2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010047**

參展科別　數學

作品名稱　轉角遇到愛－街道方格中不期而遇的機率

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　鐘培碩、盧韻尹

作者姓名　董庭瑋、黃筱芹

關鍵字　方格圖形、機率、二項分布

作者簡介

我是董庭瑋，目前就讀新竹女中二年級。

喜歡看書、勞作，也十分喜歡尋找各種數學題目磨練自己的思考邏輯，享受解決問題的過程以及找出答案的那種成就感。這次非常榮幸能參加國際科展，也非常高興自己有這個機會可以開開眼界，與各地數學同好交流。最後，謝謝這一路上支持我的師長、父母、朋友們還有許多在這裡沒辦法列出來的貴人。

我是黃筱芹，目前就讀於新竹女中二年級。

喜歡看書、聽音樂，對於解謎、益智遊戲等邏輯思考遊戲很有興趣，平時就喜歡計算比較有挑戰性的數學題目。第一次參加國際科展，很開心我能有這個機會增廣見聞，與來自各界的學者進行交流，準備過程雖然辛苦，但卻很充實。最後感謝一路上支持我們的老師、父母，以及幫助、指導我們的人們。

中文摘要

在$m \times n$的街道方格上，甲從左下到右上，乙從右上到左下，沿格線走捷徑前進，探討兩人相遇機率。

依相遇點型態不同，相遇機率分為$m+n$為偶數與奇數兩種形式。當分岔口選擇路徑之機率均等時，發現偶數時的機率大於奇數的機率，並證明若固定n值，則相遇機率隨m增加有鋸齒狀的下降趨勢。另外，在$m+n$為大於5的定值時，街道方格越接近正方形，相遇機率越大。

當選擇路徑之機率不均等時，$m+n$為偶數時的相遇機率不必然大於奇數的機率，並且當選擇路徑之機率的比值接近m/n時，可得最大的相遇機率。同時分析了相遇機率圖形的上升、下降趨勢與鋸齒狀等多種樣貌的形成條件。

Abstract

On a $m \times n$ grid, one wants to walk from the lower left to the upper right, and the other wants to walk from the top right to the bottom left. At the same speed, they walk along the lines of the grid and choose the shortcuts. What is the probability that they will meet each other?

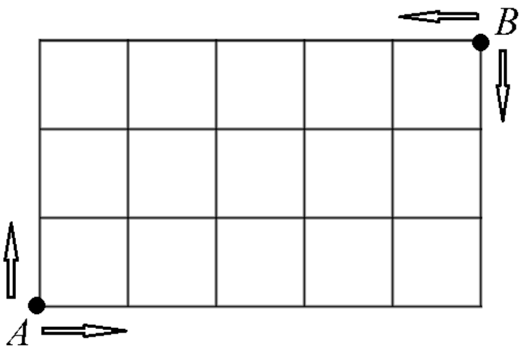
In the case that the probability of choosing the direction on each fork is equal, we found that the encounter probability, when $m+n$ is even, is bigger than that when $(m-1)+n$ is odd. We also found while n is fixed, the probability shows a serrated downward trend with m increasing. Further, when $m+n$ is greater than 5, the encounter probability will be bigger as the grid is more similar to a square grid.

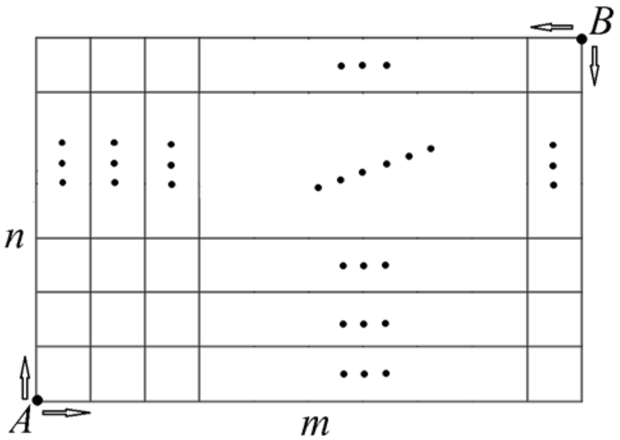
In the case that the probability of choosing the direction on each fork is not equal, the encounter probability, when $m+n$ is even, isn't always bigger than that when $(m-1)+n$ is odd. While the ratio of the probabilities of choosing directions approaches m/n, we got the maximum encounter probability. Further, we analyze the conditions for upward trend, downward trend and serrated sharp of the probability.

壹、 研究動機

在高中數學第二冊第三章機率的教材中，曾碰到這樣的題目：「有一個5×3的街道方格如下圖左，每一小格皆為正方形，甲欲從A點走到B點，乙欲從B點走到A點，兩人同時出發，以相同速率沿方格線**『走捷徑』**前進。假設在每一分岔路口時，**選擇前進方向之機率均等**，**求兩人相遇的機率**為何？」

我們想要由此推廣，探討 在$m\times n$的街道方格中(如下圖右)，甲、乙兩人 的相遇機率為何？





貳、 研究目的

一、 探求在$m\times n$的街道方格中，甲、乙兩人相遇的機率。
二、 改變在分岔路口時選擇前進方向的機率，探求兩人相遇的機率。
三、 相遇機率的性質探討。

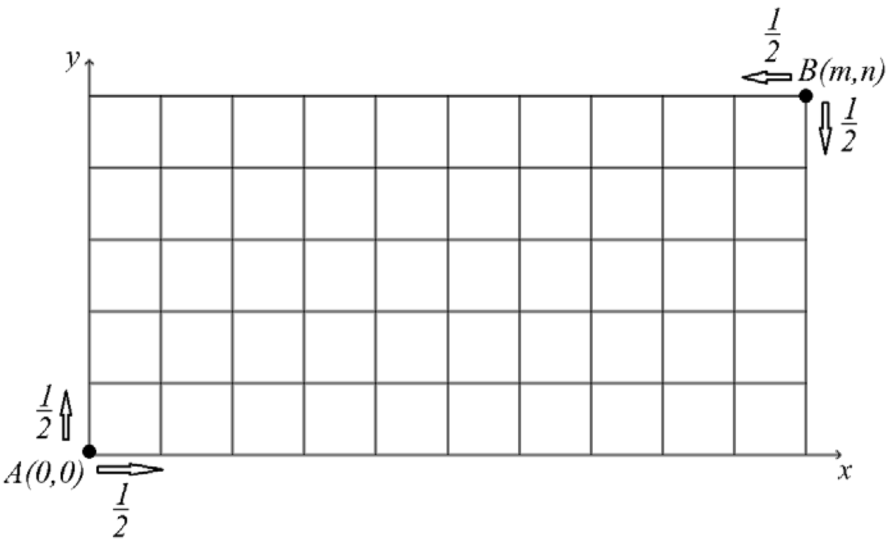
參、 研究設備與器材

紙、筆、電腦、Geogebra、Matlab

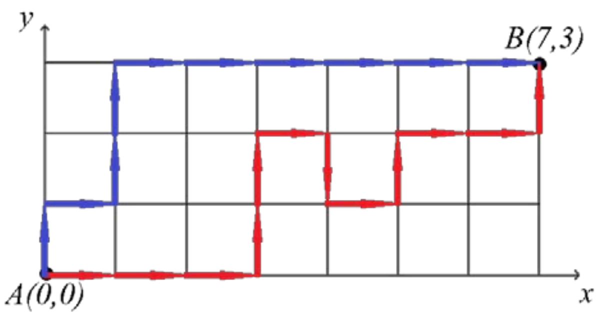
肆、 研究過程與方法

一、探求在 $m \times n$ 的街道方格中，甲、乙兩人相遇的機率

為方便計算，我們設 $m \times n$ 街道方格的邊長為1，並將之放置在坐標平面上，令 A 點為原點，B 點坐標為 (m,n)（如下圖）。假設甲欲從 A 點走到 B 點，乙欲從 B 點走到 A 點，兩人同時出發，以相同速率沿方格線「**走捷徑**」前進，於每個分岔路口，選擇前進方向的機率相等，**定義兩人相遇的機率為** $P_{m,n}$ 。

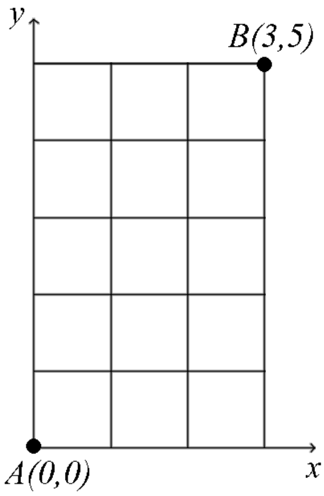


我們先以 7×3 街道方格說明題意。

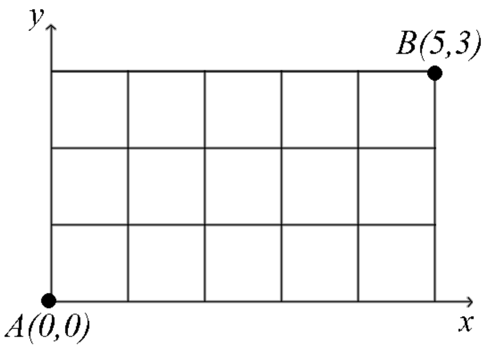


甲欲沿方格線從 $A(0,0)$ 到 $B(7,3)$ ，「走捷徑」的意思是指以最短路徑方式完成旅程，故甲將只會向上或向右前進，如上圖中的藍色路徑即為捷徑走法之一，紅色路徑則不是捷徑走法。另外請注意雖然在分岔路口甲選擇向上或向右的機率均為 $\frac{1}{2}$，但當走到街道方格的上緣時(即 y 坐標為3的格子點)，接下來就只能向右而不能再向上；又或者走到街道方格的右緣時(即 x 坐標為 7 的格子點)，接下來就只能向上而不能再向右。同理，乙欲以「走捷徑」的方式從 $B(7,3)$ 到 $A(0,0)$ ，亦有類似的情況。這個特性，將使得之後在兩人相遇機率的計算上增加一些複雜度。

藉由**對稱性**，我們發現$P_{n,m}$與$P_{m,n}$兩者相等(如下圖的例子)。故在不失一般性之下，我們**僅需討論$m \ge n$的情形**。爾後在本文中，如未特別註明，對於符號m,n，均**設定為$m \ge n$**。

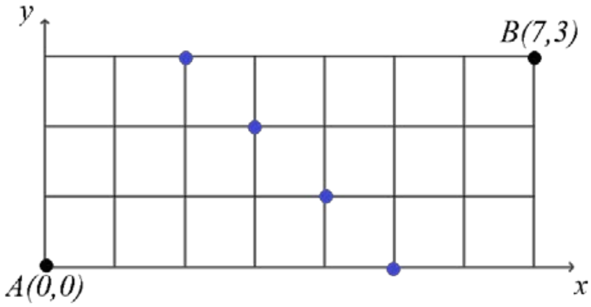


相遇機率$P_{3,5}$

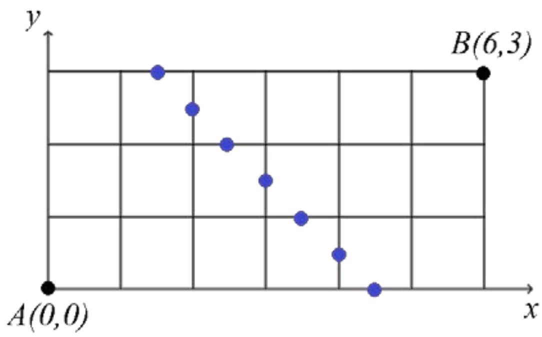


相遇機率$P_{5,3}$

如果兩人會相遇，因為甲、乙行進速率相同，可推論出當$m+n$為偶數時，相遇點必落在格子點上(如下圖左)，而當$m+n$為奇數時，相遇點則落在方格線上(如下圖右)。以下我們將先計算$m+n$為偶數時的相遇機率，再討論$m+n$為奇數時的相遇機率。



（$m+n=10$的情形，藍點為相遇點）

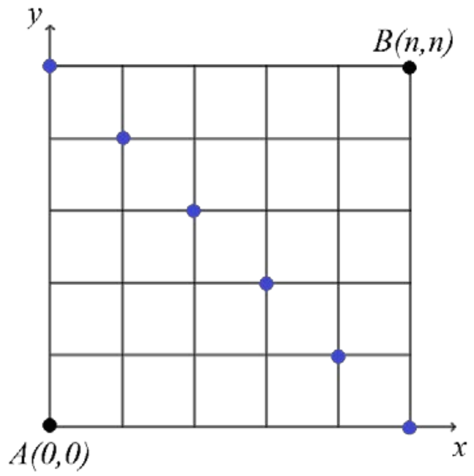


（$m+n=9$的情形，藍點為相遇點）

(一) $m+n$ 為偶數的情形

1. $m=n$ 的情形

我們從一個特例出發，當 $m=n$ 時，街道方格為 $n\times n$ 的正方形，此時可能的相遇點在右下至左上的對角線格子點上(如下圖)，我們將計算的結果寫成**定理 1.1**。



定理 1.1

當 $m=n$ 時，兩人相遇機率為 $P_{n,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$。

【證明】

因甲、乙兩人速率相同，若兩人會相遇，則必在走 n 步後相遇，此時可能的相遇點坐標為 $(n-i,i)$，其中 $i=0,1,2,\ldots,n$。甲由點 $A(0,0)$ 到點 $(n-i,i)$ 的機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\binom{n}{i}$；

