2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010025**

參展科別　**數學**

作品名稱　**「心心」照我「心」－從 Pascal's theorem、Brianchon's theorem 到雙心多邊形的共點共線性質探討**

得獎獎項　**大會獎：四等獎**

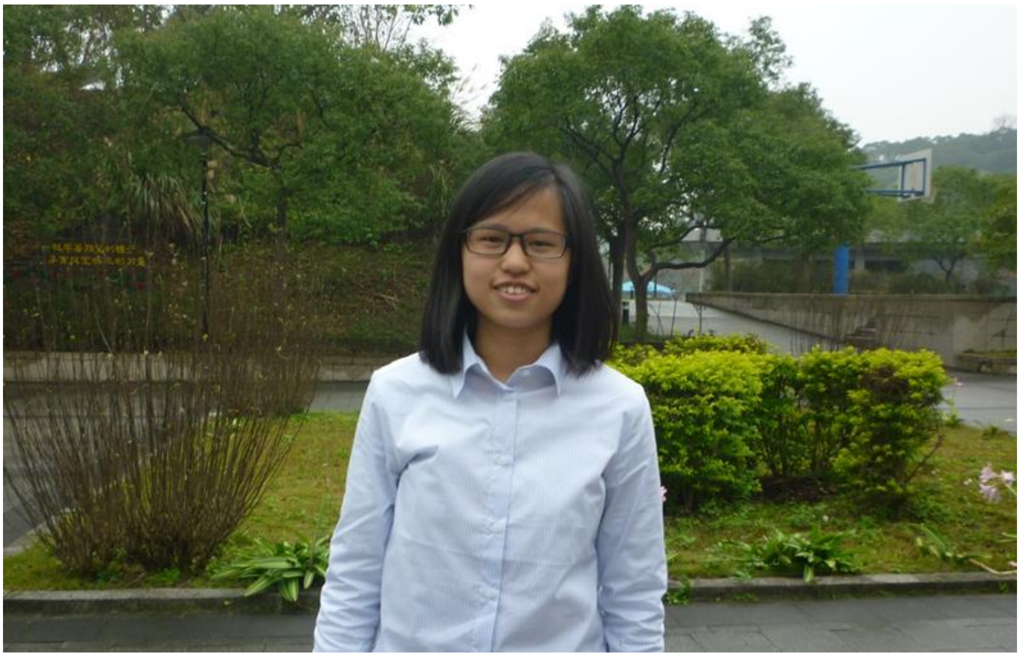
就讀學校　**臺北市立麗山高級中學**

指導教師　**林永發**

作者姓名　**張霈萱、林侑萱、游雅涵**

關鍵字　**Brianchon's theorem、Pascal's theorem、射影幾何**

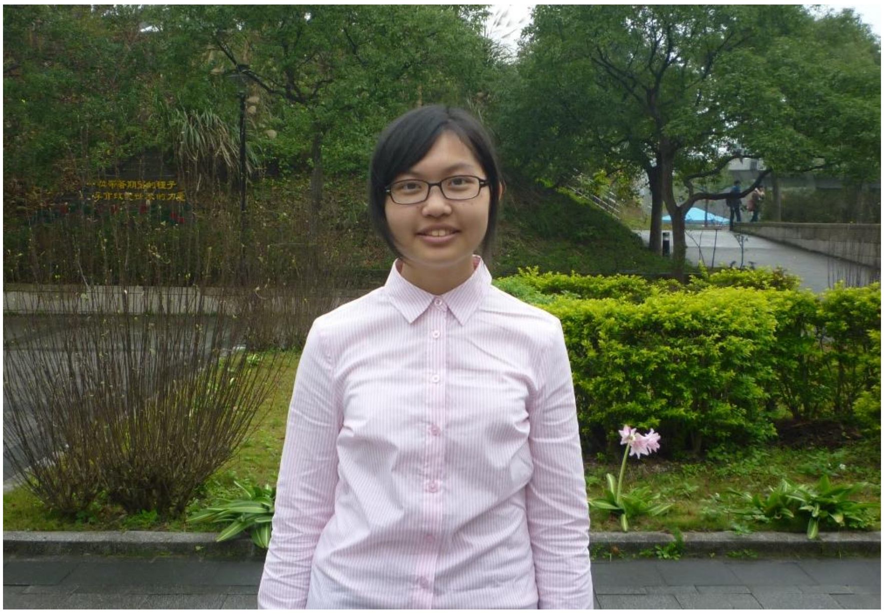
作者簡介



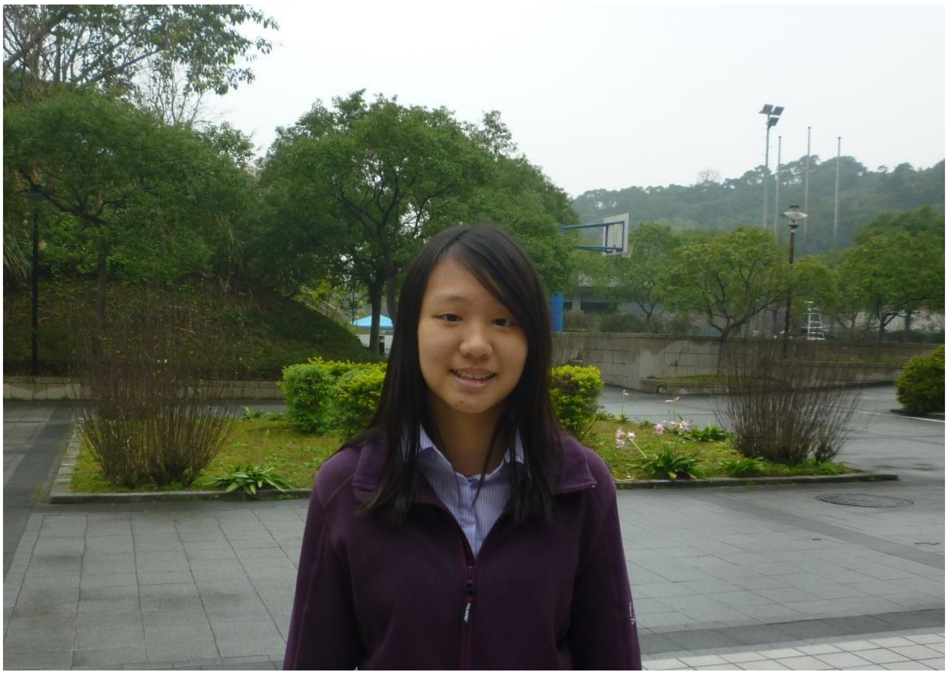
我是張霈萱，目前就讀台北市立麗山高中二年級。

平時就喜歡與同學討論、研究數學問題，嘗試用不同的觀點與解法解決問題。我立志要投入數學工作，不論多少挫折都無法改變我對數學的熱愛。我以大學數學系為目標，並希望未來能以數學研究為職業。

這次非常榮幸能參與這次盛會，抱著成朝聖的心情來到這裡，期盼能結識更多同好，請教不同的師長，拓展我的國際視野。



