2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010026

參展科別　數學

作品名稱　亂中有序

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立鳳山高級中學

指導教師　張淑娟、王啟聰

作者姓名　林亮宇

關鍵字　**Nice 點**

作者簡介

我是林亮宇，來中國立鳳山高中三年級。

從小我就對數學很有興趣，買東西時會想買哪個比較划算、玩遊戲時會想怎麼做勝算會比較高。雖然有時會因無法找出解答而懊惱，但過程中我享受到了無盡的樂趣。上高中後首次挑戰做數學研究，經過了漫長的陶冶和努力，創作出了這個作品。

科展不僅提升了我的思考能力，也讓本來不善表達的我克服了弱點，希望之後也能繼續作研究，提升自我的內涵。

摘要

本研究主要是探討從平面上任一點中對相異n個點作 1:1 的跳動後的情形。我們發現當n為奇數時，經過多次跳動必可回到原初始點P。而偶數點則需在特定條件下才可回到原初始點。我們並將經n次跳動既可回到原初始點的P點稱為Nice點。我們發現奇數點的Nice點為唯一，而偶數點只要滿足兩兩相隔一邊的邊之向量總和為0時，則Nice點可為平面上任一點

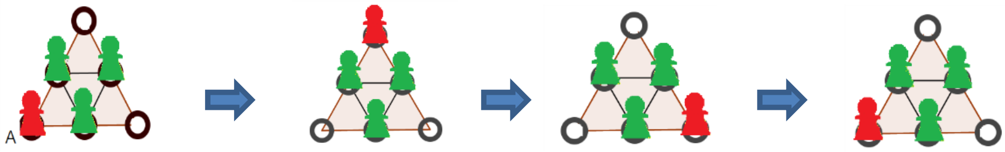
另外，我們將 1:1 的比例改為 m:1 的比例跳動後，發現不論 n 為奇數或偶數，皆可收斂至 Nice 點，並且 Nice 點的軌跡可形成圓錐曲線等圖形。最後，我們將跳動比例推廣至兩種以上，發現只要符合跳動比例乘積為 1，必存在某種跳動順序使得從任一點出發對 n 個點作跳動必定可回到原初始點的優美性質。

Abstract

The research is mainly to investigate the condition for a random point and to be symmetric with respect to N given points. We discover that when N is an odd number, it must go back to the starting point in 2N times of the symmetry. On the other hand, when N is an even number, for a point to go back its starting position after several steps of symmetry, it must satisfy certain condition. And we define the point that can go back to the starting point in N times a 'Nice point'. We find that nice points with respect to odd number of points are unique. When even number of points are given, in order for the existence of nice points the given points need to satisfy certain conditions. Furthermore, we adjust the proportion 1:1 to 1:m, discovering many fascinating phenomenon. The tracks of Nice point can form pictures of conic section, and they construct graceful art designs.

亂中有序

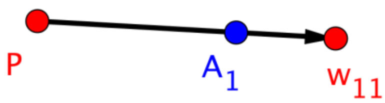
壹、 研究動機

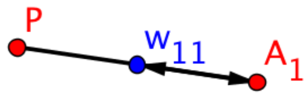


小時候玩跳棋的時候發現，如果將跳棋從A點跳 3 步就可以回到原來的位置，那麼如果我們將三點的位置改變，依序對三點做跳動，是否也可跳回原來A點的位置呢？如果將三點改為四點呢？是否也有相同的結果，因此引發我們一連串的探究。

貳、 名詞定義

一、跳動比例:若有一點P對A_1作m: 1跳動到w_{11}，則此時$\overrightarrow{PA_1}:\overrightarrow{A_1w_{11}}=m:1$。

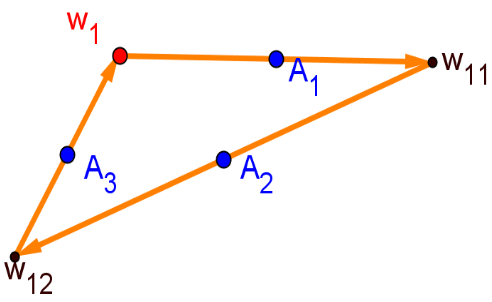




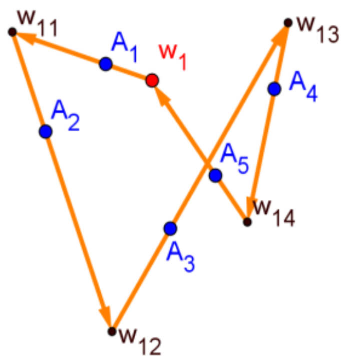
$\boxed{若m>0時}$ $\boxed{若m<0時}$

設平面上有n個點$A_1,A_2,A_3,\dots\dots,A_n$ $(n\geq 3)$，現有一P點，依序對n個點作m: 1跳動，如：P點對A_1作跳動得w_{11}，w_{11}對A_2作跳動得w_{12}， …… ，$w_{1(n-1)}$對A_n作跳動得w_{1n}。這樣稱為做了一輪跳動。w_{1n}對A_1做跳動得w_{21} ，w_{21}對A_2作跳動得w_{22}，w_{22}對A_3作跳動得w_{23}，
…… ，$w_{2(n-1)}$對A_n作跳動得w_{2n}。這樣稱為第二輪跳動。
w_{2n}對A_1作跳動得w_{31} ，w_{31}對A_2作跳動得w_{32}……
w_1經多次跳動可移動到w_{ij}，i 為跳動的輪數，j 為當輪跳動的次數。
w_{ij}對A_{j+1}做跳動可得$w_{i(j+1)}$，且w_{in}對A_n做跳動可得$w_{(i+1)1}$。
為方便證明，我們假設A_1、A_2、A_3、 … 、A_n和初始點P為R^n空間中的 n 個點A_1、A_2、A_3、 … 、A_n的坐標為z_1、z_2、z_3、 … 、z_n，初始點 P 點的坐標為w_1。

二、$Nice$點：設有任一給定n個點，若由w_1點對n個點作n次m: 1的跳動後恰可回到w_1點時，我們稱w_1點為$Nice$點。



$n=3$，$m=1$



$n=5$，$m=\frac{1}{2}$

參、 研究目的

一、探討平面上n個點，由初始點依序對n個點作$1:1$跳動，其跳動點的軌跡。

二、探討平面上n個點，由初始點依序對n個點作$1:1$跳動，其$Nice$點的存在性，並找出其作圖方法。

三、將 $1:1$的比例改為$m:1$，探討其斂散性。

四、將$1:1$的比例改為$m:1$，探討$Nice$點的存在性及作圖方法。

五、探討$Nice$點的軌跡圖形。

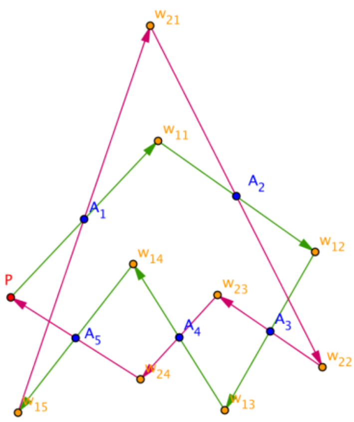
六、將平面推廣到R^n空間

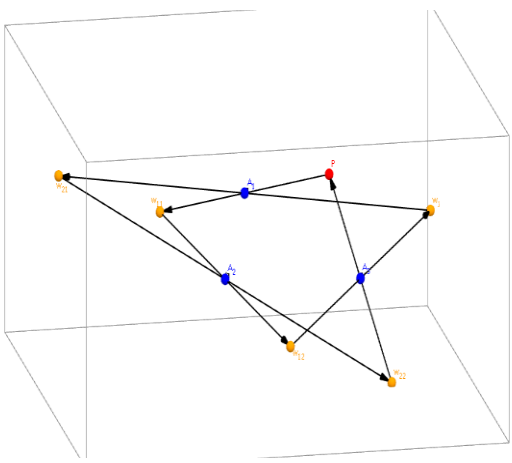
肆、 研究方法及步驟

一、跳動比例為$\mathbf{m:1}$，$\mathbf{m=1}$時

(一) 依序對 n個點作 1:1 跳動，n為奇數

定理一 若n為奇數、m=1 時，經過$2n$次（兩輪）跳動，必可回到原初始點$(P=w_{2n})$





<證明>

設n個點$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ $(n = 2\mathrm{k} + 1$，$\mathrm{k} \in N)$

現有一點P，依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$作$1:1$跳動，由分點公式可推得：

$$w_{11} = 2z_1 - w_1$$

$$w_{12} = 2z_2 - 2z_1 + w_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_{1(n-1)} = 2z_{n-1} - 2z_{n-2} + \cdots + 2z_2 - 2z_1 + w_1$$

$$w_{1n} = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1$$

$$w_{21} = -2z_n + 2z_{n-1} - \cdots + 2z_2 + w_1$$

$$w_{22} = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots + 2z_3 - w_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_{2(n-2)} = -2z_n + 2z_{n-1} + w_1$$

$$w_{2(n-1)} = 2z_n - w_1$$

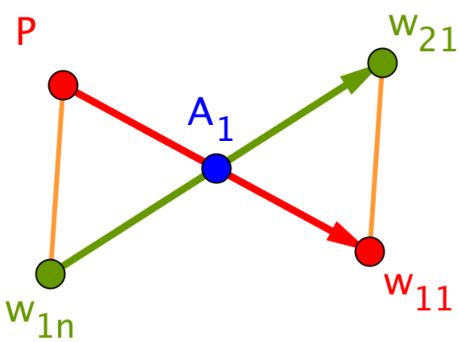
$$w_{2n} = w_1$$

<另證>

設n個點$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ $(n = 2\mathrm{k} + 1$，$\mathrm{k} \in N)$

現有一點 P，依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$作$1:1$跳動

P 點跳動後得w_{11}、w_{12}、$w_{13} \ldots$、w_{1n}、w_{21}、w_{22}、$w_{23} \ldots$、w_{2n}。



$\because \overline{PA_1}:\overline{A_1w_{11}} = \overline{w_{1n}A_1}:\overline{A_1w_{21}} = 1:1$，且$\angle PA_1w_{1n} = \angle w_{11}A_1w_{21}$

$\therefore \triangle PA_1w_{1n} \cong \triangle w_{11}A_1w_{21} \Longrightarrow \overrightarrow{Pw_{1n}} = -\overrightarrow{w_{11}w_{21}}$

同理，$\overrightarrow{w_{11}w_{21}} = -\overrightarrow{w_{12}w_{22}}$

$\overrightarrow{w_{12}w_{22}} = -\overrightarrow{w_{13}w_{23}}$

$\cdots\cdots.$

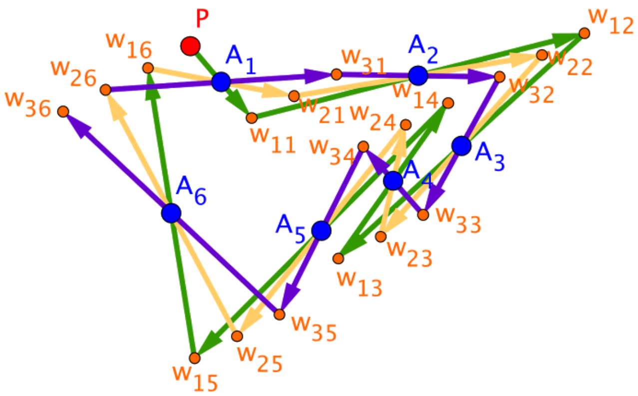
$\overrightarrow{w_{1(n-1)}w_{2(n-1)}} = -\overrightarrow{w_{1n}w_{2n}}$

$\because n$為奇數，$\therefore \overrightarrow{Pw_{1n}} = -\overrightarrow{w_{1n}w_{2n}}$

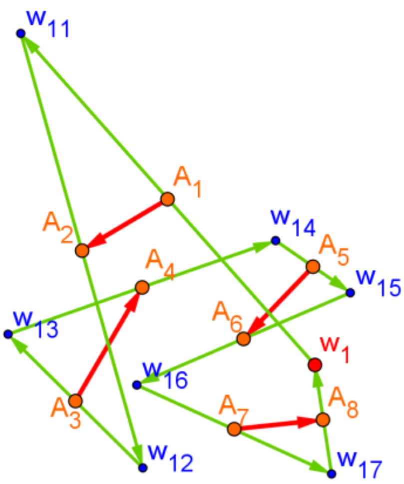
$\therefore P = w_{2n}$

（二）依序對 **n**個點作 1:1 跳動，**n**為偶數

經過多次跳動後，不能跳回原來的初始點



定理二　當n為偶數、m=1 時，只要符合$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{0}$時，則$Nice$點$P$點可為平面上任意點



<證明>

設n個點$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n$ $(n=2\text{k}，\text{k}\in N)$

現有一點P，依序對$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n$作$1:1$跳動，由分點公式可推得：