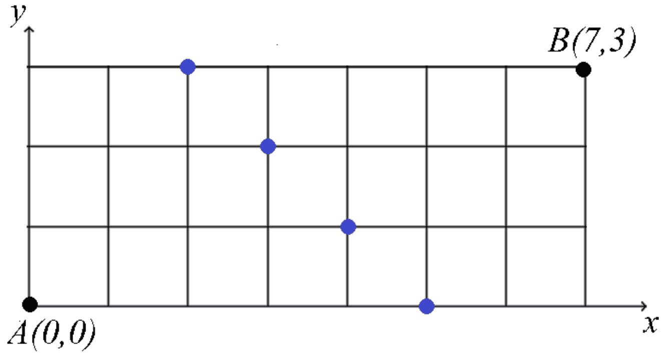
乙由點 $B(n,n)$ 到點 $(n-i,i)$ 的機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\binom{n}{n-i}$，故兩人恰在點 $(n-i,i)$ 相遇的機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\binom{n}{i}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\binom{n}{n-i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i},$$

因此，$P_{n,n}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$。 **Q.E.D.**

2. $m>n$ 的情形

對於一般 $m+n$ 為偶數且 $m>n$ 的情形，我們想藉由 7×3 的街道方格為例(如下圖)，說明相遇機率 $P_{m,n}$ 的計算方法。



若兩人會相遇，則必在 5 步後相遇，此時可能的相遇點為 $(5,0)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$ 。

甲由 $A\,(0,0)$ 到 $(5,0)$ 、$(4,1)$ 、$(3,2)$ 的機率分別為 $\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{0}$ 、$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{1}$ 、$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{2}$ ，

到點 $(2,3)$ 的機率為 $1-\sum_{i=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}=\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}$ ；

乙由 $B\,(7,3)$ 到 $(2,3)$ 、$(3,2)$ 、$(4,1)$ 的機率分別為 $\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{0}$ 、$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{1}$ 、$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{2}$ ，

到點 $(5,0)$ 的機率為 $1-\sum_{i=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}=\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}$ 。

$$P_{7,3}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{0}\times\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}}_{\text{在 }(5,0)\text{ 相遇}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{2}}_{\text{在 }(4,1)\text{ 相遇}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{1}}_{\text{在 }(3,2)\text{ 相遇}}+\underbrace{\sum_{i=3}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{i}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{5}{0}}_{\text{在 }(2,3)\text{ 相遇}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\sum_{i=4}^{5}\binom{5}{i}+\binom{5}{0}\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{2}\binom{5}{1}+\binom{5}{3}\binom{5}{0}+\sum_{i=4}^{5}\binom{5}{i}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\binom{10}{3}+2\sum_{i=4}^{5}\binom{5}{i}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\binom{10}{3}+2\sum_{i=0}^{1}\binom{5}{i}\right)\text{ 。}$$

對於一般 $m+n$ 為偶數且 $m>n$ 的情形，我們推導出 $P_{m,n}$ 的公式，寫成**定理 1.2**。

定理 1.2

當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數時，令 $m+n=2k$，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right)。$$

【證明】

若兩人會相遇，則必在 $\frac{m+n}{2}=k$ 步後相遇，此時可能的相遇點坐標為 $(k-i\,,i)$，其中 $i=0,1,2,3,\ldots,n$。

甲由 A 點到點 $(k-i\,,i)$ 的機率分二種：

① 當 $i=0,1,2,3,\ldots,n-1$ 時，機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{i}$；

② 當 $i=n$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{\ell}$。

乙由 B 點到點 $(k-i\,,i)$ 的機率分二種：

① 當 $i=1,2,3,\ldots,n$ 時，機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{n-i}$；

② 當 $i=0$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{\ell}$。

因此，

$$P_{m,n}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{0}\times\sum_{\ell=n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{\ell}}_{\text{在 }(k,0)\text{ 相遇}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{i}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{n-i}}_{\text{在 }(k-i\,,i)\text{ 相遇}}+\underbrace{\sum_{\ell=n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{\ell}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\binom{k}{0}}_{\text{在 }(k-n,n)\text{ 相遇}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{\ell=n+1}^{k}\binom{k}{\ell}+\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\binom{k}{n-i}+\sum_{\ell=n+1}^{k}\binom{k}{\ell}\right)$$

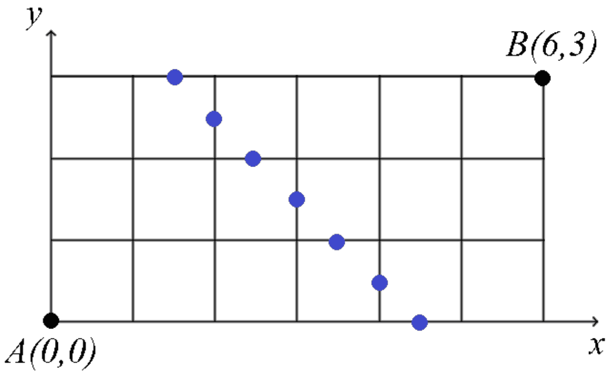
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{\ell=n+1}^{k}\binom{k}{\ell}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right)。$$

Q.E.D.

(二) $m+n$為奇數的情形

此時兩人可能的相遇點將落在方格線上，情況較為複雜。我們先藉由6×3的街道方格為例(如下圖)，說明相遇機率$P_{m,n}$的計算方法。



此時可能的相遇點為直線$x+y=\frac{9}{2}$與方格線的交點，即$(\frac{9}{2},0),(\frac{8}{2},\frac{1}{2}),(\frac{7}{2},\frac{2}{2}),\ldots,(\frac{3}{2},\frac{6}{2})$共 7 個點，可表達成$(\frac{9-i}{2},\frac{i}{2})$，其中$i=0,1,2,\ldots,6$。

甲由A點到點$(\frac{9-i}{2},\frac{i}{2})$的機率分二種：

① 當$i=0,1,2,3,4,5$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{\left[\frac{i}{2}\right]}$，其中$[\ ]$為高斯符號；

② 當$i=6$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)$。

乙由B點到點$(\frac{9-i}{2},\frac{i}{2})$的機率亦分二種：

① 當$i=1,2,3,4,5,6$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{3-\left[\frac{i+1}{2}\right]}$，其中$[\ ]$為高斯符號；

② 當$i=0$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)$。

因此，兩人相遇在點$(\frac{9-i}{2},\frac{i}{2})$的機率可分二類：

（1）當i為奇數時，令$i=2j-1$，$j=1,2,3$，機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{j-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{3-j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{4}{j-1}\binom{4}{3-j}\text{。}$$

（2）當i為偶數時，令$i=2j$，$j=0,1,2,3$，

① 當$j=1,2$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{j}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{3-j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{4}{j}\binom{4}{3-j}$；

② 當$j=0,3$時，機率為$\left(\frac{1}{2}\right)^5\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times2\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)$。

加總在各點的相遇機率，可計算$P_{m,n}$如下：

$$P_{6,3}=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{4}{j-1}\binom{4}{3-j}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{4}{j}\binom{4}{3-j}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times2\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(\binom{8}{2}+\sum_{j=0}^{3}\binom{4}{j}\binom{4}{3-j}-2\binom{4}{3}+4\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+4\left(\binom{4}{1}+\binom{4}{0}\right)-2\binom{4}{1}\right)\text{，}$$

其中 $4\left(\binom{4}{1}+\binom{4}{0}\right)-2\binom{4}{1}=2\left(2\binom{4}{0}+\binom{4}{1}\right)=2\left(\binom{4}{0}+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}\right)=2\left(\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\right)$，

故 $P_{6,3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+2\left(\binom{5}{0}+\binom{5}{1}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(\binom{9}{3}+2\sum_{i=0}^{1}\binom{5}{i}\right)$。

對於一般$m+n$為奇數且$m>n$的情形，我們推導出$P_{m,n}$的公式，寫成**定理 1.3**。

定理 1.3

當 $m>n$ 且 $m+n$ 為奇數時，令 $m+n=2h-1$，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\left(\binom{2h-1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right)。$$

【證明】

此時可能的相遇點為直線 $x+y=\dfrac{m+n}{2}$ 與方格線的交點，即點 $(\dfrac{m+n-i}{2},\dfrac{i}{2})=(h-\dfrac{1+i}{2},\dfrac{i}{2})$，其中 $i=0,1,2,\ldots,2n$。

甲由 A 點到點 $(h-\dfrac{1+i}{2},\dfrac{i}{2})$ 的機率分二種：

① 當 $i=0,1,2,3,\ldots,2n-1$ 時，機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{h}\dbinom{h-1}{\left[\frac{i}{2}\right]}$，其中[ ]為高斯符號；

② 當 $i=2n$ 時，機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{h-1}\displaystyle\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}$。

乙由 B 點到點 $(h-\dfrac{1+i}{2},\dfrac{i}{2})$ 的機率亦分二種：

① 當 $i=1,2,3,\ldots,2n$ 時，機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{h}\dbinom{h-1}{n-\left[\frac{i+1}{2}\right]}$，其中[ ]為高斯符號；

② 當 $i=0$ 時，機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{h-1}\displaystyle\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}$。

因此，兩人相遇在點 $(h-\dfrac{1+i}{2},\dfrac{i}{2})$ 的機率可分二類：

(1) 當 i 為奇數時，令 $i=2j-1$， $j=1,2,\ldots,n$ ，機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{h}\binom{h-1}{j-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{h}\binom{h-1}{n-j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\binom{h-1}{j-1}\binom{h-1}{n-j}。$$

（2） 當 i 為偶數時，令 $i=2j$ ， $j=0,1,2,...,n$ ，

① 當 $j=1,2,...,n-1$ 時，機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{h}\binom{h-1}{j}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{h}\binom{h-1}{n-j}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}\ ;$$

② 當 $j=0,n$ 時，機率為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{h}\binom{h-1}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times 2\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}\text{。}$$

加總在各點的相遇機率，可計算 $P_{m,n}$ 如下：

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{h-1}{j-1}\binom{h-1}{n-j}+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}+4\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times\left(\binom{2h-2}{n-1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}-2\binom{h-1}{n}+4\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times\left(\binom{2h-2}{n-1}+\binom{2h-2}{n}+2\left(2\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}-\binom{h-1}{n}\right)\right)\text{，}$$

其中 $2\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}-\binom{h-1}{n}=2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h-1}{i}-\binom{h-1}{h-n-1}=2\sum_{i=0}^{h-n-2}\binom{h-1}{i}+\binom{h-1}{h-n-1}$

$$=\binom{h-1}{0}+\sum_{i=1}^{h-n-1}\left(\binom{h-1}{i}+\binom{h-1}{i-1}\right)=\binom{h}{0}+\sum_{i=1}^{h-n-1}\binom{h}{i}=\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\text{，}$$

代回上式，可得：

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times\left(\binom{2h-2}{n-1}+\binom{2h-2}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\times\left(\binom{2h-1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right)\text{。}$$

Q.E.D.

(三) $m+n$ 為偶數時與奇數時，相遇機率公式比較

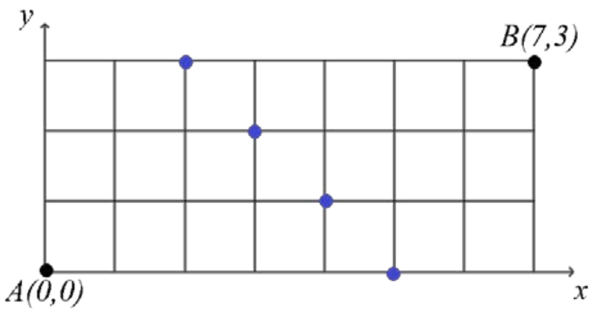
在此我們回顧前文的兩個例子，以比較**定理 1.2**($m+n$ 為偶數)與**定理 1.3**($m+n$ 為奇數)公式的相似處。先從以下的實例說明：

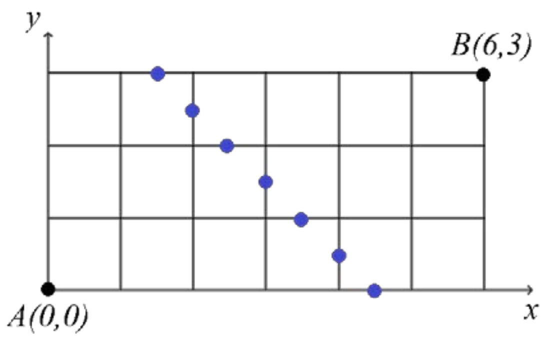
當街道方格為 7×3 時，可能相遇點為格子點，共有 4 個(如下圖左)，相遇機率為

$$P_{7,3}=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{3}+2\sum_{i=0}^{1}\binom{5}{i}\right)。$$

當街道方格為 6×3 時，可能相遇點在方格線上，共有 7 個(如下圖右)，相遇機率為

$$P_{6,3}=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{9}{3}+2\sum_{i=0}^{1}\binom{5}{i}\right)。$$





兩者的相遇情形有本質上的不同，但相遇機率卻有極為類似的結構：具有相同的分母 2^{10}，分子包含二部份，其中的 $2\sum_{i=0}^{1}\binom{5}{i}$ 項亦相同，只差別在 $\binom{10}{3}$ 和 $\binom{9}{3}$ 的不同。而且 $\binom{10}{3}-\binom{9}{3}=\binom{9}{2}>0$，這表示 $P_{7,3}>P_{6,3}$。