我是林侑萱，目前就讀台北市立麗山高中二年級。我從小就對數學很感興趣，小學時，總喜歡跟老師拿數學題目思考，到了高中，一有時間就會上網去查一些跟數學有關的資料，去探索其他課內沒有的數學知識。這次，我很榮幸能夠參與國際科展，與世界各地好手交流及拓展視野真的使我雀躍不已，也希望這次的能夠收穫滿滿的回去。



我是游雅涵，目前就讀台北市立麗山高中二年級，對數學有興趣的我，在學校的專題課程中選擇參加數學科課程，在這裡我遇到了這兩位夥伴，能和同樣對數學抱持熱忱的他們互相討論並進行研究，是個寶貴的經驗；能參加國際科展這個大型比賽，對我來說是個難得的機會，我和隊友們也很榮幸能參與這場學術界上的盛會，希望可以藉由這次的活動，和其他學校的人互相討論及分享，並且和國外學生進行交流。

摘　要

本研究靈感來自對 Brianchon 定理「圓外切六邊形的相對頂點的三條對角線共點」及 Pascal 定理「圓內接六邊形的三組對邊延長線交點共線」這兩個對偶定理的性質探討，進一步研究其在雙心六邊形共點共線的可能情形。研究結果有許多驚人的發現，特別是其三條對角線以及三條對邊切點連線，有六線共點，此點為定點，且與其外接圓圓心、內切圓圓心三點共線，且此線與 Pascal Line 垂直。據此，更進一步對雙心六邊形退化與延伸情形作深入探討。