$w_{11}=2z_1-w_1$

$w_{12}=2z_2-2z_1+w_1$

$w_{13}=2z_3-2z_2+2z_1-w_1$

……

$w_{1(n-1)}=2z_{n-1}-2z_{n-2}+2z_{n-3}-\cdots+2z_3-2z_2+2z_1-w_1$

$w_{1n}=2z_n-2z_{n-1}+2z_{n-2}-\cdots-2z_3+2z_2-2z_1+w_1$

若$2z_n-2z_{n-1}+2z_{n-2}-\cdots-2z_3+2z_2-2z_1=0$

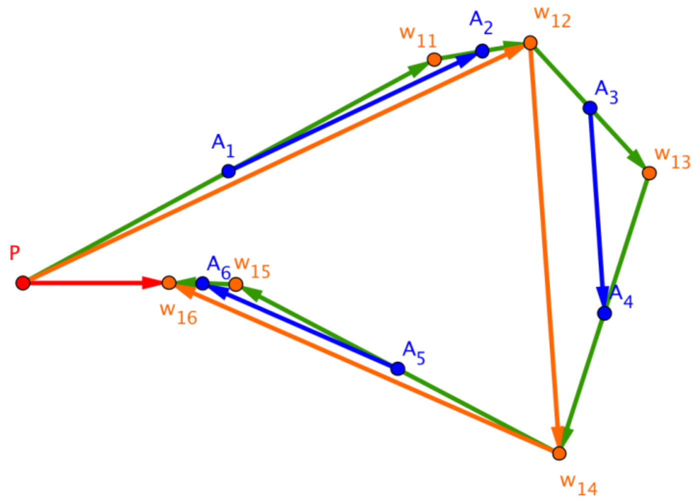
則w_1必定等於w_{1n}

$\because 2z_n-2z_{n-1}+2z_{n-2}-\cdots-2z_3+2z_2-2z_1=0$

$\Rightarrow z_n - z_{n-1} + z_{n-2} - \cdots - z_3 + z_2 - z_1 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} \cdots\cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$

<另證>



設n個點$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ $(n = 2\mathrm{k}$，$\mathrm{k} \in N)$

現有一點 P，依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$作$1{:}\,1$跳動

$\because A_1$為$\overline{Pw_{11}}$的中點且A_2為$\overline{w_{11}w_{12}}$的中點，$\therefore \overrightarrow{Pw_{12}} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$

$\because A_3$為$\overline{w_{12}w_{13}}$的中點且A_4為$\overline{w_{13}w_{14}}$的中點，$\therefore \overrightarrow{w_{12}w_{14}} = 2\overrightarrow{A_3A_4}$

$\because A_5$為$\overline{w_{14}w_{15}}$的中點且A_6為$\overline{w_{15}w_{16}}$的中點，$\therefore \overrightarrow{w_{14}w_{16}} = 2\overrightarrow{A_5A_6}$

$\cdots\cdots\cdots.$

$\because A_{n-3}$為$\overline{w_{1(n-4)}w_{1(n-3)}}$的中點且$A_{n-2}$為$\overline{w_{1(n-3)}w_{1(n-2)}}$的中點，

$\therefore \overrightarrow{w_{1(n-4)}w_{1(n-2)}} = 2\overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}}$

$\because A_{n-1}$為$\overline{w_{1(n-2)}w_{1(n-1)}}$的中點且$A_n$為$\overline{w_{1(n-1)}w_{1n}}$的中點，

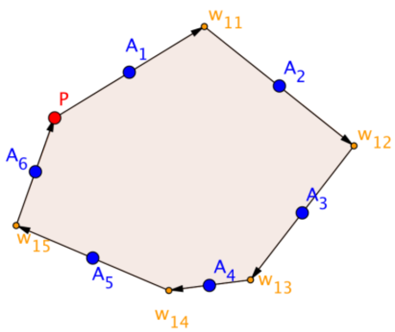
$\therefore \overrightarrow{w_{1(n-2)}w_{1n}} = 2\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

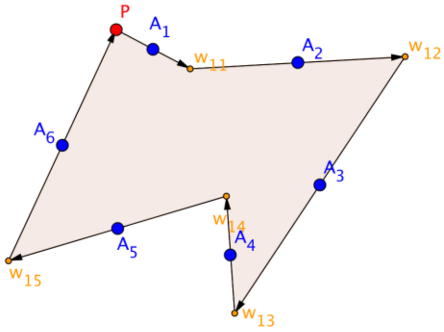
$\overrightarrow{Pw_{1n}} = \overrightarrow{Pw_{12}} + \overrightarrow{w_{12}w_{14}} + \overrightarrow{w_{14}w_{16}} + \cdots + \overrightarrow{w_{1(n-4)}w_{1(n-2)}} + \overrightarrow{w_{1(n-2)}w_{1n}}$

$= 2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n})$

若$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} \cdots\cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$，則$\overrightarrow{Pw_{1n}} = \vec{0} \Longrightarrow P = w_{1n}$

定理三 當所有點皆在平面上，n為偶數、m=1 時，偶數個點符合定理二的條件時，由任意$Nice$點 P點作 n 次跳動可得 w_{11}、w_{12}、w_{13}、$w_{1(n-1)}$，此時n邊形$Pw_{11}w_{12}w_{13} \ldots w_{1(n-1)}$的有向面積恆為定值





[證明]

設n個點A_1、A_2、A_3、…、A_n坐標分別為$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,
$(x_3,y_3),\cdots,(x_n,y_n)$

有一動點P點坐標(x_w,y_w)對n個點作1:1跳動，由分點公式可推得：

$w_{11}=(2x_1-x_w,2y_1-y_w)$

$w_{12}=(2x_2-2x_1+x_w,2y_2-2y_1+y_w)$

$w_{13}=(2x_3-2x_2+2x_1-x_w,2y_3-2y_2+2y_1-y_w)$

……

$w_{1(n-1)}=(2x_{n-1}-2x_{n-2}+2x_{n-3}-\cdots+2x_1-x_w,2y_{n-1}-2y_{n-2}+2y_{n-3}-\cdots+2y_1-y_w)$

$w_{1n}=(2x_n-2x_{n-1}+2x_{n-2}-\cdots-2x_1+x_w,2y_n-2y_{n-1}+2y_{n-2}-\cdots-2y_1+y_w)$

由$P=w_{1n}$可得$x_n-x_{n-1}+x_{n-2}-\cdots-x_3+x_2-x_1=0$

且 $y_n-y_{n-1}+y_{n-2}-\cdots-y_3+y_2-y_1=0$

n 邊形 $Pw_{11}w_{12}\cdots w_{1(n-2)}w_{1(n-1)}$的有向面積為

$$\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}x_w & 2x_1-x_w\\ y_w & 2y_1-y_w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2x_1-x_w & 2x_2-2x_1+x_w\\ 2y_1-y_w & 2y_2-2y_1+y_w\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}2x_{n-1}-2x_{n-2}+\ldots+2x_1-x_w & x_w\\ 2y_{n-1}-2y_{n-2}+\ldots+2y_1-y_w & y_w\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}x_w & 2x_1\\ y_w & 2y_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2x_1-x_w & 2x_2\\ 2y_1-y_w & 2y_2\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}2x_{n-1}-2x_{n-2}+\ldots+2x_1-x_w & x_w\\ 2y_{n-1}-2y_{n-2}+\ldots+2y_1-y_w & y_w\end{vmatrix}\right]$$

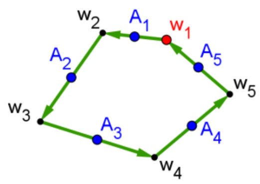
（1）看x_w項: $x_w(-2y_n+2y_{n-1}-2y_{n-2}-\cdots+2y_3-2y_2+2y_1)=0$

（2）看y_w項: $y_w(2x_n-2x_{n-1}+2x_{n-2}\ldots-2x_3+2x_2-2x_1)=0$

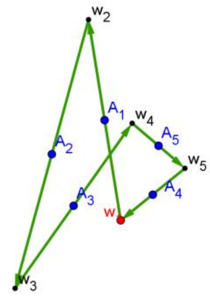
∴不論P點為何，由P點做跳動的 n 個點形成的 n 邊形的有向面積恆為定值。

(三)不同路徑的 Nice 點

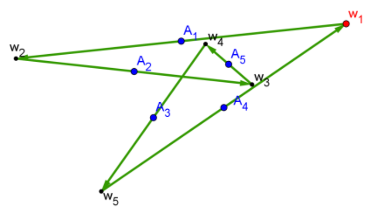
定理四 當初始點 P=w_1對 n 個點做不同順序的$m = 1$跳動時，不同的 Nice 點會形成 $\frac{(n-1)!}{2}$種路徑圖。



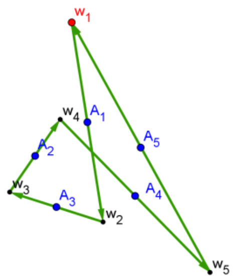
$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$



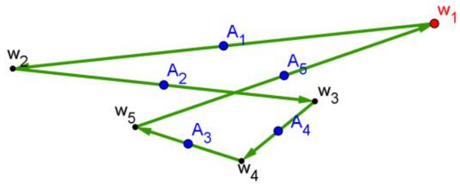
$A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_5 \to A_4$



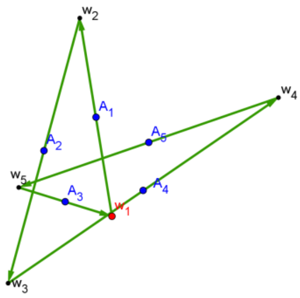
$A_1 \to A_2 \to A_5 \to A_3 \to A_4$



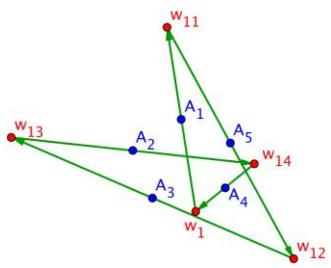
$A_1 \to A_3 \to A_2 \to A_4 \to A_5$



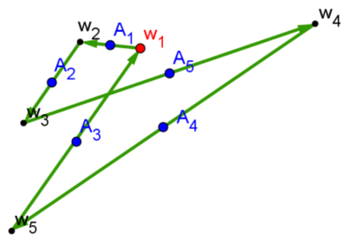
$A_1 \to A_2 \to A_4 \to A_3 \to A_5$



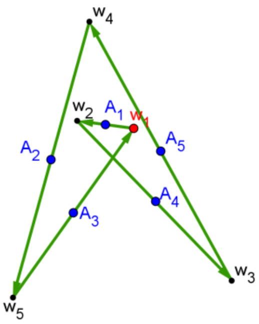
$A_1 \to A_2 \to A_4 \to A_5 \to A_3$



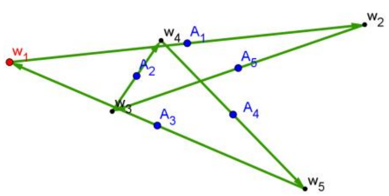
$A_1 \to A_5 \to A_3 \to A_2 \to A_4$



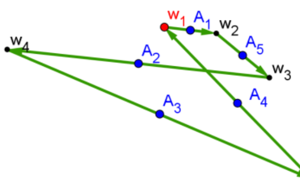
$A_1 \to A_2 \to A_5 \to A_4 \to A_3$



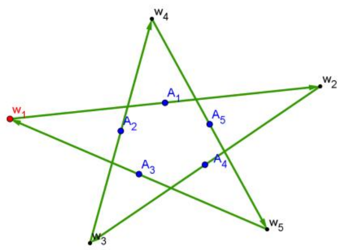
$A_1 \to A_4 \to A_5 \to A_2 \to A_3$



$A_1 \to A_5 \to A_2 \to A_4 \to A_3$



$A_1 \to A_5 \to A_2 \to A_3 \to A_4$



$A_1 \to A_4 \to A_2 \to A_5 \to A_3$

[證明]

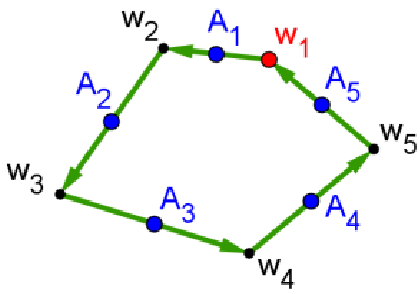
將A_1、A_2、$A_3 \dots A_n$排列，共有 n！個$Nice$點

因為跳動比例為$1:1$

順序與逆序$Nice$點相同

如$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \cdots A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n$

和$A_n \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow \cdots A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$ $Nice$點相同



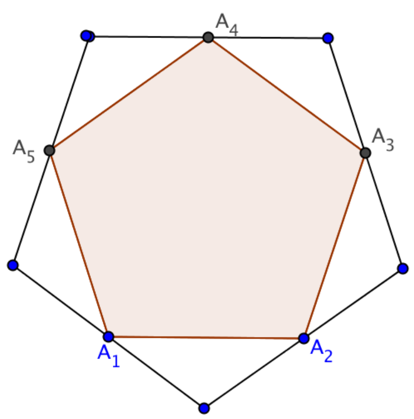
$(A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_5$和$A_5 \Rightarrow A_4 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$ $Nice$點相同)