一般而言，當$m>n$且$m+n$為偶數時，$(m-1)+n$即為奇數，令$m+n=2k$，由**定理 1.2** 和**定理 1.3** 知

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right);$$

$$P_{m-1,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k-1}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right),$$

兩者具有相似的結構，只有$\binom{2k}{n}$和$\binom{2k-1}{n}$的差別。且由

$$\binom{2k}{n}-\binom{2k-1}{n}=\binom{2k-1}{n-1}>0,$$

得知$P_{m,n}>P_{m-1,n}$。我們把結果寫成**定理 1.4**。

定理 1.4

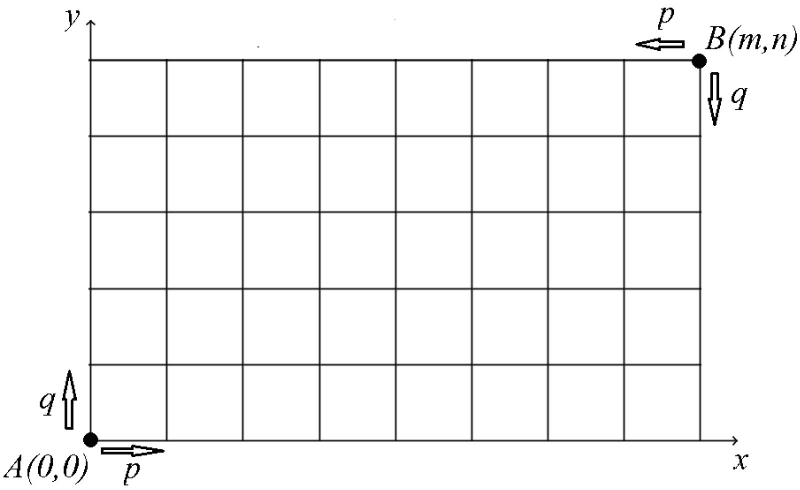
當$m>n$且$m+n$為偶數時，$(m-1)+n$為奇數，令$m+n=2k$，則$P_{m,n}$與$P_{m-1,n}$的關係為

$$P_{m,n}-P_{m-1,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k-1}{n-1}>0。$$

因此，**$m+n$為偶數時的相遇機率大於$(m-1)+n$為奇數時的相遇機率**。關於此點，我們將在第陸節討論的第二小節中繼續深究，進而發現$P_{m,n}$**隨著m增加而呈現一減一增鋸齒狀的下降趨勢！**

二、新的題目情境(於分岔路口，選擇前進方向的機率不一定均等)

如下圖，設$m \times n$街道方格的邊長為 1，並將之放置在坐標平面上，令A點為原點，B點坐標為(m,n)。假設甲欲從A點走到B點，乙欲從B點走到A點，兩人同時出發，以相同速率沿方格線「走捷徑」前進。於每個分岔路口，**甲選擇向右前進的機率為p，向上前進的機率為$q=1-p$；乙選擇向左前進的機率為p，向下前進的機率為$q=1-p$。定義兩人相遇的機率為$P_{m,n}(r)$**，其中$r=\dfrac{p}{q}$。



顯然，當$r=1$時，即$p=q=\dfrac{1}{2}$，即為前一小節的原題情境，故$P_{m,n}=P_{m,n}(1)$。

仿照前一小節的發展模式，於本小節中我們先推導完成三個定理，描述在不同情況的相遇機率$P_{m,n}(r)$公式，分別是：**定理 2.1**(當$m=n$時)、**定理 2.2**(當$m>n$且$m+n$為偶數時)、與**定理 2.3**(當$m>n$且$m+n$為奇數時)，最後在**定理 2.4** 比較它們的大小關係。

定理 2.1

當 $m=n$ 時，兩人相遇機率為

$$P_{n,n}(r)=\frac{r^n}{(1+r)^{2n}}\binom{2n}{n}\text{，}$$

且 $P_{n,n}(r)$ 在 $r=1$ 時有最大值。

【證明】

此時可能的相遇點坐標為 $(n-i,i)$，其中 $i=0,1,2,\ldots,n$。甲由 A 點到點 $(n-i,i)$ 的機率為 $\binom{n}{i}p^{n-i}q^{i}$；乙由 B 點到點 $(n-i,i)$ 的機率為 $\binom{n}{n-i}p^{i}q^{n-i}$，因此，

$$P_{n,n}(r)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^{n-i}q^{i}\binom{n}{n-i}p^{i}q^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}p^{n}q^{n}=\binom{2n}{n}p^{n}q^{n}\text{。}$$

因 $r=\frac{p}{q}$ 且 $p+q=1$，可推得 $p=\frac{r}{1+r}$，$q=\frac{1}{1+r}$ 代入上式，得 $P_{n,n}(r)=\binom{2n}{n}\frac{r^n}{(1+r)^{2n}}$。

此外，由算幾不等式發現：

$$P_{n,n}(r)=\binom{2n}{n}p^{n}q^{n}=\binom{2n}{n}(\sqrt{pq})^{2n}\le\binom{2n}{n}(\frac{p+q}{2})^{2n}=\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}=P_{n,n}\text{，}$$

這表示 $P_{n,n}(r)$ 在 $r=1$ 時有最大值 $P_{n,n}=(\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}$，此時 $p=q=\frac{1}{2}$。 **Q.E.D.**

因此在街道方格為 $n\times n$ 的情境下，**當選擇前進方向的機率均等時，會有最大的見面機率。**

定理 2.2

當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數時，令 $m+n=2k$ ，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^m}{(1+r)^{2k}}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}r^{i+n-k}\right)。$$

【證明】

此時可能的相遇點坐標為 $(k-i\,,i)$ ，其中 $i=0,1,2,3,\ldots,n$ 。

甲由 A 點到點 $(k-i\,,i)$ 的機率分二種：

① 當 $i=0,1,2,3,\ldots,n-1$ 時，機率為 $\binom{k}{i}p^{k-i}q^{i}$ ；

② 當 $i=n$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{k}\binom{k}{\ell}p^{k-\ell}q^{\ell}$ 。

乙由 B 點到點 $(k-i\,,i)$ 的機率分二種：

① 當 $i=1,2,3,\ldots,n$ 時，機率為 $\binom{k}{n-i}p^{k-n+i}q^{n-i}$ ；

② 當 $i=0$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{k}\binom{k}{\ell}p^{k-\ell}q^{\ell}$ 。

因此，

$$P_{m,n}(r)=\underbrace{\binom{k}{0}p^kq^0\times\sum_{\ell=n}^{k}\binom{k}{\ell}p^{k-\ell}q^{\ell}}_{\text{在}(k,0)\text{相遇}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{k}{i}p^{k-i}q^{i}\times\binom{k}{n-i}p^{k-n+i}q^{n-i}}_{\text{在}(k-i\,,i)\text{相遇}}+\underbrace{\sum_{\ell=n}^{k}\binom{k}{\ell}p^{k-\ell}q^{\ell}\times\binom{k}{0}p^kq^0}_{\text{在}(k-n,n)\text{相遇}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{k}{i}\binom{k}{n-i}p^{2k-n}q^n+2\sum_{\ell=n}^{k}\binom{k}{0}\binom{k}{\ell}p^{2k-\ell}q^{\ell}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\binom{k}{n-i}p^{2k-n}q^n+2\sum_{\ell=n+1}^{k}\binom{k}{\ell}p^{2k-\ell}q^{\ell}$$

$$=p^{2k-n}q^n\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{\ell=n+1}^{k}\binom{k}{\ell}(\frac{p}{q})^{n-\ell}\right)$$

$$=p^mq^n\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}(\frac{p}{q})^{i+n-k}\right),$$

將 $p=\dfrac{r}{1+r}$ ，$q=\dfrac{1}{1+r}$ 代入上式，即可得證。 **Q.E.D.**

請注意到當 $r=1$ 時， $P_{m,n}(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right)$ ，即為**定理 1.2** 的 $P_{m,n}$ 。

定理 2.3

當 $m>n$ 且 $m+n$ 為奇數時，令 $m+n=2h-1$，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^{m+1}}{(1+r)^{2h}}\left(\binom{2h-2}{n}+\binom{2h-2}{n-1}r^{-1}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}r^{i+n-h}\right)。$$

【證明】

此時可能的相遇點為直線 $x+y=\frac{m+n}{2}$ 與格線的交點，即點 $(\frac{m+n-i}{2},\frac{i}{2})=(h-\frac{1+i}{2},\frac{i}{2})$ ，其中 $i=0,1,2,\ldots,2n$ 。

甲由 A 點到點 $(h-\frac{1+i}{2},\frac{i}{2})$ 的機率分二類：

(1) 當 i 為奇數時，令 $i=2j-1$ ， $j=1,2,\ldots,n$ ，機率為 $\binom{h-1}{j-1}p^{h-j}q^{j}$ ，

(2) 當 i 為偶數時，令 $i=2j$ ， $j=0,1,2,\ldots,n$ ，

① 當 $j=0,1,2,\ldots,n-1$ 時，機率為 $\binom{h-1}{j}p^{h-j}q^{j}$ ；

② 當 $j=n$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}p^{h-\ell-1}q^{\ell}$ 。

乙由 B 點到點 $(h-\frac{1+i}{2},\frac{i}{2})$ 的機率亦分二類：

(1) 當 i 為奇數時，令 $i=2j-1$ ， $j=1,2,\ldots,n$ ，機率為 $\binom{h-1}{n-j}p^{h-n-1+j}q^{n+1-j}$ ，

(2) 當 i 為偶數時，令 $i=2j$ ， $j=0,1,2,\ldots,n$ ，

① 當 $j=1,2,\ldots,n$ 時，機率為 $\binom{h-1}{n-j}p^{h-n+j}q^{n-j}$ ；

② 當 $j=0$ 時，機率為 $\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}p^{h-\ell-1}q^{\ell}$ 。

因此，兩人相遇在點$(h-\frac{1+i}{2},\frac{i}{2})$的機率可分二類：

（1） 當i為奇數時，令$i=2j-1$， $j=1,2,...,n$ ，機率為

$$\binom{h-1}{j-1}p^{h-j}q^{j}\times\binom{h-1}{n-j}p^{h-n-1+j}q^{n+1-j}\ =p^{m}q^{n+1}\binom{h-1}{j-1}\binom{h-1}{n-j}\text{。}$$

（2） 當i為偶數時，令$i=2j$， $j=0,1,2,...,n$ ，

① 當 $j=1,2,...,n-1$時，機率為

$$\binom{h-1}{j}p^{h-j}q^{j}\times\binom{h-1}{n-j}p^{h-n+j}q^{n-j}\ =p^{m+1}q^{n}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}\text{；}$$

② 當 $j=0,n$時，機率為

$$\binom{h-1}{0}p^{h}q^{0}\times\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}p^{h-\ell-1}q^{\ell}=\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}p^{m+n-\ell}q^{\ell}=p^{m}q^{n}\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}(\frac{p}{q})^{n-\ell}\text{。}$$

加總在各點的相遇機率，可計算$P_{m,n}(r)$如下：

$$P_{m,n}(r)=p^{m}q^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{h-1}{j-1}\binom{h-1}{n-j}q+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}p+2\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}(\frac{p}{q})^{n-\ell}\right)$$

$$=p^{m}q^{n}\left(\binom{2h-2}{n-1}q+\sum_{j=0}^{n}\binom{h-1}{j}\binom{h-1}{n-j}p-2\binom{h-1}{n}p+2\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}\right)$$

$$=p^{m}q^{n}\left(\binom{2h-2}{n-1}q+\binom{2h-2}{n}p+2\left(\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}-\binom{h-1}{n}p\right)\right)\text{，}$$

其中 $\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}-\binom{h-1}{n}p$

$$=\sum_{\ell=n+1}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}+\binom{h-1}{n}-\binom{h-1}{n}p$$

$$=(p+q)\sum_{\ell=n+1}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}\ +q\binom{h-1}{n}$$

$$=p\sum_{\ell=n+1}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}+q\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}$$

$$=p\left(\sum_{\ell=n+1}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell}+\sum_{\ell=n}^{h-1}\binom{h-1}{\ell}r^{n-\ell-1}\right)$$

$$= p\left(\sum_{\ell=n+1}^{h-1} \binom{h-1}{\ell} r^{n-\ell} + \sum_{\ell=n+1}^{h-1} \binom{h-1}{\ell-1} r^{n-\ell} + \binom{h-1}{h-1} r^{n-h} \right)$$

$$= p\left(\sum_{\ell=n+1}^{h-1} \binom{h}{\ell} r^{n-\ell} + \binom{h}{h} r^{n-h} \right)$$

$$= p\left(\sum_{\ell=n+1}^{h} \binom{h}{\ell} r^{n-\ell} \right)$$

$$= p \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} r^{i+n-h}$$ ，代回上式，可得：

$$P_{m,n}(r) = p^m q^n \left(\binom{2h-2}{n-1} q + \binom{2h-2}{n} p + 2p \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} r^{i+n-h} \right)$$

$$= p^{m+1} q^n \left(\binom{2h-2}{n} + \binom{2h-2}{n-1} (\frac{q}{p}) + 2 \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} r^{i+n-h} \right),$$

將 $p = \dfrac{r}{1+r}$ ，$q = \dfrac{1}{1+r}$ 代入上式，即得證：

$$P_{m,n}(r) = \frac{r^{m+1}}{(1+r)^{2h}} \left(\binom{2h-2}{n} + \binom{2h-2}{n-1} r^{-1} + 2 \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} r^{i+n-h} \right)。$$

Q.E.D.

