

# 2015 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 探討正  $n$  邊形的內接正三角形

得獎獎項 大會獎：三等獎

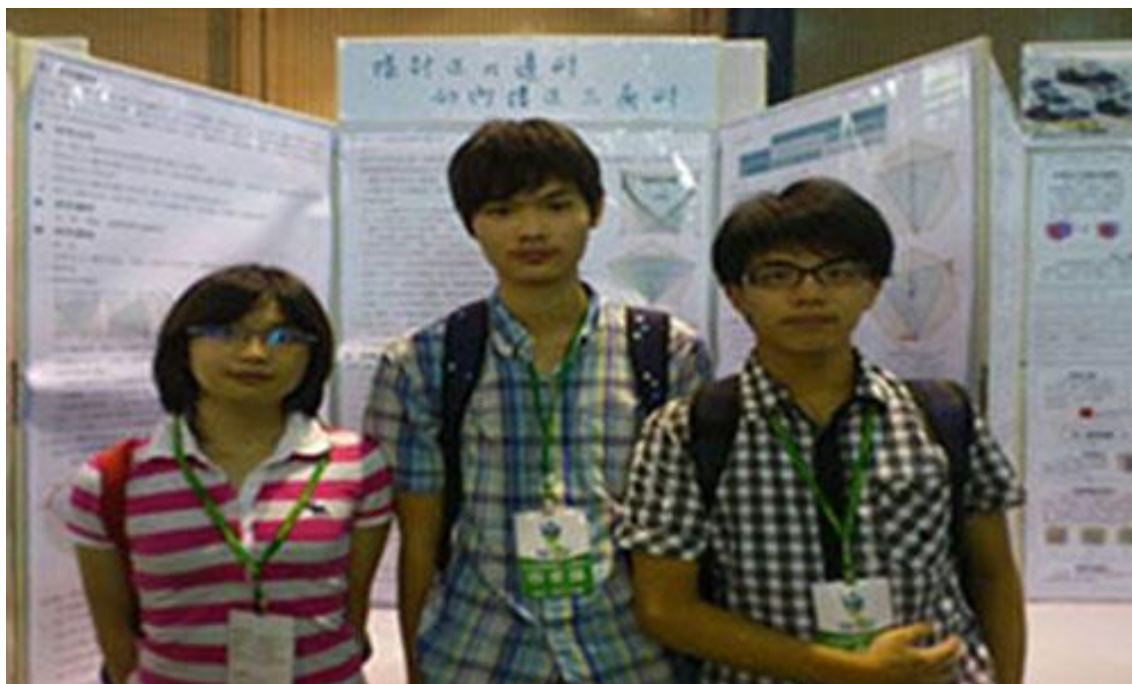
就讀學校 國立嘉義高級中學

指導教師 賴文雄

作者姓名 黃文祈、游唯筠、羅宇呈

關鍵字 正三角形、正  $n$  邊形、內接正三角形

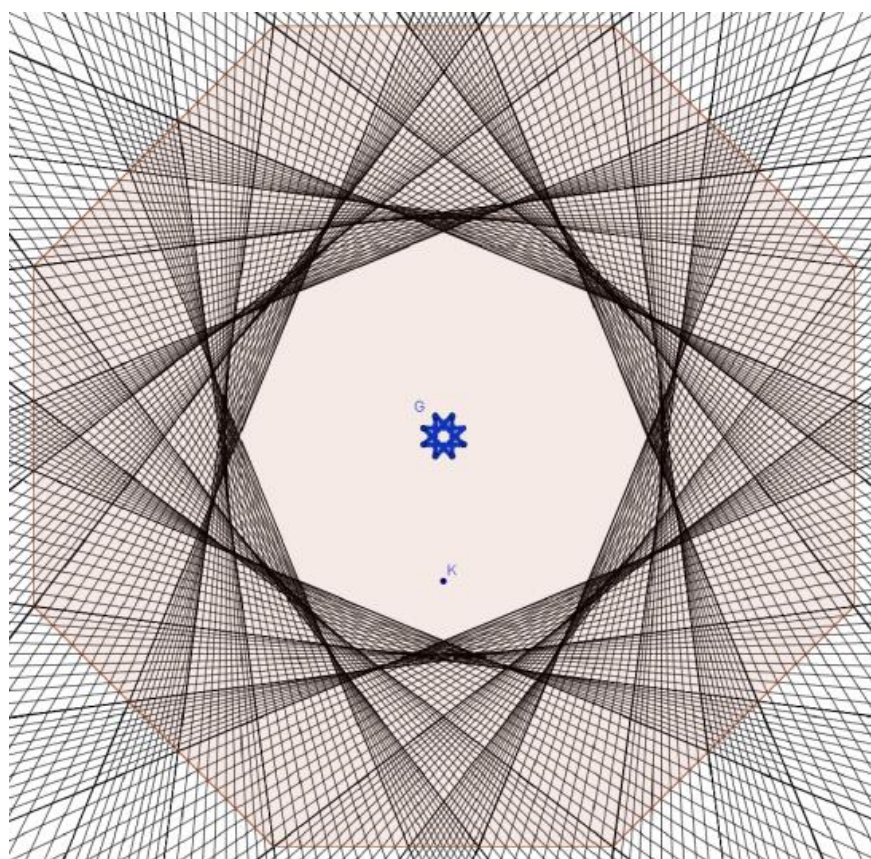
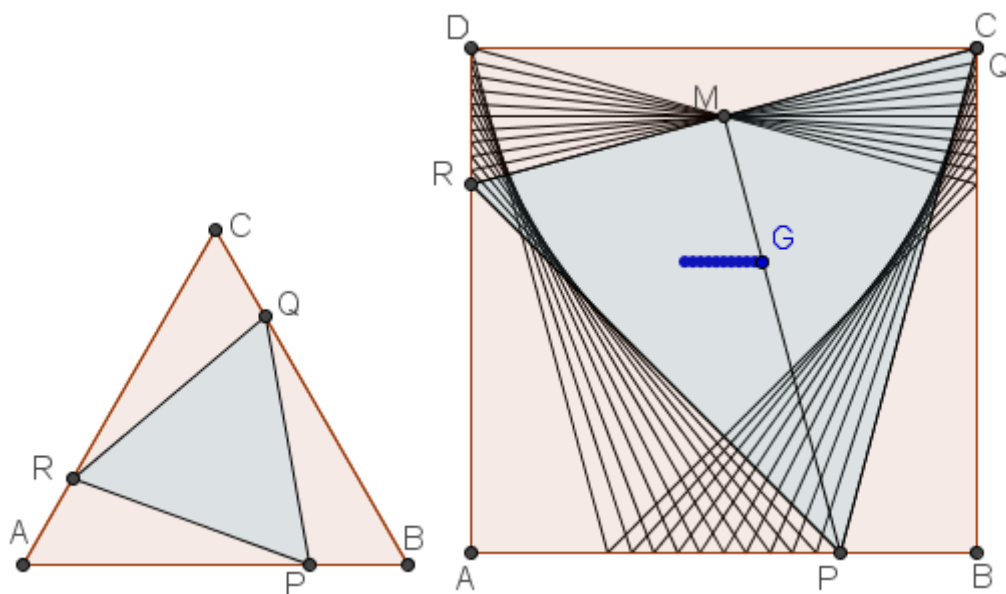
## 作者簡介



三個作者都是來自國立嘉義高級中學的三年級學生，懷抱著對數學的熱愛，他們在二年級的時候決定合作，對這個偶然發現的數學問題著手研究，對他們來說，在課業繁忙的高中生活中，自己有興趣的數學問題就成了放鬆心靈的好方法，在許多個周末以及下課的討論後，終於得到了漂亮的結論，而將心路歷程都記錄下來的，就是這一本作品說明書。

## 摘要

對於一個正 $n$ 邊形，若一正三角形三個頂點分別位於正 $n$ 邊形的三個不同邊上，則稱此正三角形為該正 $n$ 邊形的內接正三角形。本次科展的主題，就是探討正 $n$ 邊形的內接正三角形之作圖方法，以及作出的圖形中各種漂亮性質。



## Abstract

A regular polygon's inscribed equilateral triangle is defined as a regular triangle intersecting three different sides of a regular polygon at the triangle's vertices.

The purpose of this study is to discuss the ruler and compass construction of a regular polygon's inscribed equilateral triangle, and to further demonstrate the various properties of the constructed geometric figure.

## 壹、研究動機

題目是和同學討論 101 年學測考題時，所得到的靈感，原題目是在正三角形的每一個邊之兩個三等分點中各選一點連成三角形的問題，選項中說明只能連出兩個正三角形。接著，我們定義三個頂點分別在正 $n$ 邊形三個不同邊上的正三角形為此正 $n$ 邊形的內接正三角形，進而好奇的想知道正 $n$ 邊形之內接正三角形是否存在？可否作圖？故事就從這裡開始。

## 貳、研究目的

- 一、每一個正 $n$ 邊形是否皆有無限多個內接正三角形呢？
- 二、對於在正 $n$ 邊形的邊上的任意一點  $P$ ，是否恰能在其邊上找到唯一一組點  $Q$ 、 $R$ ，使得  $\triangle PQR$  為該正 $n$ 邊形的內接正三角形呢？
- 三、對於在正 $n$ 邊形的邊上的任意一點，找出它的內接正三角形的作圖方式。
- 四、將正 $n$ 邊形的每一個內接正三角形全都畫出後，研究畫出的圖形之特殊性質。

## 參、研究器材

紙、筆、電腦、以及繪圖軟體 Geogebra。

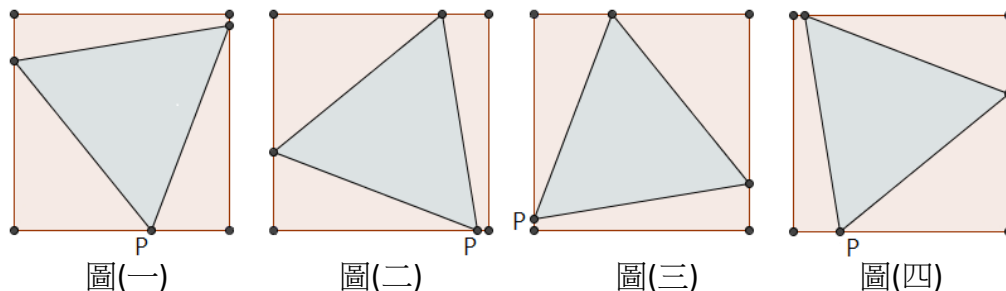
## 肆、研究過程(上)：標準型與作圖方式

### 一、唯一性

定理一(唯一性定理)：若在正 $n$ 邊形的邊上選定一點  $P$ ，則在任何正 $n$ 邊形中，以  $P$  為其中一頂點的內接正三角形最多只有一個。證明在「附錄、壹、一」。

### 二、標準型

(一) 標準型的構思：正方形的內接正三角形，有下列 4 種：



但圖(二)、圖(三)、圖(四)的狀況，只要將紙張旋轉就可以回到圖(一)，故考慮到另 2 頂點所在邊的對稱性，研究圖(一)的情形即可。在此，我們將該模式稱為「標準型」。  
註：「 $P$  點的所在邊」是「 $P$  點所在的正 $n$ 邊形的邊」的簡稱。

(二) 標準型的定義：令  $\delta(P, Q)$  表  $P$ 、 $Q$  兩點間所夾的完整邊數，依此類推。

若  $\delta(P, Q) = \delta(P, R)$ ，則稱  $P$  點所在的邊為正 $n$ 邊形的「標準型底邊」(簡稱「底邊」)，並將此模式稱為「以  $P$  為底的標準型」，而  $P$  為「標準型底邊上的點」。

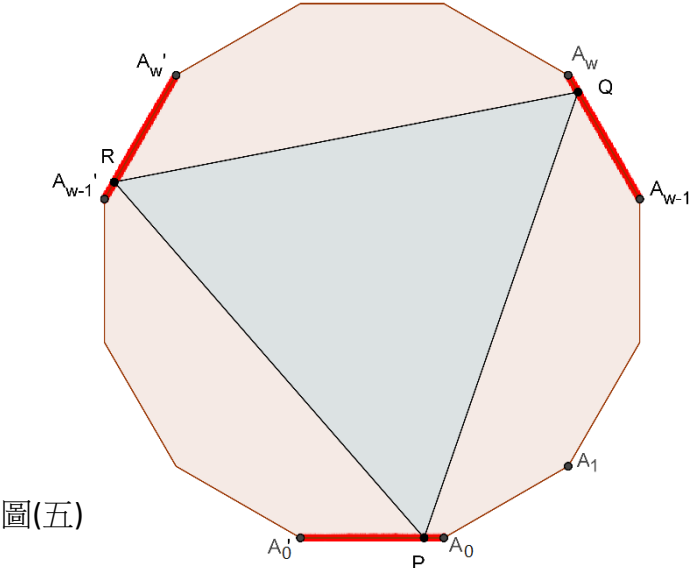
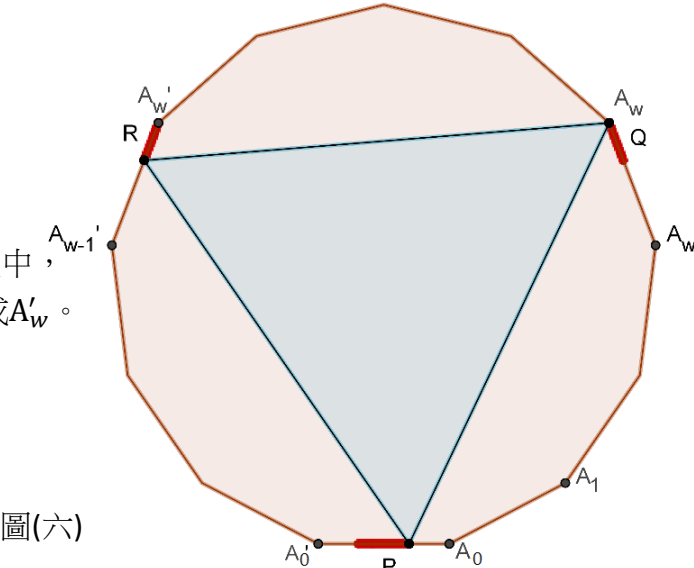
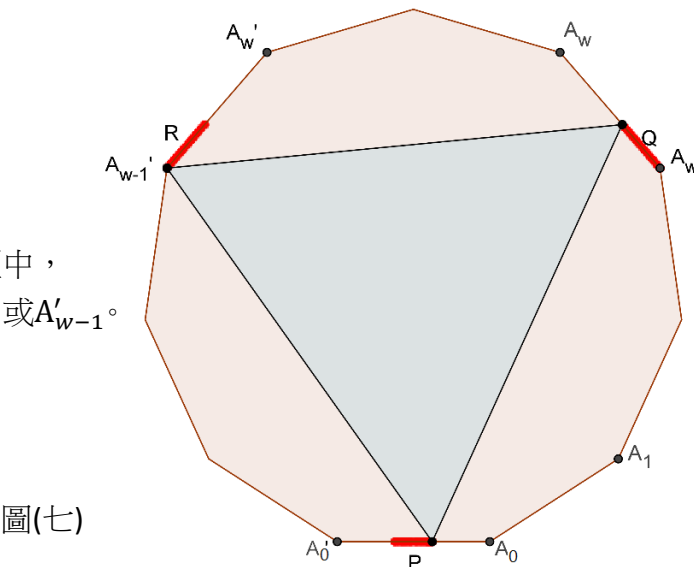
註(1)：為了方便起見，會出現「以  $Q$  為底的標準型」或「以  $R$  為底的標準型」，但主要還是以「以  $P$  為底的標準型」為主，探討  $P$  在底邊上移動時， $Q$ 、 $R$  的移動狀況。

註(2)：我們定義正 $n$ 邊形的內接正三角形  $\triangle PQR$  的頂點是依逆時針方向命名。

(三) 在此我們必須先假設，正 $n$ 邊形的內接正三角形存在連續性。也就是邊上任意找一點  $P$ ，均能在其邊上找到一組點  $Q$ 、 $R$ ，使得  $\triangle PQR$  是正 $n$ 邊形的內接正三角形。而當  $P$  點慢慢向右推移時， $Q$ 、 $R$  位置的變化是連續的。在肆之六，我們將提出具體證明。

(四) 定理二(標準型範圍定理)

設正 $n$ 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ ,  $i \in \mathbb{N}$ 且 $i < \frac{n}{2}$ , 則在以 $P$ 為底的標準型中, 若 $P \in \overline{A_0'A_0}$ , 則 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 、 $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ , 其中 $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

<p><math>n \equiv 0 \pmod{3}</math></p>	<p>P、Q、R 同時抵到正<math>n</math>邊形的頂點。</p>  <p>圖(五)</p>
<p><math>n \equiv 1 \pmod{3}</math></p>	<p>在以<math>P</math>為底的標準型中, <math>Q</math>或<math>R</math>只會抵到<math>A_w</math>或<math>A_w'</math>。</p>  <p>圖(六)</p>
<p><math>n \equiv 2 \pmod{3}</math></p>	<p>在以<math>P</math>為底的標準型中, <math>Q</math>或<math>R</math>只會抵到<math>A_{w-1}</math>或<math>A_{w-1}'</math>。</p>  <p>圖(七)</p>

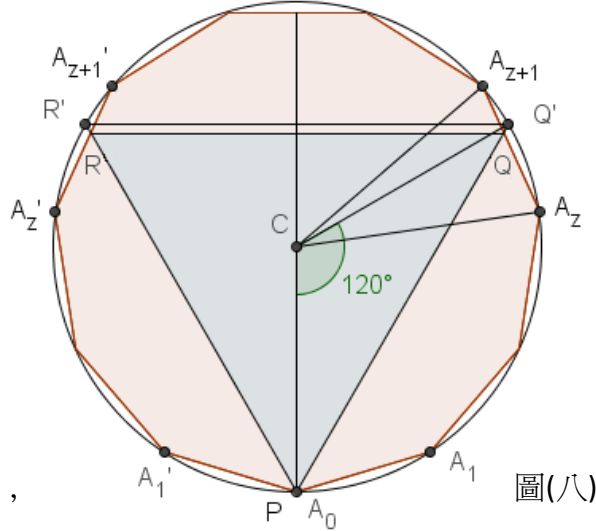
**證明**

1. Q、R 先頂到上頂點或下頂點

設  $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'$  是一個正  $n$  邊形，其中  $i \in \mathbb{N}$  且  $i \leq \frac{n}{2}$ ，

正  $n$  邊形的中心點為  $C$ ，而  $\triangle PQR$  是它的內接正三角形。

當  $P$  與  $A_0$  重合時，假設  $Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$  但  $Q \neq A_{z+1}$ 、 $R \in \overline{A_z'A_{z+1}'}$  但  $R \neq A_{z+1}'$ ，連  $\overline{PQ}$ 、 $\overline{PR}$  分別交該正  $n$  邊形的外接圓圓  $C$  於  $Q'$ 、 $R'$ ，則  $\triangle PQ'R'$  是一個以  $C$  為中心的正三角形，如圖(八)。



$\because Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$  且  $Q \neq A_{z+1}$ ，

$\therefore Q' \in \widehat{A_zA_{z+1}}$  且  $Q' \neq A_{z+1}$ ，

故  $\angle PCA_z \leq \angle PCQ' < \angle PCA_{z+1}$ ，

$$\Rightarrow z \cdot \frac{2\pi}{n} \leq \frac{2}{3}\pi < (z+1) \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{n}{3} - 1 < z \leq \frac{n}{3}，即 z = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor。$$

$$也就是 \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ 時} : z = \frac{n}{3} \text{ 且 } Q \text{ 與 } A_z \text{ 重合、} R \text{ 與 } A_z' \text{ 重合} \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ 時} : z = \frac{n-1}{3} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ 時} : z = \frac{n-2}{3} \end{cases}$$

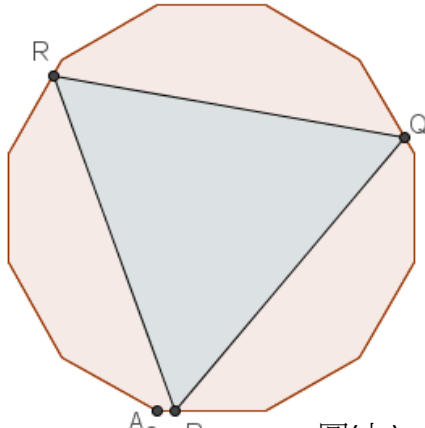
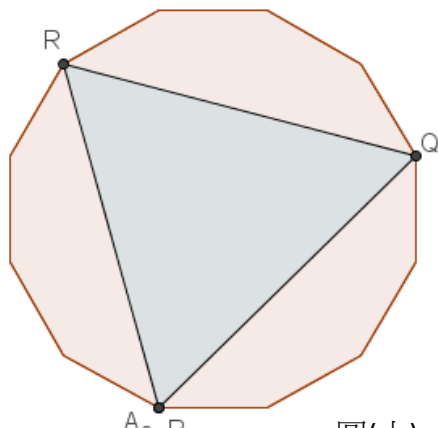
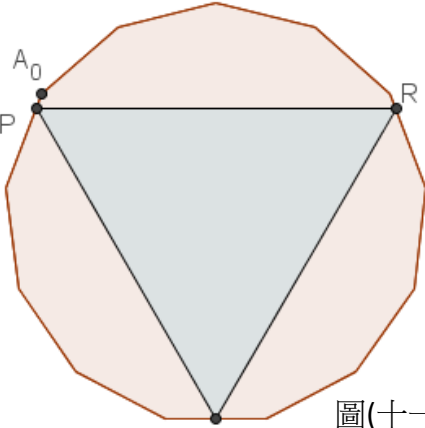
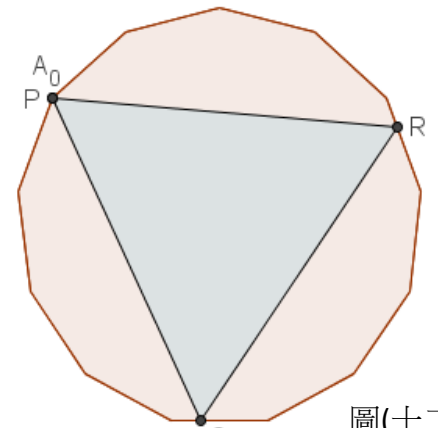
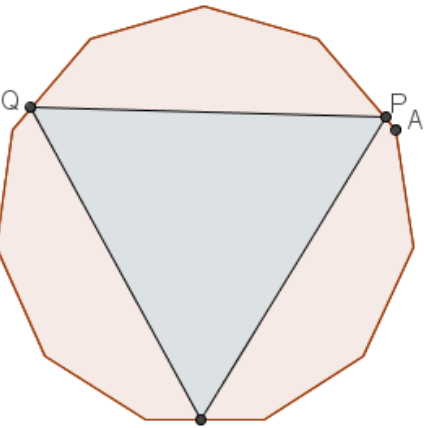
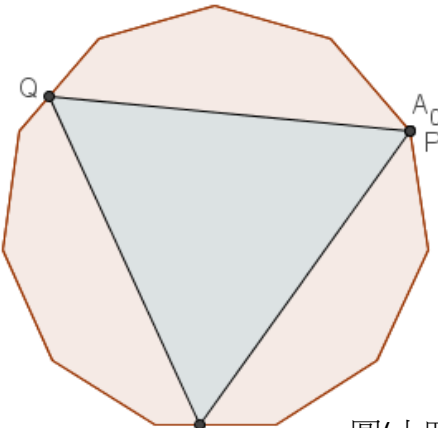
$$故 \delta(A_z, A_z') = n - 2z = \begin{cases} \frac{n}{3}，當 n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n+2}{3}，當 n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n+4}{3}，當 n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

將  $\triangle PQR$  逆時針旋轉一個不大的角度，使得  $P \in \overline{A_0A_1}$ 、 $Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$ 、

$R \in \overline{A_z'A_{z+1}'}$  (當  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ) 或  $R \in \overline{A_{z-1}'A_z'}$  (當  $n \equiv 0 \pmod{3}$ )