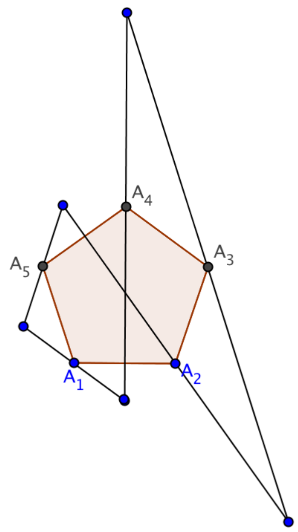
$\therefore$ 會有$\frac{n!}{2}$個$Nice$點

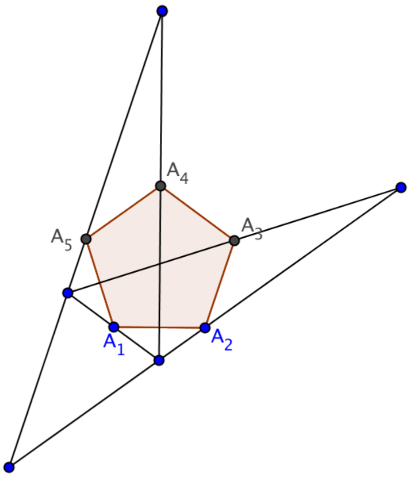
又n個$Nice$點可組成一種路徑

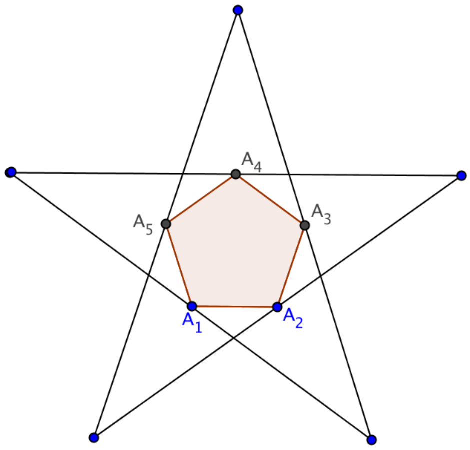
$\therefore Nice$點路徑圖共有 $\frac{n!}{2n}=\frac{(n-1)!}{2}$種

而五個點可形成正五邊形時，$Nice$點跳動路徑圖形有下列四類：









再針對跳動路徑為星形加以探討

若有n個點$(n = 2k + 1, k \in N)$，若 n 個點A_1、A_2、A_3、…A_n可形成正 n 邊形，則如果跳動順序　為等差數列（公差 d 為與 n 互質的數，且 d≠1 or n-1），則可劃出 n 角星形。

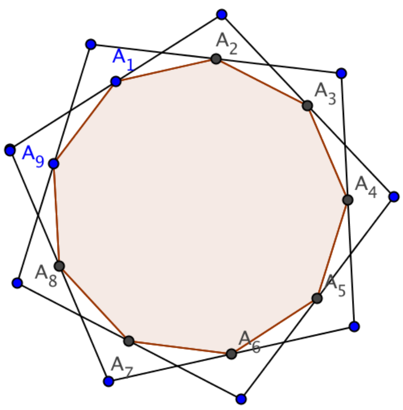
如九個點可劃出 n 角星形的順序有：

$A_1 \to A_3 \to A_5 \to A_7 \to A_9 \to A_2 \to A_4 \to A_6 \to A_8$ $(d = 2)$　圖一

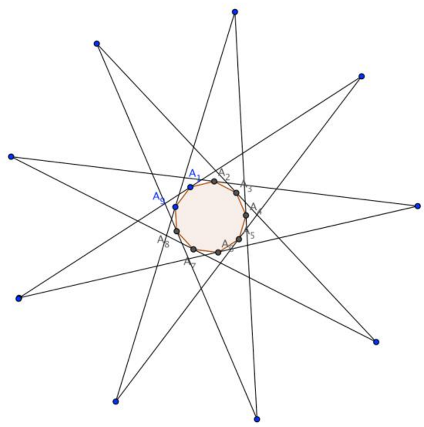
$A_1 \to A_5 \to A_9 \to A_4 \to A_8 \to A_3 \to A_7 \to A_2 \to A_6$ $(d = 4)$　圖二

$A_1 \to A_6 \to A_2 \to A_7 \to A_3 \to A_8 \to A_4 \to A_9 \to A_5$ $(d = 5)$　圖二

$A_1 \to A_8 \to A_6 \to A_4 \to A_2 \to A_9 \to A_7 \to A_5 \to A_3$ $(d = 7)$　圖一

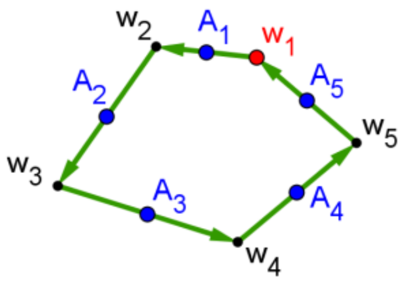


圖一



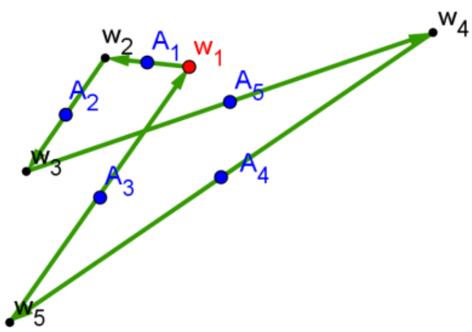
圖二

定理五　m=1 時，若跳動路徑順序的奇數項集合相同，則$Nice$點亦會相同



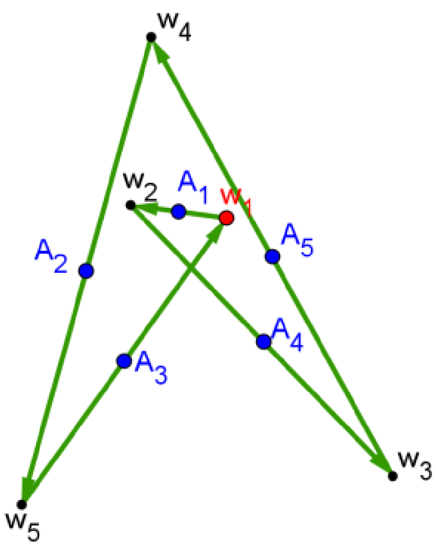
圖一

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$



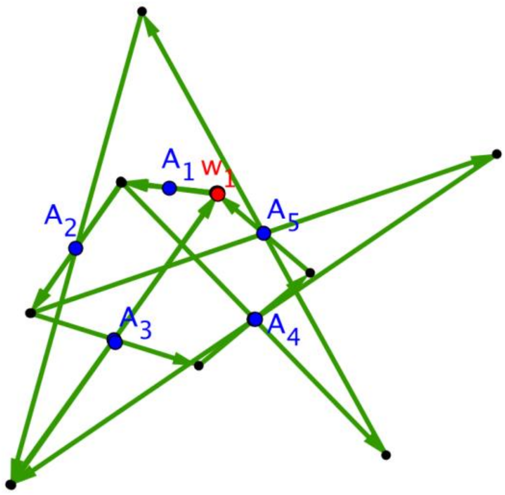
圖二

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_4 \rightarrow A_3$



圖三

$A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$



圖四

[證明]

若跳動順序為A_1、A_2、A_3、 ... 、A_n，初始點為 P 點

$P \quad = w_1$

$w_{11} \quad = 2z_1 - w_1$

$w_{12} = 2z_2 - 2z_1 + w_1$

…

$w_{1(n-1)} = 2z_{n-1} - 2z_{n-2} + \cdots + 2z_2 - 2z_1 + w_1$

$w_{1n} \quad = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1$

$w_1 = w_{1n} = 2z_n - 2z_{n-1} + \cdots - 2z_2 + 2z_1 - w_1$

$\Rightarrow w_1 = z_n - z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} - \cdots - z_4 + z_3 - z_2 + z_1$

$$= (z_n + z_{n-2} + z_{n-4} + \cdots + z_5 + z_3 + z_1) - (z_{n-1} + z_{n-3} + z_{n-5} + \cdots + z_4 + z_2)$$

只要跳動順序的奇數項集合相同，$Nice$點就會相同

例如：

順序為A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 跳動順序奇數項集合$= \{A_1，A_3，A_5\}$

$\Longrightarrow w_1 = z_5 - z_4 + z_3 - z_2 + z_1$

$= (z_5 + z_3 + z_1) - (z_4 + z_2)$

順序為A_3、A_4、A_1、A_2、A_5 跳動順序奇數項集合$= \{A_1，A_3，A_5\}$

$\Longrightarrow w_1 = z_5 - z_2 + z_1 - z_4 + z_3$

$= (z_5 + z_3 + z_1) - (z_4 + z_2)$

由此可知，即使跳動路徑不同，若跳動路徑順序的奇數項集合相同，則 $Nice$點亦會相同。

此外，將圖一、圖二、圖三疊合後產生圖四，所得重疊點除w_1外，尚有w_2。若改w_2為初始點，我們發現$A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_1$

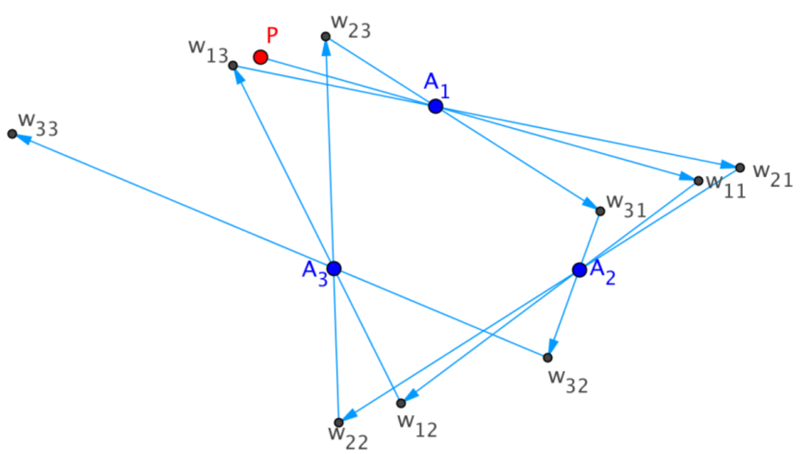
$A_2 \to A_5 \to A_4 \to A_3 \to A_1$

$A_4 \to A_5 \to A_2 \to A_3 \to A_1$

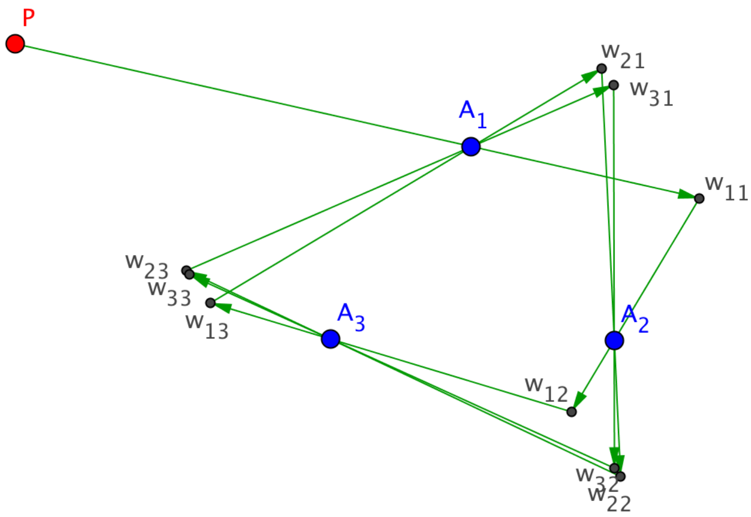
此三種跳動路徑亦皆可跳回原初始點w_2。

二、跳動比例為m: 1，m ≠ 1時

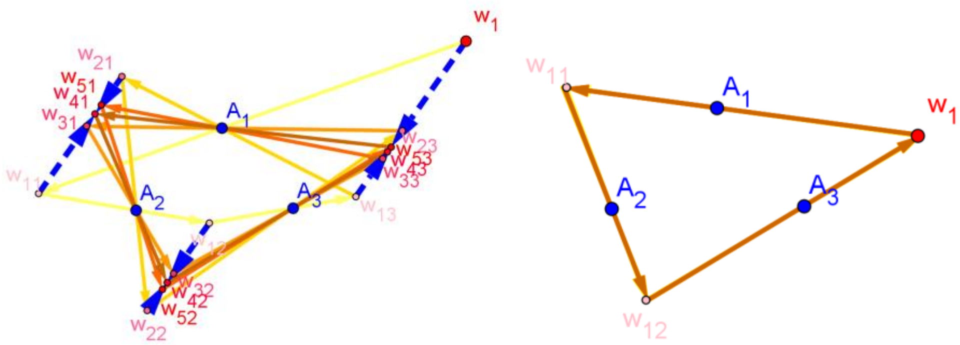
(一)當 $0 < m < 1$時，P 點會越跳越遠離初始點



(二) 當$m > 1$時，P 點有越跳越接近某點的現象



定理六　由P點依序對n個點以m: 1，m > 1的比例經過無限次跳動後必收斂至 $Nice$點



[證明]

現有一點P ，依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$作m: 1 跳動，由分點公式可推得：

1. n為奇數

(1) $\boxed{P=w_1}$

$$w_{11}=\frac{m+1}{m}z_1-\frac{1}{m}w_1$$

$$w_{12}=\frac{m+1}{m}z_2-\frac{m+1}{m^2}z_1+\frac{1}{m^2}w_1$$

$$w_{13}=\frac{m+1}{m}z_3-\frac{m+1}{m^2}z_2+\frac{m+1}{m^3}z_1-\frac{1}{m^3}w_1$$