Abstract

This research is inspired by Brianchon’ s theorem, given a tangential hexagon, polygon diagonals meet in a single point, and Pascal theorem, three pairs of opposite sides of the hexagon (extended if necessary) meet in three points which lie on a straight line. This research discusses the quality of dual theorem takes a further study on the possibility of double circle hexagon common point and line. This research has a surprising result, especially the three diagonals and three lines of point of tangency. The six lines intersect at a single point, which shares the line with the excenter and incenter. In addition, this line is perpendicular with Pascal Line. Based on it, the researcher takes a further discussion about the degeneracy and expansion of a double heart hexagon.

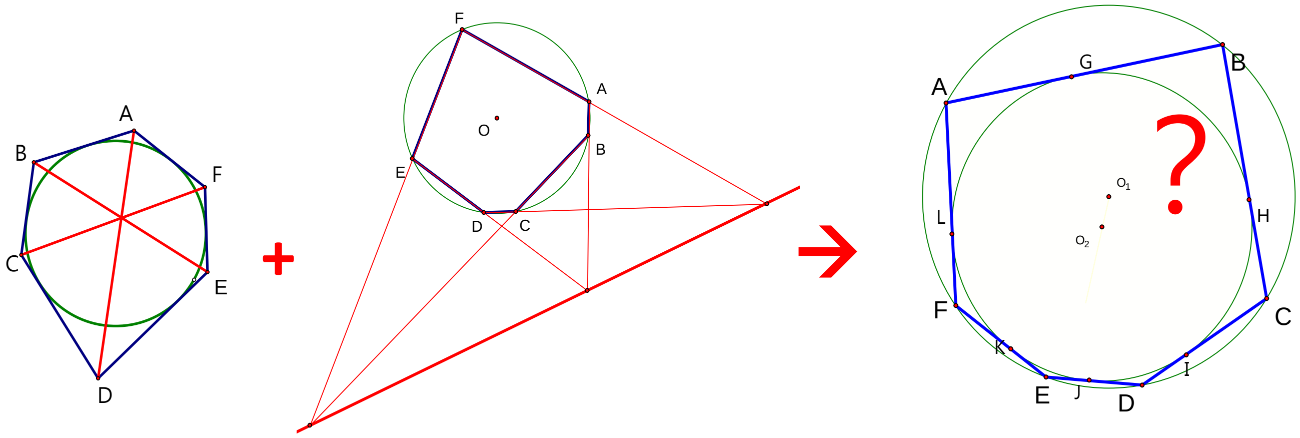
壹、前言

一、研究動機

在幾何明珠這本書中，寫到一個關於射影幾何的 Brianchon 定理：

『連接圓外切六邊形 ABCDEF 的相對頂點的三條對角線共點』

我們好奇的用 GSP 實驗，以各種不同的方式連接頂點或切點，赫然發現不只有三條對角線會共點，像是一條對角線與其相鄰的兩邊上之對邊切點連線也會三線共點。書中又提到 Pascal 定理和 Brianchon 定理的對偶關係，故嘗試將兩定理放在一起討論，試圖研究雙心多邊形共點共線的特殊關係。



二、研究目的與問題

（一） 探討圓外切六邊形三組對角線及三組對邊切點連線之間可能的共點情形；並探討圓外切五邊形、四邊形和三角形等退化情形。

（二） 探討圓內接六邊形三組對邊延長線交點及頂點切線交點之間可能的共線情形；並探討圓內接五邊形、四邊形和三角形等退化情形。

（三） 探討圓外切六邊形連接切點形成內接六邊形(或相反)可能的共點共線關係；並探討五邊形、四邊形、三角形等退化情形。

（四） 探討雙心六邊形可能的共點共線關係；並探討其外延或內朔圖形共點共線的關係。

（五） 探討雙心五邊形、四邊形、三角形等退化情形的共點共線關係。

（六） 根據上述問題，探討其在圓錐曲線上的共點共線關係。

貳、研究方法與研究工具

電腦、GSP、Geogebra 等幾何繪圖軟體。

參、文獻探討

一、點關於圓的對稱

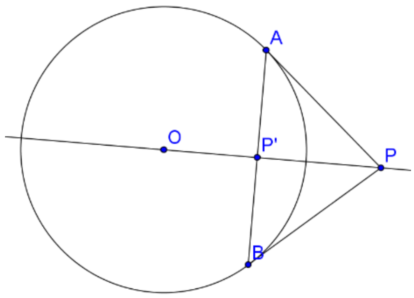
在平面上給定一個圓，圓心為 O，半徑為 r，對平面上任一異於 O 的點 P，將其變換為 $\overrightarrow{OP}$ 上的一點 P'，使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「**P' 為 P 關於圓 O 的對稱點**，或 P 、 P'**關於圓 O 對稱**。」

