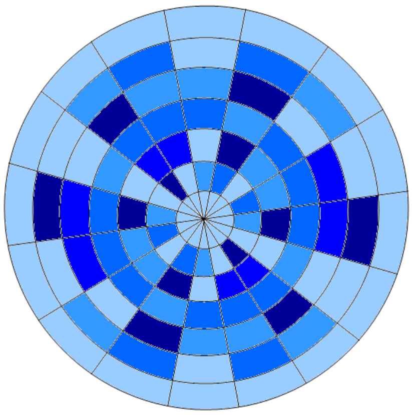


圖 52

壹拾玖、結論

一、存在性： 給定n層結構，至少找到一種鋪滿的方式。

二、研究策略：可從第 2 列或任意連續兩行生成數列研究。

三、倍數問題：藉由結構中各行或各列連續 3 個數之間的倍數關係，與與梯形結構第 2 列的關係，發現「轉換」。

四、互質問題: 在構造好的梯形中，任意斜向的連續二個數字互質。

五、結構分析：以變數填入圖 4 的梯形結構，發現結構的退化關係、對應關係、週期關係、分式多項式結構、PMA2 型。

六、結構生成：第一行填入自然數，若第二行全部出現自然數，則可以構成數學結構。

七、同構判斷：發現R轉換和L轉換，可以當作是否同構的判斷準則。

八、週期問題：給定n層結構，$G_{i,j}^{n}=G_{n+i+1,j}^{n}$，其中，$\forall\ i\in N$，且$1\le j\le n$。

若連續$n+1$個數出現d個循環，則第 2 列任意每隔$\dfrac{n+1}{d}$個整數總和$\dfrac{3(n-1)}{d}$。

九、組數問題：考慮n層結構，本研究透過各行的數字觀察、相鄰數字的互質與倍數關係討論梯形結構的非同構組數問題。由第 2 列連續$n+1$個自然數和的不變量，發現給定n層的非同構組數的上下界。

給定n層的非同構組數為$S(n)$，估算一個不等式，

$$S(n)=\frac{C_{n+1}}{n+3}+\frac{C_{\frac{n+1}{2}}}{2}+\frac{2}{3}\times C_{\frac{n}{3}}\le C_{n}^{3n-4}\ ,$$

十、代表數列：給定n層，某一結構中，將各個生成數列最大值中找出最小值，此最小值所在的生成數列為代表數列。

取n層結構，針對各個代表數列排序，並命名為給定n層第k結構中，該結構的代表數列同時被命名為$G^{n,k}$。

給定n層，以費氏數列交錯填入生成數列，可得到一個由費氏數列所組成的代表數列。且該代表數列是n層結構中，由小到大排列，第$S(n)$個代表數列。

給定n層，第$S(n)$個代表數列最大值是$F(\left[\dfrac{n+1}{2}\right])$。

其中，$F\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$為費氏數列第$\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$個數字，$F(1)=F(2)=1$。

十一、$G^{n,S(n)}$所生成的結構中，最大的數值為$F(n)$。

十二、本研究提出$G^{n,S(n)}$的 Freizer 圖案的演算方法。

十三、不變量： 梯形結構第 2 列中連續$n+1$個數字總和的不變量為$3(n-1)$。

給定$3\le n\le 7$，n層數學結構中，任意連續$n+1$個生成數列，第 2 列至第$n-1$列數值是 1 的數量和數值是 2 的數量相同。

十四、應用： 本研究數學結構的生成數列可以當作資料傳輸的檢查碼的應用。

參考資料

1：2014 年 5 月 14 日，花豹花紋，
bbs.creaders.net/sports/bbsviewer.php?trd_id=913185&language=big5。

2：2014 年 5 月 18 日，欄杆花紋，
rich.maths.org/content/98/11/art1/gallery/gate.gif。

3：2014 年 5 月 20 日，音樂符號，
ucsmp.uchicago.edu/secondary/curriculum/geometry/

4：科教館辦理科展教師研習，數學問題的探索實作。2012 年 8 月 2 日，未出版。

5：2014 年 4 月 20 日，**pma2**；euler.slu.edu/escher/index.php/Frieze_Patterns

6：C.-S. Henry, Coxeter friezes and triangulations of polygons, Amer. Math. Monthly 120 (2013), 553~558.