……

$$\boxed{w_{1n}=\frac{m+1}{m}z_n-\frac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\frac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots-\frac{m+1}{m^{n-1}}z_2+\frac{m+1}{m^n}z_1-\frac{1}{m^n}w_1}$$

……

$$w_{kn}=\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_{n-2}-\cdots-\frac{m(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_2+\frac{(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_1+\frac{1}{(-m)^{nk}}w_1$$

因為$m > 1$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_{n-2}-\cdots-\frac{m(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_2+\frac{(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n+1}z_1+\frac{1}{(-m)^{nk}}w_1$$

$$=\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n+1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n+1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n+1}z_{n-2}-\cdots-\frac{m(m+1)}{m^n+1}z_2+\frac{m+1}{m^n+1}z_1$$

(2)若 P 點為Nice 點

則$P=w_{1n}=\frac{m+1}{m}z_n-\frac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\frac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots-\frac{m+1}{m^{n-1}}z_2+\frac{m+1}{m^n}z_1-\frac{1}{m^n}w_1$

得$P=\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n+1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n+1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n+1}z_{n-2}-\cdots-\frac{m(m+1)}{m^n+1}z_2+\frac{m+1}{m^n+1}z_1=\lim_{k\to\infty}w_{kn}$

∴由P點依序對奇數個點以$m:1$，$m > 1$的比例經過無限次跳動後必收斂至$Nice$點

2. n為偶數

(1) $\boxed{P=w_1}$

$$w_{11}=\frac{m+1}{m}z_1-\frac{1}{m}w_1$$

$$w_{12}=\frac{m+1}{m}z_2-\frac{m+1}{m^2}z_1+\frac{1}{m^2}w_1$$

$$w_{13}=\frac{m+1}{m}z_3-\frac{m+1}{m^2}z_2+\frac{m+1}{m^3}z_1-\frac{1}{m^3}w_1$$

……

$$\boxed{w_{1n}=\frac{m+1}{m}z_n-\frac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\frac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots+\frac{m+1}{m^{n-1}}z_2-\frac{m+1}{m^n}z_1+\frac{1}{m^n}w_1}$$

……

$$w_{kn}=\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_{n-1}+$$

$$\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_{n-2}-\cdots+\frac{m(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_2-\frac{(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_1+$$

$$\frac{1}{m^{nk}}w_1$$

因為$\mathrm{m}>1$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m^{n-1}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_{n-1}+$$

$$\frac{m^{n-3}(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_{n-2}-\cdots+\frac{m(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_2-\frac{(m+1)\left(1-(-\frac{1}{m})^{nk}\right)}{m^n-1}z_1+$$

$$\frac{1}{m^{nk}}w_1$$

$$=\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n-1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n-1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n-1}z_{n-2}-\cdots-\frac{m(m+1)}{m^n-1}z_2+\frac{m+1}{m^n-1}z_1$$

(2)若 P 點為 $Nice$點

則 P=$w_{1n}=\frac{m+1}{m}z_n-\frac{m+1}{m^2}z_{n-1}+\frac{m+1}{m^3}z_{n-2}-\cdots+\frac{m+1}{m^{n-1}}z_2-\frac{m+1}{m^n}z_1+\frac{1}{m^n}w_1$

得 P=$\frac{m^{n-1}(m+1)}{m^n-1}z_n-\frac{m^{n-2}(m+1)}{m^n-1}z_{n-1}+\frac{m^{n-3}(m+1)}{m^n-1}z_{n-2}-\cdots+\frac{m(m+1)}{m^n-1}z_2-$

$\frac{m+1}{m^n-1}z_1=\lim_{k\to\infty}w_{kn}$

∴由P點依序對偶數個點以$\mathrm{m}:1$，$\mathrm{m}>1$的比例經過無限次跳動後必收斂至 $Nice$點

三、$Nice$點的唯一性

設n個點$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n$，現有一$Nice$點$P$點，依序對$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots,A_n$作$\mathrm{m}:1$跳動可得$w_{11}$、$w_{12}$、$w_{13}$、…、$w_{1(n-1)}$

令

$f:\left(w_1, w_{11}, w_{12} \dots\dots, w_{1(n-1)}\right) \rightarrow$

$\left(\frac{w_1+mw_{11}}{m+1}, \frac{w_{11}+mw_{12}}{m+1}, \dots\dots, \frac{w_{1(n-2)}+mw_{1(n-1)}}{m+1}\right)$

$z_1 = \frac{w_1+mw_{11}}{m+1}$，$z_2 = \frac{w_{11}+mw_{12}}{m+1}$，$z_3 = \frac{w_{12}+mw_{13}}{m+1}$，……，$z_n = \frac{w_{1(n-1)}+mw_1}{m+1}$

$$\therefore \begin{bmatrix} w_1 & w_{11} & \dots & w_{1(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{m}{m+1} \\ \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= \left[\frac{w_1+mw_{11}}{m+1}, \frac{w_{11}+mw_{12}}{m+1}, \dots\dots, \frac{w_{1(n-1)}+mw_1}{m+1}\right] = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{m}{m+1} \\ \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{1}{m+1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$ **行列式值=$\left(\frac{1}{m+1}\right)^n + (-1)^{n+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$**

以克拉馬公式可知

(1)行列式值等於 0 時，不存在唯一$Nice$點→ $m = 1$，n 為偶數

(2)行列式值不等於 0 時，必定存在唯一$Nice$點→ 除了(1)之外的情形

四、$Nice$點的作圖方法:找出n個點m: 1的$Nice$點

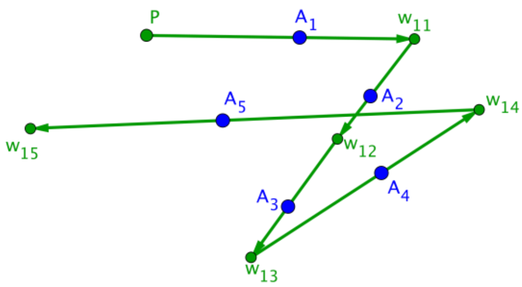
(一) 當n為奇數

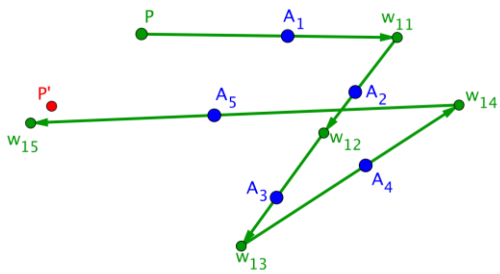
作圖方法

1.任意取一點 P，依序對A_1、A_2、 ... 、A_n作 $m:1$ 的跳動到w_{1n}，如圖一。

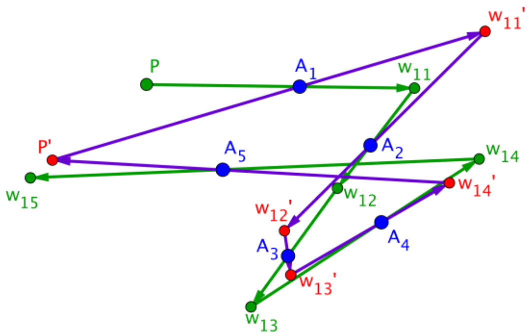
2.作 P' 在$\overline{Pw_{1n}}$ 之間且 $\overline{PP'}:\overline{P'w_{1n}} = m^n:1$，如圖二。

3.P' 即為所求，如圖三





圖一　　圖二



圖三

<證明>

設n個點$A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$ ($n = 2k + 1$，$k \in N$)

現有一點 P，依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$作$m:1$跳動

假設有一 P’ 可依序對$A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$作$m:1$跳動到原初始點

P 點跳動後得w_{11}、w_{12}、$w_{13} \ldots$、w_{1n}

P’ 點跳動後得w_{11}'、w_{12}'、$w_{13}' \ldots$、w_{1n}'

$\because \overline{PA_1} : \overline{A_1 w_{11}} = \overline{P'A_1} : \overline{A_1 w_{11}'} = m:1$，且$\angle PA_1P' = \angle w_{11}A_1w_{11}'$

$\therefore \triangle PA_1P' \approx \triangle w_{11}A_1w_{11}' \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} = -m\overrightarrow{w_{11}w_{11}'}$

同理，$\overrightarrow{w_{11}w_{11}'} = -m\overrightarrow{w_{12}w_{12}'}$

$\overrightarrow{w_{12}w_{12}'} = -m\overrightarrow{w_{13}w_{13}'}$

…….

$\overrightarrow{w_{1(n-1)}w_{1(n-1)}'} = -m\overrightarrow{w_{1n}w_{1n}'}$

$\because n$為奇數，$\therefore \overrightarrow{PP'} = -m^n\overrightarrow{w_{1n}w_{1n}'}$

又$P' = w_{1n}'$，$\therefore \overrightarrow{PP'} = -m^n\overrightarrow{w_{1n}P'}$

$\therefore P$、P'、w_{1n}三點共線，P'在$\overline{Pw_{1n}}$之間且$\overline{PP'} : \overline{P'w_{1n}} = m^n : 1$

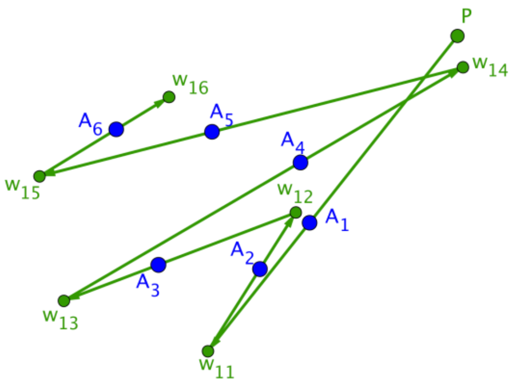
(二)**當n為偶數**

作圖方法

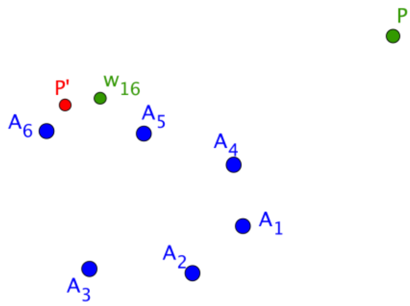
1.任意取一點 P，依序對A_1、A_2、 ... 、A_n作 m: 1 的跳動到w_{1n}

2.作 P’ 在$\overline{Pw_{1n}}$ 之外且 $\overline{PP'}:\overline{P'w_{1n}} = m^n: 1$

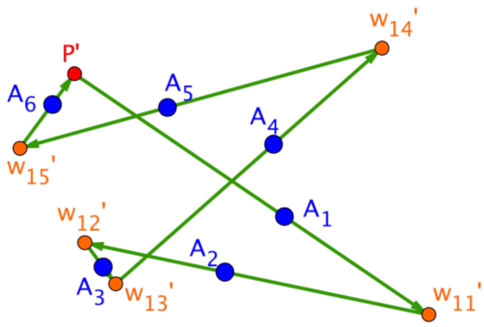
3.P’ 即為所求



圖一



圖二



圖三

<證明>

設n個點$A_1, A_2, A_3, \dots\dots, A_n$ ($n = 2$k，k $\in N$)

現有一點 P，依序對$A_1, A_2, A_3, \dots\dots, A_n$作m: 1跳動

假設有一 P’ 可依序對$A_1, A_2, A_3, \dots\dots, A_n$作m: 1跳動到原初始點

P 點跳動後得w_{11}、w_{12}、w_{13} ... 、w_{1n}

P’ 點跳動後得$w_{11}{}'$、$w_{12}{}'$、$w_{13}{}'$ ... 、$w_{1n}{}'$

$\because \overline{PA_1}:\overline{A_1w_{11}} = \overline{P'A_1}:\overline{A_1w_{11}{}'} = m: 1$，且$\angle PA_1P' = \angle w_{11}A_1w_{11}{}'$

$\therefore \triangle PA_1P' \approx \triangle w_{11}A_1w_{11}' \Longrightarrow \overrightarrow{PP'} = -m\overrightarrow{w_{11}w_{11}{}'}$

同理，$\overrightarrow{w_{11}w_{11}{}'} = -m\overrightarrow{w_{12}w_{12}{}'}$

$\overrightarrow{w_{12}w_{12}{}'} = -m\overrightarrow{w_{13}w_{13}{}'}$

…….

$$\overrightarrow{w_{1(n-1)}w_{1(n-1)}{}'} = -m\overrightarrow{w_{1n}w_{1n}{}'}$$

$\because n$為偶數，$\therefore \overrightarrow{PP'} = m^n\overrightarrow{w_{1n}w_{1n}{}'}$

又$P' = w_{1n}{}'$，$\therefore \overrightarrow{PP'} = m^n\overrightarrow{w_{1n}P'}$

$\therefore P$、P'、w_{1n}三點共線，P'在$\overline{Pw_{1n}}$之外且$\overline{PP'}:\overline{P'w_{1n}} = m^n:1$