【性質 1-1】

若 P 在圓外，過 P 作圓 O 切線切圓 O 於 A，過 A 作 $\overline{AB}\perp\overline{OP}$ 分別交圓 O 於 B，交 $\overline{OP}$ 於 P'，則 P' 即為 P 關於圓 O 對稱點。

【證明】

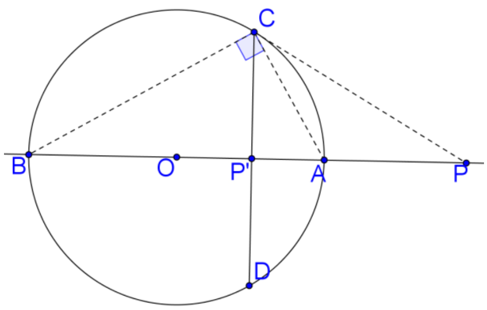
由直角三角形子母相似性質可得，$\overline{OA}^2=\overline{OP}\times\overline{OP'}$，故 P、P' 關於圓 O 對稱。



【性質 1-2】

P、P' 關於圓 O 對稱，作 $\overleftrightarrow{PP'}$ 交圓 O 於 A、B 兩點，則 P、P'；A、B 為調和點列。

【證明】



1° 過 P 作圓 O 切線，切圓 O 於 C，並過 C 作 $\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{OP}$ 交圓 O 於 D，交 $\overleftrightarrow{OP}$ 於 P'。

2° 由上可知 $\overline{AC}=\overline{AD}$，又

$\angle PCA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (弦切角)，$\angle ACD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (圓周角)

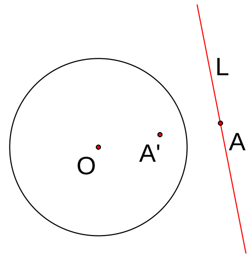
$\Rightarrow\angle PCA=\angle ACD$

$\therefore\ \overline{CA}$ 為 $\angle P'CP$ 的角平分線 $\Rightarrow\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP'}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP'}}$

又 $\angle BCA=90°\Rightarrow\overline{BC}$ 為 $\angle P'CP$ 的外角平分線 $\Rightarrow\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP'}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP'}}$

3° 根據上述，可得 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AP'}}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP'}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{BP'}}$，$\therefore$P、P'；A、B 為調和點列。

二、極線與極點

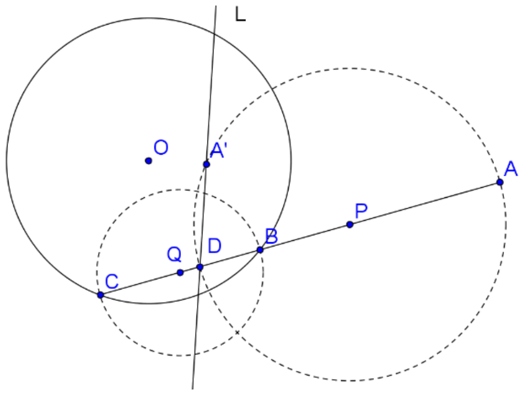


若 A 、 A'關於圓 O 對稱，則稱過 A 作垂直 $\overleftrightarrow{AA'}$ 的直線 L，則稱「**直線 L 為 A'關於圓 O 的極線；A'為此直線 L 的極點。**」

【性質 2-1】

L 為 A 點關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 的割線，交圓 O 於 B、C 兩點，交 L 於 D，則 A、D；B、C 為調和點列。

【證明】



1° 作 A 關於圓 O 的對稱點 A'；分別以 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 為直徑作圓 P 與圓 Q。