請注意到當 $r = 1$ 時，

$$P_{m,n}(1) = \frac{1}{2^{2h}} \left(\binom{2h-2}{n} + \binom{2h-2}{n-1} + 2 \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2h} \left(\binom{2h-1}{n} + 2 \sum_{i=0}^{h-n-1} \binom{h}{i} \right),$$

即為**定理 1.3** 的 $P_{m,n}$ 。

接下來進行公式比較。

當$m+n$為偶數時($m>n$)，$(m-1)+n$即為奇數，令$m+n=2k$，由**定理 2.2** 和**定理 2.3** 可知

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^m}{(1+r)^{2k}}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}r^{i+n-k}\right);$$

$$P_{m-1,n}(r)=\frac{r^m}{(1+r)^{2k}}\left(\binom{2k-2}{n}+\binom{2k-2}{n-1}r^{-1}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}r^{i+n-k}\right),$$

兩者具有極為相似的結構，只差別在$\binom{2k}{n}$和$\binom{2k-2}{n}+\binom{2k-2}{n-1}r^{-1}$的不同。

然而此處的相遇機率並不像前一小節的$P_{m,n}$恆大於$P_{m-1,n}$，一般而言，**$P_{m,n}(r)$不一定大於$P_{m-1,n}(r)$，需視r值而定。**

考慮$\binom{2k}{n}>\binom{2k-2}{n}+\binom{2k-2}{n-1}r^{-1}$，經過一番移項、約分、化簡可得 $r>\dfrac{2k-n}{4k-n-1}$，再代入$2k=m+n$，即得$r>\dfrac{m}{2m+n-1}$。類似地，

$$\binom{2k}{n}<\binom{2k-2}{n}+\binom{2k-2}{n-1}r^{-1}\text{ 等價於 } r<\frac{m}{2m+n-1};$$

$$\binom{2k}{n}=\binom{2k-2}{n}+\binom{2k-2}{n-1}r^{-1}\text{ 等價於 } r=\frac{m}{2m+n-1}。$$

我們把結果寫成以下的定理。

定理 2.4

設 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數，$(m-1)+n$ 為奇數，則

① 當 $r>\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)>P_{m-1,n}(r)$；

② 當 $r=\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)=P_{m-1,n}(r)$；

③ 當 $0<r<\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)<P_{m-1,n}(r)$。

更進一步，將 $r=\dfrac{p}{q}=\dfrac{p}{1-p}$ 代入**定理 2.4**，計算化簡後可推得：

① 當 $p>\dfrac{m}{3m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)>P_{m-1,n}(r)$；

② 當 $p=\dfrac{m}{3m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)=P_{m-1,n}(r)$；

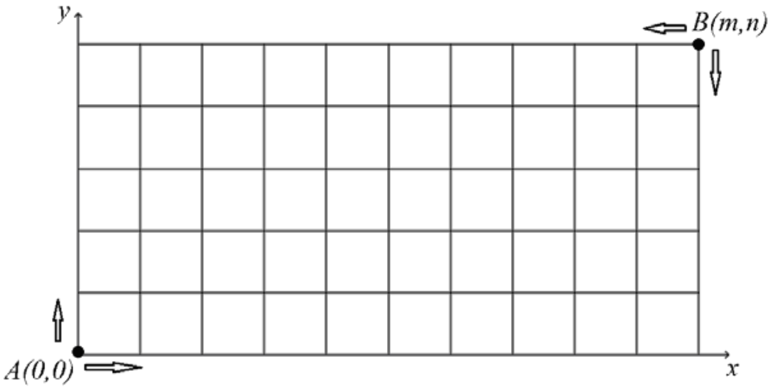
③ 當 $0<p<\dfrac{m}{3m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)<P_{m-1,n}(r)$。

亦即只要 p 夠大，便可保有 $P_{m,n}(r)$ 大於 $P_{m-1,n}(r)$ 的性質，而 p 不夠大時則否。

伍、 研究結果

綜觀上述研究過程，我們得到以下成果：

在坐標平面上，有一個 $m\times n$ 的街道方格，其邊長為1。令 A 點為原點，B 點坐標為 (m,n)（如下圖）。假設甲欲從 A 點走到 B 點，乙欲從 B 點走到 A 點，兩人同時出發，以相同速率沿方格線「**走捷徑**」前進。



一、原題情境(於分岔路口，選擇前進方向的機率均等)

於每個分岔路口，甲、乙兩人選擇前進方向的機率均等，定義兩人相遇的機率為 $P_{m,n}$，則：

定理 1.1：當 $m=n$ 時，兩人相遇機率為 $P_{n,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$。

定理 1.2：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數時，令 $m+n=2k$，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right)。$$

定理 1.3：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為奇數時，令 $m+n=2h-1$，則兩人相遇機率為

$$P_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\left(\binom{2h-1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right)。$$

定理 1.4：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數，$(m-1)+n$ 為奇數，令 $m+n=2k$，則

$$P_{m,n}-P_{m-1,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k-1}{n-1}>0。$$

二、新的題目情境(於分岔路口，選擇前進方向的機率不一定均等)

於每個分岔路口，甲選擇向右前進的機率為 p，向上前進的機率為 $q=1-p$；乙選擇向左前進的機率為 p，向下前進的機率為 $q=1-p$，其中 $0<p,q<1$。定義兩人相遇的機率為 $P_{m,n}(r)$，其中 $r=\dfrac{p}{q}$，則：

定理 2.1：當 $m=n$ 時，兩人相遇機率為

$$P_{n,n}(r)=\frac{r^n}{(1+r)^{2n}}\binom{2n}{n},$$

且 $P_{n,n}(r)$ 在 $r=1$ 時有最大值 $P_{n,n}(1)=(\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}$。

定理 2.2：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數時，令 $m+n=2k$，則

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^m}{(1+r)^{2k}}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}r^{i+n-k}\right)。$$

定理 2.3：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為奇數時，令 $m+n=2h-1$，則

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^{m+1}}{(1+r)^{2h}}\left(\left(\binom{2h-2}{n}+\binom{2h-2}{n-1}\right)r^{-1}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}r^{i+n-h}\right)。$$

定理 2.4：當 $m>n$ 且 $m+n$ 為偶數時，$(m-1)+n$ 為奇數，則

① 當 $r>\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)>P_{m-1,n}(r)$；

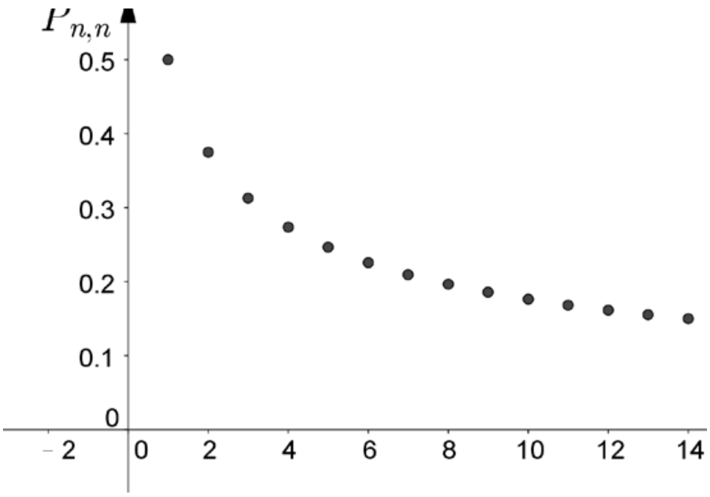
② 當 $r=\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)=P_{m-1,n}(r)$；

③ 當 $0<r<\dfrac{m}{2m+n-1}$ 時，$P_{m,n}(r)<P_{m-1,n}(r)$。

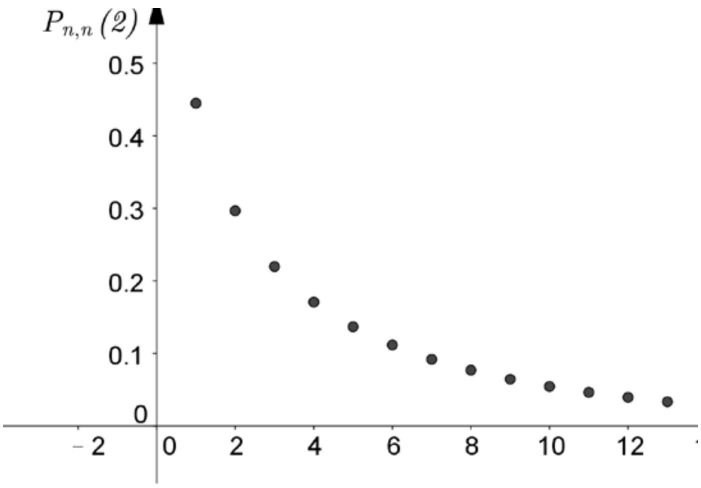
陸、 討論

一、 $P_{n,n}$與$P_{n,n}(r)$隨n增加的遞減與極限性質

當街道方格為$n\times n$時，在原題情境中的相遇機率為$P_{n,n}=\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$；在新的題目情境中，相遇機率為$P_{n,n}(r)=\dfrac{r^n}{(1+r)^{2n}}\dbinom{2n}{n}=p^nq^n\dbinom{2n}{n}$。隨著$n$增加時，街道方格規模變得更大，分岔口亦更多，直覺上甲、乙兩人相遇的機率應會降低，我們計算$P_{n,n}$與$P_{n,n}(r)$的數值，描繪其**遞減情形**，並得出以下的定理。



（$P_{n,n}$隨著n增加而遞減的情形）



（當$r=2$時，$P_{n,n}(2)$隨著n增加而遞減的情形）

定理 3.1

（1） $P_{n,n}$ 隨著 n 增加而遞減且 $\lim_{n\to\infty} P_{n,n}=0$ 。

（2） 當固定 p,q 之值且 $p,q\neq 0$ 時，$P_{n,n}(r)$ 隨著 n 增加而遞減

且 $\lim_{n\to\infty} P_{n,n}(r)=0$ 。

【證明】

（1） 由

$$\frac{P_{n+1,n+1}}{P_{n,n}}=\frac{\frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}=\frac{1}{2^2}\times\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=\frac{2n+1}{2n+2}<1,$$

故 $P_{n+1,n+1}<P_{n,n}$ ，即 $P_{n,n}$ 隨著 n 增加而遞減。

另外，由 Stirling 近似公式，當 n 很大時，

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\frac{1}{2^{2n}}\times\frac{(2n)!}{n!n!}\sim\frac{1}{2^{2n}}\times\frac{\sqrt{2\pi(2\pi)}\times(2n)^{2n}}{e^{2n}}\times\frac{(e^n)^2}{2\pi n\times(n^n)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

這裡符號「～」表示它兩端的比值，隨著 n 的無限增大而趨近於1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}=1,$$

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=0$ ，故 $\lim_{n\to\infty}P_{n,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=0$ 。

（2）關於$P_{n,n}(r)$的性質，類似上述的證明流程，代入$P_{n,n}(r)$公式，計算得

$$\frac{P_{n+1,n+1}(r)}{P_{n,n}(r)} = pq \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = (\sqrt{pq})^2 \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \quad ,$$

其中$\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}$，代回得

$$\frac{P_{n+1,n+1}(r)}{P_{n,n}(r)} \le \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \quad 。$$

故$P_{n+1,n+1}(r) < P_{n,n}(r)$ 。

另外，亦由Stirling近似公式，當n很大時，

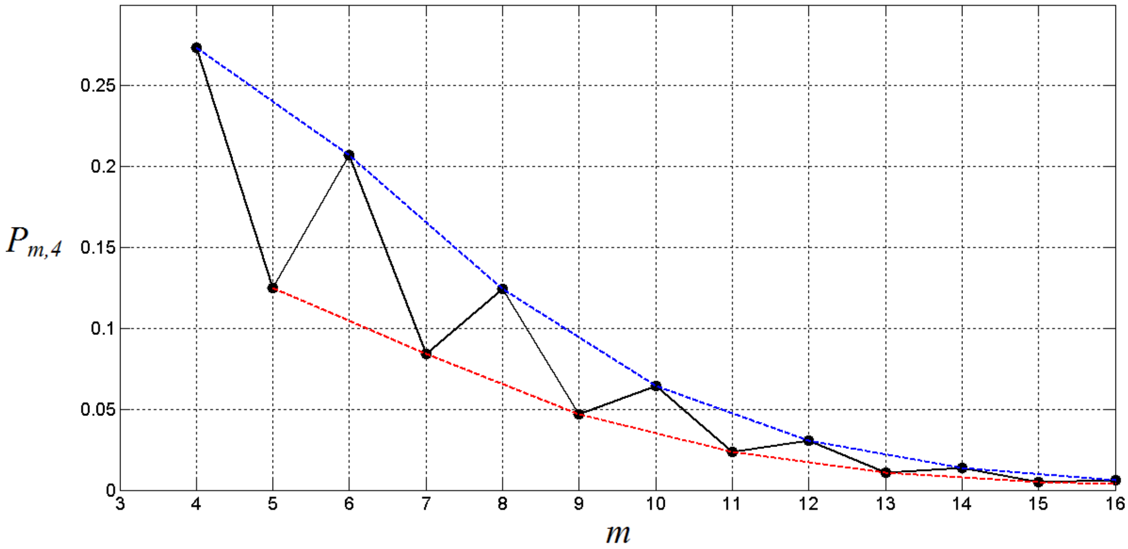
$$p^n q^n \binom{2n}{n} \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \quad ,$$