五、不同比例$Nice$點的軌跡

$Nice$點的軌跡: P點為A_1、A_2、…、A_n，比例$m:1$的$Nice$點

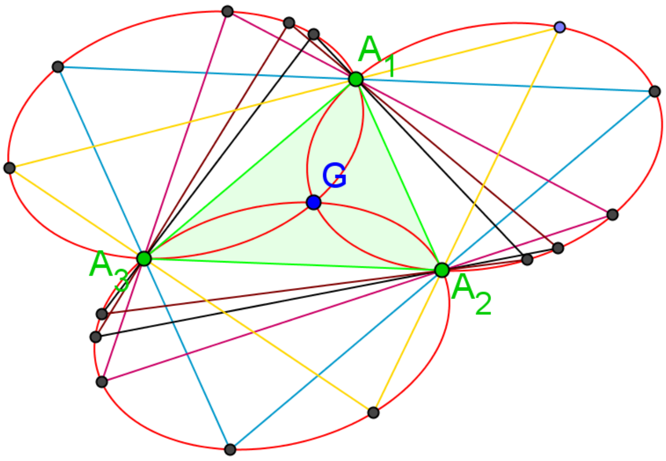
P點經跳動後可到w_{11}、w_{12}、w_{13}、…、$w_{1(n-1)}$

不同的比例m的$Nice$點P點集可構成$Nice$點的軌跡

同時w_{11}、w_{12}、w_{13}、…、$w_{1(n-1)}$也可構成軌跡

(一)當 n=3

定理七　當n = 3，$Nice$點的軌跡為橢圓



[證明]

設3個點A_1, A_2, A_3，現有一點P點依序對A_1, A_2, A_3作 m: 1跳動，$m \in R$

因A_1、A_2、A_3必在同一平面上，所以在此僅在平面上討論

假設三個點的複數坐標

令$A_1 = z_1 = 0,\ A_2 = z_2 = 1,\ \ A_3 = z_3 = b + ci$

由分點公式可推得：

$\mathrm{P} = w_1$，$w_{11} = \frac{m+1}{m}z_1 - \frac{1}{m}w_1$，$w_{12} = \frac{m+1}{m}z_2 - \frac{m+1}{m^2}z_1 + \frac{1}{m^2}w_1$

$w_{13} = \frac{m+1}{m}z_3 - \frac{m+1}{m^2}z_2 + \frac{m+1}{m^3}z_1 - \frac{1}{m^3}w_1$

若P點為$Nice$點，則 $P = w_{13}$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{m^2}{m^2-m+1}z_3 - \frac{m}{m^2-m+1}z_2 + \frac{1}{m^2-m+1}z_1$$

$$w_{11}=-\frac{m}{m^2-m+1}z_3+\frac{1}{m^2-m+1}z_2+\frac{m^2}{m^2-m+1}z_1$$

$$w_{12}=\frac{1}{m^2-m+1}z_3+\frac{m^2}{m^2-m+1}z_2-\frac{m}{m^2-m+1}z_1$$

令$w_1=x+yi$ ，將z_1、z_2、z_3代入w_1，得$w_1=\frac{m^2b-m}{m^2-m+1}+\frac{m^2c}{m^2-m+1}i$

則知$x=\frac{m^2b-m}{m^2-m+1}$，$y=\frac{m^2c}{m^2-m+1}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{m^2b-m}{m^2c}\Rightarrow \mathrm{m}=\frac{-y}{xc-yb}$

將m代入y得$w_1: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-cy=0$

由於$\delta=(c-2bc)^2-4c^2(b^2-b+1)=-3c^2\le 0$

且$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2c^2 & c-2bc & 0\\ c-2bc & 2b^2-2b+2 & -c\\ 0 & -c & 0\end{vmatrix}=-c^4\le 0$且$b^2-b+1>0$

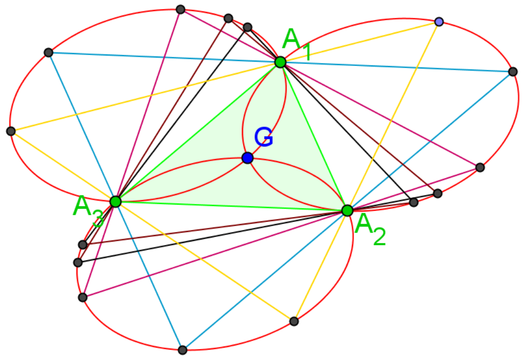
由此可知$w_1: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-cy=0$當$c\neq 0$時為一橢圓，當$c=0$時會退化成線段

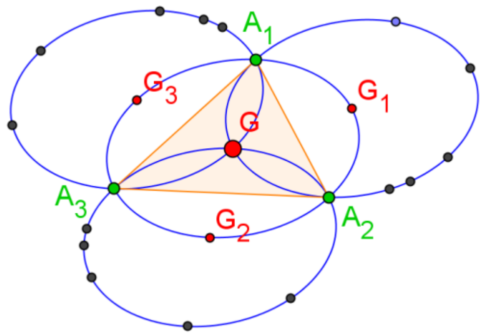
同理，可推得其他兩橢圓軌跡方程為 ：

$$w_{11}: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy+bcy-cx=0$$

$$w_{12}: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-2c^2x-(2c-2bc)y+c^2=0$$

定理八　三橢圓的交點即為$\Delta A_1A_2A_3$的重心





[證明]

$$w_1: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-cy=0$$

$$w_{11}: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy+bcy-cx=0$$

$$w_{12}: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-2c^2x-(2c-2bc)y+c^2=0$$

將橢圓w_1、w_{11}、w_{12}三式解聯立，得到$x=\frac{b+1}{3}$，$y=\frac{c}{3}$，恰為$\Delta A_1A_2A_3$的重心，此時$m=-1$。

定理九　當$n=3$時，由Nice 點所形成三橢圓的中心G_1、G_2、G_3與三角形三頂點

A_1、A_2、A_3此六點共橢圓，此橢圓的中心即為$\Delta A_1A_2A_3$的重心，且此四橢圓全等

[證明]

設中間的橢圓為 w_x

現在將w_1的中心$(\frac{2b-1}{3},\frac{2}{3}c)$移至$\Delta A_1A_2A_3$的重心$(\frac{b+1}{3},\frac{c}{3})$，移動了$\left(\frac{-b+2}{3},\frac{-c}{3}\right)$則

可得新方程式

$w_x: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$

而發現將三橢圓的中心G_1、G_2、G_3與三頂點A_1、A_2、A_3分別代入發現皆

在

w_x方程式上

由於$\delta=(c-2bc)^2-4c^2(b^2-b+1)=-3c^2\leq 0$

且$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2c^2 & c-2bc & -c^2 \\ c-2bc & 2b^2-2b+2 & bc-c \\ -c^2 & bc-c & 0 \end{vmatrix}=-c^4\leq 0$

且$b^2-b+1>0$

由此可知$w_x: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$當

$c\neq 0$時為一橢圓，當$c=0$時會退化成線段

以此類推，將w_{11}、w_{12}橢圓或線段依序平移亦可得到相同結果

將$w_x: c^2x^2+(b^2-b+1)y^2+(c-2bc)xy-c^2x+(bc-c)y=0$分別對$x,y$微分

微分$\begin{cases}(2b^2-2b+2)y+(c-2bc)x+bc-c=0 \\ 2c^2x+(c-2bc)y-c^2=0\end{cases}$

解聯立得$x=\frac{b+1}{3}$，$y=\frac{c}{3}$，$\therefore w_4$之橢圓中心$(\frac{b+1}{3},\frac{c}{3})$

由結果發現w_x之橢圓中心恰為$\Delta A_1A_2A_3$的重心，且由於橢圓w_x和橢圓w_1、w_{11}、w_{12}二次向係數相同，故可知四個橢圓全等。

(二) **當n** >3

1. n=4

我們改用參數式的寫法，若四個點在平面

假設$A_1=(x_{11},x_{12})$，$A_2=(x_{21},x_{22})$，$A_3=(x_{31},x_{32})$，$A_4=(x_{41},x_{42})$

$$w_1=\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_4-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_3+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_2-\frac{(m+1)}{m^4-1}z_1$$

$$w_{11}=-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_4+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_3-\frac{(m+1)}{m^4-1}z_2+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_1$$

$$w_{12}=\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_4-\frac{(m+1)}{m^4-1}z_3+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_2-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_1$$

$$w_{13}=-\frac{(m+1)}{m^4-1}z_4+\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_3-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_2+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_1$$

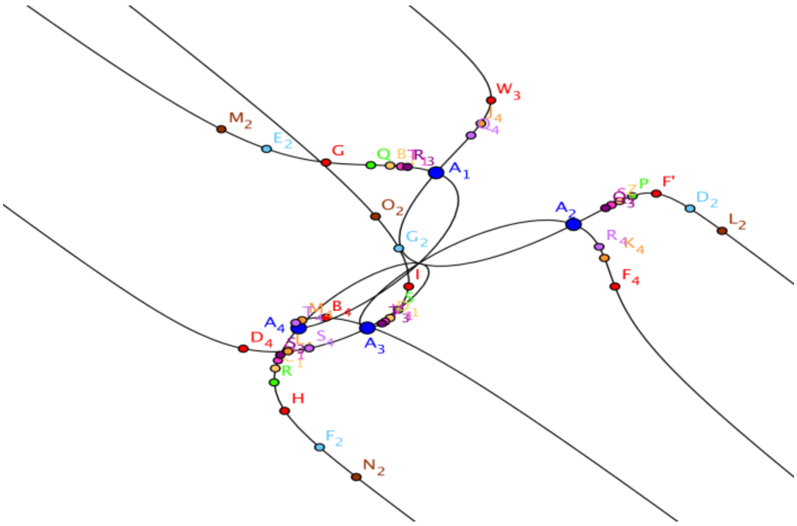
$$\therefore w_1\text{軌跡參數式為}\begin{cases} x=\dfrac{(m^3x_{41}-m^2x_{31}+mx_{21}-x_{11})}{m^3-m^2+m-1} \\ y=\dfrac{(m^3x_{42}-m^2x_{32}+mx_{22}-x_{12})}{m^3-m^2+m-1} \end{cases}，m\in R$$

$$w_{11}\text{軌跡參數式為}\begin{cases} x=\dfrac{(m^3x_{11}-m^2x_{41}+mx_{31}-x_{21})}{m^3-m^2+m-1} \\ y=\dfrac{(m^3x_{12}-m^2x_{42}+mx_{32}-x_{22})}{m^3-m^2+m-1} \end{cases}，m\in R$$

$$w_{12}\text{軌跡參數式為}\begin{cases} x=\dfrac{(m^3x_{21}-m^2x_{11}+mx_{41}-x_{31})}{m^3-m^2+m-1} \\ y=\dfrac{(m^3x_{22}-m^2x_{12}+mx_{42}-x_{32})}{m^3-m^2+m-1} \end{cases}，m\in R$$

$$w_{13}\text{軌跡參數式為}\begin{cases} x=\dfrac{(m^3x_{31}-m^2x_{21}+mx_{11}-x_{41})}{m^3-m^2+m-1} \\ y=\dfrac{(m^3x_{32}-m^2x_{22}+mx_{12}-x_{42})}{m^3-m^2+m-1} \end{cases}，m\in R$$

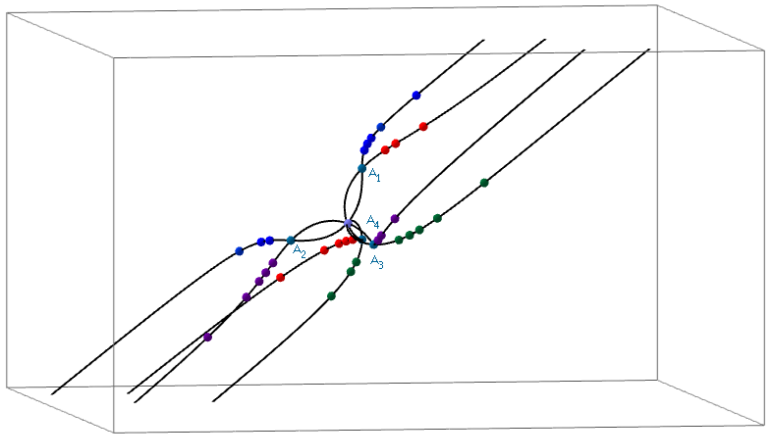
但$m\neq 1$，因為$m=1$時不一定會有 Nice 點。



當$m=-1$時，四條軌跡交於一點$\left(\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{4},\frac{x_{21}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{4}\right)$，即為$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$的重心。

2.四點在空間中的情形

假設$A_1=(x_{11},x_{12},x_{13})$，$A_2=(x_{21},x_{22},x_{23})$，$A_3=(x_{31},x_{32},x_{33})$，$A_4=(x_{41},x_{42},x_{43})$



$$w_1=\frac{m^3(m+1)}{m^4-1}z_4-\frac{m^2(m+1)}{m^4-1}z_3+\frac{m(m+1)}{m^4-1}z_2-\frac{(m+1)}{m^4-1}z_1$$