7：2014 年 6 月 8 日
www.link.cs.cmu.edu/15859-s11/notes/frieze-patterns-lighter-side.pdf

8：2014 年 5 月 19 日，整數數列大全，oeis.org

9：2014 年 5 月 18 日，科教館，science.ntsec.edu.tw。

10：本文作者，貼磁磚的工人，101 學年度新北市中小學科學展覽，2013 年 4 月，未出版。

11：本文作者，數字夾心餅，第 54 屆全國科展，國立科學教育館 2014 年 7 月。

附錄一、圖 4 的 PMA2 型的特性

針對 7 層結構，將數列$(1,a,b,c,d,e,1)$填入第 1 行，如附錄圖 1，得到：

對應關係如附錄事實 1，如圖 8 的反射，。
退化關係如附錄事實 2。
週期關係如附錄事實 3，如圖 8 的平移。
分式多項式結構如附錄事實 4。

1		1		1		1		1		1		1		1
	a		$\frac{b+1}{a}$		$\frac{a+c}{b}$		$\frac{b+d}{c}$		$\frac{c+e}{d}$		$\frac{d+1}{e}$		e	
		b		$\frac{bc+a+c}{ab}$		$\frac{ab+ad+cd}{bc}$		$\frac{bc+be+de}{cd}$		$\frac{cd+c+e}{de}$		d		
			c		$\frac{bcd+ab++ad+cd}{abc}$		$\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bc}$		$\frac{bcd+be+de+bc}{cde}$		c			
				d		$\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}$		$\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}$		b				
					e		$\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}$		a					
						1		1						

附錄圖 1

得到

附錄事實 1；(對應關係)：
a 和 e 互相對應，b 和 d 互相對應。

考慮附錄圖 1，設$e=1$，　　由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,c,d,1)$填入第一行，規定圖十一第 6 列均填入 1，刪除第 7 列，構造 6 層結構。

考慮附錄圖 1，設$d=e=1$，　　由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,c,1)$填入第一行規定圖十一第 5 列均填入 1，刪除第 6 列及第 7 列，可以構造 5 層結構。

考慮附錄圖 1，設$c=d=e=1$，　由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,b,1)$填入第一行規定圖十一第 4 列均填入 1，刪除第 5 列、第 6 列第 7 列，可以構造 4 層結構。

考慮附錄圖 1，設$b=c=d=e=1$，由$(1,a,b,c,d,e,1)$變成以$(1,a,1)$填入第一行，第 3 列均填入 1，刪除第 4 列、第 5 列、第 6 列第 7 列，可以構造 4 層結構。

附錄事實 2（退化關係）

當 $4 \le n \le 7$，數列 $\left(1, G_{2,1}^{n}, G_{3,1}^{n}, G_{4,1}^{n}, \cdots, G_{n-1,1}^{n}, 1\right)$ 填入第 1 行，若可以構成 n 層梯形結構，且 $G_{n-1,1}^{n} = 1$，可以退化成 $n-1$ 層梯形結構。

附錄事實 3（週期關係）

由 $G_{2,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 a、$\frac{b+1}{a}$、$\frac{a+c}{b}$、$\frac{b+d}{c}$、$\frac{c+e}{d}$、$\frac{d+1}{e}$、e、

$\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}$。

由 $G_{3,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 b、$\frac{bc+a+c}{ab}$、$\frac{ab+ad+cd}{bc}$、$\frac{bc+be+de}{cd}$、$\frac{cd+c+e}{de}$、

d、$\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}$、

$\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}$。

由 $G_{4,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 4，依序為 c、$\frac{bcd+ab+ad+cd}{abc}$、$\frac{ab(c+e)+de(a+c)}{bc}$、

$\frac{bcd+be+de+bc}{cde}$。

其中，7 為奇數，則其週期為 $\left[\frac{7+1}{2}\right]=4$。

由 $G_{5,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 d、$\frac{bcde+ab(c+e)+de(a+c)}{abcd}$、

$\frac{abcd+ab(c+e)+de(a+c)}{bcde}$、$b$、$\frac{bc+a+c}{ab}$、

$\frac{ab+ad+cd}{bc}$、$\frac{bc+be+de}{cd}$、$\frac{cd+c+e}{de}$。

其中，$G_{5,j}^{7} = G_{3,j+4}^{7}$，$1 \le j \le 4$。

由 $G_{6,1}^{7}$ 開始，數列的週期為 8，依序為 e、$\frac{bcd(a+e)+ab(c+e)+de(a+c)}{abcde}$、$a$、$\frac{b+1}{a}$、$\frac{a+c}{b}$、