	$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$	底邊上的點
$n \equiv 0 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	$z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	$n - 2z - 1 = \frac{n}{3} - 1$	P、Q、R 皆可
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n-4}{3}$	$z = \frac{n-1}{3}$	$n - 2z - 2 = \frac{n-4}{3}$	Q
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$z - 1 = \frac{n-5}{3}$	$z = \frac{n-2}{3}$	$n - 2z - 2 = \frac{n-2}{3}$	R

若將圖形旋轉使標準型的底邊在最下方，則：

	這是標準型	將正三角形轉回P與A <sub>0</sub> 重合
$n \equiv 0 \pmod{3}$	 <p>圖(九) 以 P 為底</p>	 <p>圖(十) 三頂點同時抵到了正n邊形的頂點</p>
$n \equiv 1 \pmod{3}$	 <p>圖(十一) 以 Q 為底</p>	 <p>圖(十二) P 先抵到正n邊形較上方的頂點</p>
$n \equiv 2 \pmod{3}$	 <p>圖(十三) 以 R 為底</p>	 <p>圖(十四) P 先抵到正n邊形較下方的頂點</p>

由此得知，若將標準型底邊上的點定義回 P 時，也就是

$n \equiv 0 \pmod{3}$	皆不變		
$n \equiv 1 \pmod{3}$	Q→P	R→Q	P→R
$n \equiv 2 \pmod{3}$	R→P	P→Q	Q→R



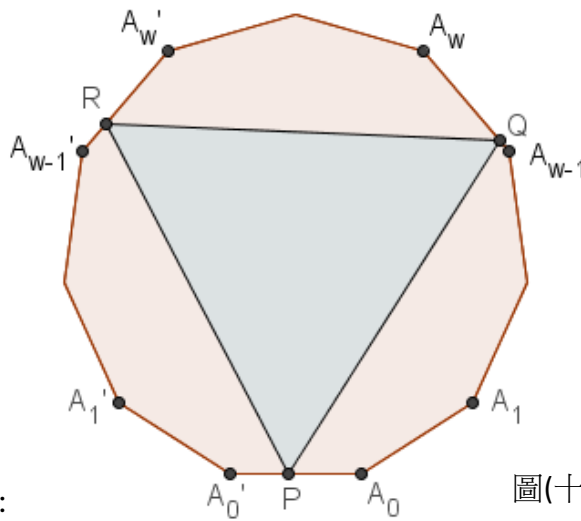
統合以上的結果，可以說明若將 $\triangle PQR$  慢慢地旋轉，則：

$n \equiv 0 \pmod{3}$	P、Q、R 同時抵到正 $n$ 邊形的頂點。
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$\because$ Q 或 R 在抵到正 $n$ 邊形較下方的頂點之前就脫離了以 P 為底的標準型， $\therefore$ 標準型中，Q 或 R 只會抵到正 $n$ 邊形的較上方的頂點。
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$\because$ Q 或 R 在抵到正 $n$ 邊形較上方的頂點之前就脫離了以 P 為底的標準型， $\therefore$ 標準型中，Q 或 R 只會抵到正 $n$ 邊形的較下方的頂點。

2. Q、R 兩點分別位於第幾個邊上：

將正 $n$ 邊形重新命名為 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A'_iA'_{i-1} \dots A'_2A'_1A'_0$ ,  $i \in \mathbb{N}$  且  $i < \frac{n}{2}$ ,

並把標準型底邊 $\overline{A_0'A_0}$ 上的內接正三角形頂點重新命名為 P, 其餘兩點為 Q、R。



由 1. 可得：

	$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$n \equiv 0 \pmod{3}$	$\frac{n}{3} - 1$	$\frac{n}{3} - 1$	$\frac{n}{3} - 1$
$n \equiv 1 \pmod{3}$	$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-1}{3}$
$n \equiv 2 \pmod{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-5}{3}$

我們定義兩個邊的位置差為「兩邊所夾的邊數+1」，

例如： $\overline{A_0'A_0}$ 與 $\overline{A_0A_1}$ 的位置差為 1， $\overline{A_0'A_0}$ 與 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的位置差為  $i$ ，  
而兩點的位置差為其分別位於的邊的位置差。

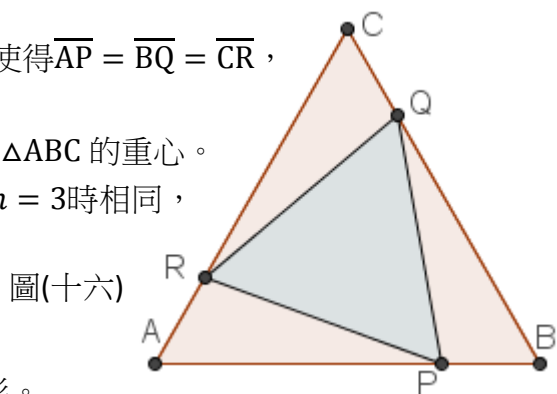
設  $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 、 $R \in \overline{A_{w-1}'A_w'}$ ，即 P、Q 的位置差 = P、R 的位置差 =  $w$ 。

$$\text{故 } w = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n-1}{3}, & \text{當 } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n+1}{3}, & \text{當 } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}, \text{ 即 } w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

(五) 定理三：每一個內接正三角形 PQR，皆可歸為以某一頂點為底的標準型。也就是說，不可能會有 $\delta(P, Q)$ 、 $\delta(P, R)$ 、 $\delta(Q, R)$ 兩兩相異的情況發生。證明在「附錄、壹、三」。

### 三、正三角形 ABC 內接正三角形的情況

- (一) 分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  上各取一點 P、Q、R，使得  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$ ，則  $\triangle PQR$  就是  $\triangle ABC$  的內接正三角形。
- (二) 這些內接正三角形的重心是同一點，也就是  $\triangle ABC$  的重心。
- (三) 當  $n$  是 3 的倍數時，其內接正三角形模式與  $n = 3$  時相同，證明見「附錄、壹、二」。



圖(十六)

### 四、正方形 ABCD 內接正三角形的情況

- (一) 我們討論以 P 為標準型底邊  $\overline{AB}$  上之點的情形。

設正方形 ABCD 邊長為 1， $\overline{AP} = \alpha$ ， $\overline{AR} = m\alpha$ ， $\overline{QQ'} // \overline{AB}$  且  $Q'$  在  $\overline{AD}$  上，其中  $2 - \sqrt{3} \leq \alpha \leq \sqrt{3} - 1$  (極值分別發生在  $R = D$  及  $Q = C$  的情況)，

$$\text{則 } \overline{QR} = \overline{PR} = \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2}$$

$$\text{故 } \overline{Q'R} = \sqrt{\overline{QR}^2 - \overline{QQ'}^2} = \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}$$

$$\therefore \overline{BQ} = \overline{AR} \pm \overline{RQ'} = m\alpha \pm \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}$$

$$\text{又 } \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 + [m\alpha \pm \sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1}]^2 = [\sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2}]^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + m^2\alpha^2 \pm 2m\alpha\sqrt{(m^2 + 1)\alpha^2 - 1} + (m^2 + 1)\alpha^2 - 1 = (m^2 + 1)\alpha^2$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1)^2\alpha^2 - 4(m^2 + 1)\alpha + 4 = 4m^2[(m^2 + 1)\alpha^2 - 1]$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1)(1 - 3m^2)\alpha^2 - 4(m^2 + 1)\alpha + 4(m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 3m^2\alpha^2$$

$$\Rightarrow 2 - \alpha = \sqrt{3}m\alpha \text{ (因為 } \alpha < 1 \text{ 且 } m > 0 \text{)}，\text{ 故 } m = \frac{2}{\sqrt{3}\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由(一)導出的式子，利用繪圖軟體可畫出所有以 P 為底的內接正三角形。

由此，我們發現  $\overline{QR}$  的中點 M 是個定點。

**證明** 設  $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $D(0,1)$

$$\therefore \overline{BQ} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{BP}^2}$$

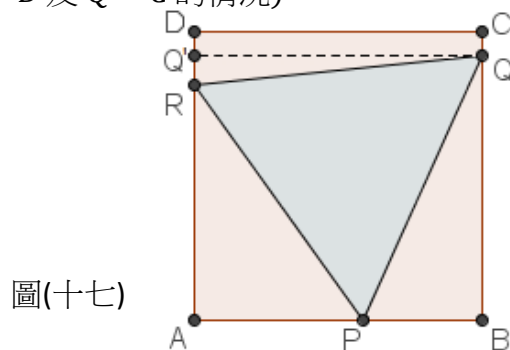
$$= \sqrt{\alpha^2 + \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{\alpha} - 1 \right) \cdot \alpha \right]^2 - (1 - \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}} = \frac{\alpha + 1}{\sqrt{3}}$$

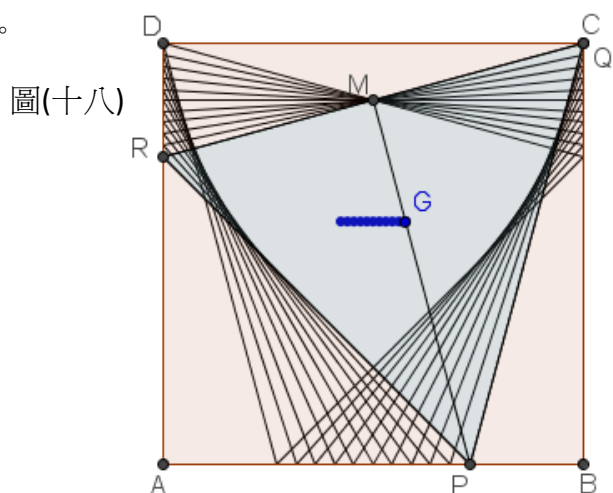
$$\text{又 } \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AR} + \overline{AQ}) = \frac{1}{2} \left[ \left( 0, \frac{2 - \alpha}{\sqrt{3}} \right) + \left( 1, \frac{\alpha + 1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$\therefore M$  是一固定點。

- (二) 當 P 為標準型底邊  $\overline{AB}$  上的點時，所有內接正三角形重心的軌跡是一條平行  $\overline{AB}$  的線段。我們將在肆之五的(二)說明。



圖(十七)



圖(十八)

## 五、當 $n \geq 5$ 時，探討正 $n$ 邊形內接正三角形的情況

(一) 起初，對於正五邊形的內接正三角形，我們也想採取 $n = 4$ 時的戰術，也就是先計算再作圖，但經過一個星期的奮鬥後，大家的共識還是「找找其他的方法吧」，太恐怖了。所以，我們認為當務之急是先找出作圖方式，圖形性質的計算就會容易得多。

(二) 定點 K 的發現：

在正方形內接正三角形的圖形中(以 P 為底的標準型)， $G_0$ 、 $G_1$ 則表示兩內接正三角形的重心。

$\therefore \overline{QR}$ 的中點 M 是定點，

$\therefore$ 當 P 從 $P_0$ 移動到 $P_1$ 時， $\triangle MG_0G_1 \sim \triangle MP_0P_1$ 。

$\therefore$ P 在底邊上移動，

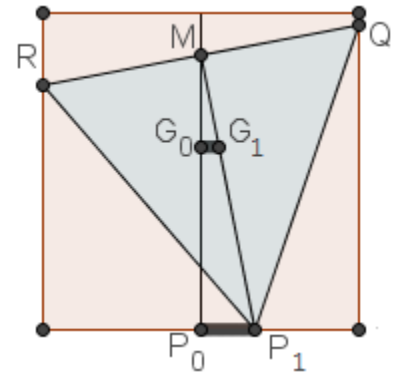
$\therefore$ 重心 G 在平行底邊的一條線段上移動。

因為「重心 G 的軌跡是一條平行 $\overline{AB}$ 的線段」的結論很漂亮，而在正五邊形內接正三角形的圖形中，P 點也在底邊上移動，那內接正三角形的重心 G 軌跡也會是一條平行底邊的線段嗎？

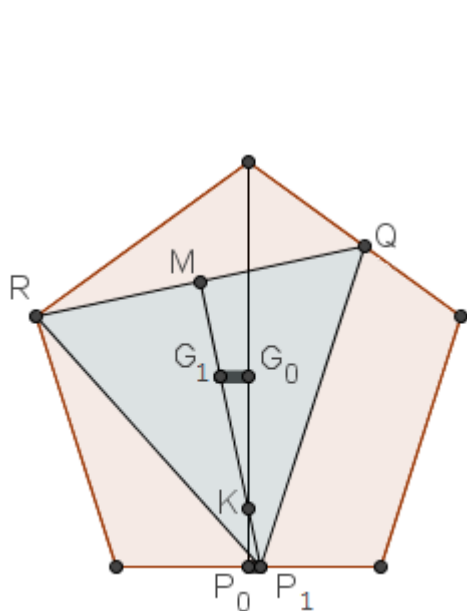
$n = 4$ 時會對，是因為 M 是定點。那如果 $n = 5$ 以上會對，一定是有一個點 K 扮演著 M 的角色。

那麼 K 在哪裡？

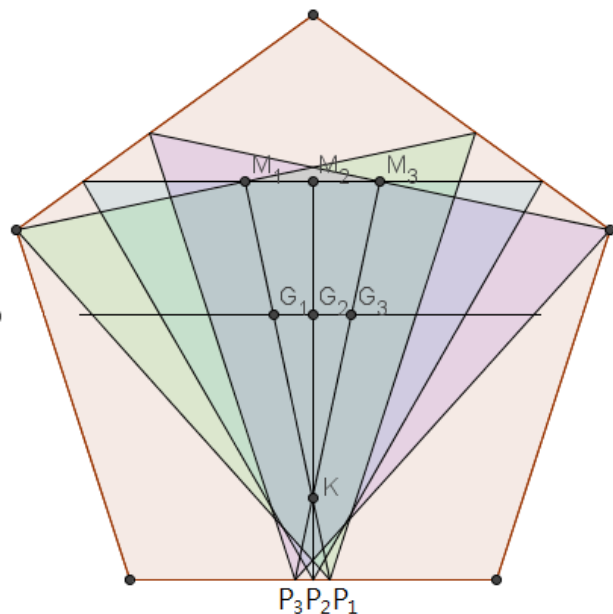
$n = 4$ 時會對，是因為 $\triangle MG_0G_1 \sim \triangle MP_0P_1$ ；那麼若 K 是底邊對稱軸與 $\overline{QR}$ 上的中線 $\overline{P_1M}$ 的交點，要解釋 $\triangle KG_0G_1 \sim \triangle KP_0P_1$ 就不難了。也就是說，如此要解釋「重心 G 的軌跡是一條平行底邊的線段」會很簡單，如圖(二十)。



圖(十九)



圖(二十)



圖(二十一)

接著，我們做了一個小小實驗，看看 K 點是否有可能存在，如圖(二十一)。

這三個特殊的內接正三角形，由繪圖軟體得知，重心都剛好在同一直線上。

而且 $\overline{P_iM_i}$ 與底邊對稱軸的交點皆重合，也就是說，K 點是有可能存在的！

接著我們在 $\overline{P_1P_3}$ 之間任意找一點 P，並作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 Q 與 R 在正 $n$ 邊形的邊上，則經由操作繪圖軟體，我們發現，畫出的 $\triangle PQR$  恰好都是正三角形！

即那些以 P 為底的內接正三角形，其 $\angle P$ 的角平分線與底邊對稱軸的交點恆為定點 K。

## 六、K 點定理

定理四(K 點定理)：每一個以 P 為底的內接正三角形，其 $\angle P$ 的角平分線與底邊對稱軸的交點恆為定點 K。

**證明**

(一) 建立平面直角坐標系，如圖(二十二)所示

設 Q、R 分別位於  $y = -ax + b$  及  $y = ax + b$ ，

由圖可知  $P(k \tan \theta, 0)$ 。

$$R : \begin{cases} \overline{PR} : y = -\tan(60^\circ - \theta)(x - k \tan \theta) \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\tan(60^\circ - \theta)(x - k \tan \theta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k \tan(60^\circ - \theta) \tan \theta - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{PR} &= \left[ k \tan \theta - \frac{k \tan(60^\circ - \theta) \tan \theta - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a} \right] \sec(60^\circ - \theta) \\ &= \frac{b + ak \tan \theta}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)} \end{aligned}$$

$$Q : \begin{cases} \overline{PQ} : y = \tan(60^\circ + \theta)(x - k \tan \theta) \\ y = -ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -ax + b = \tan(60^\circ + \theta)(x - k \tan \theta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k \tan(60^\circ + \theta) \tan \theta + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a}$$

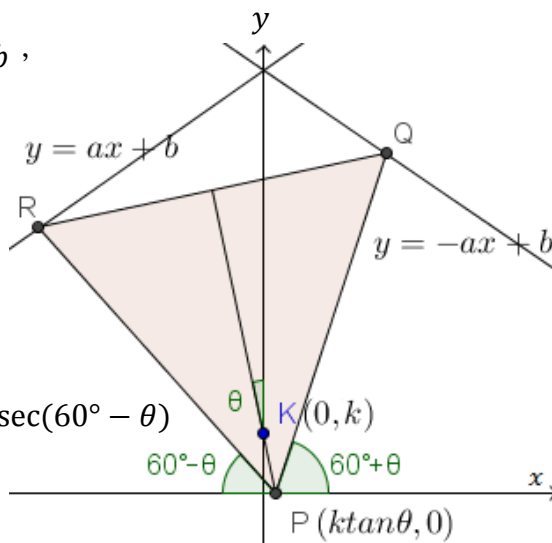
$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{PQ} &= \left[ \frac{k \tan(60^\circ + \theta) \tan \theta + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a} - k \tan \theta \right] \sec(60^\circ + \theta) \\ &= \frac{b - ak \tan \theta}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)} \end{aligned}$$

$$\text{當 } \overline{PQ} = \overline{PR} \text{ 時， } \frac{b - ak \tan \theta}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)} = \frac{b + ak \tan \theta}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)}$$

$$\Rightarrow ak \tan \theta [2 \sin 60^\circ \cos \theta + 2a \cos 60^\circ \cos \theta] = -b[2 \cos 60^\circ \sin \theta - 2a \sin 60^\circ \sin \theta]$$

$$\Rightarrow ak \sin \theta (\sqrt{3} + a) = b(\sqrt{3}a - 1) \sin \theta$$

$$\Rightarrow k = \frac{b(\sqrt{3}a - 1)}{a(a + \sqrt{3})}$$



圖(二十二)

(二) 設 Q、R 分別位於  $x = c$  及  $x = -c$ ，如圖(二十三)

$$\overline{PQ} = (c - k \tan \theta) \sec(60^\circ + \theta)$$

$$\overline{PR} = (c + k \tan \theta) \sec(60^\circ - \theta)$$

當  $\overline{PQ} = \overline{PR}$  時：

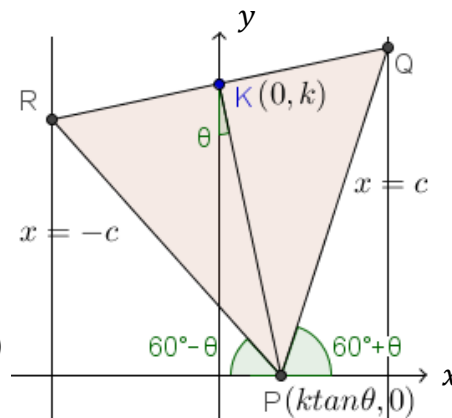
$$c \cos(60^\circ - \theta) - k \tan \theta \cos(60^\circ - \theta) = c \cos(60^\circ + \theta) + k \tan \theta \cos(60^\circ + \theta)$$

$$\Rightarrow k \tan \theta (2 \cos \theta \cos 60^\circ) = c(2 \sin 60^\circ \sin \theta)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{3}c$$

由(一)、(二)可知， $k$  值與  $\theta$  無關，也就是與 P 點的位置無關，亦即定點 K 是存在的。

圖(二十三)



也就是說，只要任意在 $x$ 軸上找一點 $P$ ，並作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 $Q$ 與 $R$ 在正 $n$ 邊形的邊上，則 $\triangle PQR$ 就是該正 $n$ 邊形的內接正三角形。此外，當 $P$ 點慢慢向右推移時， $Q$ 、 $R$ 位置的變化明顯地是連續的，這證明了肆之二的(三)所假設的連續性。

再回到肆之一的唯一性定理，更可以說明所有的內接正三角形都是由 $K$ 點畫出來的，即利用 $K$ 點作圖，不會漏畫任何一個內接正三角形。

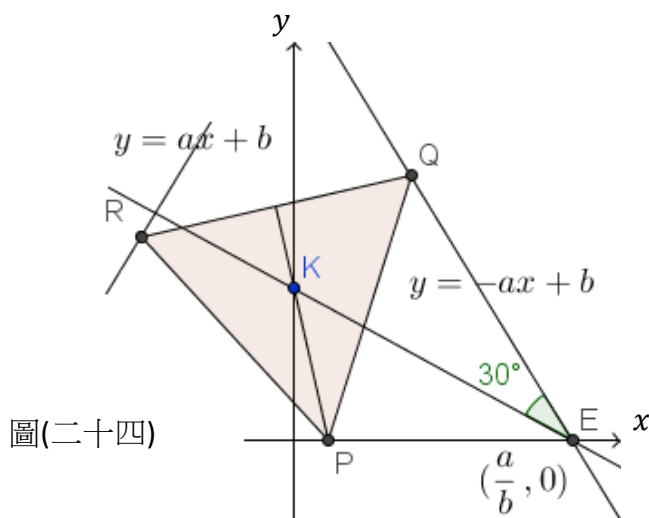
## 七、 $K$ 點的特殊性質

定理五：若正 $n$ 邊形的內接正三角形 $PQR$ 是以 $P$ 為底的標準型，設 $Q$ 所在邊與底邊延長後相交於 $E$ ，則 $K$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $E$ 四點共圓。

**證明**

因 $\angle KPQ = 30^\circ$ ，故只須證明 $\angle QEK = 30^\circ$ 即可。也就是以 $E$ 為中心將 $\overline{QE}$ 朝正 $n$ 邊形的中心旋轉 $30^\circ$ ，其與底邊對稱軸的交點即為 $K$ 點。

(一) 設 $Q$ 、 $R$ 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ ，如圖(二十四)



圖(二十四)

因為 $E$ 點是 $y = -ax + b$ 與 $x$ 軸的交點 $\Rightarrow E\left(\frac{b}{a}, 0\right)$

令 $\overline{KE}$ 之斜率為 $m$ ，則 $\frac{m - (-a)}{1 - (-a)m} = \tan 30^\circ$

所以 $m = \frac{1 - \sqrt{3}a}{a + \sqrt{3}}$

故 $\overline{KE}$ ： $y = \frac{1 - \sqrt{3}a}{a + \sqrt{3}}\left(x - \frac{b}{a}\right)$ ，交 $y$ 軸於 $K\left(0, \frac{b(\sqrt{3}a - 1)}{a(a + \sqrt{3})}\right)$

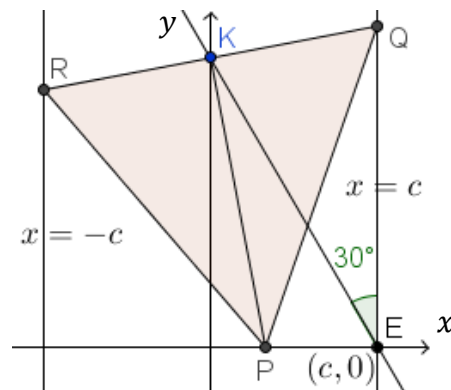
恰與第六點導出的 $k$ 值相符。

(二) 設 $Q$ 、 $R$ 分別位於 $x = c$ 及 $x = -c$ ，如圖(二十五)

因為 $E(c, 0)$

故 $\overline{KE}$ ： $y = -\sqrt{3}(x - c)$ ，交 $y$ 軸於 $K(0, \sqrt{3}c)$

亦恰與第六點導出的 $k$ 值相符。



圖(二十五)

由(一)、(二)可得：以 $E$ 為中心將 $\overline{QE}$ 旋轉 $30^\circ$ ，其與底邊對稱軸的交點即為 $K$ 點，即不論 $P$ 的位置為何，只要 $\triangle PQR$ 是以 $P$ 為底的標準型， $K$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $E$ 四點共圓。