其中$4pq = 4\ (\sqrt{pq})^2 \le 4 \times (\frac{p+q}{2})^2 = 4 \times (\frac{1}{2})^2 = 1$，故$0 < \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ，

由夾擠定理知$\lim_{n\to\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$，所以$\lim_{n\to\infty} P_{n,n}(r) = \lim_{n\to\infty} p^n q^n \binom{2n}{n} = 0$ 。 **Q.E.D.**

二、$P_{m,n}$ 隨著 m 增加而呈現一減一增鋸齒狀的下降趨勢

設定 $m \ge n$，當固定 n 時，直覺上會認為相遇機率 $P_{m,n}$ 會隨著 m 增加而減少，然而隨著 $m+n$ 為偶數或奇數的不同，$P_{m,n}$ 並非一路遞減，我們以 $n=4$ 為例，繪圖說明如下：



（當 $n=4$ 時，$P_{m,4}$ 隨著 m 增加而呈現一減一增的鋸齒狀情形）

從圖中可觀察到：

$$P_{4,4} > P_{6,4} > P_{8,4} > P_{10,4} > P_{12,4} > P_{14,4} > \ldots$$，（**藍色虛線部份**）

這代表在 $m+n$ 為偶數的情況下，$P_{m,n}$ 具有遞減性質，即 $P_{m+2,n} < P_{m,n}$。

另外，

$$P_{5,4} > P_{7,4} > P_{9,4} > P_{11,4} > P_{13,4} > P_{15,4} > \ldots$$，（**紅色虛線部份**）

這代表在 $m+n$ 為奇數的情況下，$P_{m,n}$ 亦具有遞減性質，即 $P_{m+2,n} < P_{m,n}$。

以及

$$P_{5,4} < P_{6,4}，P_{7,4} < P_{8,4}，P_{9,4} < P_{10,4}，P_{11,4} < P_{12,4}，\ldots，$$

此點即為**定理 1.4**：當 $m+n$ 為偶數時，$P_{m-1,n} < P_{m,n}$。

由以上三個性質確定了 $P_{m,n}$ **隨著 m 增加而呈現一減一增鋸齒狀的下降趨勢**。我們把以上的觀察寫成**定理 3.2** 和 **3.3**，來證明**對於所有的正整數 n，$P_{m,n}$ 都有這種現象**。

定理 3.2

設 $m+n$ 為偶數，則對於所有的 $m \ge n$ 皆有 $P_{m+2,n} < P_{m,n}$。

【證明】

須分成 $m=n$ 與 $m>n$ 二種情況來證明遞減性。

(1) 當 $m=n$ 時，欲證明 $P_{n+2,n} < P_{n,n}$。

由定理 1.2 與定理 1.1

$$P_{n+2,n} = \frac{1}{2^{2n+2}}\left(\binom{2n+2}{n} + 2\binom{n+1}{0}\right);$$

$$P_{n,n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n+2}} \times 4\binom{2n}{n},$$

① 當 $n=1$ 時，

$$\binom{2n+2}{n} + 2\binom{n+1}{0} = \binom{4}{1} + 2\binom{2}{0} = 6,$$

$$4\binom{2n}{n} = 4\binom{2}{1} = 8,$$

故 $P_{n+2,n} < P_{n,n}$。

② 當 $n \ge 2$ 時，

$$\binom{2n+2}{n} + 2\binom{n+1}{0}$$

$$= \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + 2$$

$$= \binom{2n}{n} + 2\binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-2} + 2\binom{n}{n},$$

由附錄中的**引理** A（其中代入 $k=n$）：$\binom{2n}{n-2} + 2\binom{n}{n} < \binom{2n}{n}$，代回上式得

$$\binom{2n+2}{n} + 2\binom{n+1}{0} < 2\binom{2n}{n} + 2\binom{2n}{n-1} < 4\binom{2n}{n},$$

故 $P_{n+2,n} < P_{n,n}$。

由以上①和②得證當 $m=n$ 時，有 $P_{n+2,n} < P_{n,n}$。

(2) 當 $m>n$ 時，欲證明 $P_{m+2,n}<P_{m,n}$ 。

由定理 1.2

$$P_{m+2,n}=\frac{1}{2^{2k+2}}\left(\binom{2k+2}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k+1}{i}\right);$$

$$P_{m,n}=\frac{1}{2^{2k}}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right)=\frac{1}{2^{2k+2}}\left(4\binom{2k}{n}+8\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}\right),$$

其中 $k=\dfrac{m+n}{2}>n$ 。

① 當 $n=1$ 時，此時 $k\geq 2$ ，

$$\binom{2k+2}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k+1}{i}=\binom{2k+2}{1}+2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}=4\times 2^k-2,$$

$$4\binom{2k}{n}+8\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}=4\binom{2k}{1}+8\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}=8\times 2^k-8,$$

由 $(4\times 2^k-2)-(8\times 2^k-8)=6-4\times 2^k<0$ ，

得 $P_{m+2,n}<P_{m,n}$ 。

② 當 $n\geq 2$ 時，此時 $k>n\geq 2$ ，

$$\binom{2k+2}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k+1}{i}$$

$$=\binom{2k+1}{n}+\binom{2k+1}{n-1}+2\sum_{i=1}^{k-n}\binom{k}{i-1}+2\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k}{i}$$

$$=\binom{2k}{n}+2\binom{2k}{n-1}+\binom{2k}{n-2}+4\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}+2\binom{k}{n},$$

由附錄中的引理 A ： $\binom{2k}{n-2}+2\binom{k}{n}<\binom{2k}{n}$ ，代回上式得

$$\binom{2k+2}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k+1}{i}<2\binom{2k}{n}+2\binom{2k}{n-1}+4\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}<4\binom{2k}{n}+8\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i},$$

故 $P_{m+2,n}<P_{m,n}$ 。

由以上①和②得證當 $m>n$ 時，有 $P_{m+2,n}<P_{m,n}$ 。

綜合以上(1)與(2)，得證對所有 $m\geq n$ 皆有 $P_{m+2,n}<P_{m,n}$ 。 **Q.E.D.**

定理 3.3

設$m+n$為奇數，則對於所有的$m>n$皆有$P_{m+2,n}<P_{m,n}$。

【證明】

由**定理** 1.3

$$P_{m+2,n}=\frac{1}{2^{2h+2}}\left(\binom{2h+1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n}\binom{h+1}{i}\right);$$

$$P_{m,n}=\frac{1}{2^{2h}}\left(\binom{2h-1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right)=\frac{1}{2^{2h+2}}\left(4\binom{2h-1}{n}+8\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}\right),$$

其中$h=\dfrac{m+n+1}{2}\geq n+1$。

① 當$n=1$時，此時$h\geq 2$，

$$\binom{2h+1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n}\binom{h+1}{i}=\binom{2h+1}{1}+2\sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i}=4\times 2^h-3,$$

$$4\binom{2h-1}{n}+8\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}=4\binom{2h-1}{1}+8\sum_{i=0}^{h-2}\binom{h}{i}=8\times 2^h-1,$$

由$(4\times 2^h-3)-(8\times 2^h-12)=9-4\times 2^h<0$，得$P_{m+2,n}<P_{m,n}$。

② 當$n\geq 2$時，此時$h>n\geq 2$，

$$\binom{2h+1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n}\binom{h+1}{i}$$

$$=\binom{2h}{n}+\binom{2h}{n-1}+2\sum_{i=1}^{h-n}\binom{h}{i-1}+2\sum_{i=0}^{h-n}\binom{h}{i}$$

$$=\binom{2h-1}{n}+2\binom{2h-1}{n-1}+\binom{2h-1}{n-2}+4\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}+2\binom{h}{n},$$

由附錄中的**引理** B：$\binom{2h-1}{n-2}+2\binom{h}{n}<\binom{2h-1}{n}$，代回上式得

$$\binom{2h+1}{n}+2\sum_{i=0}^{h-n}\binom{h+1}{i}<2\binom{2h-1}{n}+2\binom{2h-1}{n-1}+4\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}<4\binom{2h-1}{n}+8\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i},$$

故$P_{m+2,n}<P_{m,n}$。

綜合以上①和②，得證對所有$m>n$皆有$P_{m+2,n}<P_{m,n}$。 **Q.E.D.**

三、街道方格越接近正方形，相遇機率越大

在此我們考慮另一個有趣的方向。眾所皆知在周長為固定值的矩形當中，正方形會有最大的面積，這使我們聯想到若當 $m+n$ 為定值時，該如何選擇 m, n，可使得相遇機率 $P_{m,n}$ 達到最大呢？直覺上，因為兩人在分岔口選擇路徑之機率均等，我們**猜想當 $m\times n$ 街道方格越接近正方形時會有越大的機率**。

設定 $m\geq n$，我們試算了若干 $P_{m,n}$ 的數據如下表：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.500	0.313	0.375	0.203	0.219	0.113	0.117	0.060	0.061	0.031	0.031
2		0.375	0.188	0.266	0.121	0.148	0.066	0.075	0.034	0.037	0.017
3			0.313	0.145	0.227	0.094	0.129	0.051	0.064	0.025	0.030
4				0.273	0.125	0.207	0.084	0.124	0.047	0.065	0.024
5					0.246	0.113	0.194	0.080	0.123	0.047	0.068
6						0.226	0.105	0.183	0.077	0.122	0.048
7							0.209	0.098	0.175	0.074	0.121
8								0.196	0.093	0.167	0.072
9									0.185	0.088	0.160
10										0.176	0.084
11											0.168

從表格中發現，上述猜想「不完全正確」，有以下的二組特例：

1. **$m+n$ 為偶數的情況(藍色部份)**

   固定 $m+n=2k$ 之值(其中 $k\geq 2$)，當 $k=2$ 時 $P_{2,2}=P_{3,1}$**(橘色圈圈)**，而**當 $k\geq 3$ 時，$P_{m,n}$ 確實在 $m=n=k$ 時有唯一的最大值。**

2. **$m+n$ 為奇數的情況(紅色部份)**

   固定 $m+n=2h-1$ 之值(其中 $h\geq 3$)，當 $h=3$ 時 $P_{3,2}<P_{4,1}$**(紫色圈圈)**，而**當 $h\geq 4$ 時，**

   $P_{m,n}$ 確實在 $m=h$ 且 $n=h-1$ 時有唯一的最大值。

我們將上述的觀察結果，寫成**定理 3.4** 與 **3.5**，並完成證明。為了便於閱讀與證明，先定義新符號。

1. 當 $m+n=2k$ 為偶數時，令 $m=k+s$，$n=k-s$，其中 $s=0,1,2,\ldots,k-1$，

   再定義 $P_{m,n}=P_{k+s,k-s}$ 為 $f_{k,s}$。

2. 當 $m+n=2h-1$ 為奇數時，令 $m=h+t$，$n=h-1-t$，其中 $t=0,1,2,\ldots,h-2$，

   再定義 $P_{m,n}=P_{h+t,h-1-t}$ 為 $g_{h,t}$。

定理 3.4

設 $k\geq 3$，對 $s=0,1,2,\ldots,k-2$，皆有

$$f_{k,s+1}<f_{k,s}\text{。}$$

【證明】

(1) 當 $s=0$ 時，由**定理 1.2** 和 **1.1**

$$f_{k,1}=P_{k+1,k-1}=\frac{1}{2^{2k}}\left(\binom{2k}{k-1}+2\binom{k}{0}\right),$$

$$f_{k,0}=P_{k,k}=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k},$$

由附錄中的**引理** C（其中代入 $s=0$）：$\binom{2k}{k-1}+2\binom{k}{0}<\binom{2k}{k}$，

得證 $f_{k,1}<f_{k,0}$。（請注意到本定理 $k\geq 3$，故**引理** C 中的等號不成立）

(2) 當 $1\leq s\leq k-2$ 時，由**定理 1.2**

$$f_{k,s+1}=P_{k+s+1,k-s-1}=\frac{1}{2^{2k}}\left(\binom{2k}{k-s-1}+2\sum_{i=0}^{s}\binom{k}{i}\right)=\frac{1}{2^{2k}}\left(\binom{2k}{k-s-1}+2\binom{k}{s}+2\sum_{i=0}^{s-1}\binom{k}{i}\right),$$

$$f_{k,s}=P_{k+s,k-s}=\frac{1}{2^{2k}}\left(\binom{2k}{k-s}+2\sum_{i=0}^{s-1}\binom{k}{i}\right),$$

由附錄中的**引理** C：$\binom{2k}{k-s-1}+2\binom{k}{s}<\binom{2k}{k-s}$，得證 $f_{k,s+1}<f_{k,s}$。

綜合以上(1)與(2)，得證本定理。 **Q.E.D.**

定理 3.5

設 $h \geq 4$，對 $t = 1, 2, 3, ..., h-2$，皆有

$$g_{h,t} < g_{h,t-1}\text{。}$$

【證明】

由**定理 1.3**

$$g_{h,t} = P_{h+t,h-1-t} = \frac{1}{2^{2h}}\left(\binom{2h-1}{h-t-1} + 2\sum_{i=0}^{t}\binom{h}{i}\right) = \frac{1}{2^{2h}}\left(\binom{2h-1}{h-t-1} + 2\binom{h}{t} + 2\sum_{i=0}^{t-1}\binom{h}{i}\right),$$

$$g_{h,t-1} = P_{h+t-1,h-t} = \frac{1}{2^{2h}}\left(\binom{2h-1}{h-t} + 2\sum_{i=0}^{t-1}\binom{h}{i}\right),$$