$\frac{b+d}{c}$、$\frac{c+e}{d}$、$\frac{d+1}{e}$。

其中，$G_{6,j}^{7} = G_{2,j+6}^{7}$，$1 \le j \le 6$。

附錄事實 4（分式多項式結構）

圖 8 的分式多項式，分母為變數的相乘，各變數為 1 次式或是零次。且保證所有的分式多項式的值是自然數。

附錄二、非同構組數的直觀觀察

本研究，同構的章節曾經提到不考慮上下翻轉，梯形結構中，

3 層的組數是 1 組；$S(3)=1$，如附錄圖 2。

4 層的組數是 1 組；$S(4)=1$，如附錄圖 3。

5 層的組數是 4 組；$S(5)=4$，如附錄圖 4。

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   2   1   2   1   2   1   2   1   2   1   2   1   2   1
    1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

附錄圖 2，3 層梯形只有唯一一組

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   2   2   1   3   1   2   2   1   3   1   2   2   1   3
    1   3   1   2   2   1   3   1   2   2   1   3   1   2
      1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

附錄圖 3，4 層梯形只有唯一一組

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   2   2   2   1   4   1   2   2   2   1   4   1   2   2
    1   3   3   1   3   3   1   3   3   1   3   3   1   3
      1   4   1   2   2   2   1   4   1   2   2   2   1
        1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1

1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  2   1   3   2   1   3   2   1   3   2   1   3   2   1   3
    1   2   5   1   2   5   1   2   5   1   2   5   1   2
      1   3   2   1   3   2   1   3   2   1   3   2   1
        1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1

1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3
    1   5   2   1   5   2   1   5   2   1   5   2   1   5
      2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2
        1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1

1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   3   1   3   1   3   1   3   1   3   1   3   1   3   1
    2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2
      1   3   1   3   1   3   1   3   1   3   1   3   1
        1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

附錄圖 4、5 層梯形有 4 組

附錄三、給定 3 層、4 層及 5 層結構代表數列

給定 3 層結構，只有 1 組非同構結構。

週期為小週期為 $\frac{3+1}{2}=2$。

生成數列(1、1、1)

≡(1、2、1)

代表數列為附錄圖 5 的黃色網底(1、1、1)。

1	1	1	1
1	2	1	2
1	1	1	1

附錄圖 5

給定 4 層結構，只有 1 組非同構結構。

週期為 4+1=5。

生成數列(1、1、1、1)

≡(1、2、3、1)

≡(1、2、1、1)

≡(1、1、2、1)

≡(1、3、2、1)

代表數列為附錄圖 6 的黃色網底(1、1、1、1)。

1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	3	1
1	3	1	2	2	1
1	1	1	1	1	1

附錄圖 6

給定 5 層結構，有 4 組非同構結構。

第 1 個結構，週期為 5+1=6。

生成數列(1、1、1、1、1)

≅(1、2、3、4、1)

≅(1、2、3、1、1)

≅(1、2、1、2、1)

≅(1、1、3、2、1)

≅(1、4、3、2、1)

1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	4	1
1	3	3	1	3	3	1
1	4	1	2	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1

代表數列 $G^{5,1}$ =（1、1、1、1、1），$e_1^5=1$。

附錄圖 7

第 2 個結構，週期為 $\frac{5+1}{2}=3$。

生成數列(1、1、1、2、1)

≅(1、2、5、3、1)

≅(1、3、2、1、1)

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	2	3	1
1	5	2	1	5	2	1
2	3	1	2	3	1	2
1	1	1	1	1	1	1

代表數列 $G^{5,2}$ =(1、1、1、2、1)，$e_2^5=2$。

附錄圖 8

第 3 個結構，週期為$\frac{5+1}{3}=2$。

生成數列(1、1、2、1、1)

$\cong$(1、3、2、3、1)

代表數列$G^{5,3}$=(1、1、2、1、1)，e_3^5=2。

1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	3	1	3	1
2	2	2	2	2	2	2
1	3	1	3	1	3	1
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 9

第 4 個結構，週期為$\frac{5+1}{2}=3$。

生成數列(1、2、1、1、1)

$\cong$(1、1、2、3、1)

$\cong$(1、3、5、2、1)

代表數列$G^{5,4}$=(1、2、1、1、1)，e_4^5=2。

1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	1	3	2
1	2	5	1	2	5	1
1	3	2	1	3	2	1
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 10

附錄四、由數字 1 與數字 2 構成的生成數列

本研究，代表數列的章節提到考慮圖 4 的代表數列為(1、1、1、2、1、1、1)。
筆者思考相鄰兩個數字，若只能限制數字 1 與數字 2 所構成的生成數列是否存在，得到