## 八、作圖方式

已知  $P$  是正  $n$  邊形  $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$  的邊  $\overline{A_0'A_0}$  上任意一點，而直線  $L$  是  $\overline{A_0'A_0}$  的中垂線， $C$  是正  $n$  邊形的中心。

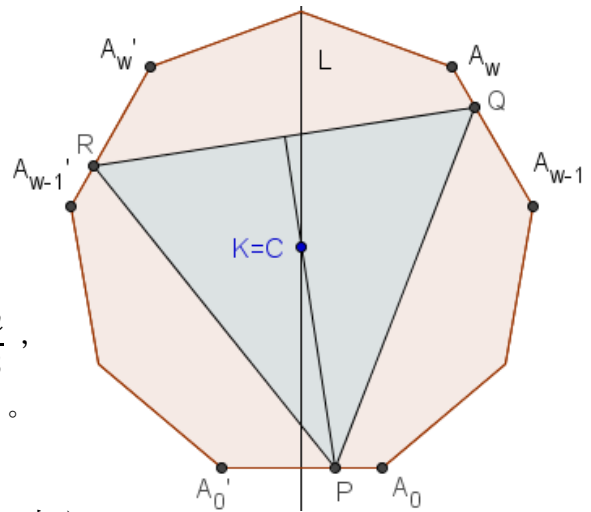
(一) 當  $n \equiv 0 \pmod{3}$  時：

其作圖方式與  $n = 3$  的情況相同。

即作  $\overline{A_wQ} = \overline{A_{w-1}'R} = \overline{A_0P}$ ，

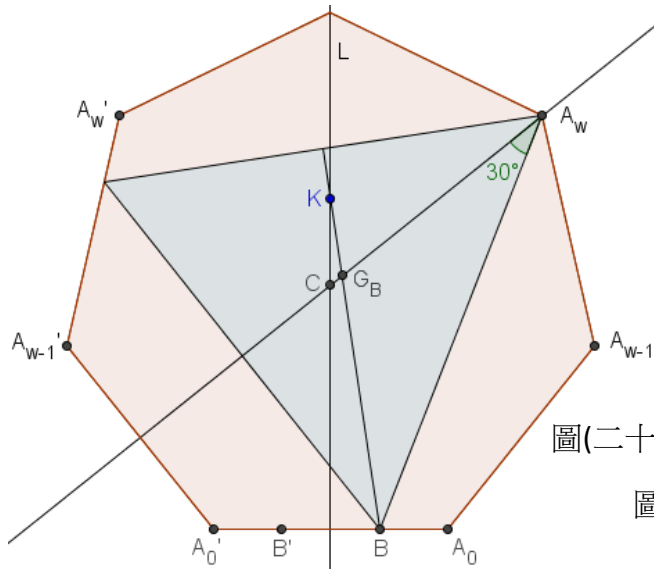
其中  $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$  且  $w = \frac{n}{3}$ ，

則  $\triangle PQR$  即為該正  $n$  邊形的內接正三角形。

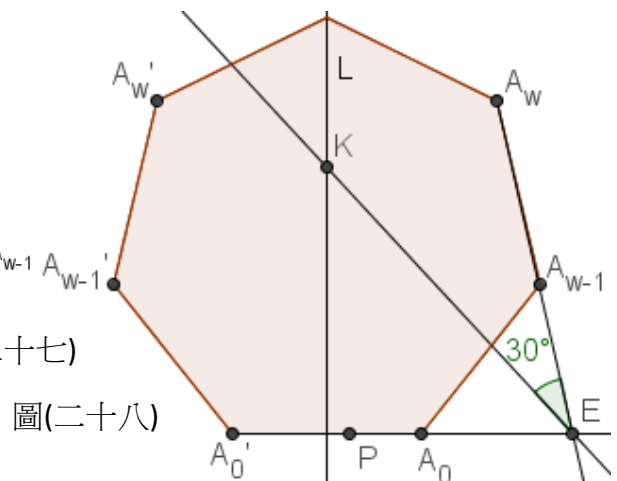


圖(二十六)

(二) 當  $n \equiv 1 \pmod{3}$  時：



圖(二十七)



圖(二十八)

### 1. 前置作業

$Q = A_w$ ， $w = \frac{n-1}{3}$ 。故連  $\overline{A_wC}$ ，並作  $\angle BA_wC = 30^\circ$ ，其中  $B \in \overline{A_0'A_0}$ 。

$B$  即為以  $P$  為底的標準型中  $P$  的右界，接著作  $B$  點對  $L$  的對稱點  $B'$ 。

### 2. 找 $K$ 點：方法有 2 種

(1) 由特殊的內接正三角形，如圖(二十七)：

作  $\overline{A_wB}$  的中垂線與  $\overline{A_wC}$  交於重心  $G_B$ ，則  $\overline{BG_B}$  與  $L$  的交點即為  $K$  點。

(2) 利用定理五：

設  $Q$  所在邊與底邊延長後相交於  $E$ ，以  $E$  為中心將  $\overline{QE}$  朝正  $n$  邊形的中心旋轉  $30^\circ$ ，其與底邊對稱軸的交點即為  $K$  點，如圖(二十八)所示。

3. 畫 Q、R：分為 3 種可能狀況

(1) 若  $P \in \overline{B'B}$ ，則這是以 P 為底的標準型

作  $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中  $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ 、 $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ ，  
則  $\triangle PQR$  即為該正  $n$  邊形的內接正三角形。

(2) 若  $P \in \overline{A_0B}$ ，則這是以 R 為底的標準型

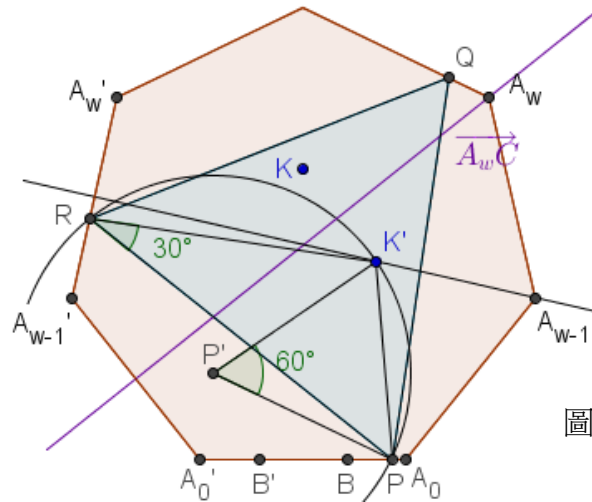
$\because \overline{A_0'A_0}$  與  $\overline{A_{w-1}'A_w}'$  對稱於  $\overline{A_wC}$

$\therefore$  以 R 為底的標準型之  $K'$  與  $K$  對稱於  $\overline{A_wC}$

作  $K$  對  $\overline{A_wC}$  的對稱點  $K'$ ，並將  $P$  繞  $K'$  順時針轉  $60^\circ$  得  $P'$ 。

以  $P'$  為圓心， $\overline{P'P}$  為半徑畫圓，交  $\overline{A_{w-1}'A_w}'$  於  $R$  點，

最後作  $\overline{PR}$  的中垂線交  $\overline{A_wA_{w+1}}$  於  $Q$ ， $\triangle PQR$  即為該正  $n$  邊形的內接正三角形。

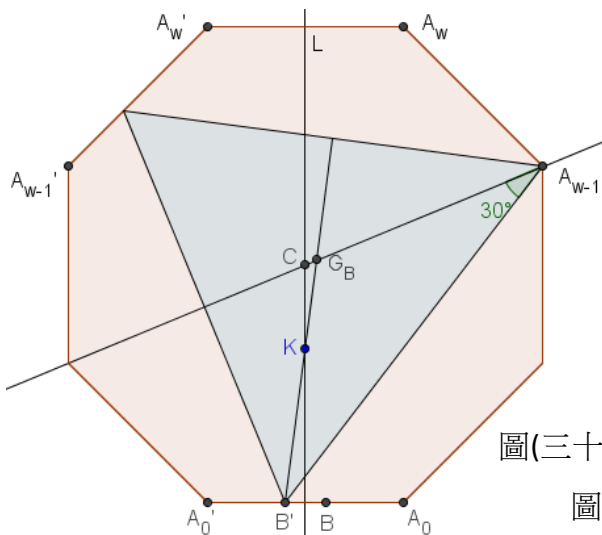


圖(二十九)

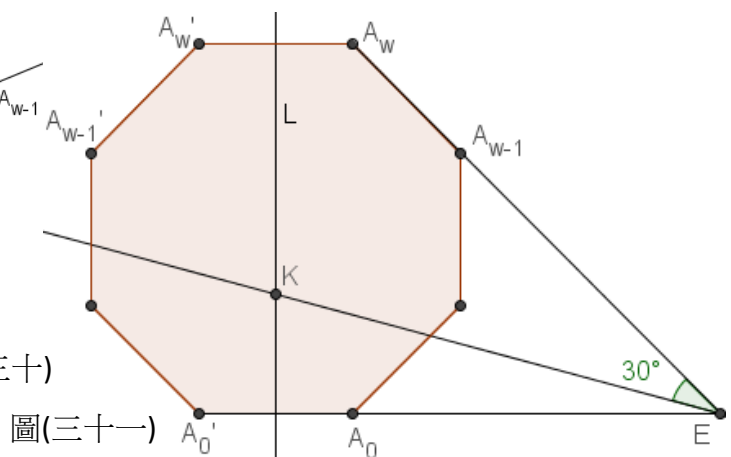
(3) 若  $P \in \overline{A_0'B'}$ ，則這是以 Q 為底的標準型

將(2)的內接正三角形對  $L$  作線對稱圖形，即可得此部分的內接正三角形。

(三) 當  $n \equiv 2 \pmod{3}$  時：



圖(三十)



圖(三十一)

1. 前置作業

$Q = A_w$ ， $w = \frac{n+1}{3}$ 。連  $\overline{A_{w-1}'C}$ ，並作  $\angle B'A_{w-1}'C = 30^\circ$ ，其中  $B' \in \overline{A_0'A_0}$ 。

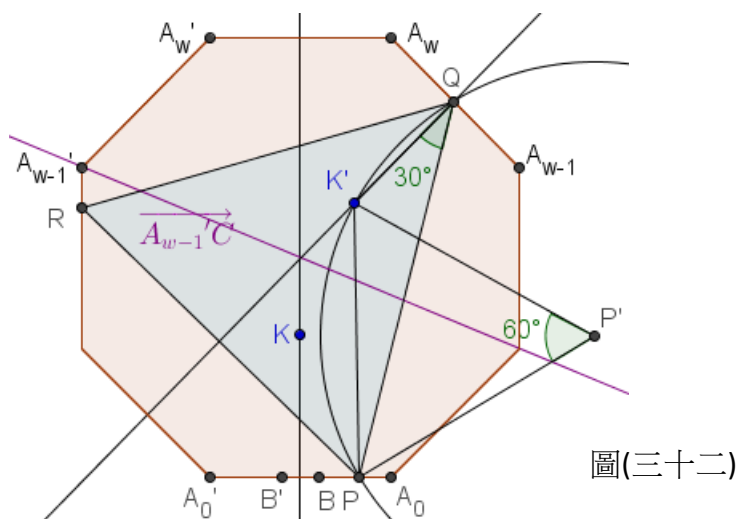
$B'$  即為以 P 為底的標準型中 P 的左界，接著作  $B'$  點對  $L$  的對稱點  $B$ 。

2. 找 K 點：方法有 2 種

- (1) 由特殊的內接正三角形，如圖(三十)：  
 作 $\overline{A_{w-1}B'}$ 的中垂線與 $\overline{A_{w-1}C}$ 交於重心 $G_B$ ，則 $\overline{B'G_B}$ 與 $L$ 的交點即為 $K$ 點，
- (2) 利用定理五：  
 設 $Q$ 所在邊與底邊延長後相交於 $E$ ，以 $E$ 為中心將 $\overline{QE}$ 朝正 $n$ 邊形的中心旋轉 $30^\circ$ ，其與底邊對稱軸的交點即為 $K$ 點，如圖(三十一)所示。

3. 畫 $Q$ 、 $R$ ：分為3種可能狀況

- (1) 若 $P \in \overline{B'B}$ ，則這是以 $P$ 為底的標準型  
 作 $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ ，  
 則 $\triangle PQR$ 即為該正 $n$ 邊形的內接正三角形。
- (2) 若 $P \in \overline{A_0B}$ ，則這是以 $Q$ 為底的標準型  
 以 $Q$ 為底的標準型之 $K'$ 與 $K$ 對稱於 $\overline{A_{w-1}'C}$ ，  
 將 $P$ 繞 $K'$ 逆時針轉 $60^\circ$ ，得 $P'$ 。  
 以 $P'$ 為圓心， $\overline{P'P}$ 為半徑畫圓，交 $\overline{A_{w-1}A_w}$ 於 $Q$ 點，  
 作 $\overline{PQ}$ 的中垂線交 $\overline{A_{w-2}'A_{w-1}'}$ 於 $R$ ，則 $\triangle PQR$ 即為該正 $n$ 邊形的內接正三角形。



- (3) 若 $P \in \overline{A_0B'}$ ，則這是以 $R$ 為底的標準型  
 將(2)的內接正三角形對 $L$ 作線對稱圖形，即可得此部分的內接正三角形。

(四) 很明顯的，在 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 與 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 的作圖中，先找出 $K$ 點並判斷出標準型是以何者為底之後，剩下的步驟就都一樣了。

(五) 當 $n$ 是3的倍數時， $K$ 點就是該正 $n$ 邊形的中心點 $C$ ，一樣可以用 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 的作圖方法找出內接正三角形 $PQR$ ，不過這就有一點小題大作了。



## 伍、研究過程(下)：圖形性質的探討

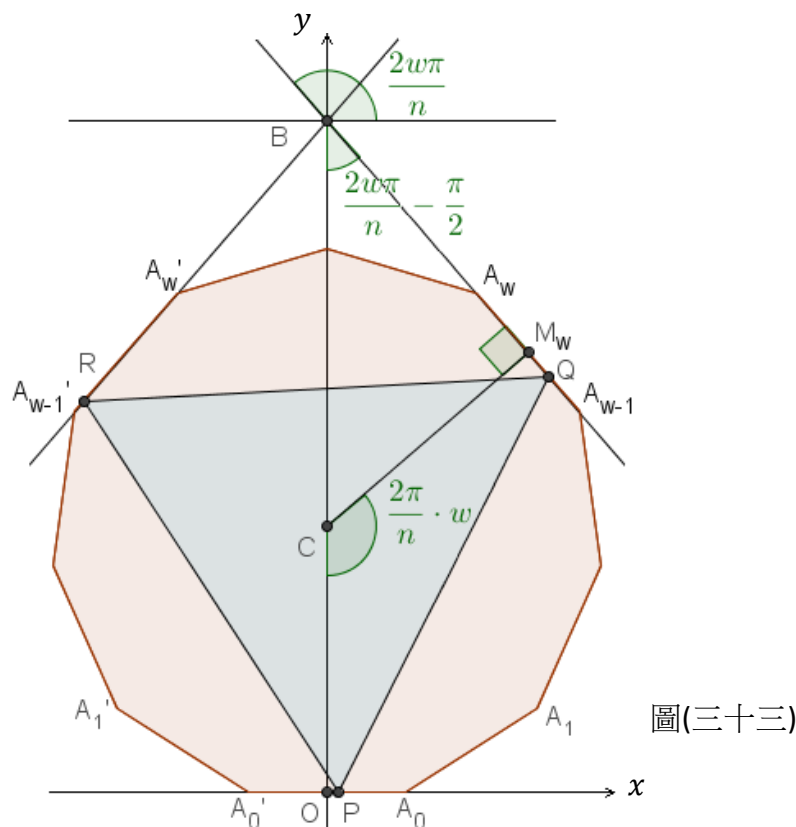
設正 $n$ 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ 的中心為 $C$ ，其外接圓半徑長為 $1$ ，

$L$ 是標準型底邊的中垂線，且 $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

### 一、 $Q$ 、 $R$ 所在邊的直線方程式

(一) 當 $Q$ 、 $R$ 的所在邊不垂直底邊

坐標化如圖(三十三)，並令 $M_w$ 為 $\overline{A_{w-1}A_w}$ 的中點。



圖(三十三)

$$\text{因 } \angle OCM_w = w \cdot \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \angle BCM_w = \pi - \frac{w \cdot 2\pi}{n}, \text{ 故 } \angle CBM_w = \frac{w \cdot 2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$$

可知 $\overrightarrow{A_{w-1}A_w}$ 與 $x$ 軸逆時針夾 $w \cdot \frac{2\pi}{n}$

$$\text{又 } \angle A_wCM_w = \frac{1}{2} \angle A_wCA_{w-1} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \overline{CM_w} = \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\text{所以 } \overline{BC} = \overline{CM_w} \csc \left( w \cdot \frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{n} \left( -\sec \frac{2w\pi}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \cos \frac{\pi}{n} \left( 1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right)$$

故 $\overrightarrow{A_{w-1}A_w}$  :  $y = \tan \frac{2w\pi}{n} x + \cos \frac{\pi}{n} \left( 1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right)$ ，也就是肆之六的 $y = -ax + b$

$$\text{得 } \begin{cases} a = -\tan \frac{2w\pi}{n} \\ b = \cos \frac{\pi}{n} \left( 1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right) \end{cases}$$

(二) 當 Q、R 的所在邊垂直底邊

$\because \overrightarrow{A_{w-1}A_w}$  垂直底邊

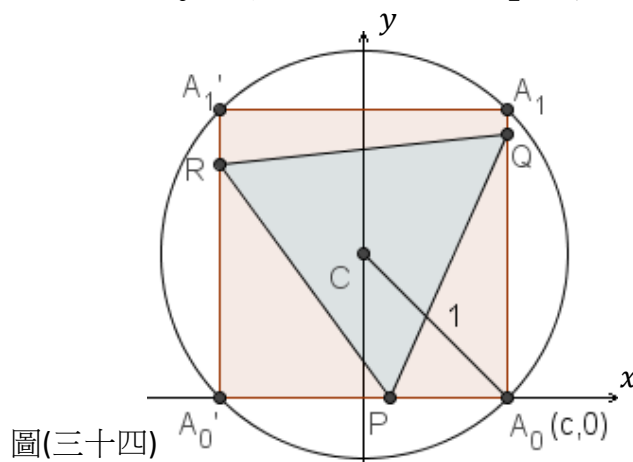
$\Rightarrow$  其與  $x$  軸逆時針夾角  $w \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ ，即  $\frac{w}{n} = \frac{1}{4}$

令  $w = \frac{n+\zeta}{3}$ ，其中  $\begin{cases} \zeta = 0, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \zeta = -1, & \text{當 } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \zeta = 1, & \text{當 } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ ，故  $\frac{w}{n} = \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{3n}$

因此  $\frac{1}{3} + \frac{\zeta}{3n} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\zeta}{n} = -\frac{1}{4}$

又  $\zeta \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow n = 4$

故  $n = 4$  時才有可能出現「Q、R 位於的邊垂直底邊」的狀況



由圖(三十四)可知，肆之六所假設的  $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

## 二、數值推導(I)

建立平面直角坐標，如圖(三十五)所示。

設  $K(0, k)$ ，今作一條過  $K$  的直線，令其與  $y$  軸正向的有向角為  $\theta$  且與  $x$  軸交於  $P$ ，其中  $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$ ， $\varphi$  為夾角的最大值。

若  $\overrightarrow{PK}$  為正  $\triangle PQR$  的內角角平分線，則：

Q 與 R 各位於兩條對稱於  $y$  軸之直線上的充要條件為正  $\triangle PQR$  重心  $G$  的軌跡為一條平行  $x$  軸的線段。

設  $\overline{PQ} = t$ ，

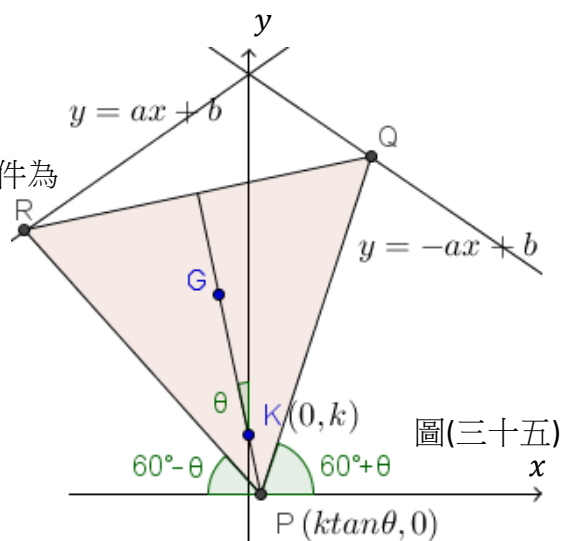
由圖(三十五)可得  $P(k \tan \theta, 0)$ ， $\angle RPO = 60^\circ - \theta$

$\therefore \overrightarrow{PR} = (-t \cos(60^\circ - \theta), t \sin(60^\circ - \theta))$

$\Rightarrow R(k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta), t \sin(60^\circ - \theta))$

同理  $Q(k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta), t \sin(60^\circ + \theta))$

故  $G\left(\frac{1}{3}[3k \tan \theta + t \cos(60^\circ - \theta) - t \cos(60^\circ + \theta)], \frac{1}{3}[t \sin(60^\circ + \theta) + t \sin(60^\circ - \theta)]\right)$



$$\Rightarrow G \left( k \tan \theta + \frac{t}{3}(-2 \sin 60^\circ \sin \theta), \frac{t}{3}(2 \sin 60^\circ \cos \theta) \right),$$

$$\text{即 } G \left( k \tan \theta + \frac{t}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)$$

(一) 證明必要條件：

1. 設 Q、R 兩點分別在直線  $y = -ax + b$ 、 $y = ax + b$  上

$$\text{則 } \begin{cases} t \sin(60^\circ + \theta) = -a[k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta)] + b \dots \dots \textcircled{1} \\ t \sin(60^\circ - \theta) = a[k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta)] + b \dots \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① + ②：

$$t[\sin(60^\circ + \theta) + \sin(60^\circ - \theta)] = -at[\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)] + 2b$$

$$\Rightarrow t(2 \sin 60^\circ \cos \theta + a \cdot 2 \cos 60^\circ \cos \theta) = 2b$$

$$\Rightarrow t = \frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}$$

$$\text{因此 } G \left( k \tan \theta - \frac{\frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{\frac{2b}{(a + \sqrt{3}) \cos \theta}}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)$$

$$\text{即 } G \left( \left( k - \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3} \right) \tan \theta, \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3} \right)$$

故重心 G 恆在平行 x 軸的直線  $y = \frac{2b}{\sqrt{3}a + 3}$  上，無論 P 的位置為何。

2. 設 Q、R 兩點分別在直線  $x = c$ 、 $x = -c$  上  
如圖(三十六)所示。

$$\text{則 } \begin{cases} k \tan \theta + t \cos(60^\circ + \theta) = c \dots \dots \textcircled{3} \\ k \tan \theta - t \cos(60^\circ - \theta) = -c \dots \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

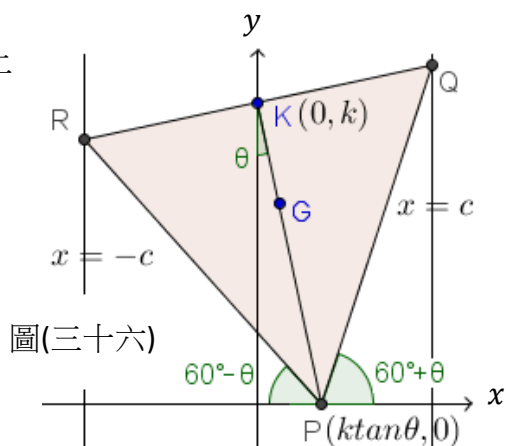
③ - ④：

$$t[\cos(60^\circ + \theta) + \cos(60^\circ - \theta)] = 2c$$

$$\Rightarrow t = \frac{2c}{2 \cos 60^\circ \cos \theta}, \text{ 即 } t = \frac{2c}{\cos \theta}$$

$$\text{因此 } G \left( k \tan \theta - \frac{\frac{2c}{\cos \theta}}{\sqrt{3}} \sin \theta, \frac{\frac{2c}{\cos \theta}}{\sqrt{3}} \cos \theta \right), \text{ 即 } G \left( \left( k - \frac{2c}{\sqrt{3}} \right) \tan \theta, \frac{2c}{\sqrt{3}} \right)$$