由附錄中的**引理** D：$\binom{2h-1}{h-t-1} + 2\binom{h}{t} < \binom{2h-1}{h-t}$，得證 $g_{h,t} < g_{h,t-1}$。 **Q.E.D.**

由**定理 3.4** 可知，固定 $m+n=2k$ 之值時($k \geq 3$)，$f_{k,s}$ **隨著 s 增加而遞減**，故在 $s=0$ 時有最大值，即 $P_{m,n}$ 在 $m=k+0$ 且 $n=k-0$ 時有唯一的最大值，此時街道方格為 $k \times k$ 的正方形。

由**定理 3.5** 可知，固定 $m+n=2h-1$ 之值($h \geq 4$)，$g_{h,t}$ **隨著 t 增加而遞減**，故在 $t=0$ 時有最大值，即 $P_{m,n}$ 在 $m=h+0$ 且 $n=(h-1)-0$ 時有唯一的最大值，此時街道為最接近正方形的 $(h-1)\times h$ 方格。

綜合以上的**定理 3.4** 與**定理 3.5**，便得到以下定理。

定理 3.6

在 $m+n$ 為大於5的定值時，街道方格越接近正方形，相遇機率越大。

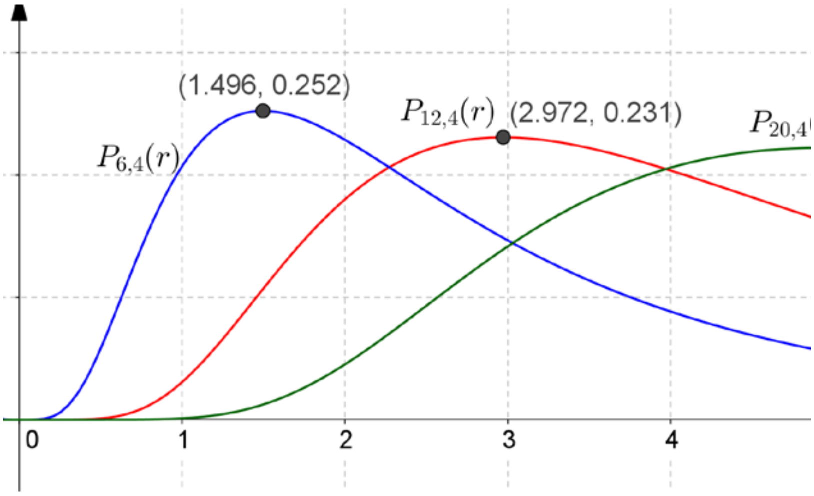
四、 $P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 為多少時？

當 $m=n$ 時，由**定理 2.1** 知 $P_{n,n}(r)=\frac{r^n}{(1+r)^{2n}}\binom{2n}{n}$ 在 $r=1$ 時有最大值，但當 $m>n$ 時，$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 為多少時？

當 $m+n=2k$ 為偶數時，由**定理 2.2**

$$P_{m,n}(r)=\frac{r^m}{(1+r)^{2k}}\left(\binom{2k}{n}+2\sum_{i=0}^{k-n-1}\binom{k}{i}r^{i+n-k}\right),$$

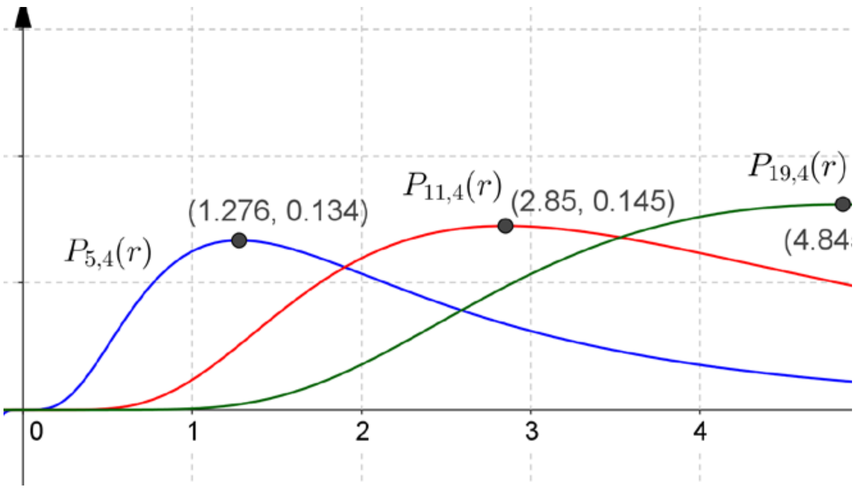
試算 $P_{6,4}(r)$ 、 $P_{12,4}(r)$ 與 $P_{20,4}(r)$ ，發現 **$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 接近但略小於 $\frac{m}{n}$ 處**。



當 $m+n=2h-1$ 為奇數時，由**定理 2.3**

$$P_{m,n}(x)=\frac{r^{m+1}}{(1+r)^{2h}}\left(\binom{2h-2}{n}+\binom{2h-2}{n-1}r^{-1}+2\sum_{i=0}^{h-n-1}\binom{h}{i}r^{i+n-h}\right),$$

試算 $P_{5,4}(r)$ 、 $P_{11,4}(r)$ 與 $P_{19,4}(r)$ ，發現 **$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 接近但略大於 $\frac{m}{n}$ 處**。



進一步計算 $P_{m,n}(r)$ 的最大值出現處的 r 值與 $\dfrac{m}{n}$ 值的比較，如下表：

		最大值出現處的 r 值	m/n	誤差百分比
$m+n$ 偶數	$m=6$, $n=4$	1.496052686	1.50	-0.26%
	$m=12$, $n=4$	2.972157151	3.00	-0.93%
	$m=20$, $n=4$	4.930089985	5.00	-1.40%
$m+n$ 奇數	$m=5$, $n=4$	1.275984125	1.25	2.08%
	$m=11$, $n=4$	2.850177460	2.75	3.64%
	$m=19$, $n=4$	4.845415779	4.75	2.01%

因此，我們猜想：

1. **當 $m+n$ 為偶數時，$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 接近但略小於 $\dfrac{m}{n}$ 處。**
2. **當 $m+n$ 為奇數時，$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在 r 接近但略大於 $\dfrac{m}{n}$ 處。**

我們對這個猜想提出一個合理的看法。以 $P_{12,4}(r)$ 為例說明，

$$P_{12,4}(r)=\frac{r^{12}}{(1+r)^{16}}\left(\binom{16}{4}+2\sum_{i=0}^{3}\binom{8}{i}r^{i-4}\right)=p^{12}q^{4}\left(\binom{16}{4}+2\sum_{i=0}^{3}\binom{8}{i}r^{i-4}\right),$$

其中 $p+q=1$ 且 $r=\dfrac{p}{q}$。先注意 $p^{12}q^4$ 項，因 $p^{12}q^4=(p^3q)^4$，由算幾不等式：

$$\frac{\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+\frac{p}{3}+q}{4}\geq\sqrt[4]{(\frac{p}{3})^3\times q},$$

故

$$p^3q\leq 27\times(\frac{p+q}{4})^4=27\times(\frac{1}{4})^4,$$

等號成立於 $\dfrac{p}{3}=q$ 時，即 $r=\dfrac{p}{q}=3$ 時，$p^{12}q^4$ 達到最大值。當 $r=3$ 時，後面的 $2\sum_{i=0}^{3}\binom{8}{i}r^{i-4}$ 項與常數項 $\binom{16}{4}$ 相比，顯得太小了，故僅能發揮些微的影響，讓發生最大值時的 r 值略為下降。

爾後我們希望能透過嚴謹的證明，來計算出使 $P_{m,n}(r)$ 達到最大值時的 r 值位置。

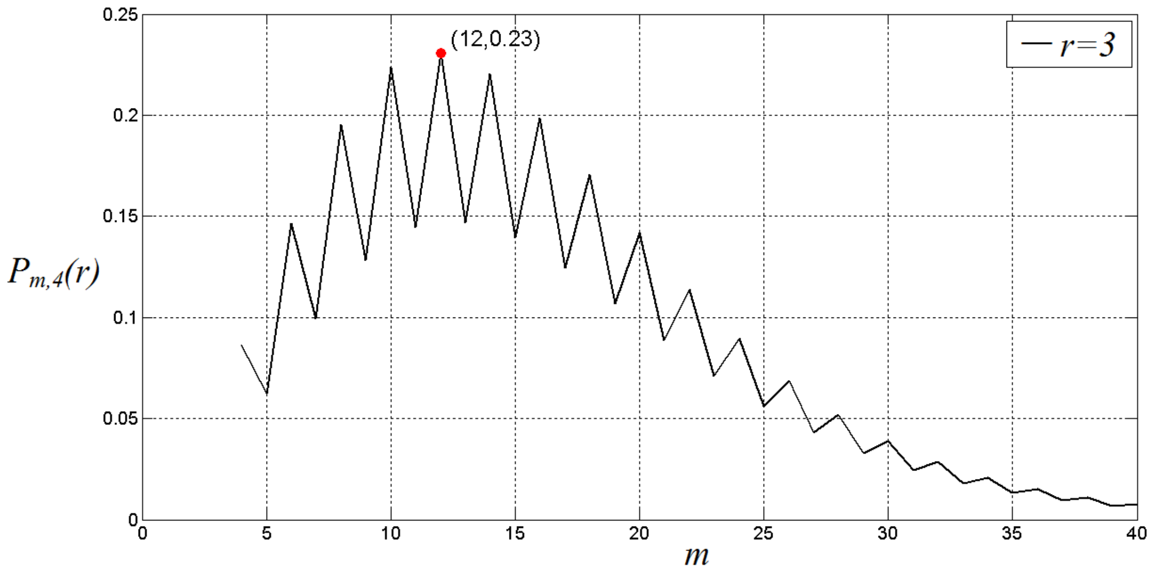
五、 $P_{m,n}(r)$ 圖形的多種樣貌

由前一節得知在給定 m,n 之值 $(m \geq n)$ 之下，在 r 接近於 $\dfrac{m}{n}$ 時，$P_{m,n}(r)$ 有最大值。反之，在給定 n 值與 r 值之下，什麼樣的 m 值(設定 $m \geq n$)可使得 $P_{m,n}(r)$ 達到最大呢？我們有以下的推想：

1. 當 $r \leq 1$ 時，$P_{m,n}(r)$ 在 $m = n$ 時達到最大。

2. 當 $r > 1$ 時，由 $r \approx \dfrac{m}{n}$，而推想 $P_{m,n}(r)$ 在 $m \approx nr$ 時達到最大。

以 $n = 4$ 且 $r = 3$ 為例，繪出 $P_{m,4}(3)$ 的圖形如下：

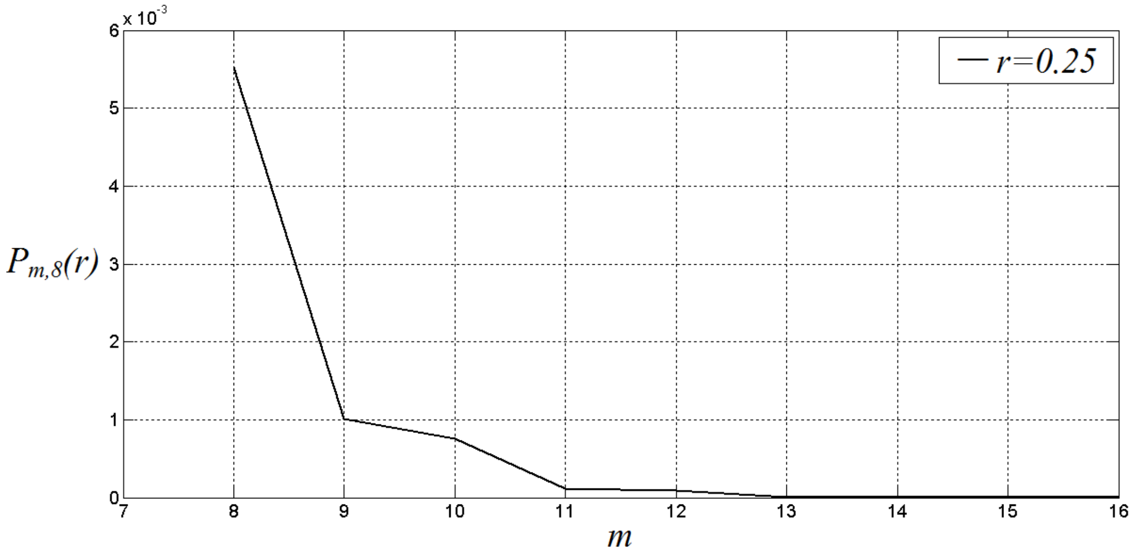


發現 $P_{m,4}(3)$ 的值，會隨著 m 增加而呈現先**鋸齒狀地上升**，再**鋸齒狀地下降**的形態，且在 $m = nr = 12$ 時達到最大值，確實符合我們的推想。未來我們希望能嚴謹地證明此推想。