附錄定理 5

相鄰兩個數不能同時為 2 的情況下，給定 n 層的生成數列可由數字 1 和數字 2 所形成。

【證明】

分五種情形討論，給定 n 層，存在生成數列可以全部由數字 1 或 2 組成。

情形一：如演算方法 6.1 的構造，筆者可以找到全部是 1 的一個生成數列。

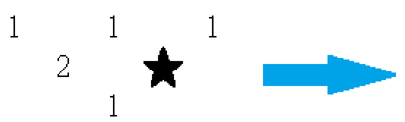
以下四種情形假設 $G_{i,j}^{n}$、$G_{i+1,j}^{n}$ 全部由數字 1 或 2 組成，給定 $G_{i-1,j+1}^{n}$ 條件，求證 $G_{i,j+1}^{n}$ 為自然數。

情形二：給定 $G_{2,j}^{n}=2$，$G_{3,j}^{n}=1$，依通則 2.2，$G_{2,j+1}^{n}=1\in N$，如附錄圖 11。

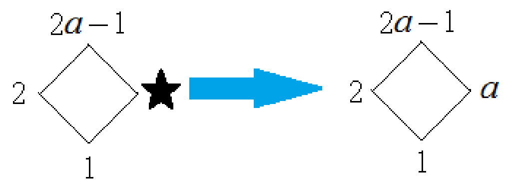
情形三：給定 $G_{n-1,\ j}^{n}=2$，$G_{n-2,\ j+1}^{n}=2a-1\in N$，依通則 2.2，$G_{n-1,j+1}^{n}=a\in N$，如附錄圖 12。

情形四：給定 $G_{i,j}^{n}=1$，$G_{i+1,j}^{n}=2$，$G_{i+2,j}^{n}=1$，$G_{i-1,j+1}^{n}=b\in N$，其中，$2<i<n-1$。依通則 2.2，$G_{i,j+1}^{n}=2b+1\in N$，$G_{i+1,j+1}^{n}=b+1\in N$，如附錄圖 13。

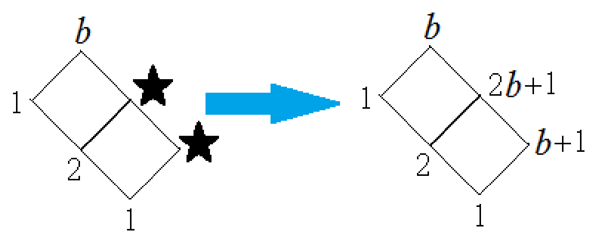
情況五，給定 $G_{i,j}^{n}=2$，$G_{i+1,j}^{n}=1$，$G_{i+2,j}^{n}=2$，$G_{i-1,j+1}^{n}=2c-1\in N$，其中，$2<i<n-1$。依通則 2.2，$G_{i,j+1}^{n}=c\in N$，$G_{i+1,j+1}^{n}=2c+1\in N$，如附錄圖 14。



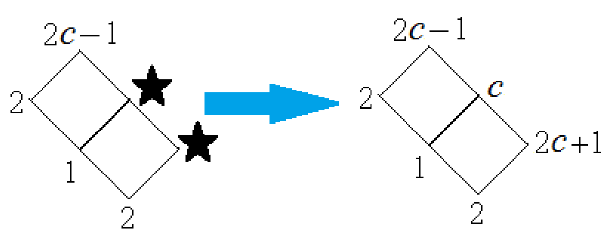
附錄圖 11



附錄圖 12



附錄圖 13



附錄圖 14

□

附錄五、和本研究相關的費氏數列恆等式

本研究使用 3 個和費氏數列相關的定理，其證明為已知，列於本附錄。

定理 13.1

$F(n)\times F(n)=F(n+1)\times F(n-1)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

【證明】

使用數學歸納法

當 $n=1$ 時，　$F(1)\times F(1)-F(2)\times F(0)=1\times 1-1\times 0=1-0=1=(-1)^{2}$。

當 $n=2$ 時，　$F(2)\times F(2)-F(3)\times F(1)=3\times 3-5\times 2=9-10=-1=(-1)^{3}$。

當 $n=k$ 時，　假設 $F(k)\times F(k)=F(k+1)\times F(k-1)+(-1)^{k+1}$，成立。

也就是，$F(k)\times F(k)-F(k+1)\times F(k-1)=(-1)^{k+1}$。

當 $n=k+1$ 時，$F(k+1)\times F(k+1)-F(k+2)\times F(k)$

$=F(k+1)\times F(k+1)-(F(k+1)+F(k))\times F(k)$

$=F(k+1)\times F(k+1)-F(k+1)\times F(k)-F(k)\times F(k)$

$=F(k+1)\times (F(k+1)-F(k))-F(k)\times F(k)$

$=F(k+1)\times F(k-1)-F(k)\times F(k)$

$=-(F(k)\times F(k)-F(k+1)\times F(k-1))$

$=-(-1)^{k+1}$，依據 $n=k$ 的假設。

$=(-1)^{k+1+1}$。

依數學歸納法，得證。

□

定理 13.2

$F(n+3)\times F(n)=F(n+2)\times F(n+1)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