故重心 G 在平行 x 軸的直線  $y = \frac{2c}{\sqrt{3}}$  上。



圖(三十六)

(二) 證明充分條件：

設重心 G 在平行x軸的直線 $y = h$ 上，則 $h = \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \theta$ ，即 $t = \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta}$

$$\text{故} \begin{cases} Q \left( k \tan \theta + \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ + \theta), \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta) \right) \\ R \left( k \tan \theta - \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta), \frac{\sqrt{3}h}{\cos \theta} \cos(60^\circ - \theta) \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \left( \left( k - \frac{3}{2}h \right) \tan \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}h, \frac{\sqrt{3}}{2}h \tan \theta + \frac{3}{2}h \right) \\ R \left( \left( k - \frac{3}{2}h \right) \tan \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}h, -\frac{\sqrt{3}}{2}h \tan \theta + \frac{3}{2}h \right) \end{cases}$$

1. 若 $2k - 3h \neq 0$

Q 在 $y = \frac{-\sqrt{3}h}{3h - 2k}x + \frac{3h(2h - k)}{3h - 2k}$ 上，R 在 $y = \frac{\sqrt{3}h}{3h - 2k}x + \frac{3h(2h - k)}{3h - 2k}$ 上。

2. 若 $2k - 3h = 0$

Q 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}h$ 上，而 R 在 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}h$ 上。

由此可看出，不論是 1. 或 2. 的情況，Q、R 兩點各位於兩條對稱於y軸的直線上。

### 三、數值推導(II)

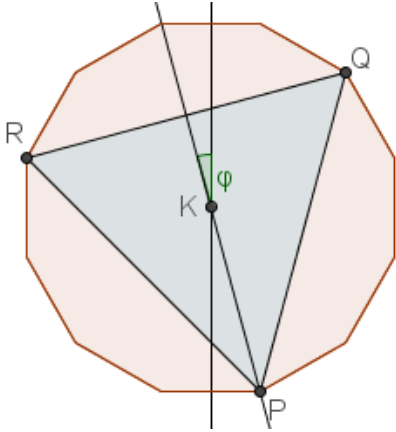
(一) Q、R 分別位於 $y = -ax + b$ 及 $y = ax + b$ 上的狀況

1. K 點與標準型底邊的距離 $k$

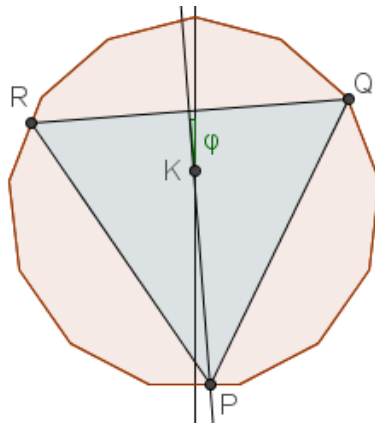
$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{3}a - 1}{a(a + \sqrt{3})} b = \frac{-\sqrt{3} \tan \frac{2w\pi}{n} - 1}{-\tan \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} - \tan \frac{2w\pi}{n})} \cos \frac{\pi}{n} \left( 1 - \sec \frac{2w\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-\sqrt{3} \sin \frac{2w\pi}{n} - \cos \frac{2w\pi}{n} + \sqrt{3} \tan \frac{2w\pi}{n} + 1}{-\sin \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} - \tan \frac{2w\pi}{n})} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-2 \cos \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{2w\pi}{n} + \sqrt{3} \sin \frac{2w\pi}{n} + \cos \frac{2w\pi}{n}}{-\sin \frac{2w\pi}{n} (\sqrt{3} \cos \frac{2w\pi}{n} - \sin \frac{2w\pi}{n})} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{-2 \cos \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{2w\pi}{n} + 2 \cos \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \frac{2w\pi}{n} \cdot 2 \sin \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{2 \sin \frac{w\pi}{n} \cos \frac{w\pi}{n} \tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)} \end{aligned}$$

2. 最大幅角 $\varphi$

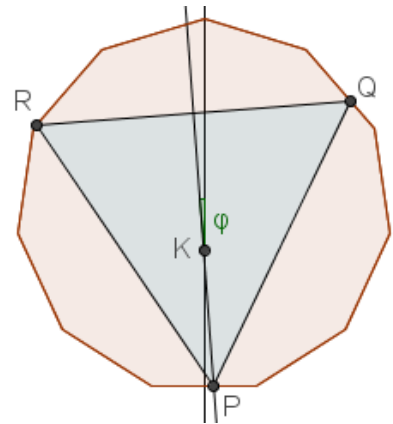
由圖可知， $\theta$ 的最大值 $\varphi$ 發生在 Q 或 R 與正 $n$ 邊形的頂點重合的時候。



圖(三十七)

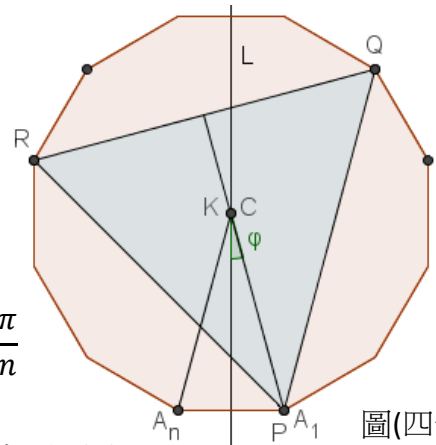


圖(三十八)



圖(三十九)

(1) 當 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時：P、Q、R 同時頂到正 $n$ 邊形的頂點，如圖(四十)。



圖(四十)

$$\text{故}\theta\text{的最大值}\varphi = \frac{1}{2}\angle A_n K A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

(2) 當 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ 時：

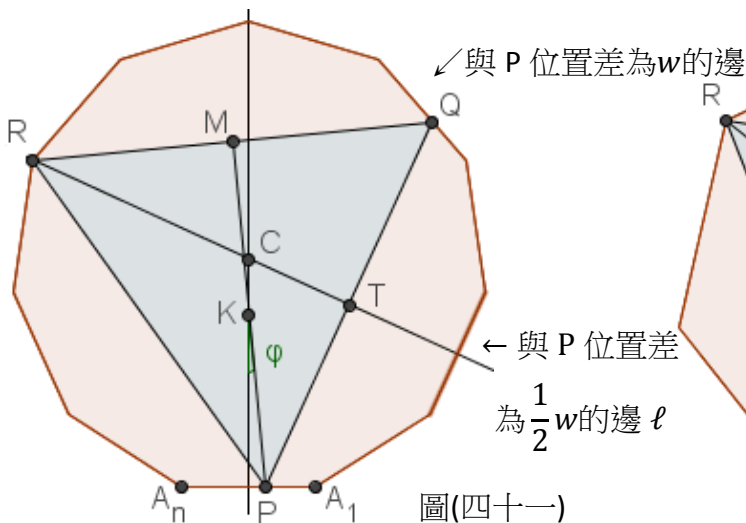
令 R 為與正 $n$ 邊形頂點重合的內接正三角形頂點。

① 若 $n$ 是奇數：

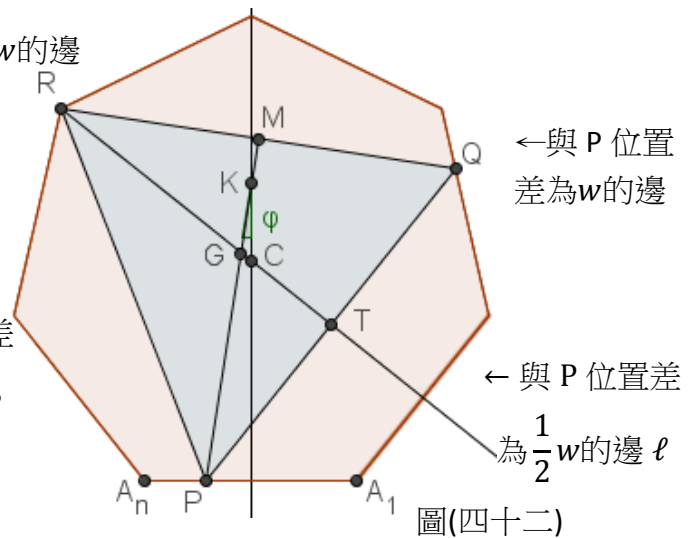
連 $\overrightarrow{RC}$ 交 $\overrightarrow{PQ}$ 於 T

$\therefore$  Q 與 R 的位置差 = P 與 R 的位置差，

$\therefore$  R 於正 $n$ 邊形的對邊 $\ell$ ，其到 P、Q 的位置差相等。



圖(四十一)



圖(四十二)

又 Q 與 P 的位置差 =  $w$

$$\Rightarrow \ell \text{ 與 P 的位置差} = \frac{1}{2}w$$

(i) 圖(四十一)中，(當 $n \equiv 2 \pmod{3}$ )的狀況)

$$\angle KCT = \frac{1}{2}w \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{w\pi}{n}$$

$$\text{在四邊形 PKCT 中，} \angle PKC = 2\pi - \frac{w\pi}{n} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} - \frac{w\pi}{n}$$

$$\text{故 } \varphi = \pi - \angle PKC = \frac{w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)\pi}{n} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3n}$$

(ii) 圖(四十二)中，(當 $n \equiv 1 \pmod{3}$ )的狀況)

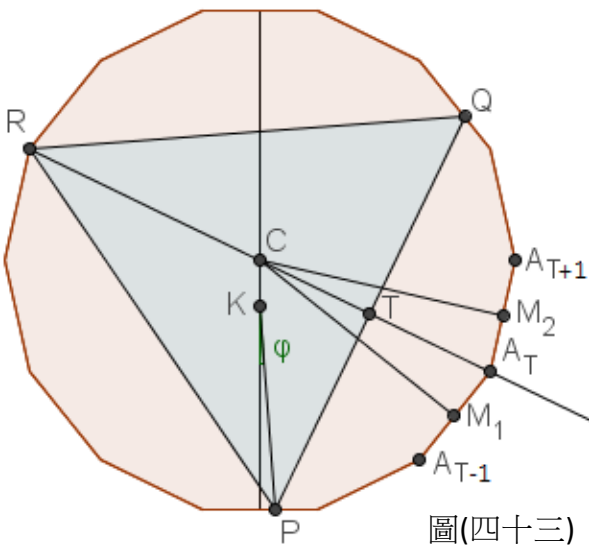
$$\angle KCT = \pi - \frac{w\pi}{n}$$

$$\therefore \varphi + \angle KGC = \angle KCT$$

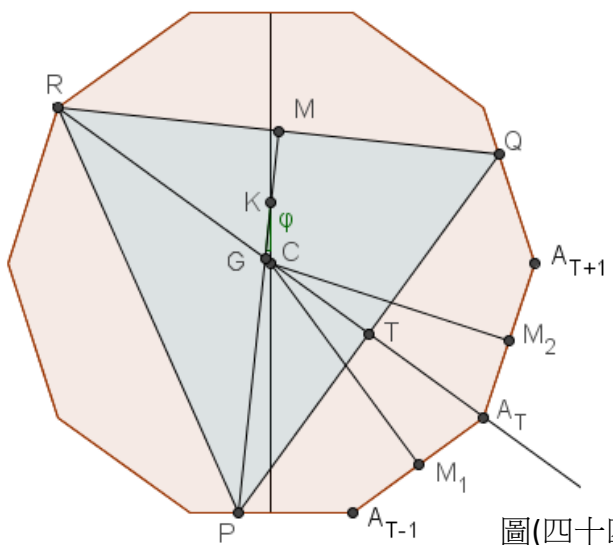
$$\text{故 } \varphi = \left(\pi - \frac{w\pi}{n}\right) - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{n-1}{3}\right)\pi}{n} = \frac{\pi}{3n}$$

② 若 $n$ 是偶數：

令 $R$ 在正 $n$ 邊形中對面的頂點為 $A_T$ 。



圖(四十三)



圖(四十四)

$\therefore A_T$ 與 $Q$ 和 $A_T$ 與 $P$ 的位置差相等，且 $Q$ 與 $P$ 的位置差 $= w$ ，

故 $\overline{A_T A_{T-1}}$ 與 $P$ 、 $\overline{A_T A_{T+1}}$ 與 $P$ 的位置差分別為 $\frac{w-1}{2}$ 、 $\frac{w+1}{2}$ 。

令 $M_1$ 、 $M_2$ 分別為 $\overline{A_T A_{T-1}}$ 、 $\overline{A_T A_{T+1}}$ 的中點， $T$ 為 $\overline{RA_T}$ 與 $\overline{PQ}$ 的交點，

(i) 圖(四十三)中，(當 $n \equiv 2 \pmod{3}$ )的狀況)

$$\begin{aligned} \angle KCT &= \frac{1}{2}(\angle KCM_1 + \angle KCM_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{w-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} + \frac{w+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{w\pi}{n} \end{aligned}$$

仿①，可得 $\varphi = \frac{\pi}{3n}$ 。

(ii) 圖(四十四)中，(當 $n \equiv 1 \pmod{3}$ )的狀況)

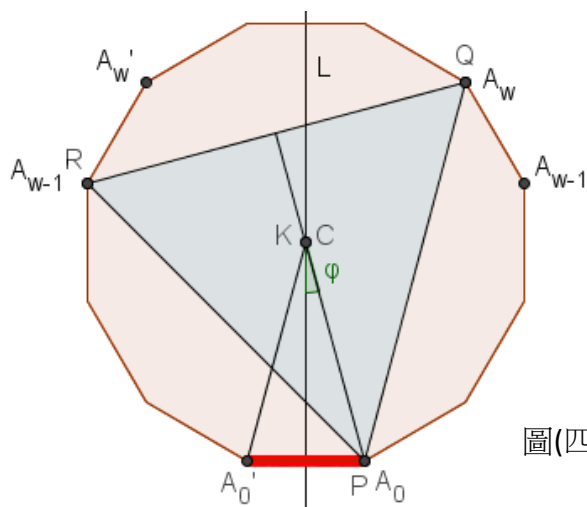
$$\angle KCT = \pi - \frac{w\pi}{n}$$

仿①，也可得 $\varphi = \frac{\pi}{3n}$ 。

所以，
$$\begin{cases} \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3}, \varphi = \frac{\pi}{n} \\ \text{當 } n \equiv 1, 2 \pmod{3}, \varphi = \frac{\pi}{3n} \end{cases}$$

3. 以 P 為底的標準型中，三頂點 P、Q、R 的存在範圍 $u_P$ 、 $u_Q$ 、 $u_R$

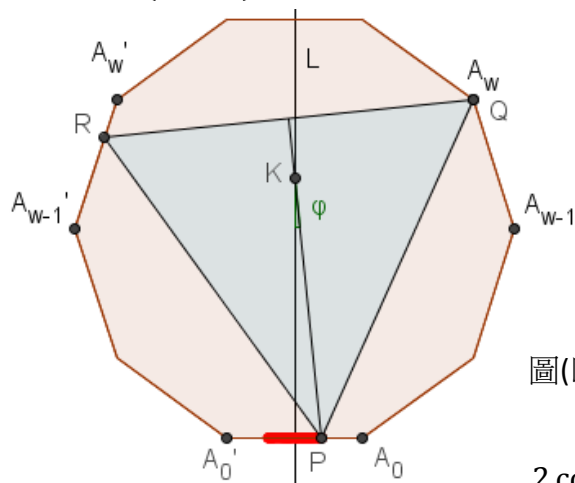
(1) 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$



圖(四十五)

由圖(四十五)可知， $u_P = u_Q = u_R =$  正 $n$ 邊形的邊長  $= 2 \sin \frac{\pi}{n}$

(2) 若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$



圖(四十六)

由圖(四十六)可知， $u_P = 2 \cdot k \tan \varphi = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$

又 $u_P + u_Q + u_R =$  正 $n$ 邊形的邊長且 $u_Q = u_R$

$$\text{故 } u_Q = u_R = \frac{1}{2} \left( 2 \sin \frac{\pi}{n} - u_P \right) = \sin \frac{\pi}{n} - \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$$

4. 重心與底邊的距離 $h$

在數值推導(1)得  $G\left(\left(k - \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)\tan\theta, \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)$  恆在平行 $x$ 軸的直線 $y = h$ 上

$$\text{因為 } \frac{b}{a+\sqrt{3}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\left(1 - \sec\frac{2w\pi}{n}\right)}{\sqrt{3} - \tan\frac{2w\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{2w\pi}{n} - 1\right)}{\sqrt{3}\cos\frac{2w\pi}{n} - \sin\frac{2w\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{故 } h = \frac{2b}{\sqrt{3}a+3} = \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

5. 內接正三角形的邊長 $t$

$$t = \frac{\sqrt{3}h}{\cos\theta} = \frac{2b}{(a+\sqrt{3})\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\theta}$$

6. 重心軌跡的長度 $s$

因  $G$  的  $x$  坐標  $\left(k - \frac{2b}{\sqrt{3}a+3}\right)\tan\theta = (k-h)\tan\theta$  且  $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$

故  $s = |(k-h)\tan\varphi - (k-h)\tan(-\varphi)| = 2|k-h|\tan\varphi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= 2 \left| \frac{\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\tan\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} - \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sqrt{3}\cos\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\frac{w\pi}{n}\cos\frac{w\pi}{n} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2w\pi}{n} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2w\pi}{n}\right) - \sin\frac{2w\pi}{n} \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\frac{2w\pi}{n} + \frac{\pi}{3}\right) \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\left(\frac{2}{3} + \frac{2\zeta}{3n}\right)\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| \tan\varphi \\ &= \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} \left| \sin\left(\frac{2\zeta}{3n}\pi\right) \right| \tan\varphi \end{aligned}$$

(1) 當  $n \equiv 0 \pmod{3}$  時,  $\zeta = 0 \Rightarrow s = 0$

(2) 當  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$  時,  $\zeta = \mp 1$

$$\Rightarrow s = \frac{2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{3n}\tan\frac{w\pi}{n}\tan\frac{\pi}{3n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{3n}\tan\frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3}\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$



(二) Q、R 分別位於  $x = c$  及  $x = -c$  上 (即  $n = 4$  的情形)

1. K 點與底邊的距離  $k$

$$k = \sqrt{3}c = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

恰符合(一)之 1. 的結果。

2. 最大幅角  $\varphi$

$$\varphi = 15^\circ = \frac{\pi}{3 \cdot 4}$$

恰符合(一)之 3. 的結果。

3. 以 P 為底的標準型中，三頂點的存在範圍  $u_P$ 、 $u_Q$ 、 $u_R$

$$u_P = 2k \tan \varphi = \sqrt{6} \tan \frac{\pi}{12} = 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}, \quad u_Q = u_R = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

都符合(一)之 2. 的結果。

4. 重心與底邊的距離  $h$

$$h = \frac{2c}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

不意外地符合(一)之 4. 的結果。

5. 內接正三角形的邊長  $t$

$$t = \frac{2c}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$$

還是符合(一)之 5. 的結果。

6. 重心軌跡的長度  $s$

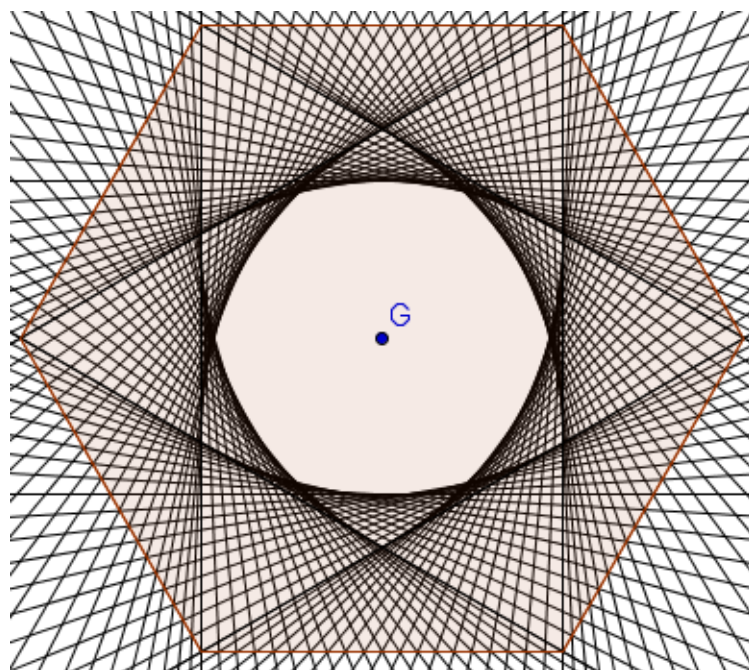
$$s = \frac{1}{3}u_P = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \sqrt{2}$$

依然適用(一)之 6. 的結果。

故不論兩直線是否為鉛直線，即不論  $n$  值為何，(一)所推導出的結果都是適用的。

#### 四、將所有內接正三角形畫出後，中央空白區域的圖形

- (一) 當  $n \equiv 0 \pmod{3}$  時，中央空白區域是由  $n$  條拋物線包圍出的圖形，如圖(四十七)所示。其證明參見「五、包絡圖形」。

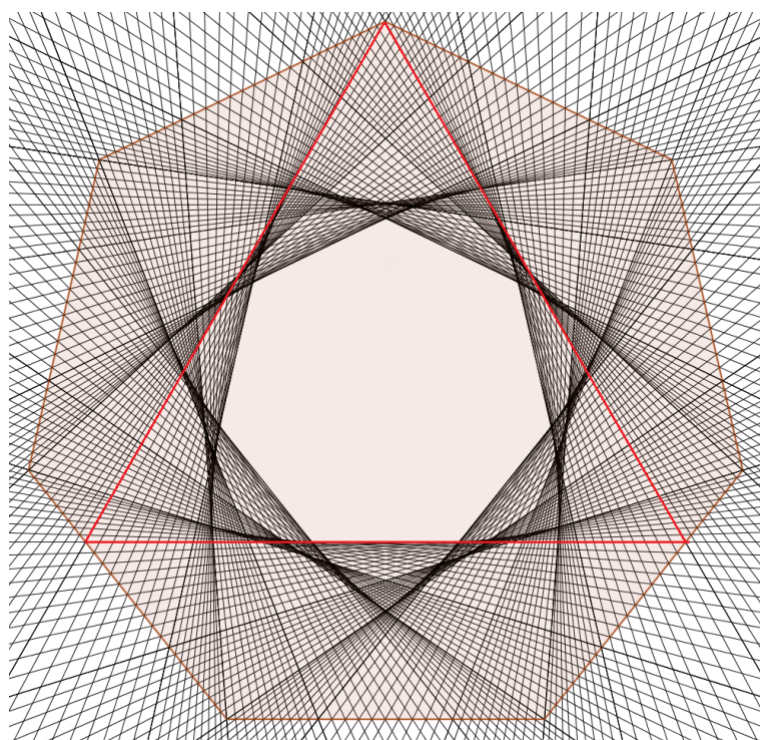


圖(四十七)

- (二) 當  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$  時，中央空白區域是一個正  $n$  邊形。