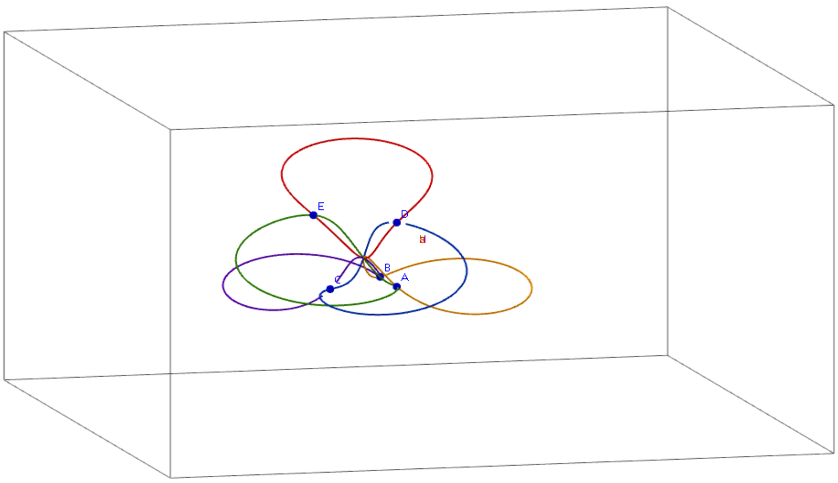
$$\therefore w_1\text{軌跡參數式為}\begin{cases} x=\frac{(m^3x_{41}-m^2x_{31}+mx_{21}-x_{11})}{m^3-m^2+m-1} \\ y=\frac{(m^3x_{42}-m^2x_{32}+mx_{22}-x_{12})}{m^3-m^2+m-1} \\ z=\frac{(m^3x_{43}-m^2x_{33}+mx_{23}-x_{13})}{m^3-m^2+m-1} \end{cases}$$

同理，可求出w_{11}、w_{12}、w_{13}的軌跡參數式

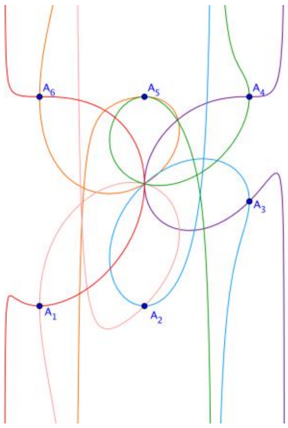
當$m=-1$時，四條軌跡交於一點

$\left(\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{4},\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{4},\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{4}\right)$，即為$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$的重心。

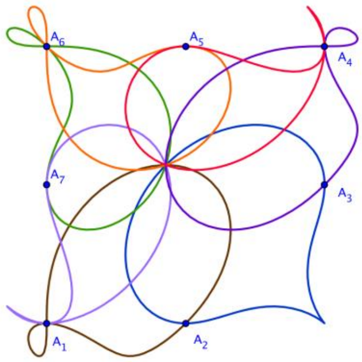
運用這種方法，可表示在R^n空間的n個點的$Nice$點軌跡，以下是利用 geogebra 軟體輸入參數是所得的圖形：



空間中五個點



平面上六個點



平面上七個點

可以看到n個點形成的 n 個$Nice$點的軌跡交於一點，且那個點為n個點的重心。

六、推廣到有兩種以上不同跳動比例的情形

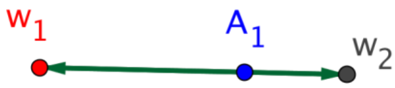
(一)以$2:1$和$\frac{1}{2}:1$兩種比例為例

現有兩種跳動比例$2:1$和$\frac{1}{2}:1$，依序對 n 個點A_1、A_2、A_3、 ... 、A_n跳動，探討跳動比例要如何選擇，任意點對 n 個點跳動才必定可跳回來？

（不包含唯一的 Nice 點）

1.當 n=1 時

這次跳$2:1$，下一次跳$\frac{1}{2}:1$則必可跳回



$\boxed{2:1 \rightarrow \frac{1}{2}:1}$

定理十　　當 n=1 時，若選擇跳$2:1$和跳$\frac{1}{2}:1$的次數相同，則必定可跳回原初始點。

假設w_1對A_1跳了 i 次$\frac{1}{2}:1$，$2:1$ j 次到w_{i+j+1}，若$w_{i+j+1}=w_1$，則已分點公式可知：

$$\begin{cases} a_1w_1+b_1w_2=3z_1 \\ a_2w_2+b_2w_3=3z_1 \\ a_3w_3+b_3w_4=3z_1 \\ \quad\dots \\ a_{i+j-1}w_{i+j-1}+b_{i+j-1}w_{i+j}=3z_1 \\ a_{i+j}w_{i+j}+b_{i+j}w_1=3z_1 \end{cases}$$

$a_nb_n=2$，$\forall a_n,b_n\in\{1,2\}$

$a_1a_2\dots a_{i+j}=2^i$，$b_1b_2\dots b_{i+j}=2^j$

$$\text{則}\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & .. & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & .. & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_{i+j-2} & b_{i+j-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & a_{i+j-1} & b_{i+j-1} \\ b_{i+j} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & a_{i+j} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\dots a_{i+j}-b_1b_2\dots b_{i+j}$$

欲使$\Delta=0$，則$a_1a_2\dots a_{i+j}=b_1b_2\dots b_{i+j}$

又$b_n=\frac{2}{a_n}\Rightarrow(a_1a_2\dots a_{i+j})^2=2^{i+j}\Rightarrow a_1a_2\dots a_{i+j}=2^{\frac{i+j}{2}}$

$$\Rightarrow 2^i=2^{\frac{i+j}{2}}\Rightarrow i=j$$

定理十一　當 n=1 時，以$2:1$和$\frac{1}{2}:1$兩種比例跳動，設 2n 次才可跳回的排列數有a_n種，則$a_n=C_n^{2n}-\sum_{m=1}^{n-1}C_{n-m}^{2n-2m}a_m$

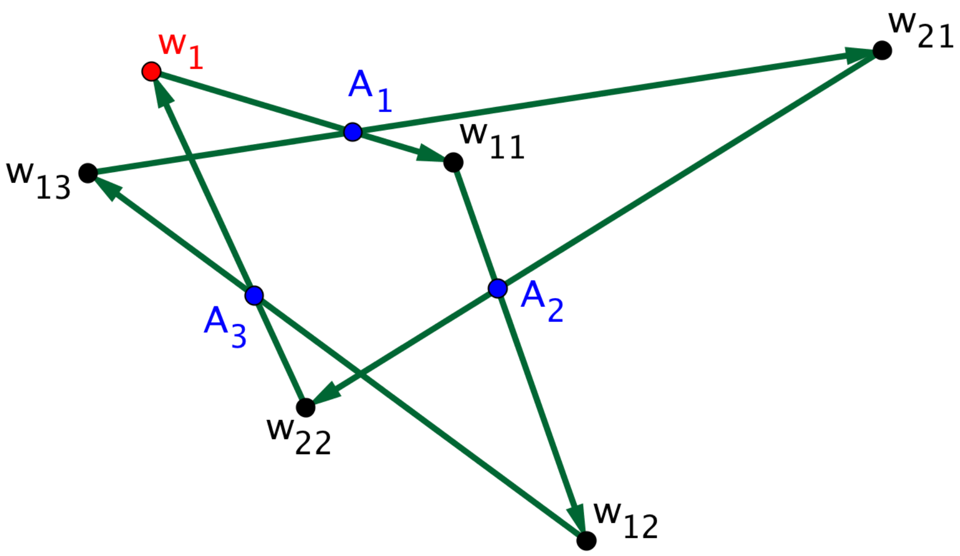
所求a_n =將 n 個 A 和 n 個 B 排成一列的方法−先前已經有相同的 A 和 B 排成一列的方法

$$\boxed{\begin{aligned} a_1&=C_1^2 \\ a_2&=C_2^4-C_1^2a_1 \\ a_3&=C_3^6-C_2^4a_1-C_1^2a_2 \\ a_4&=C_4^8-C_3^6a_1-C_2^4a_2-C_1^2a_3 \\ a_5&=C_5^{10}-C_4^8a_1-C_3^6a_2-C_2^4a_3-C_1^2a_4 \end{aligned}}$$

....

$$a_n=C_n^{2n}-\sum_{m=1}^{n-1}C_{n-m}^{2n-2m}\cdot a_m$$

2.當 n=3 時



$$\boxed{2:1 \to \frac{1}{2}:1 \to 2:1 \to \frac{1}{2}:1 \to 2:1 \to \frac{1}{2}:1}$$

定理十二　當 n=3 時，當有兩種跳動比例時，最少跳六次必定可跳回原初始點

跳兩次時，$2:1$跳一次，$\frac{1}{2}:1$跳一次，則已分點公式可知：

$$\begin{cases} a_1w_1 + b_1w_2 = 3z_1 \\ a_2w_2 + b_2w_1 = 3z_2 \end{cases}$$

$a_nb_n = 2$，$\forall a_n, b_n \in \{1,2\}$

$a_1a_2 = 2$，$b_1b_2 = 2$

則$\Delta = a_1a_2 - b_1b_2 = 0$

但$\Delta w_1 = 3b_2z_1 - 3b_1z_2$不一定等於 0

所以跳兩次不一定可跳回原初始點

跳四次時，$2:1$跳兩次，$\frac{1}{2}:1$跳兩次，則已分點公式可知：

$$\begin{cases} a_1w_1 + b_1w_2 = 3z_1 \\ a_2w_2 + b_2w_3 = 3z_2 \\ a_3w_3 + b_3w_4 = 3z_3 \\ a_4w_4 + b_4w_1 = 3z_1 \end{cases}$$

$a_nb_n = 2$，$\forall a_n, b_n \in \{1,2\}$

$a_1a_2a_3a_4 = 4$，$b_1b_2b_3b_4 = 4$

則$\Delta = a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4 = 0$

但$\Delta w_1 = 3(a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3)z_1 - 3b_1a_3a_4z_2 + 3b_1b_2a_4z_3$不一定等於 0

所以跳四次不一定可跳回原初始點

所以當有兩種跳動比例時，最少跳六次必定可跳回原初始點。

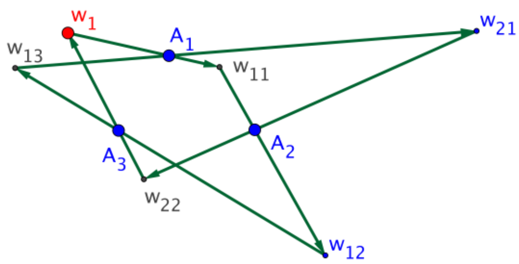
設跳$2:1$為 A，跳$\frac{1}{2}:1$為 B

所有六次必定可跳回來的方法：

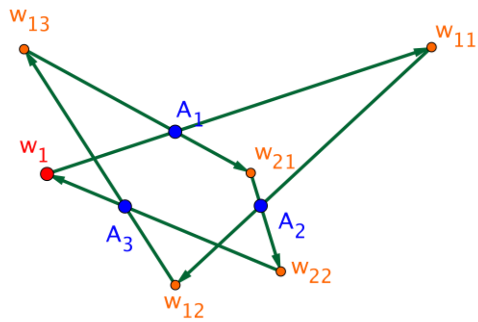
ABABAB、BABABA（兩種）

所有十二次必定可跳回來的方法：

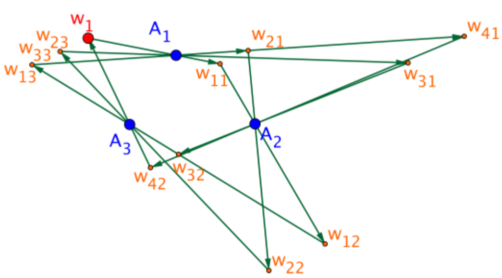
ABABBABABAAB、BABBABABAABA、ABBABABAABAB、BBABABAABABA、ABABAABABABB、BABAABABABBA、ABAABABABBAB、BAABABABBABA、AABABABBABAB、BABABBABABAA、AABBAABBAABB、BBAABBAABBAA、ABBAABBAABBA、BAABBAABBAAB（十四種）