【證明】

當 $n=0$ 時，$F(3)\times F(0)-F(2)\times F(1)=2\times 0-1\times 1=1=-1=(-1)^{1}$，

當 $n=1$ 時，$F(4)\times F(1)-F(3)\times F(2)=3\times 1-2\times 1=1=(-1)^{2}$，

設 $n=k$ 時，$F(k+3)\times F(k)=F(k+2)\times F(k+1)+(-1)^{k+1}$，成立。

也就是，$F(k+3)\times F(k)-F(k+2)\times F(k+1)=(-1)^{k+1}$。 (18)

當 $n=k+1$，$F(k+1+3)\times F(k+1)-F(k+1+2)\times F(k+1+1)$

$$=F(k+4)\times F(k+1)-F(k+3)\times F(k+2)$$
$$=(F(k+3)+F(k+2))\times F(k+1)-F(k+3)\times(F(k+1)+F(k))$$
$$=F(k+3)F(k+1)+F(k+2)F(k+1)-(F(k+3)F(k+1)+F(k+3)F(k))$$
$$=F(k+2)F(k+1)-F(k+3)F(k)$$
$$=-(F(k+3)\times F(k)-F(k+2)\times F(k+1))$$

$=-(-1)^{k+1}$，依據 $n=k$ 的假設。

$=(-1)^{k+1+1}$。

依數學歸納法，得證。

□

定理 13.3

$F(n+4)\times F(n)=F(n+2)\times F(n+2)+(-1)^{n+1}$，其中，$F(0)=0$，$F(1)=F(2)=1$。

【證明】

$$F(n+4)\times F(n)=(F(n+3)+F(n+2))\times(F(n+2)-F(n+1))$$
$$=F(n+3)(F(n+2)-F(n+1))+F(n+2)F(n+2)-F(n+2)F(n+1)$$
$$=F(n+3)(F(n)+F(n+2)F(n+2)-F(n+2)F(n+1)$$
$$=F(n+2)F(n+2)+F(n+3)F(n)-F(n+2)F(n+1)$$

$=F(n+2)F(n+2)+(-1)^{n+1}$，依據定理 13.2。

得證。

□

附錄六、連續$n+1$行中第 2 列至第$n-1$列數值 1 的數量和數值 2 的數量

本部分，針對n層，連續$n+1$行中第 2 列至第$n-1$列數值 1 的數量和數值 2 的數量的比較。

其中數值為 1 的塗上黃色，數值為 2 的塗上橘色。

1	1	1	1
1	2	1	2
1	1	1	1

附錄圖 15、3 層

1	1	1	1	1
1	2	2	1	3
1	3	1	2	2
1	1	1	1	1

附錄圖 16、4 層

1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1	4
1	3	3	1	3	3
1	4	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1

附錄圖 17、5 層第 1 個結構

1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	2	3
1	5	2	1	5	2
2	3	1	2	3	1
1	1	1	1	1	1

附錄圖 18、5 層第 2 個結構

1	1	1	1	1	1
1	3	1	3	1	3
2	2	2	2	2	2
1	3	1	3	1	3
1	1	1	1	1	1

附錄圖 19、5 層第 3 個結構

1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	1	3
1	2	5	1	2	5
1	3	2	1	3	2
1	1	1	1	1	1

附錄圖 20、5 層第 4 個結構

1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	1	5
1	3	3	3	1	4	4
1	4	4	1	3	3	3
1	5	1	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 21、6 層第 1 個結構

1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	1	2	4
1	3	5	2	1	7	3
1	7	3	1	3	5	2
2	4	1	2	2	3	1
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 22、6 層第 2 個結構

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	3	1	4
1	5	2	2	2	3	3
2	3	3	1	5	2	2
1	4	1	2	3	1	3
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 23、6 層第 3 個結構

1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	3	2	1	4
2	2	2	5	1	3	3
1	3	3	2	2	2	5
1	4	1	3	1	3	2
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 24、6 層第 4 個結構

1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	2	1	4
1	2	5	3	1	3	7
1	3	7	1	2	5	3
1	4	2	1	3	2	2
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 25、6 層第 5 個結構