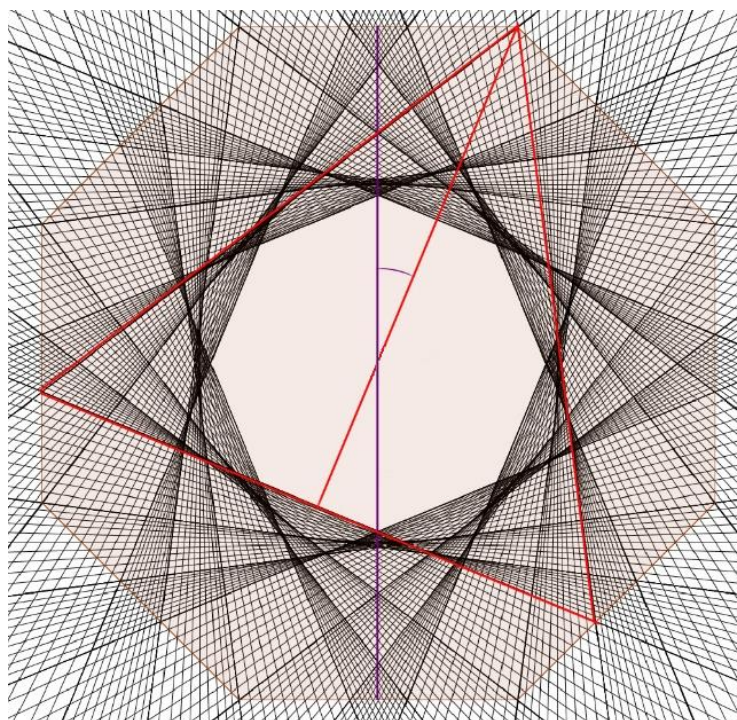
它的每一個邊，是所有其中一頂點與正  $n$  邊形頂點重合的特殊內接正三角形中，與正  $n$  邊形頂點重合之頂點的對邊所圍出來的。

1. 若  $n$  是奇數，因為相對於底邊的最高點只有一個，所以相對於原正  $n$  邊形，它不旋轉，如圖(四十八)所示。



圖(四十八)

2. 若 $n$ 是偶數，因為相對於底邊的最高點左右各有一個，所以相對於原正 $n$ 邊形，它旋轉了 $\frac{\pi}{n}$ 弧度，如圖(四十九)所示。

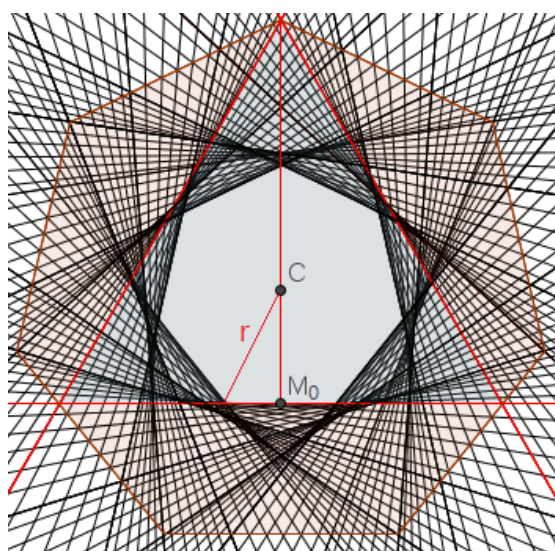


圖(四十九)

(三) 而不論 $n$ 是奇數或偶數，若設原正 $n$ 邊形的邊長為 1，

它的外接圓半徑長為 
$$\frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}$$

證明

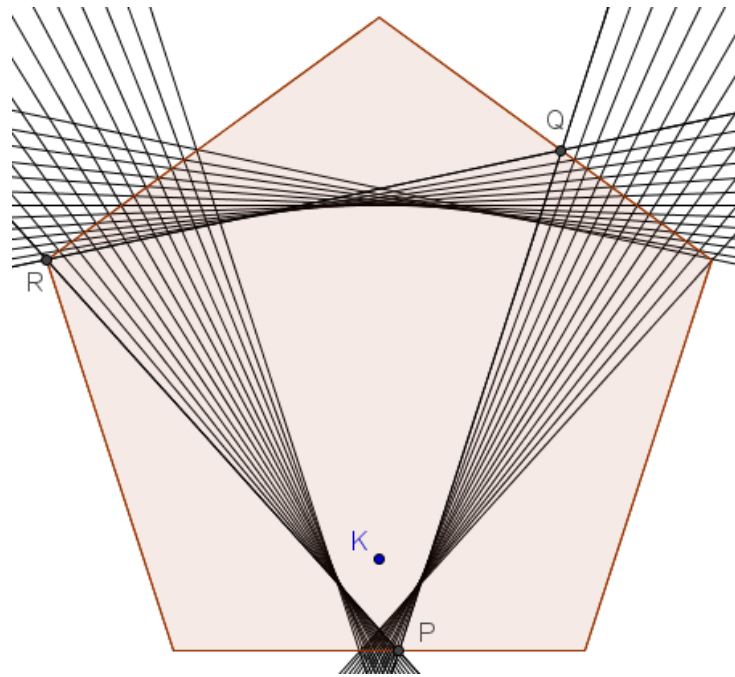


因為  $\overline{CM_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$  內接正三角形的最大邊長  $-$  正 $n$ 邊形的外接圓半徑

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \varphi} - 1 = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - 1$$

所以新的外接圓半徑  $r = \overline{CM_0} \sec\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin\left(\frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}$

五、包絡圖形(以 P 為底的標準型)



圖(五十一)

(一)  $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 包絡出的圖形

不論 Q、R 分別位於  $y = -ax + b$ 、 $y = ax + b$ ，還是  $x = c$ 、 $x = -c$  上

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} : y = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)(x - k \tan \theta) &\stackrel{\triangleq \tan \theta = \alpha}{\Longrightarrow} y = \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}(x - k\alpha) \\ &\stackrel{\triangleq \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha} = f(\alpha)}{\Longrightarrow} y = f(\alpha)(x - k\alpha) \end{aligned}$$

將  $|\alpha|$  稍微增大，得  $\overrightarrow{P'Q'}$  :  $y = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)]$

$$\text{解} \begin{cases} y = f(\alpha)(x - k\alpha) \\ y = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)(x - k\alpha) = f(\alpha + \varepsilon)[x - k(\alpha + \varepsilon)]$$

$$\Rightarrow [f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)]x = k[(\alpha + \varepsilon)f(\alpha + \varepsilon) - \alpha \cdot f(\alpha)]$$

$$\Rightarrow \frac{f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)}{\varepsilon} x = k \frac{(\alpha + \varepsilon)f(\alpha + \varepsilon) - \alpha \cdot f(\alpha)}{\varepsilon}$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 則 } f'(\alpha)x = k(\alpha \cdot f(\alpha))' = k \cdot f(\alpha) + k\alpha f'(\alpha)$$

$$\Rightarrow x = k\alpha + k \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$\Rightarrow x = k\alpha + \frac{k \cdot \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}}{\frac{1 - \sqrt{3}\alpha - (-\sqrt{3})(\sqrt{3} + \alpha)}{(1 - \sqrt{3}\alpha)^2}} = k\alpha + \frac{k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)(1 - \sqrt{3}\alpha)$$

$$\text{故 } y = \frac{\sqrt{3} + \alpha}{1 - \sqrt{3}\alpha}(x - k\alpha) = \frac{k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)^2$$

$$\text{而 } x = \frac{k}{4}(-\sqrt{3}\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{3} + 4\alpha) = \frac{k}{4}[-\sqrt{3}(\sqrt{3} + \alpha)^2 + 8\alpha + 4\sqrt{3}]$$

$$\Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}k}{4}(\sqrt{3} + \alpha)^2 + \frac{k}{4} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{k}{4}(8\alpha + 8\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow [x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}k]^2 = [2k(\alpha + \sqrt{3})]^2 = 16k \cdot y$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}kx - 10ky + 3k^2 = 0 \dots \dots (*)$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0 \text{ 且 } \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3}k \\ \sqrt{3} & \sqrt{3}k & -5k \\ \sqrt{3}k & -5k & 3k^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$  所有  $\overline{PQ}$  包絡出的圖形為拋物線。

而所有  $\overline{PR}$  包絡出的圖形為(\*)對y軸鏡射的結果，

即  $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}kx - 10ky + 3k^2 = 0$ 。

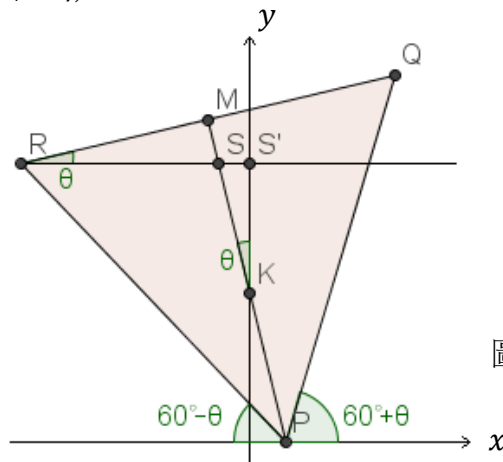
(二)  $\overline{QR}$  包絡出的圖形

$$\text{因 } \overline{PM} = \frac{\sqrt{3}t}{2}(\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta)), \text{ 其中 } t = \frac{2b}{(a + \sqrt{3})\cos\theta}$$

$$\text{故 } \overline{PM} = \left( \frac{\sqrt{3}b \cdot (-\sin\theta)}{(a + \sqrt{3})\cos\theta}, \frac{\sqrt{3}b \cdot \cos\theta}{(a + \sqrt{3})\cos\theta} \right) = \left( -\frac{\sqrt{3}b \tan\theta}{a + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right)$$

$$\text{又 } P(k \tan\theta, 0), \text{ 故 } M \left( k \tan\theta - \frac{\sqrt{3}b \tan\theta}{a + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right)$$

作圖如下(圖(五十二))



圖(五十二)

則  $\triangle RMS \sim \triangle KS'S$  (AA), 因此  $\angle QRS = \angle SKS' = \theta$

$$\text{故 } \overline{QR}: y = \tan\theta \left[ x - \tan\theta \left( k - \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}}$$

$$\text{令 } \tan\theta = \alpha, \text{ 又 } \frac{\sqrt{3}b}{a + \sqrt{3}} = \frac{3}{2}h$$

$$\therefore \overline{QR}: y = \alpha \left[ x - \alpha \left( k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h$$

$$\text{將 } |\alpha| \text{ 稍微增大, 得 } \overline{Q'R'}: y = (\alpha + \varepsilon) \left[ x - (\alpha + \varepsilon) \left( k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h$$

$$\text{解} \begin{cases} y = \alpha \left[ x - \alpha \left( k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h \\ y = \left[ x - (\alpha + \varepsilon) \left( k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(\alpha + \varepsilon) - \alpha]x = (\alpha + \varepsilon)^2 \left( k - \frac{3}{2}h \right) - \alpha^2 \left( k - \frac{3}{2}h \right)$$

$$\Rightarrow x = \left( k - \frac{3}{2}h \right) \frac{(\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2}{\varepsilon} = \left( k - \frac{3}{2}h \right) (2\alpha + \varepsilon)$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 則 } x = \left( k - \frac{3}{2}h \right) \cdot 2\alpha$$

$$\text{故 } y = \alpha \left[ x - \alpha \left( k - \frac{3}{2}h \right) \right] + \frac{3}{2}h = \left( k - \frac{3}{2}h \right) \alpha^2 + \frac{3}{2}h$$

1. 若  $2k - 3h \neq 0$ ，即 Q、R 分別位於  $y = -ax + b$  及  $y = ax + b$  上的情況

$$\text{此時 } k - \frac{3}{2}h = \frac{\sqrt{3}a - 1}{a(a + \sqrt{3})}b - \frac{\sqrt{3}}{a + \sqrt{3}}b = \frac{-b}{a(a + \sqrt{3})} < 0$$

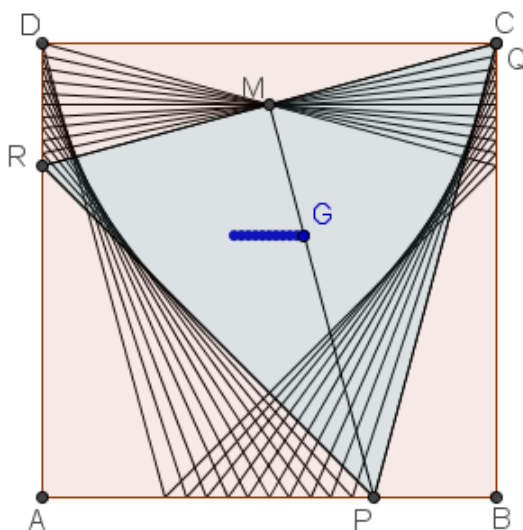
$$\text{故 } y = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{k - \frac{3}{2}h} + \frac{3}{2}h = \frac{x^2}{4k - 6h} + \frac{3}{2}h$$

因此  $\overline{QR}$  包絡出的圖形是一個開口向下的拋物線。

2. 若  $2k - 3h = 0$ ，即  $n = 4$  的情形

$$\text{此時 } \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2}h \end{cases}, \text{ 亦即所有 } \overline{QR} \text{ 的中點 } \left( 0, \frac{3}{2}h \right)$$

故此時  $\overline{QR}$  無包絡圖形，如圖(五十三)。



圖(五十三)

註(1)：由於  $\theta$  有一定的範圍， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QR}$  所包絡出的圖形只是(一)、(二)所導出之拋物線的一小段。

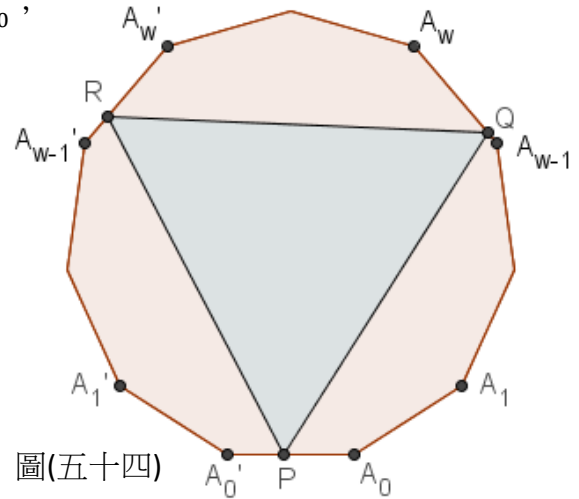
註(2)：(一)、(二)導出的是選定一個邊作為標準型底邊所得的包絡拋物線，而以其它邊作為底邊所得的包絡拋物線方程式可由旋轉對稱得出。

## 陸、結論

設正 $n$ 邊形 $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots A_i'A_{i-1}' \dots A_2'A_1'A_0'$ 的外接圓半徑長為 1，而  $w = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

一、在正 $n$ 邊形的邊上任意找一點  $P$ ，則必可在其邊上找到唯一一組點  $Q$ 、 $R$ ，使得 $\triangle PQR$  為其內接正三角形。

二、每一個正 $n$ 邊形的內接正三角形  $PQR$  皆可化為以  $P$ 、 $Q$  或  $R$  為底的內角正三角形。若它是以  $P$  為底的標準型，且  $P$  所在的邊為  $\overline{A_0'A_0}$ ，那麼， $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$  且  $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ 。



圖(五十四)

此外，在以  $P$  為底的標準型中：

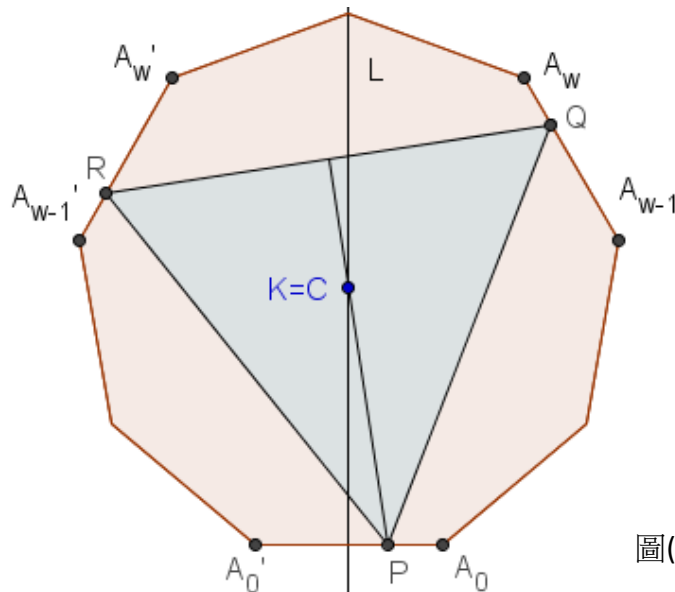
- (一) 若  $n \equiv 0 \pmod{3}$   
則  $Q$  或  $R$  的存在範圍是整個邊長。
- (二) 若  $n \equiv 1 \pmod{3}$   
則  $Q$  或  $R$  只會抵到  $A_w$  或  $A_w'$ 。
- (三) 若  $n \equiv 2 \pmod{3}$   
則  $Q$  或  $R$  只會抵到  $A_{w-1}$  或  $A_{w-1}'$ 。

三、每一個以  $P$  為底的內接正三角形，其 $\angle P$ 的角平分線與底邊對稱軸的交點恆為定點  $K$ 。

四、繪圖方式：

從任意點  $P$  出發，並令其所在的邊為  $\overline{A_0'A_0}$ 。

- (一) 若  $n \equiv 0 \pmod{3}$   
只要  $\overline{A_wQ} = \overline{A_{w-1}'R} = \overline{A_0P}$ ，其中  $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$   
則 $\triangle PQR$  即為該正 $n$ 邊形的內接正三角形。

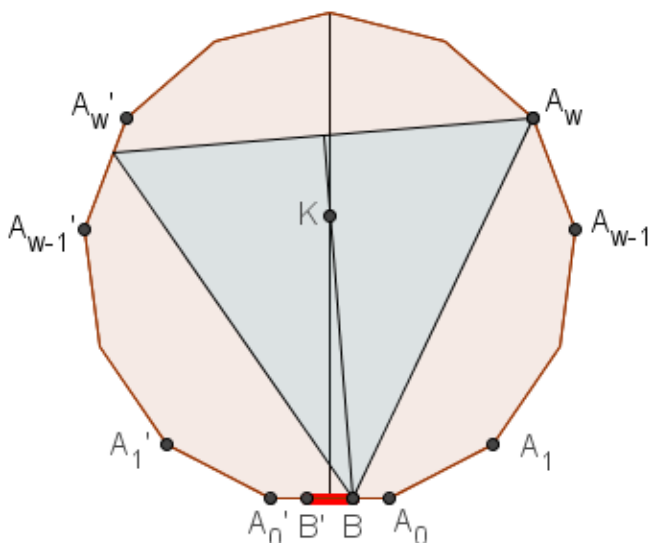


圖(五十五)

(二) 若  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

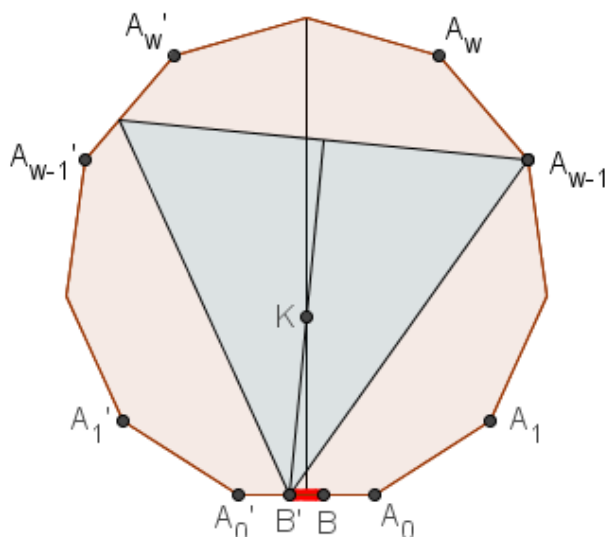
1. K 點可由下圖特殊的內接正三角形找到。

(1) 當  $n \equiv 1 \pmod{3}$



圖(五十六)

(2) 當  $n \equiv 2 \pmod{3}$



圖(五十七)

2. 要迅速找到 K 點，也可使用下列方法：設 Q 所在邊與底邊延長後相交於 E，以 E 為中心將  $\overline{QE}$  朝正 n 邊形的中心旋轉  $30^\circ$ ，其與底邊對稱軸的交點即為 K 點。

3. 若  $P \in \overline{B'B} \Rightarrow$  這是以 P 為底的標準型。

作  $\angle QPK = \angle RPK = 30^\circ$ ，其中  $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$ ， $R \in \overline{A_{w-1}'A_w}'$ ，則  $\triangle PQR$  即為該正 n 邊形的內接正三角形。

4. 若  $P \notin \overline{B'B}$

	若 $P \in \overline{A_0B}$	若 $P \in \overline{A_0'B'}$
若 $n \equiv 1 \pmod{3}$	這是以 R 為底的標準型	這是以 Q 為底的標準型
若 $n \equiv 2 \pmod{3}$	這是以 Q 為底的標準型	這是以 R 為底的標準型

### 五、圖形性質

(一) K 點與標準型底邊的距離  $k = \frac{\cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}$

(二)  $\triangle PQR$  的邊長  $t = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta}$

(三) 在以 P 為底的標準型中，

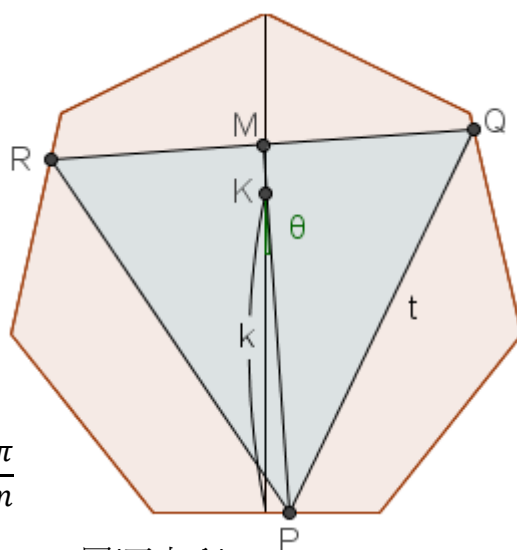
三頂點的存在範圍  $u_P, u_Q, u_R$ ：

1. 若  $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$u_P = u_Q = u_R = \text{正 } n \text{ 邊形的邊長} = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

2. 若  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

$$u_P = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \tan \frac{w\pi}{n} \tan \frac{\pi}{3n}}{\tan \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}, \text{ 而 } u_P + u_Q + u_R = \text{正 } n \text{ 邊形的邊長且 } u_Q = u_R$$



圖(五十八)



$$(四) \theta \text{ 的最大值 } \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{n}, & \text{當 } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{\pi}{3n}, & \text{當 } n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(五)  $\triangle PQR$  重心  $G$  的軌跡

1. 若  $n \equiv 0 \pmod{3}$

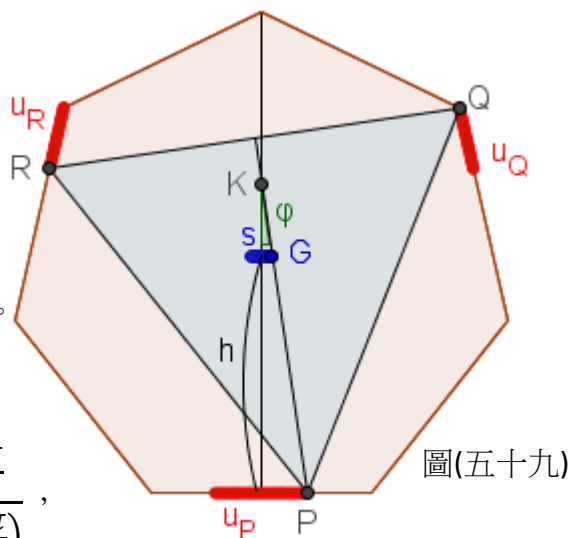
$G$  是一個定點，即該正  $n$  邊形的中心。

2. 若  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

$G$  的軌跡是一條平行底邊的線段，

$$\text{其與底邊的距離 } h = \frac{2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3} \sin \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)},$$

$$\text{且其長度 } s = \frac{4 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{3n} \tan \frac{w\pi}{n}}{\sqrt{3} \sin \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}, \text{ 與 } u_P \text{ 的比值為 } \frac{\sin \frac{2\pi}{3n}}{\sqrt{3} \cos \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right)}.$$



圖(五十九)

六、將所有內接正三角形畫出後

(一) 中央空白區域的圖形(見附錄、貳)

1. 當  $n \equiv 0 \pmod{3}$  時，中央空白區域是由  $n$  條拋物線包圍出的圖形。

2. 當  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$  時，中央空白區域則是一個正  $n$  邊形：

(1) 若  $n$  是奇數，相對於原正  $n$  邊形，它不旋轉。

(2) 若  $n$  是偶數，相對於原正  $n$  邊形，它旋轉了  $\frac{\pi}{n}$  弧度。

而不論  $n$  的奇偶，它與原正  $n$  邊形的大小比為  $\frac{\sqrt{3} \sin^2 \frac{w\pi}{n}}{\sin \left( \frac{2w\pi}{n} - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3n}} - \sec \frac{\pi}{n}$ 。

(二) 若  $n$  不是 3 的倍數，內接正三角形的重心軌跡將是一個  $n$  芒星。

(三) 在以  $P$  為底的標準型中，除了  $n = 4$  時的  $\overline{QR}$  外， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QR}$  都將包絡出拋物線。

## 柒、未來展望

一、探討正  $n$  邊形內接正  $m$  邊形的情況? 是否每個正  $n$  邊形都有無限多個內接正  $m$  邊形?