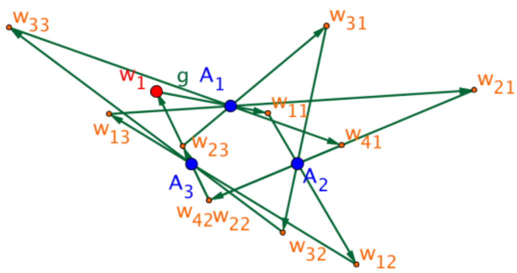
ABABAB



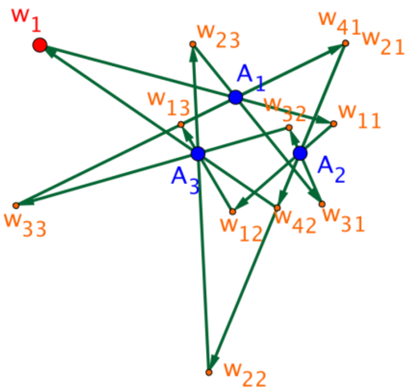
BABABA



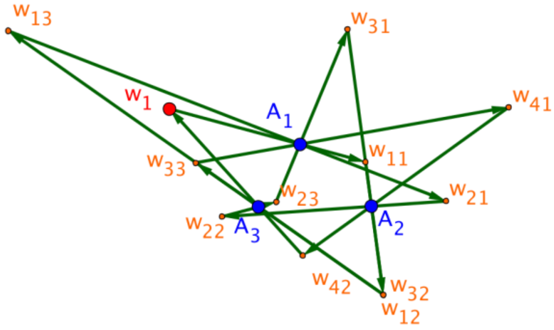
ABAABABABBAB



ABABAABABABB



ABABBABABAAB



ABBABABAABAB

定理十三　若將跳動方法分成兩半，則後半部為前半部的反面，且前半部和後半部方法的 Nice 點相同

例如：ABABAB，前半部為 ABA，後半部為 BAB

ABABBABABAAB，前半部為 ABABBA，後半部為 BABAAB

<證明>

以 BBABABAABABA 為例，

w_1以前半部 BBABAB 的順序跳動，用分點公式可推得：

$w_1 = w_1$

$w_{11} = 3z_1 - 2w_1$

$w_{12} = 3z_2 - 6z_1 + 4w_1$

$w_{13} = \frac{3}{2}z_3 - \frac{3}{2}z_2 + 3z_1 - 2w_1$

$w_{21} = -3z_3 + 3z_2 - 3z_1 + 4w_1$

$w_{22} = \frac{3}{2}z_3 + \frac{3}{2}z_1 - 2w_1$

$w_{23} = -3z_1 + 4w_1$

若$w_1 = w_{23}$，可推得 BBABAB 的 Nice 點$w_1 = z_1$

w_1以後半部 AABABA 的順序跳動，用分點公式可推得：

$w_1 = w_1$

$w_{11} = \frac{3}{2}z_1 - \frac{1}{2}w_1$

$w_{12} = \frac{3}{2}z_2 - \frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{4}w_1$

$$w_{13} = 3z_3 - 3z_2 + \frac{3}{2}z_1 - \frac{1}{2}w_1$$

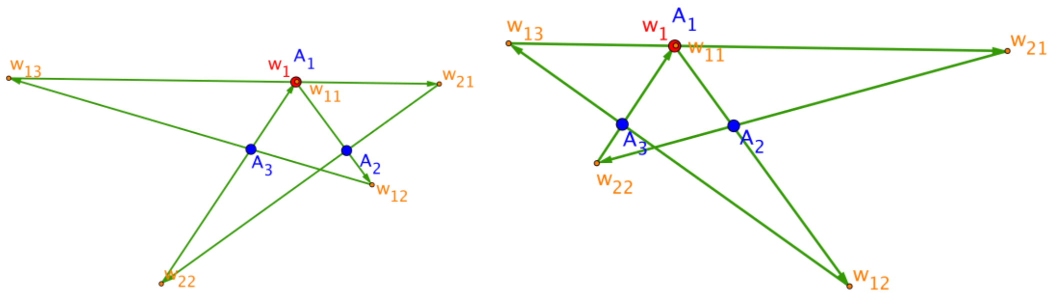
$$w_{21} = -\frac{3}{2}z_3 + \frac{3}{2}z_2 + \frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{4}w_1$$

$$w_{22} = 3z_3 - \frac{3}{2}z_1 - \frac{1}{2}w_1$$

$$w_{23} = \frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{4}w_1$$

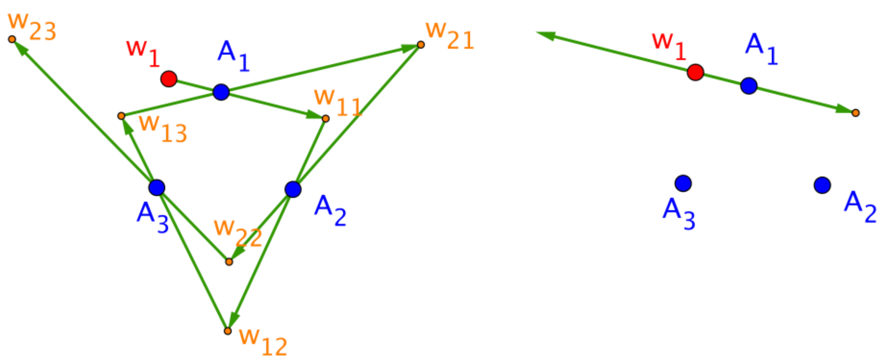
若$w_1 = w_{23}$，可推得 AABABA 的 Nice 點$w_1 = z_1$

∴BBABAB 和反面的 AABABA Nice 點相同

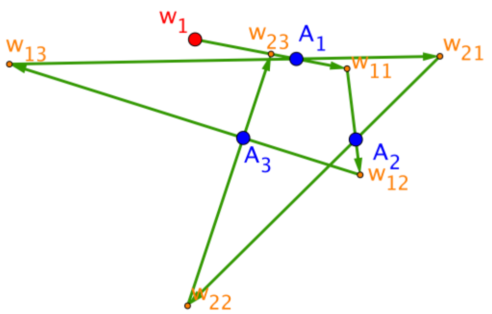


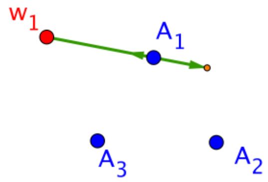
BBABAB 和 AABABA　Nice 點相同

有一個點對三個點跳BBABAB相當於對三個點的BBABAB的Nice點跳兩次B，如下圖：



對三個點跳 AABABA 相當於對三個點的 AABABA 的 Nice 點跳兩次 A，如下圖：

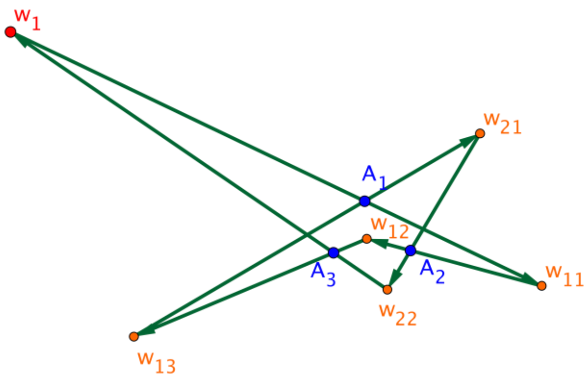




→對三個點跳 BBABABAABABA 相當於跳對三個點的 BBABAB 的 Nice 點跳 AABB

由一個點的性質可知，不論w_1為何，對三個點跳 BBABABAABABA 必定可跳回原初始點。

3. 以$2:1$、$3:1$、$\frac{1}{6}:1$三種比例跳動的情形



$$\boxed{2:1 \to 3:1 \to \frac{1}{6}:1 \to 2:1 \to 3:1 \to \frac{1}{6}:1}$$

定理十四　給定r_1、r_2、…、r_n n種比例，若存在正整數k_1、k_2、…、k_n符合${r_1}^{k_1}{r_2}^{k_2}\ldots{r_n}^{k_n}=1$，則存在跳動比例順序使得任意點對三個點$A_1$、$A_2$、$A_3$跳動必可跳回原初始點。

例如：有三種比例$2:1$、$5:1$、$\frac{1}{10}:1$ 符合$2^1 5^1 (\frac{1}{10})^1=1$ →可跳回

有三種比例$3:1$、$7:1$、$\frac{1}{2}:1$不符合條件→不可跳回

<證明>

假設給定r_1跳了k_1次，r_2跳了k_2次，⋯，r_1跳了k_2次

$$\begin{cases} a_1w_1 + b_1w_2 = (a_1 + b_1)z_1 \\ a_2w_2 + b_2w_3 = (a_2 + b_2)z_2 \\ a_3w_3 + b_3w_4 = (a_3 + b_3)z_3 \\ \dots \\ a_{i+j-1}w_{i+j-1} + b_{i+j-1}w_{i+j} = (a_{i+j-1} + b_{i+j-1})z_2 \\ a_{i+j}w_{i+j} + b_{i+j}w_1 = (a_{i+j} + b_{i+j})z_3 \end{cases}$$

$\forall a_n \in \{r_1 、r_2 、 \dots 、r_n\}$

$a_1a_2 \dots a_{i+j} = {r_1}^{k_1}{r_2}^{k_2} \dots {r_n}^{k_n}$，$b_1b_2 \dots b_{i+j} = 1$

則$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & .. & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & .. & 0 & 0 & 0 \\ : & : & : & : & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_{i+j-2} & b_{i+j-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & a_{i+j-1} & b_{i+j-1} \\ b_{i+j} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & a_{i+j} \end{vmatrix}$

$= a_1a_2 \dots a_{i+j} - b_1b_2 \dots b_{i+j} = a_1a_2 \dots a_{i+j} - 1$

欲使$\Delta = 0$，則$a_1a_2 \dots a_{i+j} = 1$

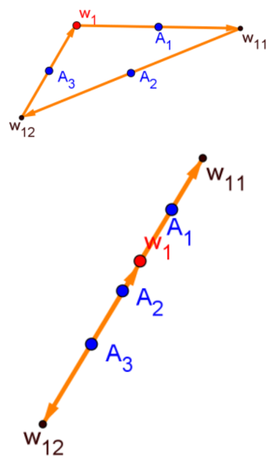
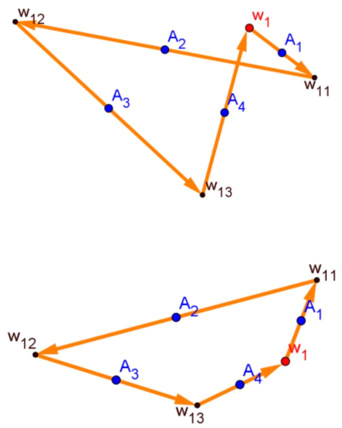
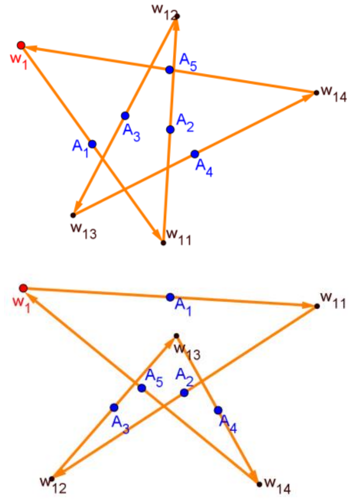
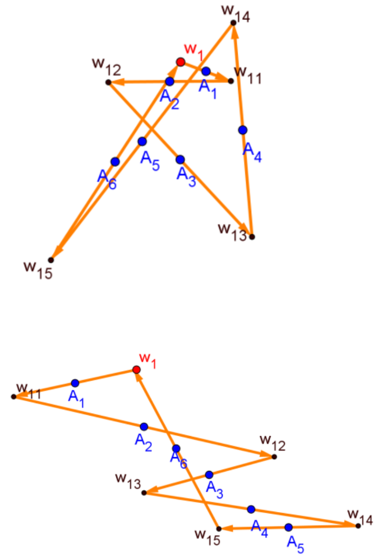
$\rightarrow {r_1}^{k_1}{r_2}^{k_2} \dots {r_n}^{k_n} = 1$

伍、研究成果

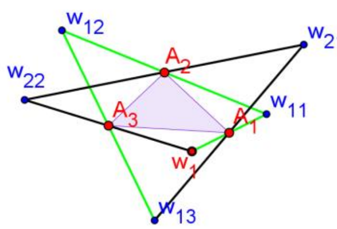
一.跳動情況的分類

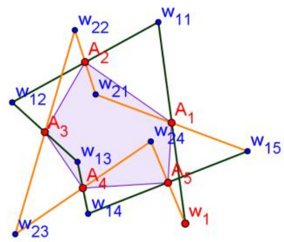
<table>
<tr><td rowspan="4">m=1</td><td rowspan="2">奇數個點</td><td>1.跳動一輪可跳回來 ➔$Nice$點</td></tr>
<tr><td>2.兩輪可跳回來</td></tr>
<tr><td rowspan="2">偶數個點</td><td>1.符合$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} \cdots\cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$
跳動一輪時必定可以回來 ➔ 無限多個$Nice$點</td></tr>
<tr><td>2.跳動多輪跳不回來</td></tr>
<tr><td rowspan="2">m>1</td><td colspan="2">1.跳動一輪可跳回來 ➔$Nice$點</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.跳動一輪無法跳回來 ➔ 永遠跳不回來（收斂到$Nice$點）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">m<1</td><td colspan="2">1.跳動一輪可跳回來 ➔$Nice$點</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.跳動一輪無法跳回來 ➔ 永遠跳不回來（發散）</td></tr>
</table>

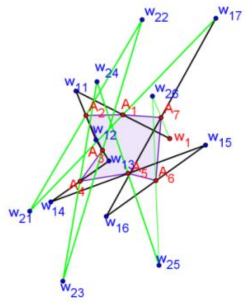
二、平面上n個點，由初始點依序對n個點作 n 次$1:1$跳動後可回到原初始點時，對稱點的軌跡。

	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6
路徑與軌跡				

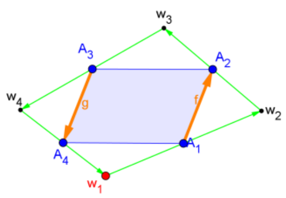
三、若n為奇數，經過$2n$次$1:1$跳動，必可回到原初始點。

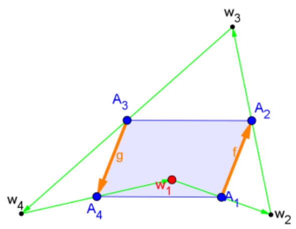


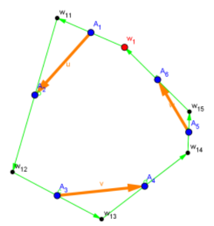


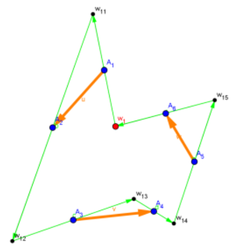


四、當n為偶數時，只要符合$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}\cdots\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{0}$時，則$Nice$點可為平面上任意點。