1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	3	1	2	3
1	2	8	2	1	5	5
1	5	5	1	2	8	2
2	3	2	1	3	3	1
1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 26、6 層第 6 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	1	6
1	3	3	3	3	1	5	5
1	4	4	4	1	4	4	4
1	5	5	1	3	3	3	3
1	6	1	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 27、7 層第 1 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	3	1	2	5
1	3	3	5	2	1	9	4
1	4	7	3	1	4	7	3
1	9	4	1	3	3	5	2
2	5	1	2	2	2	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 28、7 層第 2 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	1	3	1	5
1	3	5	2	2	2	4	4
1	7	3	3	1	7	3	3
2	4	4	1	3	5	2	2
1	5	1	2	2	3	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 29、7 層第 3 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	2	1	3	4
1	3	5	5	1	2	11	3
1	7	8	2	1	7	8	2
2	11	3	1	3	5	5	1
3	4	1	2	2	3	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 30、7 層第 4 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	4	1	2	2	4
1	3	7	3	1	3	7	3
1	10	5	2	1	10	5	2
3	7	3	1	3	7	3	1
2	4	1	2	2	4	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 31、7 層第 5 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	3	2	1	5
1	5	2	2	5	1	4	4
2	3	3	3	2	3	3	3
1	4	4	1	5	2	2	5
1	5	1	2	3	1	3	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 32、7 層第 6 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	4	1	2	4
1	5	2	3	3	1	7	3
2	3	5	2	2	3	5	2
1	7	3	1	5	2	3	3
2	4	1	2	3	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 33、7 層第 7 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	3	2	2	1	5
2	2	2	5	3	1	4	4
1	3	3	7	1	3	3	7
1	4	4	2	2	2	5	3
1	5	1	3	1	3	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 34、7 層第 8 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	4	1	3	1	4
2	2	3	3	2	2	3	3
1	5	2	5	1	5	2	5
2	3	3	2	2	3	3	2
1	4	1	3	1	4	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 35、7 層第 9 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	3	3	1	2	4
2	2	2	8	2	1	7	3
1	3	5	5	1	3	5	5
1	7	3	2	2	2	8	2
2	4	1	3	1	3	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 36、7 層第 10 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	2	2	1	5
1	2	5	3	3	1	4	9
1	3	7	4	1	3	7	4
1	4	9	1	2	5	3	3
1	5	2	1	3	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 37、7 層第 11 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	3	1	3	1	4
1	2	8	2	2	2	3	7
1	5	5	3	1	5	5	3
2	3	7	1	2	8	2	2
1	4	2	1	3	3	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 38、7 層第 12 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	4	1	3	2	1	4
1	3	3	2	5	1	3	7
2	2	5	3	2	2	5	3
1	3	7	1	3	3	2	5
1	4	2	1	4	1	3	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 39、7 層第 13 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	3	1	2	4
1	2	5	5	2	1	7	7
1	3	12	3	1	3	12	3
1	7	7	1	2	5	5	2
2	4	2	1	3	2	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 40、7 層第 14 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	4	1	4	1	2	3
1	3	3	3	3	1	5	5
2	2	8	2	2	2	8	2
1	5	5	1	3	3	3	3
2	3	2	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 41、7 層第 15 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	4	2	2	1	4
3	1	3	7	3	1	3	7
1	2	5	10	1	2	5	10
1	3	7	3	1	3	7	3
1	4	2	2	1	4	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 42、7 層第 16 個結構

1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	3	2	1	3	3
1	2	8	5	1	2	8	5
1	5	13	2	1	5	13	2
2	8	5	1	2	8	5	1
3	3	2	1	3	3	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 43、7 層第 17 個結構

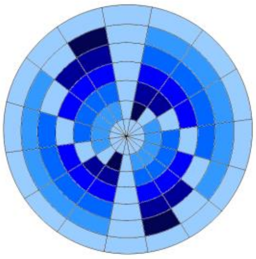
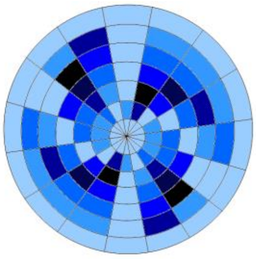
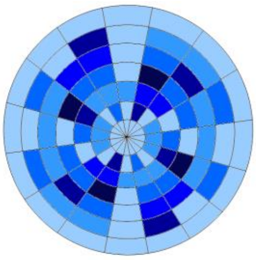
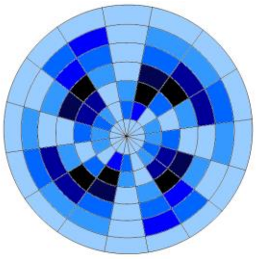
1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	3	2	2	1	4
2	1	5	5	3	1	3	11
1	2	8	7	1	2	8	7
1	3	11	2	1	5	5	3
1	4	3	1	2	3	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 44、7 層第 18 個結構