2° ∠DA'A=90°(由極線定義可知)，故 A' 在圓 P 上，也就是說圓 P 通過圓 O 的一組對稱點，所以圓 P、圓 O 正交。

3° ①圓 O 與圓 Q 的根軸為 $\overleftrightarrow{BC}$，故 P 點在圓 O，圓 Q 的根軸上

②圓 P 與圓 O 正交

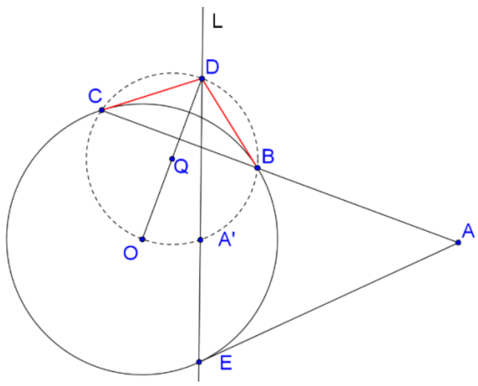
由①、②知圓 P 與圓 Q 正交，∴A、D 關於圓 Q 對稱。⇒A、D；B、C 為調和點列。

上述，若當 $\overline{CB}$ 為圓 O 的一條直徑，D 與 A' 重合，即為可得性質 1-2。

【性質 2-2】

L 為 A 關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 割線交於 B、C 兩點，分別過 B、C 作圓 O 切線，則兩切線交點必在 L 上。

【證明】



1° 作 A 關於圓 O 的對稱點 A'，過 A 作圓 O 切線 $\overline{AE}$ 交圓 O 於 E 點則可得：

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AA'}}\Rightarrow\overline{AE}^2=\overline{OA}\times\overline{AA'}$$

$\overline{AE}^2=\overline{AB}\times\overline{AC}$（圓冪定理）

故 $\overline{AO}\times\overline{AA'}=\overline{AB}\times\overline{AC}$，由圓冪定理可知，O、A'、B、C 四點共圓，作此圓 Q 交 L 於 D。

2° $\angle OA'D=90°$(極線定義)，所以 $\overline{OD}$ 為圓 Q 直徑，由此可得，

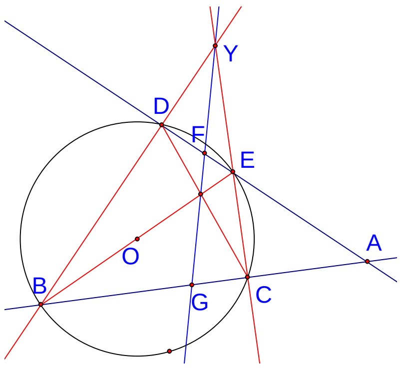
$\angle OBD=\angle OCD=90°$，故 $\overline{BD}$ 、$\overline{CD}$ 為圓 O 切線。

上述，若當過 A 點的割線變為切線時，B、C、D 重合成一點切點，故可得：「**過 A 作圓 O 的兩切線，則兩切點連線即為 A 關於圓 O 的極線。**」

【性質 2-3】

L 為 A 點關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 的兩條割線，分別交圓 O 於 B、C 及 D、E，則 $\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{CE}$ 的交點，及 $\overleftrightarrow{BE}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 的交點都在極線 L 上。

【證明】



1° 令 $\overleftrightarrow{BC}$ 交 L 於 G，$\overleftrightarrow{ED}$ 交 L 於 F。則根據極線性質 2-1 得：

$\overline{AC}:\overline{CG}=\overline{AB}:\overline{BG}$ ...①

$\overline{AD}:\overline{DF}=\overline{AE}:\overline{EF}$ ...②

2° 令 $\overleftrightarrow{CY}$ 交 L 於 Y，對 ΔAFG 以 $\overleftrightarrow{CY}$ 為截線用孟氏定理得

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CG}}\times\frac{\overline{GY}}{\overline{YF}}\times\frac{\overline{FE}}{\overline{EA}}=1$$