二、正多面體內接正四面體的情形?

## 捌、參考資料

一、大考中心 101 年學測試題

[http://www.ceec.edu.tw/AbilityExam/AbilityExamPaper/101SAT\\_Paper/101SAT\\_PaperIndex0.htm](http://www.ceec.edu.tw/AbilityExam/AbilityExamPaper/101SAT_Paper/101SAT_PaperIndex0.htm)

二、拋物線作圖

[http://web2.tcssh.tc.edu.tw/school/tcsshmath/yang/edu-parabola/parabola\(web1\).htm](http://web2.tcssh.tc.edu.tw/school/tcsshmath/yang/edu-parabola/parabola(web1).htm)

三、正方形內接正三角形作圖

<http://www.xzbu.com/9/view-849450.htm>

# 附錄

## 壹、證明

### 一、唯一性

我們發現，若在正 $n$ 邊形的邊上取一定點 $P$ ，則以此點為其中一頂點的內接正三角形 $PQR$ ，最多只會有一個。要證明出唯一性，需要引用到多個定理。

首先， $\xi_Q$ 的定義為 $\overline{PQ}$ 與正 $n$ 邊形靠近 $P$ 一側的夾角，而 $\xi_R$ 的定義則是 $\overline{PR}$ 與正 $n$ 邊形靠近 $P$ 一側的夾角。

另外， $\Psi = \left\{ \Delta PQR \mid \forall Q' \in Q \text{ 所在邊}、R' \in R \text{ 所在邊}, \xi_{Q'} \leq \frac{\pi}{2} \text{ 且 } \xi_{R'} \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ 。

#### (一) 引理一

若 $\Delta PQR$ 與 $\Delta PQ'R'$ 都是正 $n$ 邊形的內接正三角形，其中 $\Delta PQR \in \Psi$ 且 $\Delta PQ'R' \in \Psi$ ，則 $\Delta PQ'R' = \Delta PQR$ 。

**證明**

1. 若 $Q'$ 位於 I 區( $Q' \neq Q$ )

$\because P$  對  $Q$  所在邊的垂足位於正 $n$ 邊形外(右下方)且 $\xi_{Q'} > \xi_Q$ ，

$\therefore \overline{PQ'} < \overline{PQ}$ 。

考慮到 $\angle R'PQ' = \angle RPQ = \frac{\pi}{3}$ ，

$\Rightarrow R'$  位於 III 區，同理可得 $\overline{PR'} > \overline{PR}$ 。

$\therefore \overline{PR'} > \overline{PR} = \overline{PQ} > \overline{PQ'} \Rightarrow \overline{PQ'} \neq \overline{PR'}$  (矛盾)

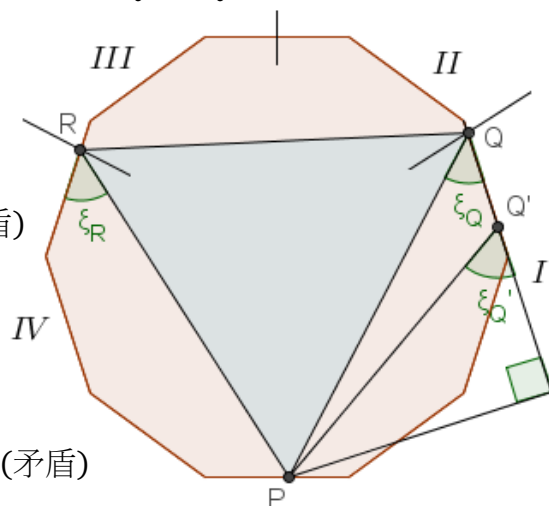
2. 若 $Q'$ 位於 II 區( $Q' \neq Q$ )

考慮到 $\angle R'PQ' = \angle RPQ = \frac{\pi}{3}$ ，

$\Rightarrow R'$  位於 IV 區。

$\therefore$  同理 $\overline{PR'} < \overline{PR} = \overline{PQ} < \overline{PQ'} \Rightarrow \overline{PQ'} \neq \overline{PR'}$  (矛盾)

故 $Q' = Q$ ，即 $\Delta PQ'R' = \Delta PQR$ 。



#### (二) 引理二

若 $\Delta PQR$ 是正 $n$ 邊形的內接正三角形且 $n$ 是偶數，則只有 $n = 4$ 或 $6$ 時才有可能出現「 $Q$ 位於 $P$ 所在邊的平行對邊」的情況。

**證明**

假設 $Q$ 位於 $P$ 所在邊的平行對邊，  
 $R$ 在正 $n$ 邊形上，而 $S$ 在其外接圓上。

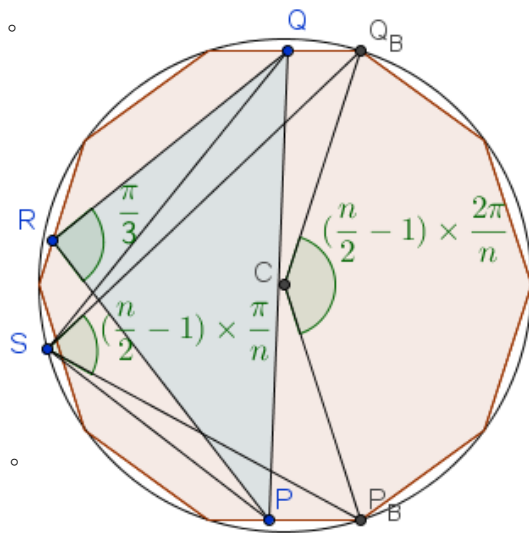
$\therefore \angle QRP \geq \angle Q_B R P_B \geq \angle Q_B S P_B$

故 $\frac{\pi}{3} \geq \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2n \geq 3n - 6$

$\Rightarrow n \leq 6$ ，即 $n = 4$ 或 $6$ 。

而等號成立時( $n = 6$ )， $P = P_B$ 、 $Q = Q_B$ 。



(三) 引理三

$\forall n \in \text{偶數但 } n \neq 4$ ，所有該正 $n$ 邊形的內接正三角形 $\in \Psi$ 。

**證明**

由右圖可以看出， $\overline{A_n A_1}$ 垂直於 $\overline{A_{n/2} A_{(n/2)+1}}$ 。

除非 Q 位於 P 所在邊的平行對邊上，

$\therefore P = A_1$ 、 $Q = A_{n/2}$ 時 $\xi_Q$ 有最大值

故 $\xi_Q \leq \frac{\pi}{2}$ 必定成立。

同理除非 R 位於 P 所在邊的平行對邊上，

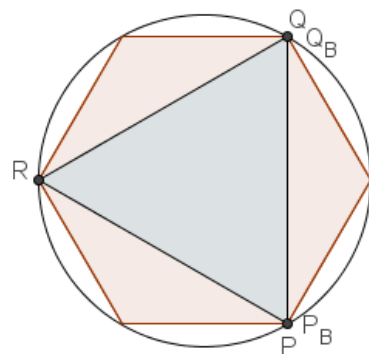
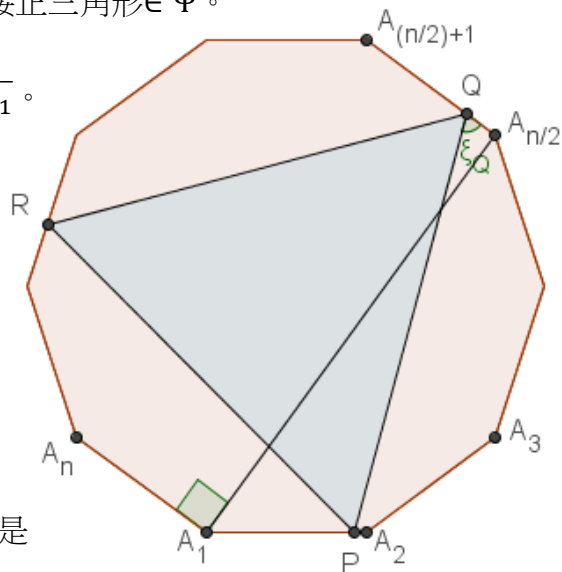
$\xi_Q \leq \frac{\pi}{2}$ 必定成立。

但若 Q 或 R 位於 P 所在邊的平行對邊上，  
由定理二可知 $n = 4$  或  $6$ 時 $\Delta PQR$ 才有可能  
是內接正三角形，

且 $n = 6$ 時的特殊狀況由右圖可看出， $\xi_Q \leq \frac{\pi}{2}$ ，

所以， $\forall n \in \text{偶數但 } n \neq 4$ ，

所有該正 $n$ 邊形的內接正三角形 $\in \Psi$ 。



(四) 引理四

$\forall n \in \text{奇數}$ ，除非 Q 或 R 位於 P 對面的兩個邊上  
(如右下圖中的①)，其它所有內接正三角形  $PQR \in \Psi$ 。

**證明**

不妨設正 $n$ 邊形邊長為 1。

由右圖可知， $d = \frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n}$ 。

$\therefore n \geq 3$

$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d = \frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n} \leq 1$

也就是 P 對於②號邊的垂足 H

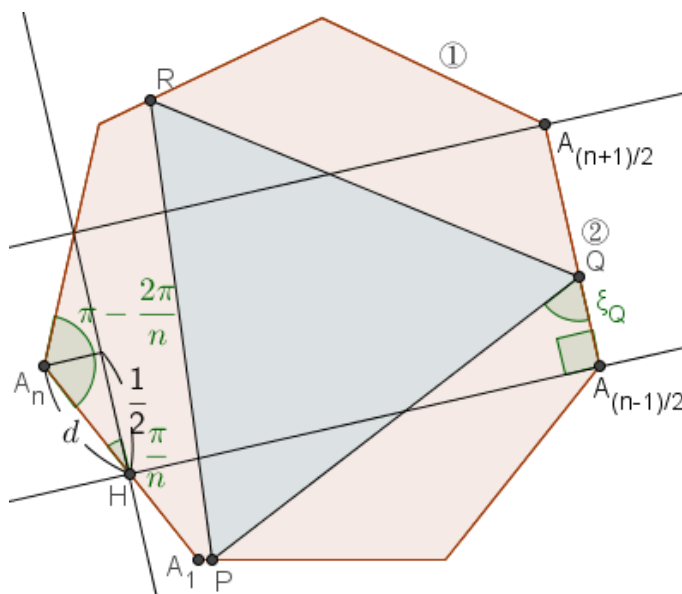
必位於正 $n$ 邊形外的右下方

$\therefore$ 若 Q 位於②號邊及以下，

則 $\xi_Q \leq \frac{\pi}{2}$ 。

同理便可得知， $\forall n \in \text{奇數}$ ，

除非 Q 或 R 位於 P 對面的兩個邊上，其它所有內接正三角形  $PQR \in \Psi$ 。



(五) 引理五

若 $\triangle PQR$  是正 $n$ 邊形的內接正三角形且 $n$ 是奇數，則只有 $n = 3, 5, 7$  或  $9$ 時才有可能出現「 $Q$  位於  $P$  對面的邊(如右下圖中的①)」的情況。

**證明**

假設  $Q$  位於  $P$  所在邊的平行對邊，  
 $R$  在正 $n$ 邊形上，而  $S$  在其外接圓上。

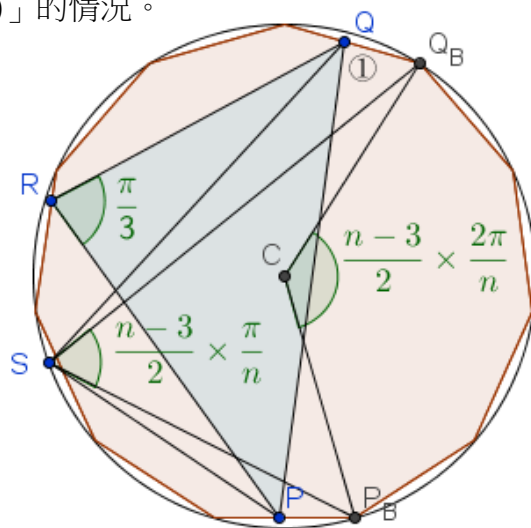
$$\therefore \angle QRP \geq \angle Q_B R P_B \geq \angle Q_B S P_B$$

$$\text{故 } \frac{\pi}{3} \geq \frac{n-3}{2} \times \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2n \geq 3n - 9$$

$$\Rightarrow n \leq 9, \text{ 即 } n = 3, 5, 7 \text{ 或 } 9。$$

而等號成立時( $n = 9$ )， $P = P_B$ 、 $Q = Q_B$ 。

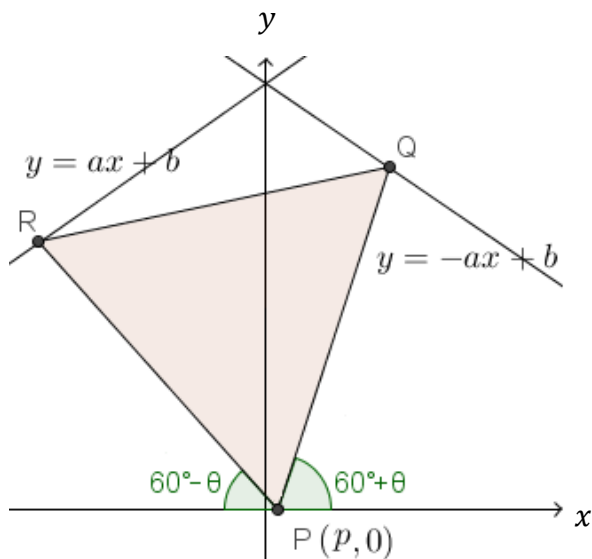


(六) 引理六

若 $\triangle PQR$ 與 $\triangle PQ'R'$ 這兩個正 $n$ 邊形的內接正三角形皆是以  $P$  為底的標準型，且 $Q$ 、 $Q'$ 位於同一個邊上， $R$ 、 $R'$ 位於同一個邊上，則 $\triangle PQR = \triangle PQ'R'$ 。

**證明**

1. 建立平面直角坐標系，如下圖所示



設  $Q$ 、 $R$  分別位於  $y = -ax + b$  及  $y = ax + b$ ， $P(p, 0)$

$$Q: \begin{cases} \overline{PQ}: y = \tan(60^\circ + \theta)(x - p) \\ y = -ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -ax + b = \tan(60^\circ + \theta)(x - p)$$

$$\Rightarrow x = \frac{p \tan(60^\circ + \theta) + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a}$$

$$\text{故 } \overline{PQ} = \left| \frac{p \tan(60^\circ + \theta) + b}{\tan(60^\circ + \theta) + a} - p \right| |\sec(60^\circ + \theta)|$$

$$= \frac{b - ap}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)}$$

	$\frac{p \tan(60^\circ + \theta) - b}{\tan(60^\circ + \theta) + a} - p$	$\sec(60^\circ + \theta)$
$60^\circ + \theta > 90^\circ$	-	-
$60^\circ + \theta < 90^\circ$	+	+
$60^\circ + \theta = 90^\circ$	$\theta$ 有唯一解 $30^\circ$	

$$R: \begin{cases} \overline{PR}: y = -\tan(60^\circ - \theta)(x - p) \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\tan(60^\circ - \theta)(x - p)$$

$$\Rightarrow x = \frac{p \tan(60^\circ - \theta) - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{PR} &= \left| p - \frac{p \tan(60^\circ - \theta) - b}{\tan(60^\circ - \theta) + a} \right| |\sec(60^\circ - \theta)| \\ &= \frac{b + ap}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)} \quad (\text{正負討論同理}) \end{aligned}$$

當  $\overline{PQ} = \overline{PR}$  時：

$$\Rightarrow \frac{b - ap}{\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)} = \frac{b + ap}{\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)}$$

$$\Rightarrow b[\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)] - [ap[\sin(60^\circ - \theta) + a \cos(60^\circ - \theta)]]$$

$$= b[\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)] + ap[\sin(60^\circ + \theta) + a \cos(60^\circ + \theta)]$$

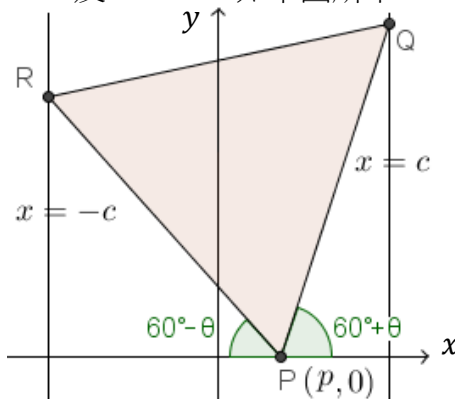
$$\Rightarrow ap[2 \sin 60^\circ \cos \theta + 2a \cos 60^\circ \cos \theta] = -b[2 \cos 60^\circ \sin \theta - 2a \sin 60^\circ \sin \theta]$$

$$\Rightarrow b(\sqrt{3}a - 1) \tan \theta = ap(\sqrt{3} + a) \text{ 是 } \tan \theta \text{ 的一元一次方程式}$$

故在  $\theta$  的合理範圍內， $\theta$  若有解，最多只有一個。

也就是說，固定  $P(p, 0)$ ，最多只找到一個  $\theta$  (即  $Q, R$  的位置)。

2. 設  $Q, R$  分別位於  $x = c$  及  $x = -c$ ，如下圖所示



$$\overline{PQ} = (c - p) \sec(60^\circ + \theta)$$

$$\overline{PR} = (c + p) \sec(60^\circ - \theta)$$

當  $\overline{PQ} = \overline{PR}$  時：

$$c \cos(60^\circ - \theta) - p \cos(60^\circ - \theta) = c \cos(60^\circ + \theta) + p \cos(60^\circ + \theta)$$

$$\Rightarrow p(2 \cos \theta \cos 60^\circ) = c(2 \sin 60^\circ \sin \theta)$$

相同地，固定  $P(p, 0)$ ，最多只能找到一個  $\theta$  (即  $Q, R$  的位置)。

再配合 K 點定理，這個引理即可以說明：所有可化成以某點為底之標準型的內接正三角形，皆是用 K 點畫出的。

( $\because$ 若存在非以 K 點畫出的以 P 為底之內接正三角形  $PQ'R'$ ，則  $Q'$ 、 $R'$  就是除了以 K 點畫出的  $Q$ 、 $R$  外的第二組解。)

(七) 引理七

設  $\Delta PQR$  這個正  $n$  邊形的內接正三角形是以 P 為底的標準型，在三頂點的分別所在邊上也存在著  $\Delta P'Q'R'$  這個正  $n$  邊形的內接正三角形 ( $P \rightarrow P'$ ， $Q \rightarrow Q'$ ， $R \rightarrow R'$ )。

若  $P' \neq P$ ，則  $Q \neq Q'$  且  $R \neq R'$ 。

**證明**

設  $P' \neq P$  但  $Q = Q'$ ，

$\because \angle KPQ = 30^\circ$ ，又所有可化成以某點為底之標準型皆是用 K 點畫出的，

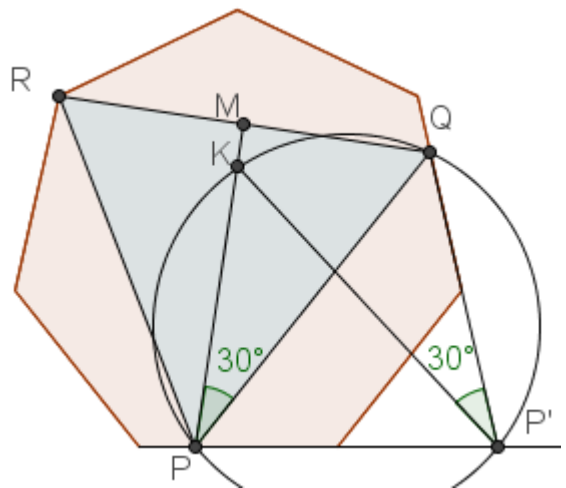
$\therefore$  可能的  $P'$  就是 P、Q、K 三點決定出的圓與底邊的交點。

而該  $P'$  就是定理五中的 E 點，即 Q 所在邊與 P 所在邊延長後的交點，故只在  $n = 3$  或 4 時與正  $n$  邊形的頂點重合，其它狀況時都在正  $n$  邊形外。

也就是說， $\Delta P'Q'R'$  不可能是正三角形。

故若  $P' \neq P$ ，則  $Q \neq Q'$ ；同理  $R \neq R'$ 。

這說明了：設  $\Delta PQR$  與  $\Delta PQ'R'$  這兩個正  $n$  邊形的內接正三角形皆是以 Q 或 R 為底的標準型，且 Q、 $Q'$  位於同一個邊上，R、 $R'$  位於同個邊上，則  $\Delta PQR = \Delta PQ'R'$ 。



(八) 引理八

若  $\Delta PQR$  是正 7 邊形的內接正三角形，則 P、Q、R 兩兩所夾邊數必定是 (1,1,2) 這個組合。

**證明**

$$\because \delta(P, Q) + \delta(P, R) + \delta(Q, R) = 7 - 3 = 4$$

$\therefore$  其它可能組合只有 (0,1,3)、(0,2,2) 或 (0,0,4)

1.  $\delta(P, Q) = 0, \delta(P, R) = 1, \delta(Q, R) = 3$

$$\because \angle PRQ \leq \angle P_B R Q_B,$$

且  $\angle P_B R Q_B$  的值最大約為  $55.25^\circ$ ，

故  $\Delta PQR$  不可能是正三角形。

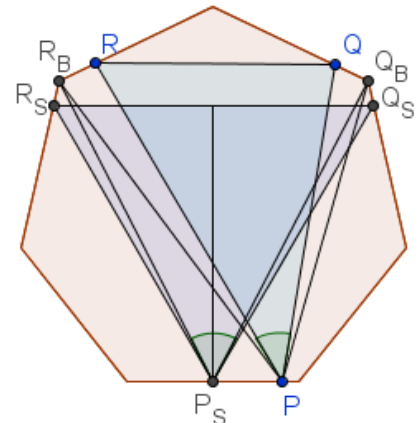
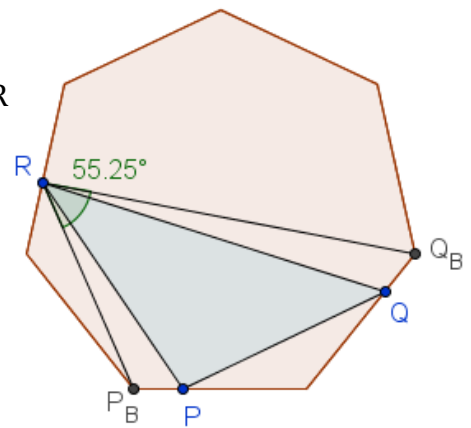
2.  $\delta(P, Q) = 2, \delta(P, R) = 2, \delta(Q, R) = 0$

$$\because \angle RPQ \leq \angle R_B P Q_B \leq \angle R_B R_S Q_B < \angle R_S R_S Q_S = 60^\circ,$$