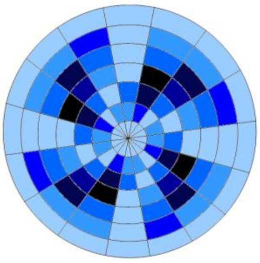
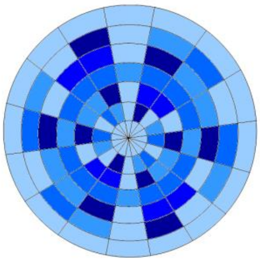
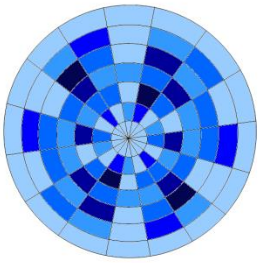
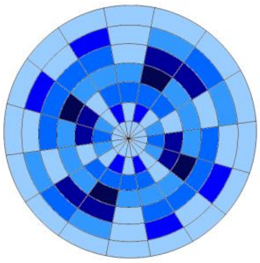
1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	3	3	1	2	3
2	1	5	8	2	1	5	8
1	2	13	5	1	2	13	5
1	5	8	2	1	5	8	2
2	3	3	1	2	3	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 45、7 層第 19 個結構

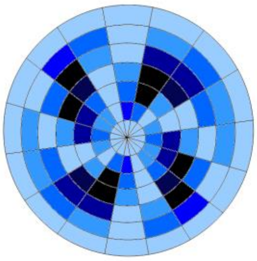
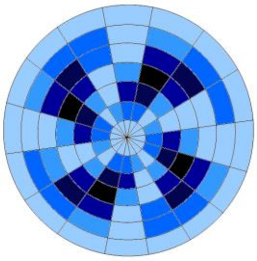
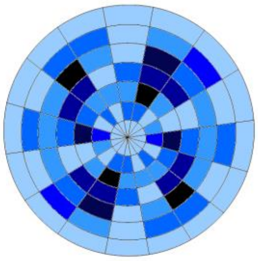
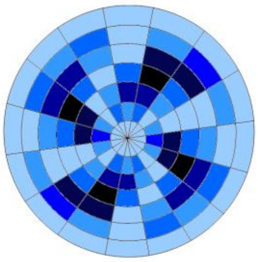
附錄七、給定 7 層，$G^{n,k}$ 生成的圖形

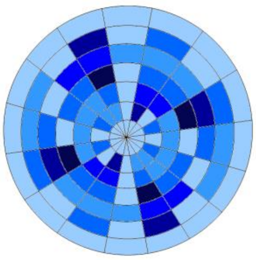
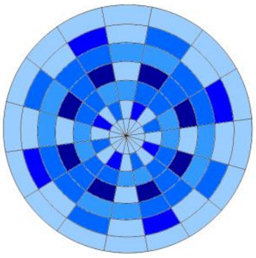
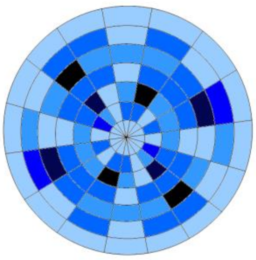
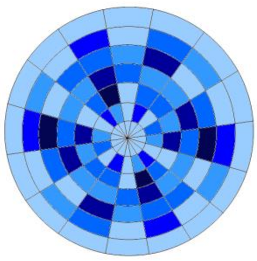
附錄圖 46、$G^{7,1}$ 附錄圖 47、$G^{7,2}$ 附錄圖 48、$G^{7,3}$ 附錄圖 49、$G^{7,4}$

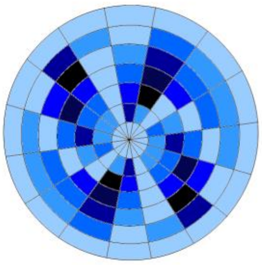
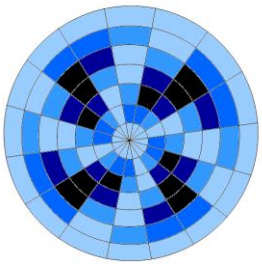
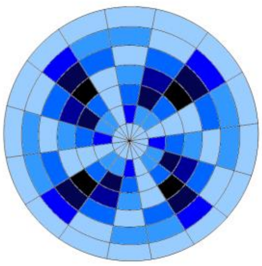
附錄圖 50、$G^{7,5}$ 附錄圖 51、$G^{7,6}$ 附錄圖 52、$G^{7,7}$ 附錄圖 53、$G^{7,8}$