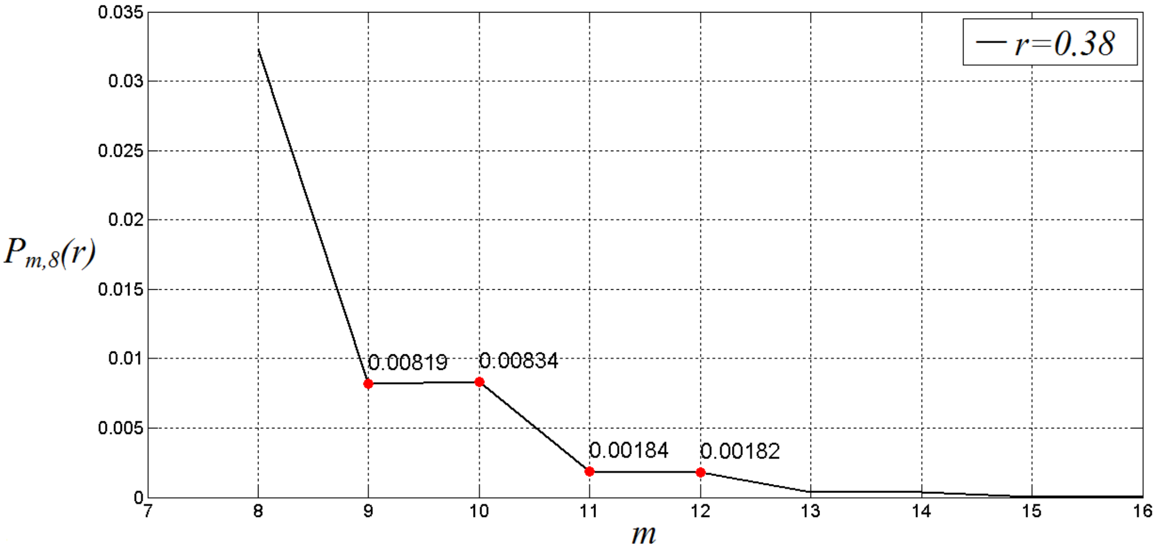
此外，給定不同的 r 值時，$P_{m,n}(r)$ 圖形呈現多種不同的樣貌，先分成 $r \leq 1$ 與 $r > 1$ 兩大類。

1. 當 $r \leq 1$ 時

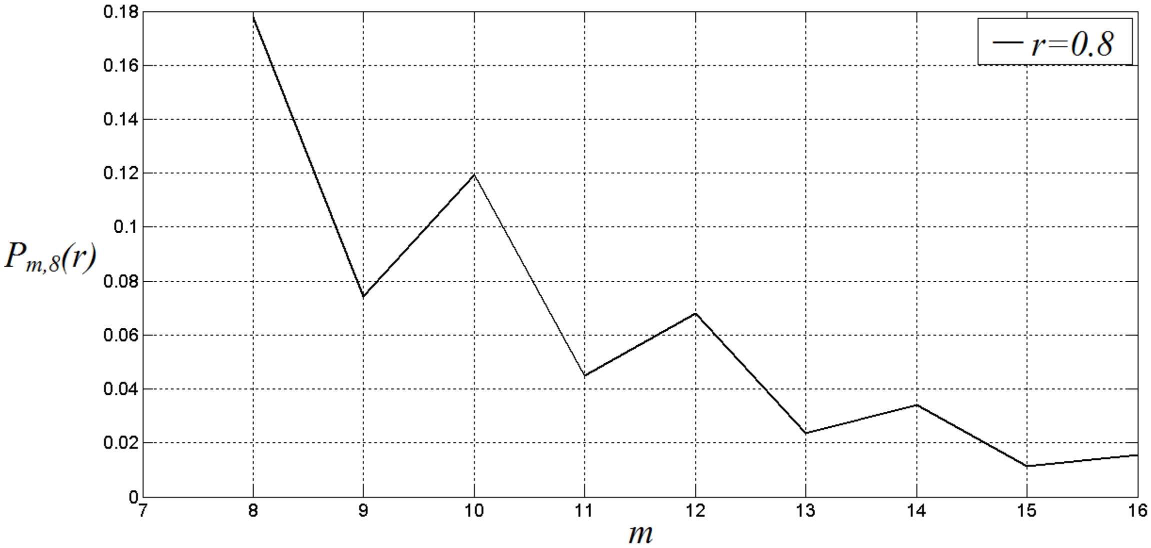
類似於**定理 3.2** 與**定理 3.3** 的證明流程，容易證得**定理 2.2**($m+n$ 為偶數)與**定理 2.3**($m+n$ 為奇數)的相遇機率 $P_{m,n}(r)$ 各自有遞減的性質，即對於所有的 $m \geq n$ 皆有 $P_{m+2,n}(r) < P_{m,n}(r)$，所以 $P_{m,n}(r)$ 圖形會隨著 m 增加而呈現**全程的下降趨勢**，然而**一減一增鋸齒狀現象不一定會出現**，以下以 $n = 8$ 為例：



x 10^-3
6
5
4
3
2
1
0
$P_{m,8}(r)$
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
m
r=0.25



0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
$P_{m,8}(r)$
0.00819
0.00834
0.00184
0.00182
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
m
r=0.38



0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
$P_{m,8}(r)$
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
m
r=0.8

發現(1) 前頁上圖的 $P_{m,8}(0.25)$ 隨 m 增加而遞減，完全沒有鋸齒狀現象。

(2) 前頁中圖的 $P_{m,8}(0.38)$ 隨 m 增加先有鋸齒狀的下降趨勢，再轉為遞減。(雖然因為數值過小而顯示地並不明顯。)

(3) 前頁下圖的 $P_{m,8}(0.8)$ 隨 m 增加，全程為鋸齒狀的下降趨勢。

關於鋸齒狀現象發生與否的條件，請見**定理 2.4**，由 r 值與 $\dfrac{m}{2m+n-1}$ 的大小關係決定。

2. 當 $r>1$ 時

因為 $r>1$，先由**定理 2.4** 知 $m+n$ 為偶數時的相遇機率必大於 $(m-1)+n$ 為奇數時的機率，故鋸齒狀形態一定會全程出現。除了鋸齒現象外，如前二頁的 $P_{m,4}(3)$ 圖形，$P_{m,n}(r)$ **可能會先有上升趨勢，再轉為下降趨勢**。在此我們關心 $P_{m,n}(r)$ 發生先上升趨勢再下降趨勢的**充分條件**。

定理 3.7

設定 $m\ge n$，在固定 n 值之下，$r>\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4n+2}{n+2}}-1}$ 是 $P_{m,n}(r)$ 隨 m 增加發生先鋸齒狀上升趨勢再轉為鋸齒狀下降趨勢的充分條件。

【證明】

設定 $m\ge n$，我們僅需比較偶數的前二項相遇機率即可，即 $P_{n,n}(r)$ 和 $P_{n+2,n}(r)$。

由**定理 2.1** 和**定理 2.2**：

$$P_{n,n}(r)=\frac{r^n}{(1+r)^{2n}}\binom{2n}{n}=p^nq^n\binom{2n}{n},$$

$$P_{n+2,n}(r)=\frac{r^{n+2}}{(1+r)^{2n+2}}\left(\binom{2n+2}{n}+2\binom{n+1}{0}r^{-1}\right)=p^nq^n\left(p^2\binom{2n+2}{n}+2pq\right),$$

當 n 稍大時，$2pq$ 就比 $p^2\binom{2n+2}{n}$ 相對地小很多，可估算

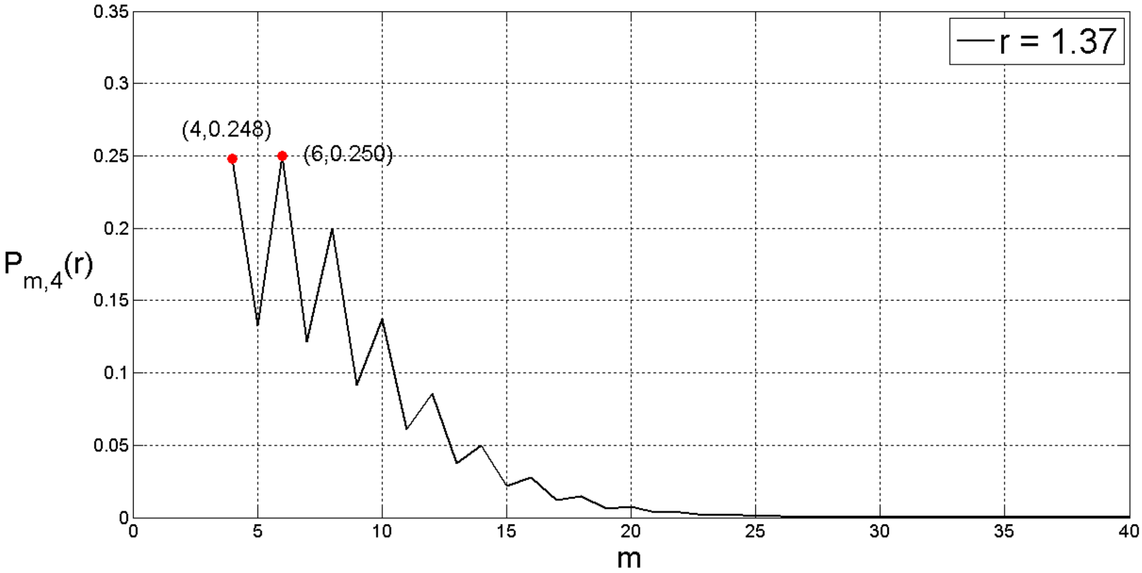
$$P_{n+2,n}(r)>p^nq^n\left(p^2\binom{2n+2}{n}\right),$$

拿上式與$P_{n,n}(r)$比較，有「若$p^2\binom{2n+2}{n}>\binom{2n}{n}$，則$P_{n+2,n}(r)>P_{n,n}(r)$。」

又條件$p^2\binom{2n+2}{n}>\binom{2n}{n}$等價於$p>\sqrt{\dfrac{n+2}{4n+2}}$，代入$p=\dfrac{r}{1+r}$，即得$r>\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4n+2}{n+2}}-1}$。

Q.E.D.

以$n=4$為例，即為$r>\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\approx 1.366$，以下繪出$r=1.37$時的$P_{m,4}(1.37)$的圖形，確有$P_{6,4}(1.37)\approx 0.250$略大於$P_{4,4}(1.37)\approx 0.248$，整段圖形為先鋸齒(略為)上升再鋸齒下降的樣貌。



在完成充分條件的估算與證明後，未來希望更精確地描述$P_{m,n}(r)$先有鋸齒上升趨勢再轉為鋸齒下降趨勢的充分必要條件。

柒、 結論與展望

我們從高中教材的題目出發，利用機率的二項分布與組合公式，成功從原命題5×3的街道方格推廣至任意$m\times n$的街道方格，求得**兩人的相遇機率 $P_{m,n}$**(**定理** 1.1、1.2 與 1.3)。

雖然$m+n$為偶數時的相遇點型態與奇數時有顯著不同，然而**定理** 1.2($m+n$為偶數)和**定理** 1.3($m+n$為奇數)的$P_{m,n}$公式卻很相似，並發現**$m+n$ 為偶數時的相遇機率大於$(m-1)+n$ 為奇數時的相遇機率**，因此考慮在n值固定之下，將$P_{m,n}$隨著m值($m\geq n$)增加而變化的數據繪製成折線圖，其呈現出一減一增**鋸齒狀的下降趨勢**，我們並在**定理** 3.2 與 3.3 完整證明了這個性質。

接著我們考慮另一個面向，當$m+n$為定值時($m\geq n$)，什麼樣的m,n可以得到最大的相遇機率$P_{m,n}$呢？我們猜想是m越接近n時(即街道方格越接近正方形)，將數據繪成圖表，意外發現二個特例($P_{3,1}=P_{2,2}$與$P_{4,1}>P_{3,2}$)，除此之外此猜想都是正確的！利用**定理** 3.4 與 3.5 證明相遇機率的遞減性，而得到**定理** 3.6：在$m+n$為大於5的定值時，**街道方格越接近正方形，相遇機率越大！**

完成原命題$P_{m,n}$的性質探討之後，我們在好奇心的驅使之下，改變兩人在分岔路口選擇前進方向之機率，以類似但更複雜的推導過程求得**兩人的相遇機率 $P_{m,n}(r)$**(**定理** 2.1、2.2 與 2.3)，其中r為在分岔路口選擇前進方向機率的比值。

不意外地，我們發現**定理** 2.2($m+n$為偶數)和**定理** 2.3($m+n$為奇數)的$P_{m,n}(r)$公式亦很相像，然而**$m+n$ 為偶數時的相遇機率不一定大於$(m-1)+n$ 為奇數時的相遇機率**，我們在**定理** 2.4 給出了兩者大小關係的充要條件。

接下來研究$P_{m,n}(r)$的性質。給定m,n之值($m\geq n$)，當$m+n$為偶數時，**$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在r接近但略小於$\dfrac{m}{n}$處**；**當$m+n$為奇數時，$P_{m,n}(r)$ 的最大值出現在r接近但略大於$\dfrac{m}{n}$處**。上述兩個觀察與猜想，我們提出合理的代數推論，未來希望完成嚴謹的證明。