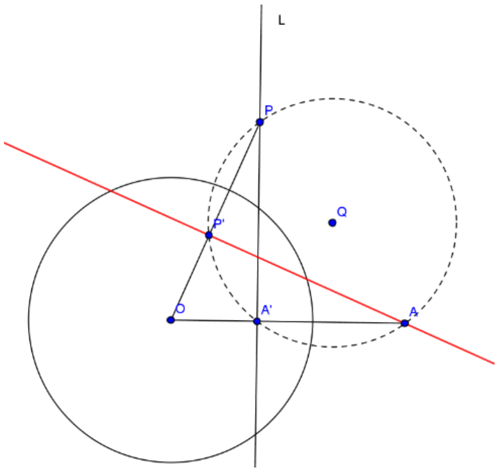
將①、②代入得：$\frac{\overline{AB}}{\overline{BG}}\times\frac{\overline{GY}}{\overline{YF}}\times\frac{\overline{FD}}{\overline{DA}}=1$，由孟氏逆定理得 B、D、Y 三點共線。

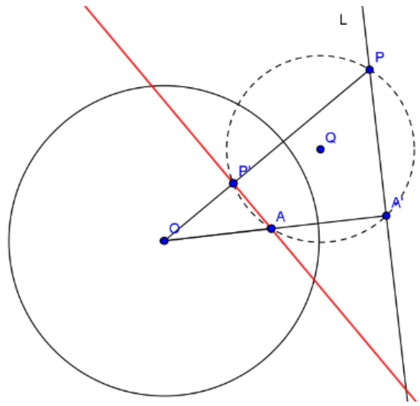
∴ $\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{CE}$ 的交點 Y 在極線 L 上。同理可證 $\overleftrightarrow{BE}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的交點也在極線 L 上。

【性質 2-4】

L 為 A 關於圓 O 的極線，則 L 上任意點 P 關於圓 O 的極線會通過 A。

【證明】





1° 作 A 關於圓 O 的對稱點 A'，及 P 關於圓 O 的對稱點 P'，令圓 O 半徑為 r，

則有 $r^2=\overline{OA}\times\overline{OA'}=\overline{OP}\times\overline{OP'}$，由圓冪定理可知 A、 A'，P、 P'四點共圓，作出此圓 Q。

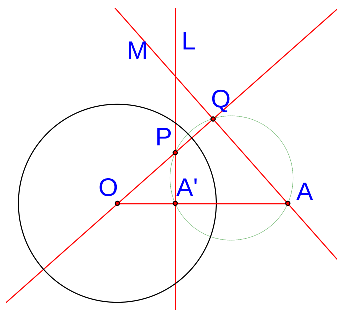
2° 因為 $\angle PA'A=90°$(極線定義)，可知圓 Q 以 $\overline{PA}$ 為直徑，而有 $\angle PA'A=\angle PP'A=90°$，

故 $\overleftrightarrow{P'A}$ 為 P 點對圓 O 的極線。

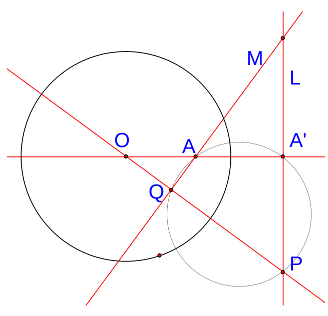
【性質 2-5】

L 為 A 關於圓 O 的極線，則過 A 的任意直線 M，其關於圓 O 的極點必在 L 上。

【證明】



1° 作 A 關於圓 O 的對稱點 A′，過 O 作直線 M 的垂線 $\overleftrightarrow{PQ}$，交 M 於 Q，交 L 於 P。因為 $\angle AA'P=\angle AQP=90°$，所以 A、A'、P、Q 四點共圓，作出此圓 C。



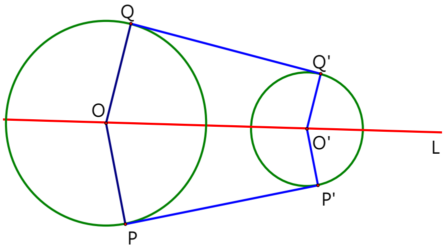
2° 因為圓 C 通過圓 O 的一組對稱點，故圓 C 與圓 O 正交。若圓 O 半徑為 r，則有 $\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OA}\times\overline{OA'}=r^2$，∴P 為 M 關於圓 O 的極點。

三、Brianchon 定理

【引理 3-1】

若 P'、Q' 是圓 O 在點 P、Q 處切線上的兩點，且 $\overline{PP'}=\overline{QQ'}$，則存在一個圓 O' 與 $\overleftrightarrow{PP'}$、$\overleftrightarrow{QQ'}$ 分別切於 P'、Q'。