附錄圖 54、$G^{7,9}$ 附錄圖 55、$G^{7,10}$ 附錄圖 56、$G^{7,11}$ 附錄圖 57、$G^{7,12}$

附錄圖 58、$G^{7,13}$ 附錄圖 59、$G^{7,14}$ 附錄圖 60、$G^{7,15}$ 附錄圖 61、$G^{7,16}$

附錄圖 58、$G^{7,17}$ 附錄圖 59、$G^{7,18}$ 附錄圖 60、$G^{7,19}$

附錄八、研究歷程

截至 2015 年 1 月 30 日，查閱科學教育館刊登的台灣國際科學展覽與全國科學展覽作品集，除了作者本身所研究的「數字夾心餅」之外，尚沒有發現 Frieze patterns 的任何數學形式的研究。

本研究所有的歷程，如下表比較。

歷年來 Frieze patterns 研究歷程

作品名稱	貼磁磚的工人	數字夾心餅	當 Frieze 遇上 Fibonacci
參加比賽	101 學年度新北市立中小學科學展覽會	第 54 屆全國科展	2015 年台灣國際科展
發表時間	2013 年 04 月 28 日	2014 年 07 月 21 日	2015 年 02 月 05 日
$a \times c = b \times d + 1$	2012 年 10 月	採納	採納
存在性被證明	2012 年 11 月	採納	採納
生成數列	2012 年 11 月	採納	採納
相鄰整數互質	2012 年 12 月	採納	採納
相鄰三個整數的倍數問題	2012 年 12 月	採納	採納
「擬對稱姓」	2012 年 12 月	改成 PMA2 型	改成 PMA2 型
週期	2013 年 3 月 提出猜想	2014 年 6 月 提出證明	採納
轉換		2014 年 4 月 提出證明	採納
新結構 生成條件		2014 年 4 月 提出證明	採納
是否同購的 判斷條件		2013 年 10 月 提出證明	採納
降階關係		2014 年 2 月 提出證明	採納

接下頁

歷年來Frieze patterns研究歷程

作品名稱	貼磁磚的工人	數字夾心餅	當Frieze遇上Fibonacci
參加比賽	101學年度新北市立中小學科學展覽會	第54屆全國科展	2015年台灣國際科展
發表時間	2013年04月28日	2014年 07月21日	2015年02月05日
代表數列		2014年2月 分析生成數列的最大值特性	2014年09月 取Minmax方法選出代表數列
授課教授提出本研究是Frieze Patterns。		2014年4月 並提出第2列連續$n+1$個整數和$3(n-1)$	採納 （第1種不變量）
給定n層結構的排序	2013年02月 採生成數列的排序，可惜生成數列的排序沒有遵循的原則	沒有採納「貼磁磚的工人」的排序，也沒有在本版本提出結構的排序	2014年09月 以代表數列的數值規定n層結構的排序
Fibonacci frieze			2014年10月 代表數列排序的最後一個結構全部都是由費式數列填入
代表數列的衍化			2014年10月
第2種不變量			2014年10月 第2列至第$n-1$列連續1個週期中1的數量和填入2的數量相同

附錄九、第 2 列至第 $n-1$ 列 1 的數量與 2 的數量相同的猜想

一、$G^{n,1}$

如圖 9，可使用數學歸納法證明。詳細證明請參考，本研究作者於 101 學年度新北市科展「貼磁磚的工人」，第 9 頁至第 11 頁。

二、$G^{n,S(n)}$

如附錄 15、附錄 16、附錄 20、附錄 26、附錄 45，再依據定理 13.1、定理 13.2、定理 13.3，得到第 2 列至第 $n-1$ 列 1 的數量與 2 的數量相同，都是 $2n-4$ 個。

三、代表數列由數值 1 或數值 2 所構成的情形

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	3	1	2	5
1	3	3	5	2	1	9	4
1	4	7	3	1	4	7	3
1	9	4	1	3	3	5	2
2	5	1	2	2	2	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 61、$G^{7,2}$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	1	3	1	5
1	3	5	2	2	2	4	4
1	7	3	3	1	7	3	3
2	4	4	1	3	5	2	2
1	5	1	2	2	3	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 62、$G^{7,3}$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	1	3	2	1	5
1	5	2	2	5	1	4	4
2	3	3	3	2	3	3	3
1	4	4	1	5	2	2	5
1	5	1	2	3	1	3	2
1	1	1	1	1	1	1	1

附錄圖 63、$G^{7,6}$

如附錄圖 61 至附錄圖 63，2 由原本的位置移向箭頭所指的位置。

【評語】010049

本研究是討論 Frieze Patterns 的形式與建構；透過仔細的觀察與適當的應用 Conway 及 Coxeter 定理作深入的探討，獲得的結果值得肯定。

研究報告的表達仍有加強的空間，尤其很多性質都是以定理表達，應可修正；另外，數學形式的報告仍有大幅改進的空間。