另一方面，在給定n值與r值之下，我們研究了$P_{m,n}(r)$隨著m值($m \geq n$)增加的圖形的多種樣貌，**當$r \leq 1$時**，由定理2.4知$P_{m,n}(r)$圖形有三種形態：**全程遞減、鋸齒狀下降再轉為遞減、全程鋸齒狀下降趨勢**；**當$r > 1$時**，$P_{m,n}(r)$圖形有二種形態：**全程鋸齒狀下降趨勢、先鋸齒上升趨勢再轉為鋸齒下降趨勢**，我們給出了$P_{m,n}(r)$先鋸齒狀上升趨勢再轉為鋸齒狀下降趨勢的**充分條件**。

未來除了繼續探究$P_{m,n}(r)$的性質之外，亦想考慮兩人的行進速率不一的情形，這將導致相遇點位置隨著速率、m、n而變化，我們好奇是否存在簡潔的相遇機率公式？另外，亦想將本作品的平面街道方格推廣到三維空間中的格線行走，相信其中亦將存在很有意思的性質！

捌、 參考文獻

一、徐清朗，徐氏高中數學規劃(二)，光朗出版社，第3.3−30頁，2014年。
二、許志農主編，選修數學(甲)上，龍騰文化，第23頁至27頁，2014年。
三、盧開澄，組合數學，第二版，儒林圖書公司，第38頁，1993年。

附錄

引理 *A*

當 $k \ge n \ge 2$ 時，$\binom{2k}{n-2} + 2\binom{k}{n} < \binom{2k}{n}$ 。

【證明】

$$\frac{\binom{2k}{n-2}}{\binom{2k}{n}} = \frac{(n-1)\,n}{(2k-n+1)(2k-n+2)} < \frac{n-1}{2k-n+1} \text{ ，}$$

$$\frac{2\binom{k}{n}}{\binom{2k}{n}} = \frac{2\times(k-n+1)\,(k-n+2)\ldots(k-1)\,k}{(2k-n+1)(2k-n+2)\ldots(2k-1)\,2k}$$

$$= \frac{(k-n+1)}{(2k-n+1)} \times \frac{(k-n+2)}{(2k-n+2)} \times\ldots\times \frac{(k-1)}{(2k-1)}$$

$$\le \frac{k-n+1}{2k-n+1} \text{ ，}$$

兩式相加，即得

$$\frac{\binom{2k}{n-2} + 2\binom{k}{n}}{\binom{2k}{n}} < \frac{(n-1)+(k-n+1)}{2k-n+1} = \frac{k}{2k-n+1} < 1 \text{ ，}$$

即 $\binom{2k}{n-2} + 2\binom{k}{n} < \binom{2k}{n}$ 。 **Q.E.D.**

引理 B

當 $h>n\geq 2$ 時，$\binom{2h-1}{n-2}+2\binom{h}{n}<\binom{2h-1}{n}$ 。

【證明】

$$\frac{\binom{2h-1}{n-2}}{\binom{2h-1}{n}}=\frac{(n-1)\,n}{(2h-n)(2h-n+1)}<\frac{n}{2h-n+1}\ ,$$

$$\frac{2\binom{h}{n}}{\binom{2h-1}{n}}=\frac{2\times(h-n+1)\,(h-n+2)(h-n+3)\ldots(h-1)\,h}{(2h-n)(2h-n+1)(2h-n+2)\ldots(2h-2)(2h-1)}$$

$$\leq\frac{(h-n+2)}{(2h-n+1)}\times\frac{(h-n+3)}{(2h-n+2)}\times\ldots\times\frac{(h-1)}{(2h-2)}\times\frac{h}{(2h-1)}$$

$$\leq\frac{h-n+2}{2h-n+1}\ ,$$

兩式相加，即得

$$\frac{\binom{2h-1}{n-2}+2\binom{h}{n}}{\binom{2h-1}{n}}<\frac{n+(h-n+2)}{2h-n+1}=\frac{h+2}{2h-n+1}\leq 1\ ,$$

（因為 $2h-n+1=h+(h-n)+1\geq h+2$ 。）

故 $\binom{2h-1}{n-2}+2\binom{h}{n}<\binom{2h-1}{n}$ 。 **Q.E.D.**

引理 C

設 $k \geq 2$，對 $s = 0, 1, 2, \ldots, k-2$，皆有

$$\binom{2k}{k-s-1} + 2\binom{k}{s} \leq \binom{2k}{k-s} \text{。}$$

其中等號成立的條件是 $k = 2$ 且 $s = 0$。

【證明】

$$\frac{\binom{2k}{k-s-1}}{\binom{2k}{k-s}} = \frac{k-s}{k+s+1} \text{，}$$

$$\frac{2\binom{k}{s}}{\binom{2k}{k-s}} = \frac{2 \times k!}{s!(k-s)!} \times \frac{(k-s)!(k+s)!}{(2k)!}$$

$$= 2 \times \frac{(s+1)(s+2)\ldots(k-1)\,k\,(k+1)\ldots(k+s-1)(k+s)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+s)(k+s+1)\ldots(2k-1)(2k)}$$

$$= \frac{(s+1)}{(k+s+1)} \times \frac{(s+2)}{(k+s+2)} \times \ldots \times \frac{(k-1)}{(2k-1)}$$

$$\leq \frac{s+1}{k+s+1}$$ ，其中等號成立於 $s = k-2$ 時。

兩式相加，即得

$$\frac{\binom{2k}{k-s-1} + 2\binom{k}{s}}{\binom{2k}{k-s}} \leq \frac{k-s}{k+s+1} + \frac{s+1}{k+s+1} = \frac{k+1}{k+s+1} \text{，}$$

而 $\dfrac{k+1}{k+s+1} \leq 1$，等號成立於 $s = 0$ 時。

因此得證 $\binom{2k}{k-s-1} + 2\binom{k}{s} \leq \binom{2k}{k-s}$，等號成立的條件是 $s = 0$ 且 $k = 2$。 **Q.E.D.**

引理 D

設 $h\ge 4$，對 $t=1,2,3,\ldots,h-2$，皆有

$$\binom{2h-1}{h-t-1}+2\binom{h}{t}<\binom{2h-1}{h-t}\ 。$$

【證明】

$$\frac{\binom{2h-1}{h-t-1}}{\binom{2h-1}{h-t}}=\frac{h-t}{h+t}\ ，\text{-------}①$$

$$\frac{2\binom{h}{t}}{\binom{2h-1}{h-t}}=\frac{2\times h!}{t!\,(h-t)!}\times\frac{(h-t)!\,(h+t-1)!}{(2h-1)!}$$

$$=2\times\frac{(t+1)\,(t+2)\ldots(h-2)\,(h-1)\ \ h\ \ (h+1)\ldots(h+t-2)\,(h+t-1)}{(h+1)\,(h+2)\ldots(h+t-1)\,(h+t)\,(h+t+1)\ldots(2h-3)(2h-2)(2h-1)}$$

$$=\frac{t+1}{h+t}\times\frac{t+2}{h+t+1}\times\ldots\times\frac{h-2}{2h-3}\times\frac{h-1}{2h-2}\times\frac{h}{2h-1}\times 2\text{------}②$$

(1) 當 $t=h-2$ 時，②式等於 $\frac{h}{2h-1}$，①式為 $\frac{h-t}{h+t}=\frac{2}{2h-2}$，

兩式相加即得

$$\frac{\binom{2h-1}{h-t-1}+2\binom{h}{t}}{\binom{2h-1}{h-t}}=\frac{h}{2h-1}+\frac{2}{2h-2}<\frac{h}{2h-2}+\frac{2}{2h-2}=\frac{h+2}{2h-2}\le 1\ 。（因為\ h\ge 4）$$

(2) 當 $t=1,2,3,\ldots,h-3$ 時，

$$②式=\frac{t+1}{h+t}\times\frac{t+2}{h+t+1}\times\ldots\times\frac{h-2}{2h-3}\times\frac{h}{2h-1}<\frac{t+1}{h+t}$$

①式與②式相加即得

$$\frac{\binom{2h-1}{h-t-1}+2\binom{h}{t}}{\binom{2h-1}{h-t}}<\frac{h-t}{h+t}+\frac{t+1}{h+t}=\frac{h+1}{h+t}\le 1$$

綜合以上(1)和(2)，得證 $\binom{2h-1}{h-t-1}+2\binom{h}{t}<\binom{2h-1}{h-t}$ 。 **Q.E.D.**

附件：程式模擬

我們撰寫程式，以 Matlab 模擬兩人相遇情形，計算相遇比率。我們設定抽樣10次，每次抽樣樣本數為10000個，以下為若干模擬結果：

1. 當街道方格 $m=7$ ，$n=3$時，相遇機率 $P_{m,n}(r)$ 的理論值與模擬值：

	理論值	模擬值									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=1$	.1289	.1240	.1310	.1369	.1331	.1314	.1223	.1308	.1271	.1246	.1321
$r=0.5$	.0201	.0182	.0195	.0197	.0189	.0213	.0194	.0210	.0205	.0217	.0218
$r=2$	.2720	.2699	.2722	.2690	.2660	.2722	.2745	.2671	.2735	.2618	.2750

2. 當街道方格 $m=6$ ，$n=3$時，相遇機率 $P_{m,n}(r)$ 的理論值與模擬值：

	理論值	模擬值									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=1$	.0938	.0879	.0968	.0909	.0919	.0987	.0976	.0954	.0918	.0988	.0930
$r=0.5$	.0190	.0174	.0189	.0189	.0198	.0189	.0176	.0190	.0170	.0168	.0202
$r=2$	.1637	.1661	.1616	.1684	.1704	.1558	.1588	.1633	.1580	.1659	.1610

Matlab 程式碼

```
% 街道方格，甲從(0,0)到(m,n)，乙從(m,n)到(0,0)，
% 在分岔路口選擇前進方向的機率比值(水平/鉛直)為r，
% 抽樣times次，每次的樣本數為L，
% 輸出各次抽樣的相遇機率s./L

clear;clc;
m = 6;                  % 輸入 m 值
n = 3;                  % 輸入 n 值
r = 2;                  % 輸入 r 值
times = 10;             % 輸入 抽樣次數 times 值
L = 10000;              % 輸入 樣本數 L 值
s = zeros(1,times);     % 累積遇到次數的起始值為0，使用1列times行的zeros矩陣
                        % 即 s=[0,0,...,0]


if mod(m+n,2)==0        % 當 m+n 為偶數時
k = 0.5*(m+n);          % 先算 k 值

for j = 1:times         % 使用指標 j 標示現在是第 j 次抽樣，預計抽樣times次
for i = 1:L             % 每次抽樣的樣本數為 L，本迴圈跑 L 次
    a = random('Binomial',k,1/(1+r));      % 輸出二項分布隨機變數 a
                                           % 代表甲已向上 a 格，走到點(k-a,a)
    b = random('Binomial',k,1/(1+r));      % 輸出二項分布隨機變數 b
                                           % 代表乙已向下 b 格，走到點(k-n+b,n-b)
    if a > n            % 如果 a 超過 n 的話，代表超出街道上緣，
        a = n;          %  a 應修正為 n，即走到點(k-n,n)
    end
    if b > n            % 如果 b 超過 n 的話，代表超出街道下緣，
        b = n;          %  b 應修正為 n，即走到點(k,0)
    end
    if a + b == n       % 若 a+b 為 n 的話，代表 甲乙相遇
        s(j) = s(j)+1;  % 矩陣 s 的第 j 項的值就加1
    end
end                     % 每次抽樣的樣本數為 L，該迴圈跑 L 次
j = j+1;                % 跑完 L 次迴圈後，代表完成一次抽樣，讓指標 j 加 1
                        % 以進行下一次抽樣
End                     % 抽樣迴圈的結尾
```

```
Else                        % m+n為奇數時
h = 0.5*(m+n+1);            % 先算 h 值

for j = 1:times             % 使用指標 j 標示現在是第 j 次抽樣，預計抽樣times次
for i = 1:L
    a = random('Binomial',h-1,1/(1+r));
    b = random('Binomial',h-1,1/(1+r));
    a1= 0.5*random('Binomial',1,1/(1+r));      % 甲最後一步只走了半個單位長
    b1= 0.5*random('Binomial',1,1/(1+r));      % 乙最後一步只走了半個單位長
    a = a + a1;
    b = b + b1;
    if a > n
        a = n;
    end
    if b > n
        b = n;
    end
    if a + b == n
        s(j) = s(j)+1;
    end
end
j = j+1;
end                         % 抽樣迴圈的結尾

end                         %  If else 的結尾

A1 = [m, n, r];             % 令矩陣為A1
formatSpec = '當街道方格為 (m=%0.0f, n=%0.0f) 在分岔路口選擇前進方向的機率比值(水平/鉛
直)為 %2.3f ';
                            % 規定文件格式
fprintf(formatSpec,A1)      % 印出上述文字，r的小數點取到3位

fprintf('\n\n抽樣十次，相遇機率模擬值分別為   ')
                            % 印出文字
s./L                        % 輸出累積遇到次數矩陣 s ，除以樣本數 L 後，
                            % 即為相遇比率模擬值
```

【評語】010047

本作品討論在ｎｘｍ街道方格上，兩人分別從左下和右上角沿格線前進相遇之機率。作者一剛開始假設分叉路線的選擇機率相等，但最後可以推廣到任意機率ｐ和ｑ，並導出相遇機率的公式，探討ｍ＋ｎ奇偶對機率影響的性質。整個作品敘述分明而有條理，討論的內容也相當完整，但就數學的深度而言，這是個基礎組合問題的延伸。套用算幾不等式，並沒有太多深刻的數學技巧呈現是比較可惜的機會。