故  $\Delta PQR$  不可能是正三角形。

3.  $\delta(P, Q) = 0, \delta(P, R) = 0, \delta(Q, R) = 4$

仿 2.，可得  $\Delta PQR$  不可能是正三角形。



### (九) 唯一性定理

統合引理一~八，可以證明出唯一性：

若固定  $P$  點，則在任何正  $n$  邊形中，以  $P$  為其中一頂點的內接正三角形  $PQR$  最多只有一個。

#### 說明

#### 1. 通常解及 $n = 3, 9$

##### (1) $n$ 是偶數

①  $n \geq 6$ ：由引理三可知所有的內接正三角形皆  $\in \Psi$ ，再藉由引理一得出唯一性。

②  $n = 4$ ：另外討論。

##### (2) $n$ 是奇數

①  $n \geq 11$ ：由引理五得知合理的  $Q, R$  皆位於②號邊及以下，依引理四得知所有內接正三角形皆  $\in \Psi$ ，再由引理一得出唯一性。

②  $n = 3$ ：圖形必定是以  $P$  為底的標準型，由引理六可得出唯一性。

③  $n = 5$  或  $7$ ：另外討論。

④  $n = 9$ ：只有  $P = P_B, Q = Q_B$  的特殊狀況無法適用引理四(由引理五)，但「特殊狀況」本身就具有唯一性。

總之，當  $n \neq 4, 5, 7$ ，正  $n$  邊形的內接正三角形是符合唯一性定理的。

#### 2. 需另外討論的 $n$ 值：4, 5, 7

設  $\triangle PQR$  與  $\triangle PQ'R'$  都是正  $n$  邊形的內接正三角形。

$$\because \delta(P, Q) + \delta(P, R) + \delta(Q, R) = n - 3$$

$$\therefore \delta(P, Q), \delta(P, R), \delta(Q, R) \text{ 只有一種組合 } \begin{cases} n = 4 : (0, 0, 1) \\ n = 5 : (0, 1, 1) \\ n = 7 : (1, 1, 2) \end{cases} \text{ (這裡用到了引理八)}$$

故每一個內接正三角形  $PQR$  都可以化為以某一點為底的內接正三角形。

##### (1) 若 $Q'$ 位於 $Q$ 所在邊上且 $R'$ 位於 $R$ 所在邊上

① 若  $\triangle PQR$  是以  $P$  為底的內接正三角形：依引理六可得出唯一性。

② 若  $\triangle PQR$  是以  $Q$  或  $R$  為底的內接正三角形：依引理七可得出唯一性。

##### (2) 若 $Q'$ 不在 $Q$ 所在邊上或 $R'$ 不在 $R$ 所在邊上

$\because$  每一個內接正三角形  $PQR$  都可以化為以某一點為底的內接正三角形，且  $P, Q, R$  兩兩所夾邊數皆符合標準型範圍定理結論，

$\therefore$  其行為模式也必符合標準型範圍定理，也就是說以  $Q$  或  $R$  為底的標準型中， $P$  的存在範圍與以  $P$  為底的標準型中， $P$  的存在範圍是錯開的。

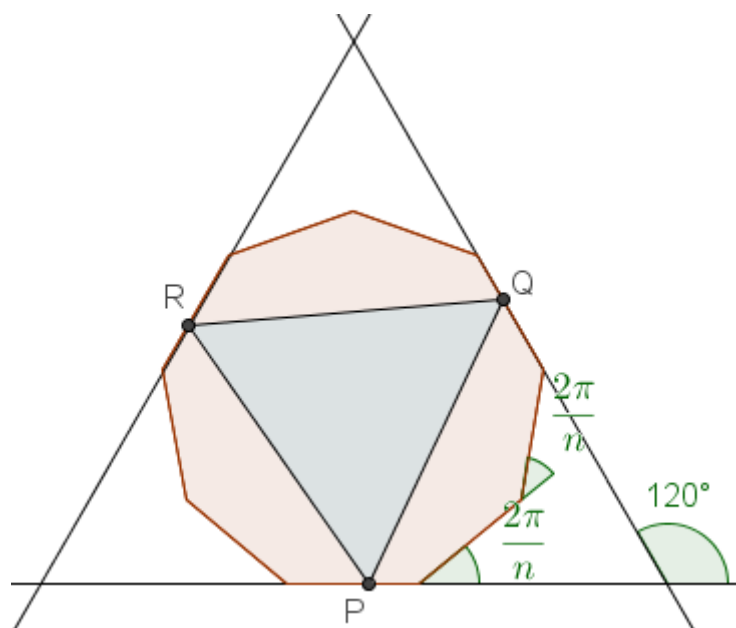
又  $\triangle PQR$  與  $\triangle PQ'R'$  必定是以不同兩點為底的標準型，

故固定位置的  $P$  不能一次扮演「標準型上的  $P$ 」及「非標準型上的  $P$ 」。

也就是說， $\triangle PQR$  與  $\triangle PQ'R'$  是不可能同時存在的。

綜合上述幾點可得知，當  $n = 4, 5, 7$ ，正  $n$  邊形的內接正三角形也是符合唯一性定理的。

二、當 $n$ 是3的倍數時，其內接正三角形模式與 $n = 3$ 時相同



亦即將 P、Q、R 三點所在的邊延長可得到一個大的正三角形充要條件為 $n$ 是3的倍數。

**證明**

(一) 證明必要條件：

因為由 P 點所在的邊逆時針轉至 Q 點所在的邊要轉  $\frac{\pi}{3}$  弧度

且正 $n$ 邊形每逆時針轉至下一個邊要轉  $\frac{2\pi}{n}$

所以當 P 與 Q 分別所在的邊延長時若能夾  $\frac{\pi}{3}$  弧度成為正三角形的兩個邊

則  $\frac{2\pi}{n} \times i = \frac{\pi}{3}$ ,  $i \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3i$ , 故 $n$ 必為3的倍數

(二) 證明充分條件：

由必要條件之證明可以得知，若 $n$ 是3的倍數，則選定一個邊後，必可找出另外兩個邊使得三邊延長後可成為正三角形。

若 P 在該選定的邊上，則必可用正三角形內接正三角形的作圖方法找出 Q 與 R，再根據唯一性，不可能存在另一組 Q、R。

$\therefore n$ 是3的倍數時，所找出的 P、Q、R，其分別所在的邊延長必為一個正三角形。

故 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 時，其模式與正三角形內接正三角形相同。

當然，作圖原理也相同。



四、標準型的存在定理：每一個內接正三角形皆可歸為以某一頂點為底的標準型

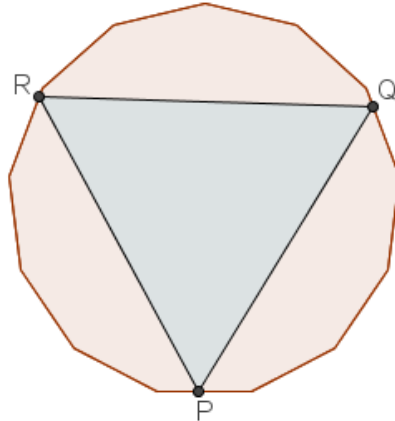
(一) 若  $n \equiv 0 \pmod{3}$

由於當  $n$  是 3 的倍數時，其模式與正三角形內接正三角形相同，

$$\text{故 } \delta(P, Q) = \delta(P, R) = \delta(Q, R) = \frac{n}{3} - 1。$$

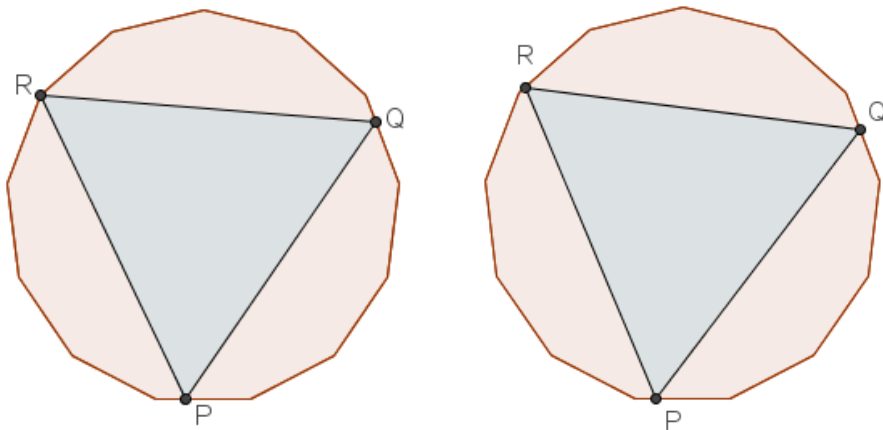
(二) 若  $n \equiv 1 \pmod{3}$

1. 先從以 P 為底的標準型出發，並慢慢順時針旋轉，如下圖。



$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-1}{3}$

2. R 先抵到正  $n$  邊形較上方的頂點，如左下圖。



3. 繼續順時針旋轉，得右上圖。

$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$\frac{n-4}{3}$	$\frac{n-4}{3} + 1 = \frac{n-1}{3}$	$\frac{n-1}{3} - 1 = \frac{n-4}{3}$

得到的是以 Q 為底的內接正三角形，

但只要把 Q 看成 P、R 看成 Q、P 看成 R，就回到了 1. 的圖形。

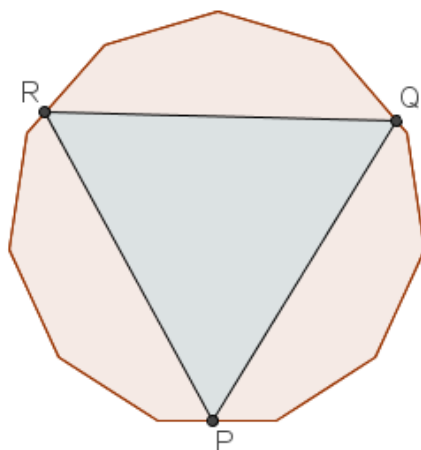
也就是說，繼續旋轉下去也只是 1. → 2. → 3. → 1. 的迴圈。

4. 若是逆時針旋轉也一樣，只要經過水平翻轉就跟順時針旋轉的圖形相同，得到的是以 R 為底的內接正三角形。

$\therefore n \equiv 1 \pmod{3}$  時， $\delta(P, Q)$ 、 $\delta(P, R)$ 、 $\delta(Q, R)$  不可能兩兩相異。

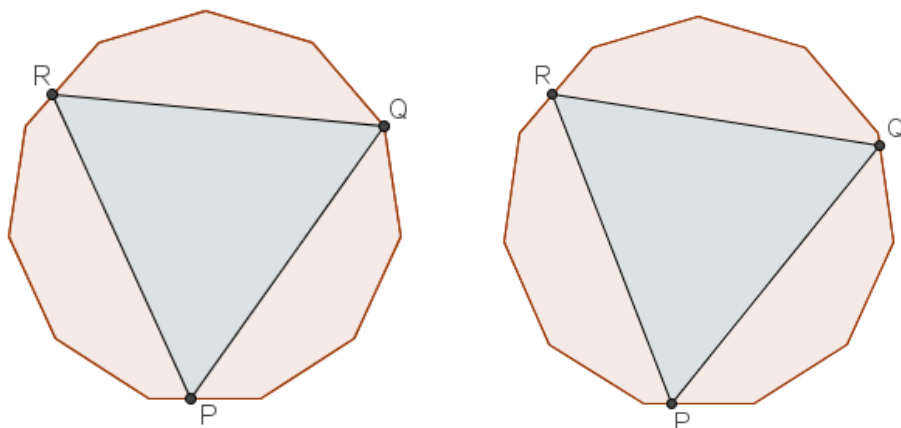
(三) 若  $n \equiv 2 \pmod{3}$

1. 先從以 P 為底的標準型出發，並慢慢順時針旋轉，如下圖。



$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-5}{3}$

2. Q 先抵到正  $n$  邊形較下方的頂點，如左下圖。



3. 繼續順時針旋轉，得右上圖。

$\delta(P, Q)$	$\delta(P, R)$	$\delta(Q, R)$
$\frac{n-2}{3} - 1 = \frac{n-5}{3}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-5}{3} + 1 = \frac{n-2}{3}$

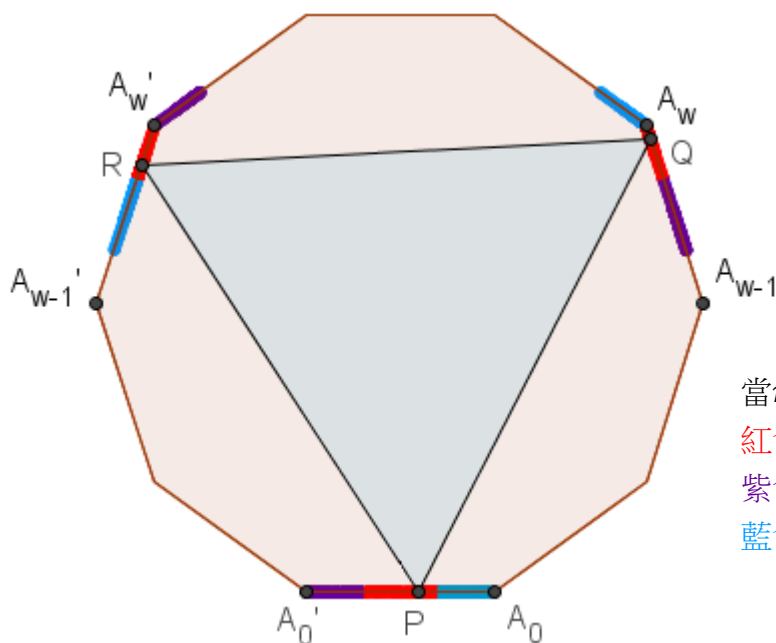
得到的是以 R 為底的內接正三角形。

但只要把 R 看成 P、P 看成 Q、Q 看成 R，就回到了 1. 的圖形，也就是說，繼續旋轉下去也只是 1. → 2. → 3. → 1. 的迴圈。

4. 若是逆時針旋轉也一樣，只要經過水平翻轉就跟順時針旋轉的圖形相同，得到的是以 Q 為底的內接正三角形。

$\therefore n \equiv 2 \pmod{3}$  時， $\delta(P, Q)$ 、 $\delta(P, R)$ 、 $\delta(Q, R)$  不可能兩兩相異。

故每一個內接正三角形 PQR，其 $\delta(P, Q)$ 、 $\delta(P, R)$ 、 $\delta(Q, R)$ 不可能兩兩相異，也就是說，每一個內接正三角形皆可歸為以某一頂點為底的標準型。

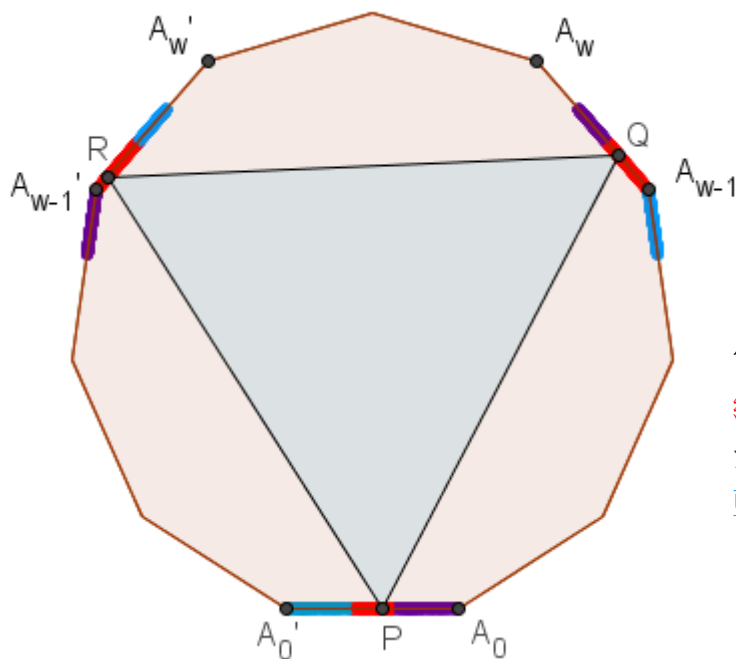


當 $n \equiv 1 \pmod{3}$

紅色：以 P 為底的標準型範圍

紫色：以 Q 為底的標準型範圍

藍色：以 R 為底的標準型範圍



當 $n \equiv 2 \pmod{3}$

紅色：以 P 為底的標準型範圍

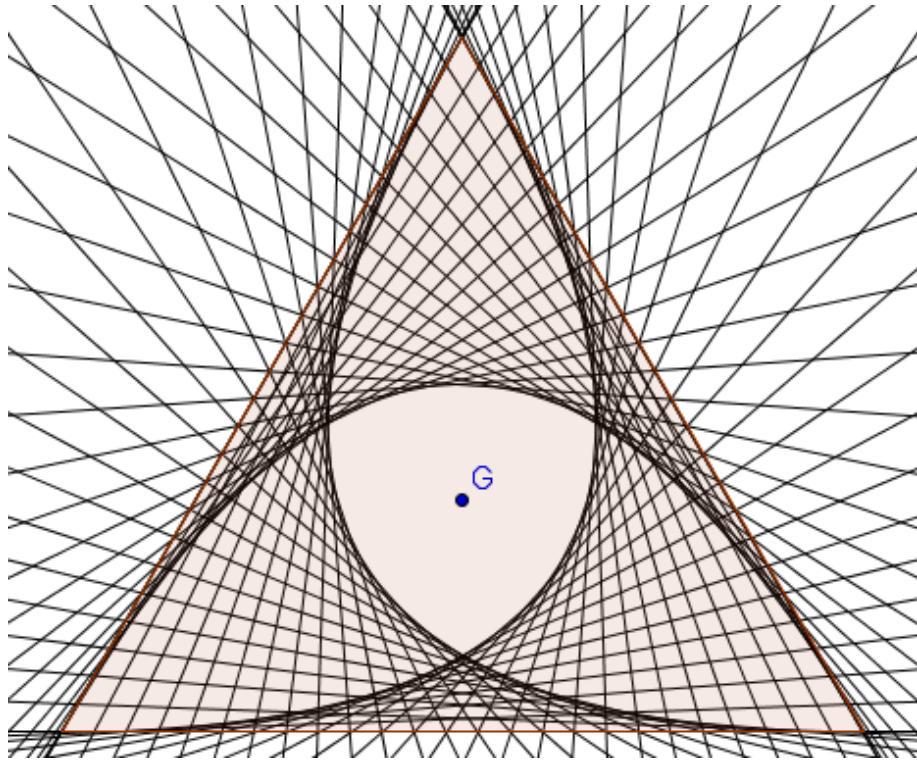
紫色：以 Q 為底的標準型範圍

藍色：以 R 為底的標準型範圍

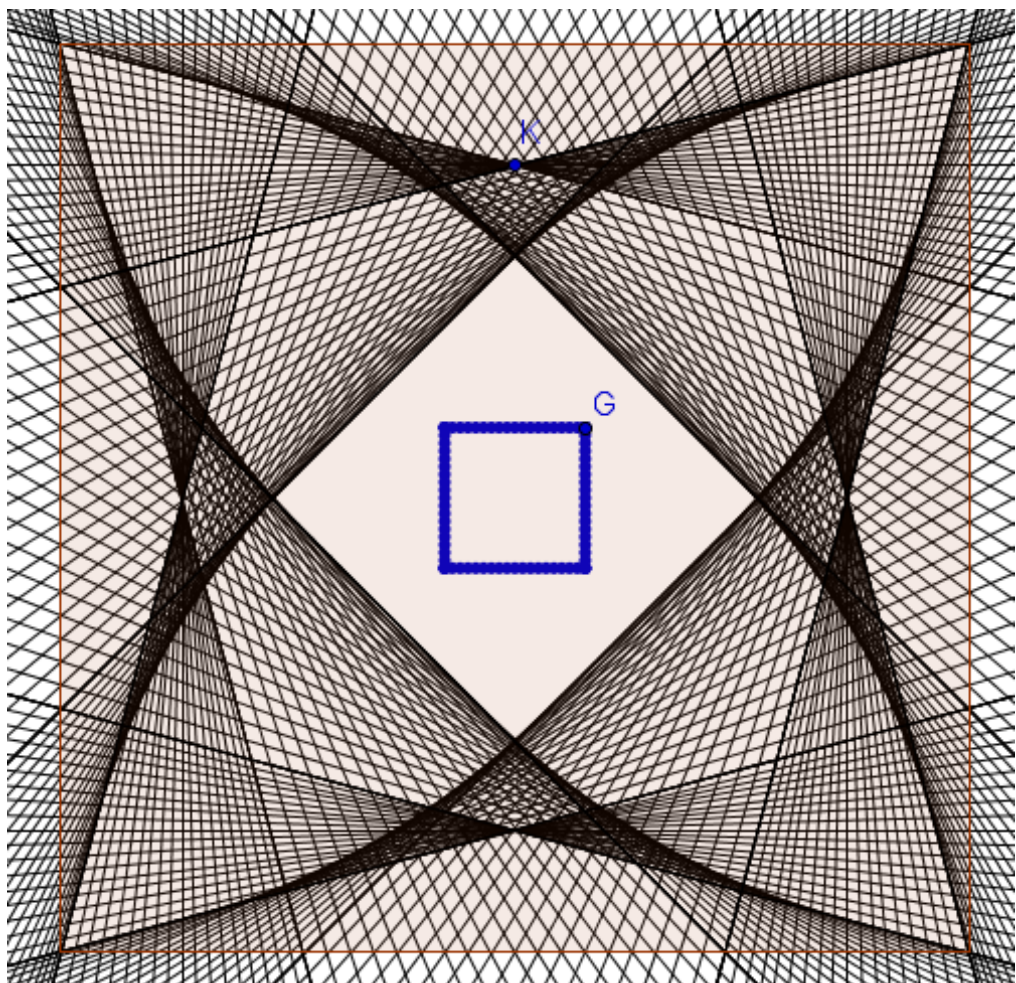
另外，由圖不難看出，若 $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ，在以內接正三角形任意頂點為底的標準型中，三頂點的移動範圍和=正 $n$ 邊形的邊長。