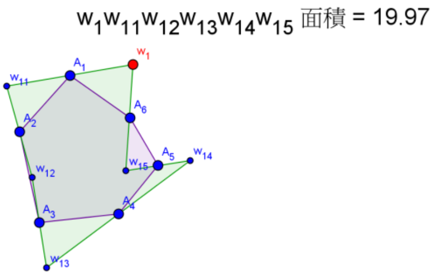


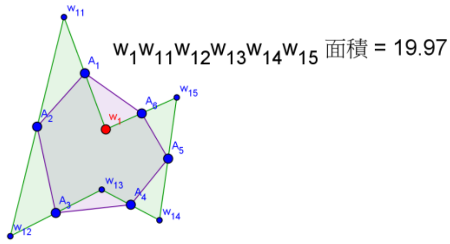






五、當n為偶數時由$Nice$點作 n 次跳動所形成的 n 邊形的面積恆為定值。

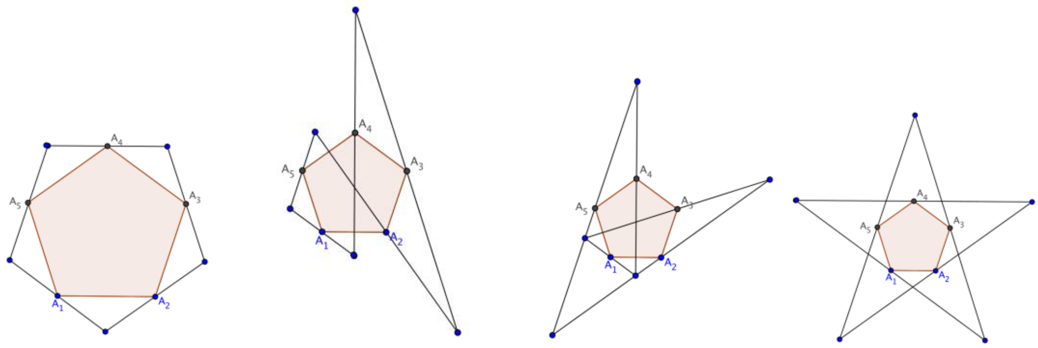




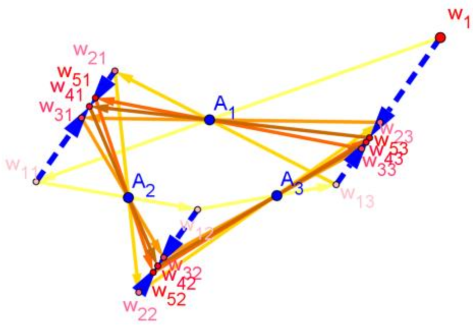
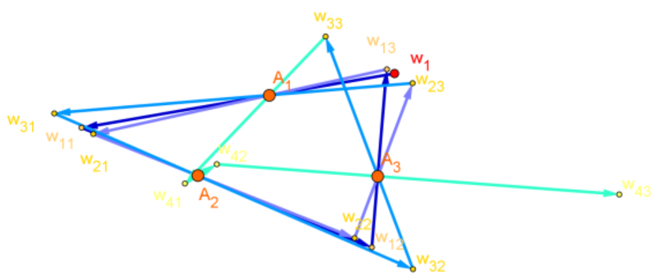
六、設n為奇數時，n個點為$z_1, z_2, z_3, \dots\dots, z_n$，當經過$n$次跳動即可回到原初始點時，此$n$個跳動點$w_1, w_2, w_3, \dots\dots, w_n$和 $z_1, z_2, z_3, \dots\dots, z_n$必存在一對一的關係。

七、對相同的n個點作1: 1 跳動，$Nice$點的對稱點會產生$\frac{(n-1)!}{2}$種路徑圖。

如$n = 5$時，有四類路徑，共有 12 種路徑。



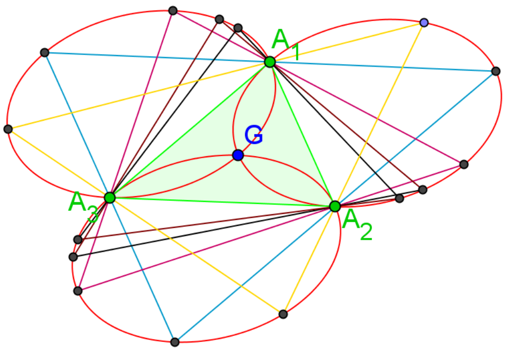
八、由w_1點依序對n個點以m: 1的比例經過無限次跳動後必收斂至 $Nice$點或放射。

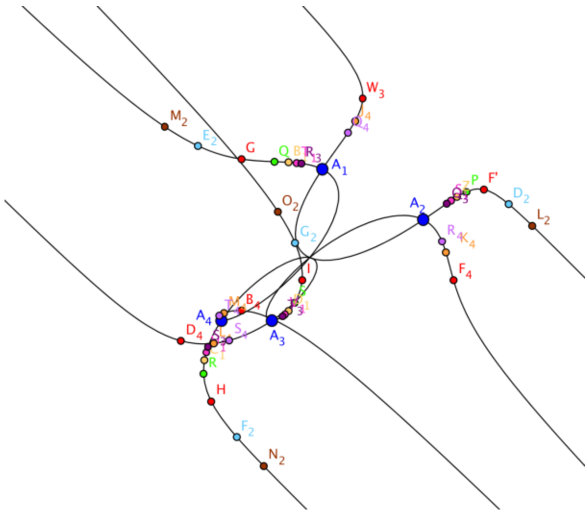
九、當$n = 3$時，所有m: 1比例的$Nice$點的軌跡為線段、圓或橢圓。

十、當$n = 3$時，由$Nice$點所形成三橢圓的交點即為$\Delta A_1A_2A_3$的重心。

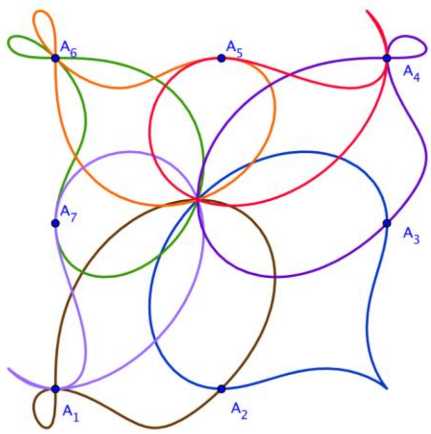
十一、當$n = 3$時，由$Nice$點所形成三橢圓的中心G_1、G_2、G_3與三角形三頂點 A_1、A_2、A_3此六點共橢圓，此橢圓的中心即為$\Delta A_1A_2A_3$的重心，且此四橢圓全等。



十二、當$n=4$時，所有m: 1比例的$Nice$點的軌跡為直線、二次曲線或三次曲線。



十三、利用$Nice$點的軌跡畫出藝術圖形。



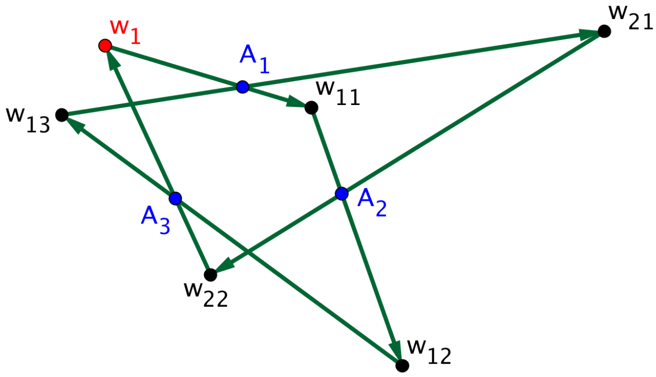
十四、當 n=1 時，若選擇跳2: 1和跳$\frac{1}{2}$: 1的次數相同，則必定可跳回原初始點。

$\boxed{2:1 \rightarrow \frac{1}{2}:1}$

十五、當 n=1 時，設 2n 次才可跳回的排列數有a_n種，則

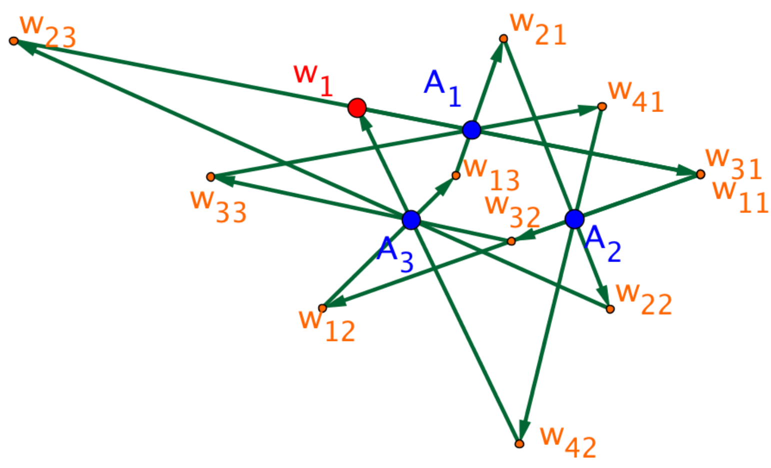
$$a_n = C_n^{2n} - \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-m}^{2n-2m} a_m$$

十六、當 n=3 時，當有兩種跳動比例時，最少跳六次必定可跳回原初始點。



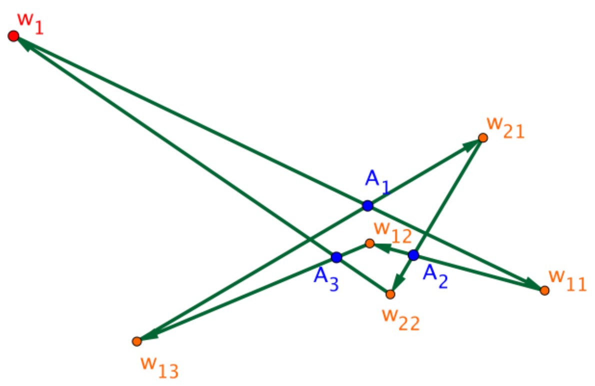
$$\boxed{2:1 \rightarrow \frac{1}{2}:1 \rightarrow 2:1 \rightarrow \frac{1}{2}:1 \rightarrow 2:1 \rightarrow \frac{1}{2}:1}$$

十七、若將跳動方法分成兩半，則後半部為前半部的反面，且前半部和後半部方法的 Nice 點相同。



$\boxed{\text{BBABAB/AABABA}}$

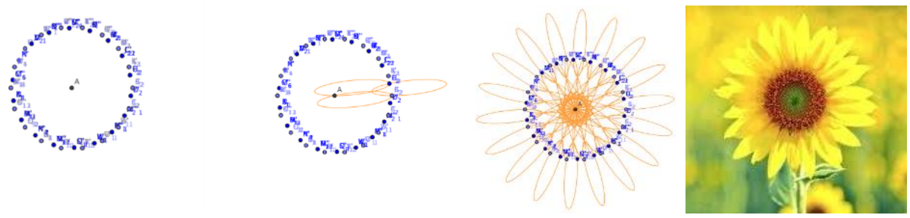
十八、給定r_1、r_2、…、r_n n種比例，若存在正整數k_1、k_2、…、k_n符合 ${r_1}^{k_1}{r_2}^{k_2}\dots{r_n}^{k_n} = 1$，則存在跳動比例順序使得任意點對三個點$A_1$、$A_2$、$A_3$跳動必可跳回原初始點。



$$\boxed{2:1 \rightarrow 3:1 \rightarrow \frac{1}{6}:1 \rightarrow 2:1 \rightarrow 3:1 \rightarrow \frac{1}{6}:1}$$

陸、未來應用

利用$Nice$點畫出的藝術圖形



1.以一點為圓心，任意半徑畫圓，在圓上取 n 等分點。

2.取圓心和圓上任意相鄰兩點，可畫出三個點的橢圓軌跡

3.重複上述動作，可畫出一朵花朵的圖形

柒、參考資料

一、Coxeter , H.S.M.(1969). Introduction to Geometry , John Wiley & Sons , New York

二、Hiward Eves(1963). A Survey of Geometry, Volume Boston, Allyn and Bacon

三、John R. Silvester Geometry Ancient & Modern. Oxford university press

四、Tristan Needham Visual Complex Analysis 1977 oxford university press

【評語】010026

本作品受跳棋的啟發而研究其所謂的 Nice 點，是不錯的取材方式。主要考慮 m : 1 跳動的各種情況，包括存在性、唯一性及 m 點變動時 Nice 點所形成的圖形等等，相當完整，最後考慮多個不同 m 交互出現時的情況，是不錯的作品，但是，全篇有一些繕打錯誤，說明不清或不完整之處，最可惜的是文章中提到行列式，卻沒有好好發揮，否則會有更好的結果。