## 貳、圖片集

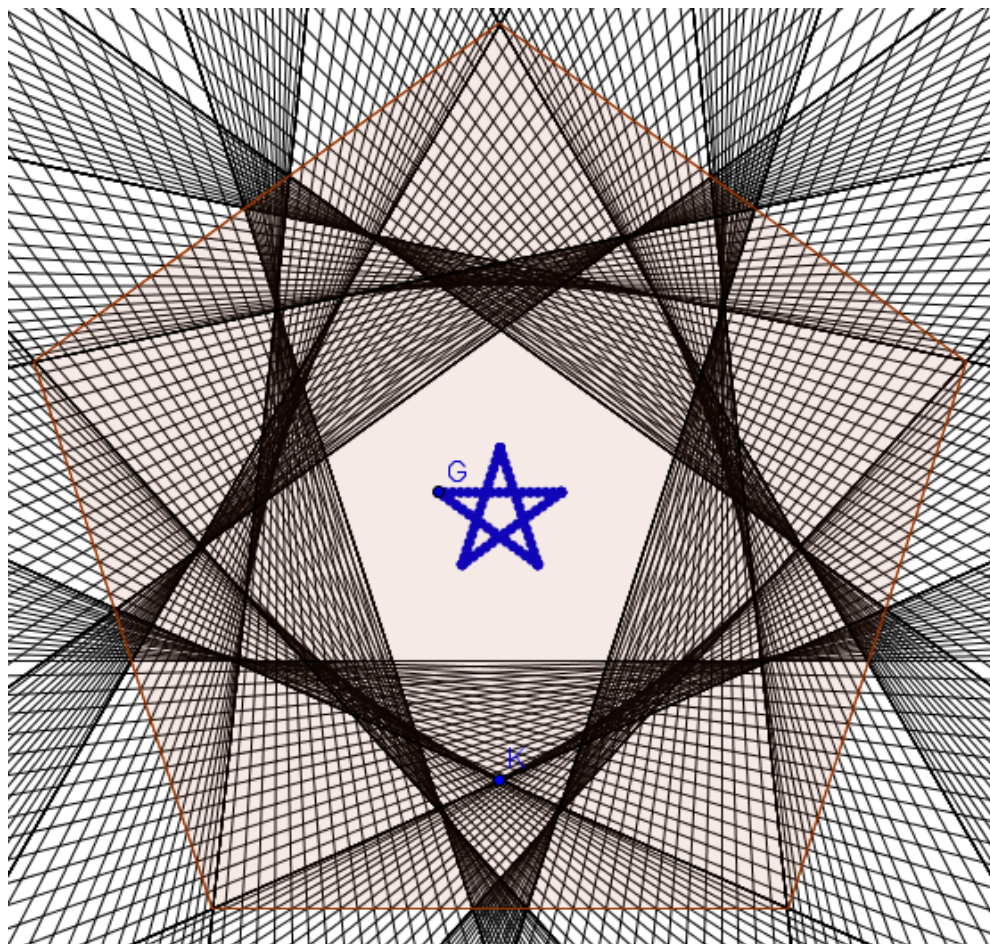
$n = 3$



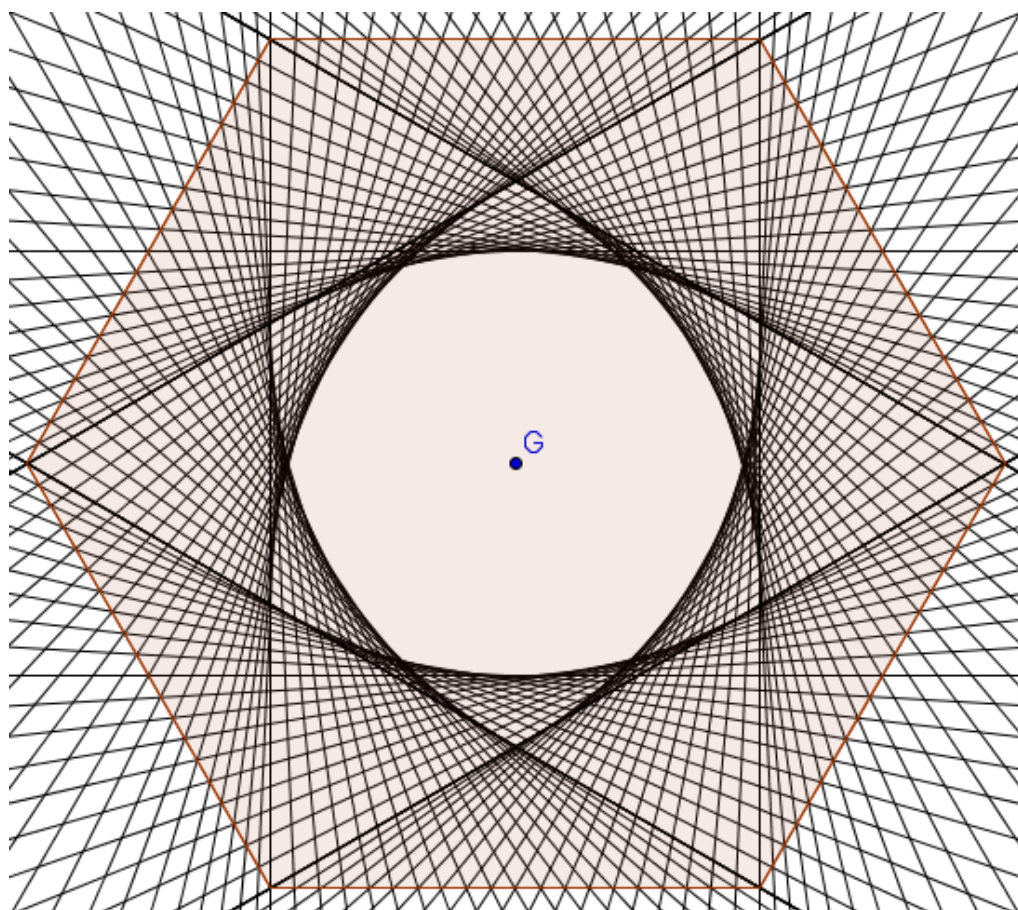
$n = 4$



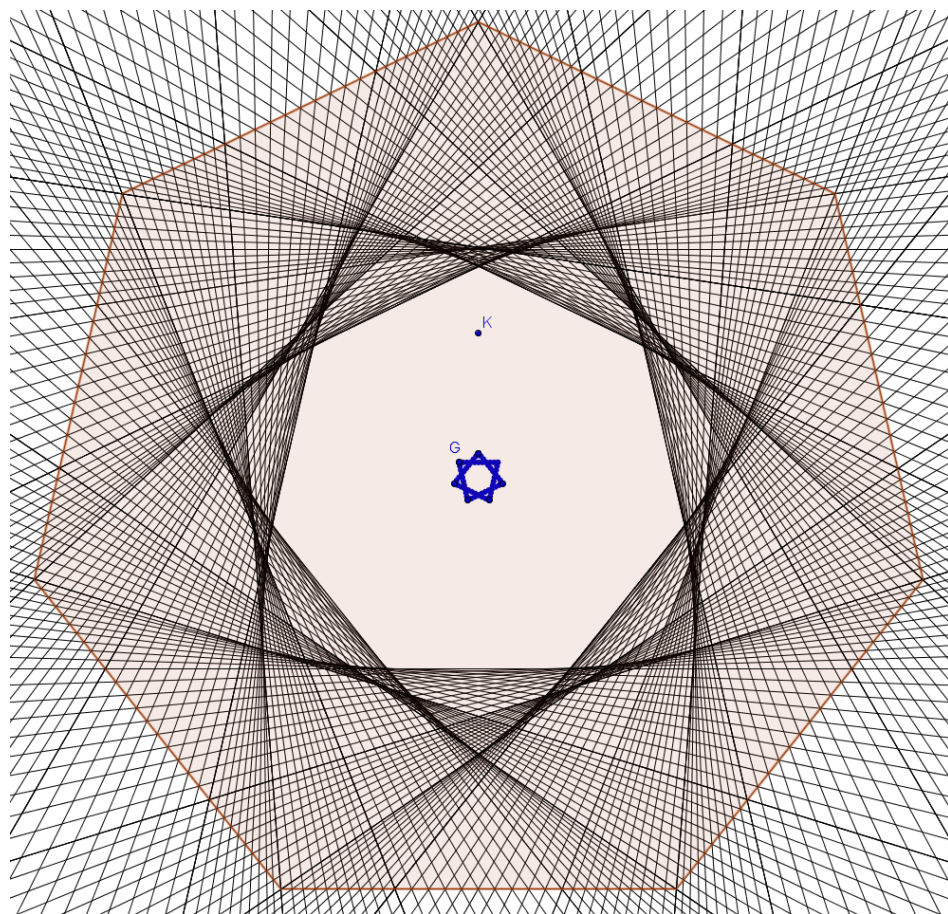
$n = 5$



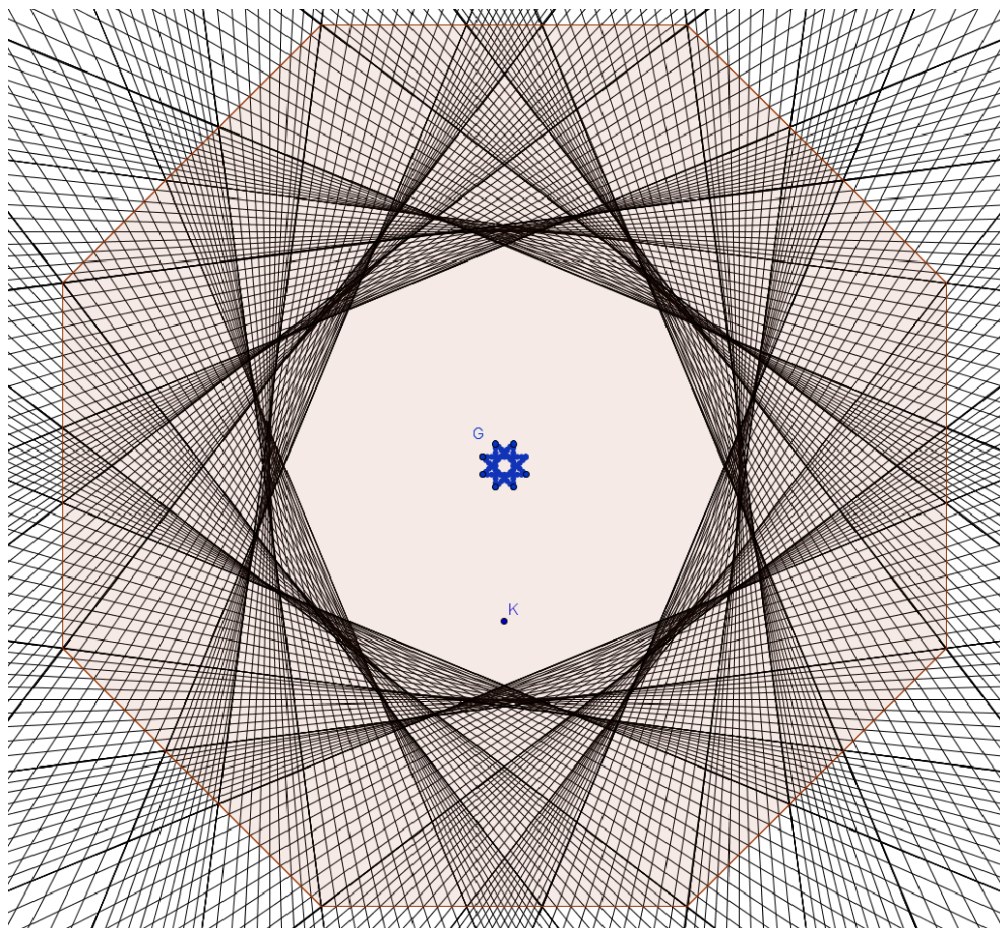
$n = 6$



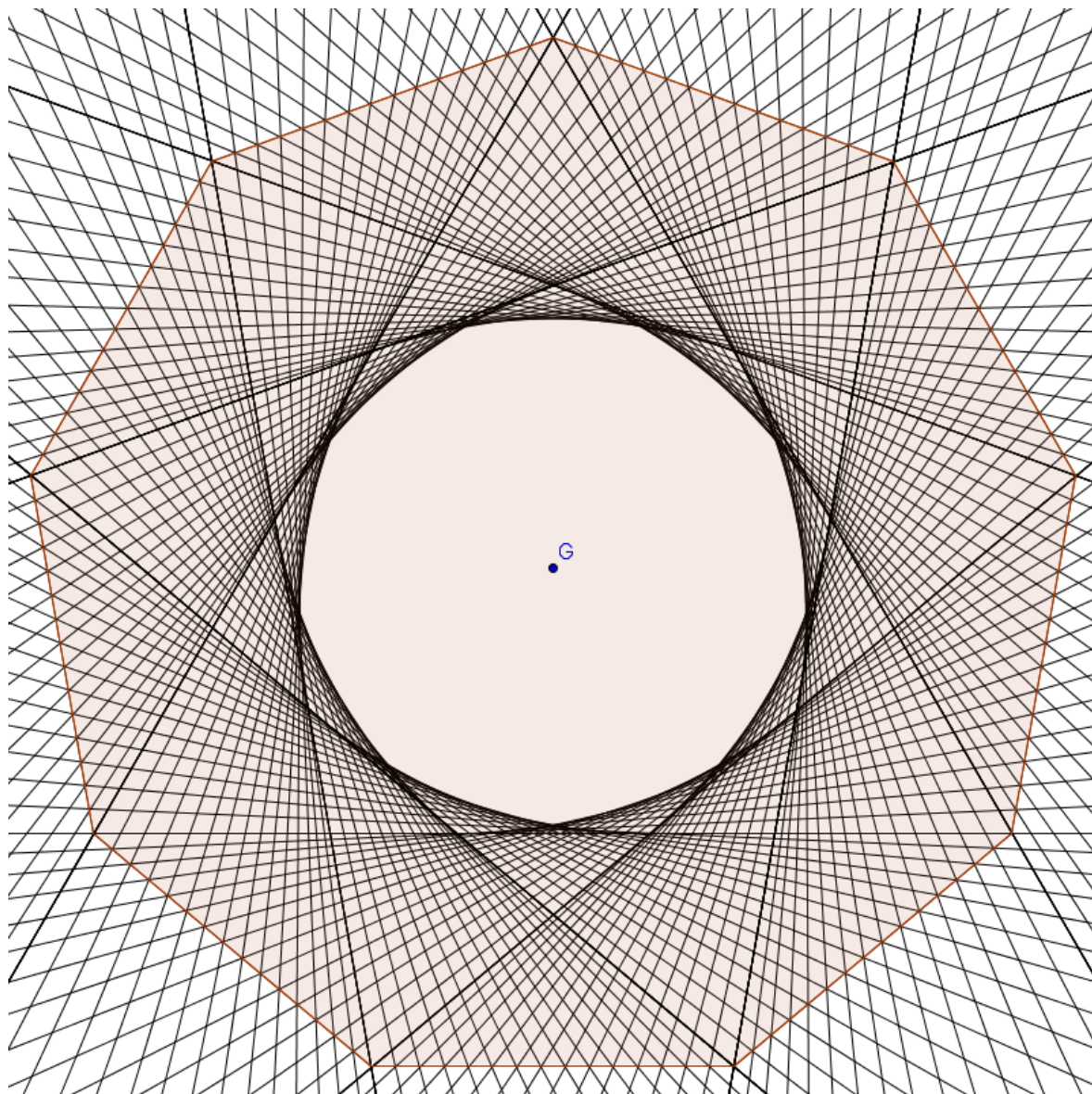
$n = 7$



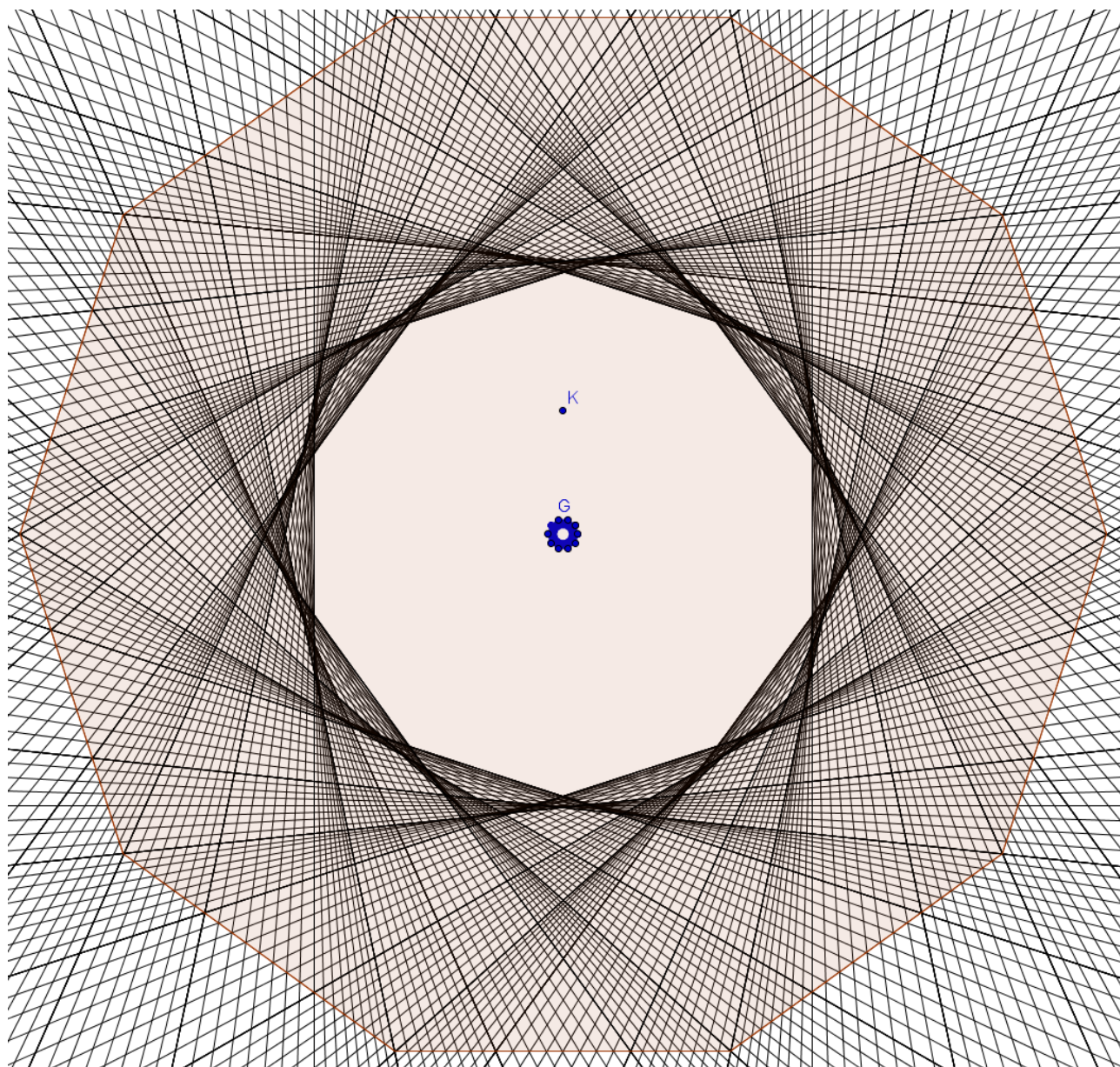
$n = 8$



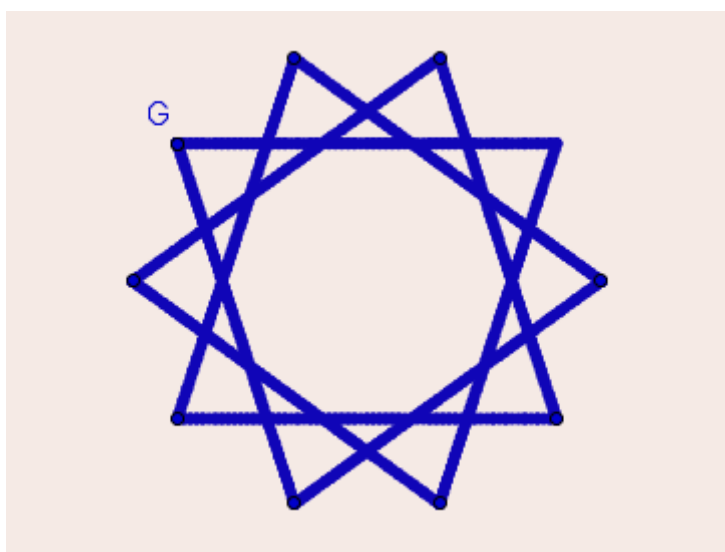
$n = 9$



$n = 10$

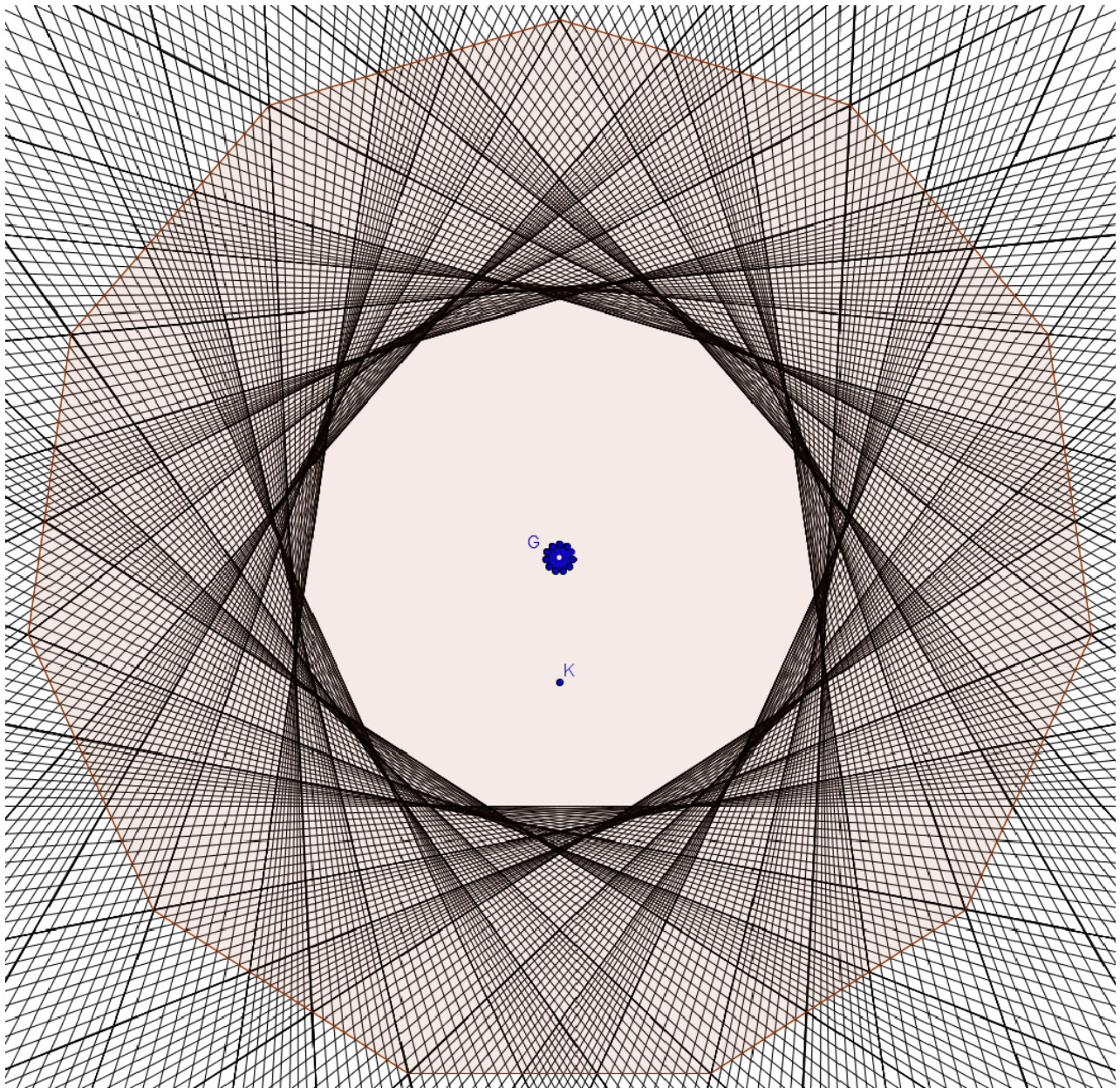


中央重心軌跡：

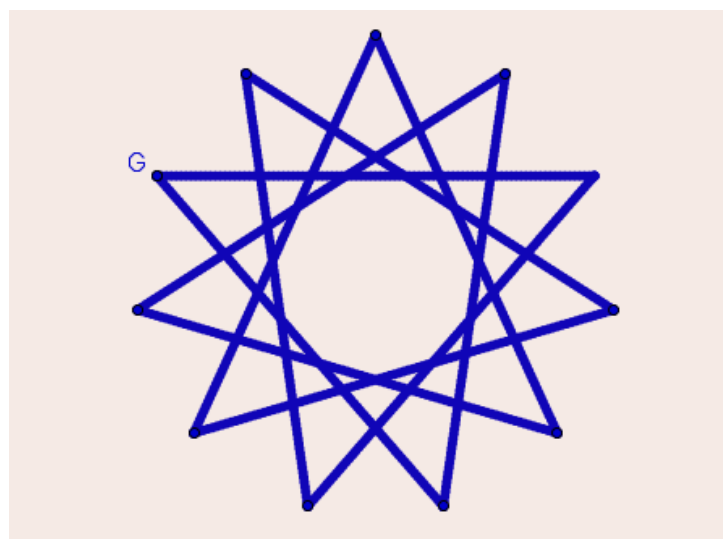




$n = 11$



中央重心軌跡：



## 【評語】 010036

本作品探討正  $n$  邊形的內接正三角形的作圖方法，並探討所作出圖形的各種性質。作品的脈絡清楚，結果分類整齊，作品頗為完整。作品中有些文字組織及定義上有可改善的地方，日後上可考慮將問題推廣至三維空間。