【證明】做 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線 L，則整個圖形為關於 L 對稱，則過 P、Q 的垂線與 L 交於同一點 O。且以 O' 為圓心，$\overline{O'P'}$ 為半徑的圓與 $\overleftrightarrow{PP'}$、$\overleftrightarrow{QQ'}$ 分別切於 P'、Q'。



【引理 3-2】

設 ABCDEF 為圓外切六邊形，且 R、Q、T、S、P、U 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{RS}$、$\overleftrightarrow{UT}$ 交於一點。

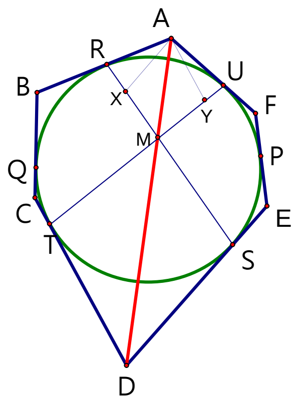
1° 過 A 作 $\overline{AX}//\overline{DS}$ 交 $\overline{RS}$ 於 X，$\overline{AY}//\overline{TD}$ 交 $\overline{TU}$ 於 Y

$\angle$AXR=$\angle$ESR（$\overline{AX}//\overline{DS}$ 同位角相等）

$\angle$ESR=$\angle$ARX（夾同弧 $\overline{RS}$ 的弦切角相等）

$\therefore$ $\angle$AXR=$\angle$ESR=$\angle$ARX $\Rightarrow \overline{AX}=\overline{AR}$， 同理，$\overline{AY}=\overline{AU}$；

又因 $\overline{AR}=\overline{AU}$ (切線長性質) $\therefore$ $\overline{AX}=\overline{AY}$。



2° 設 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{RS}$ 交於 M，$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{UT}$ 交於 M'

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MD}}=\dfrac{\overline{AX}}{\overline{DS}}(\Delta AXM\sim\Delta DSM)\dfrac{\overline{AY}}{\overline{DT}}=\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{M'D}}(\Delta AYM'\sim\Delta DTM')$

又因 $\overline{DS}=\overline{DT}$ (因切線段性質)，$\overline{AX}=\overline{AY}$ (由 1° 可知)

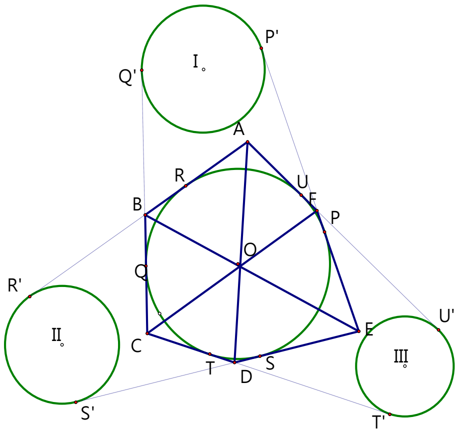
$\therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MD}}=\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{M'D}}$，即 M、M' 重合 $\Rightarrow \overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{RS}$、$\overleftrightarrow{UT}$ 交於一點 M，

同理 $\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{RS}$、$\overleftrightarrow{QP}$ 交於一點 K、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{QP}$、$\overleftrightarrow{UT}$ 交於一點 N。

【Brianchon 定理】圓外切六邊形的相對頂點的三條對角線共交點

設 ABCDEF 為圓 O 之圓外切六邊形，則相對頂點的三條對角線 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 共交於一點。

【證法一】



在 $\overline{PF}$、$\overline{QB}$、$\overline{RB}$、$\overline{SD}$、$\overline{TD}$、$\overline{UF}$ 延長線上分別取點

P'、Q'、R'、S'、T'、U'，使得

$\overline{PP'}=\overline{QQ'}=\overline{RR'}=\overline{SS'}=\overline{TT'}=\overline{UU'}$

由＜引理 3-1＞得存在圓 I 與 $\overleftrightarrow{PP'}$、$\overleftrightarrow{QQ'}$ 分別切於 P'、Q'；

圓 II 與 $\overleftrightarrow{RR'}$、$\overleftrightarrow{SS'}$ 分別切於 R'、S'；

圓 III 與 $\overleftrightarrow{TT'}$、$\overleftrightarrow{UU'}$ 分別切於 T'、U'；

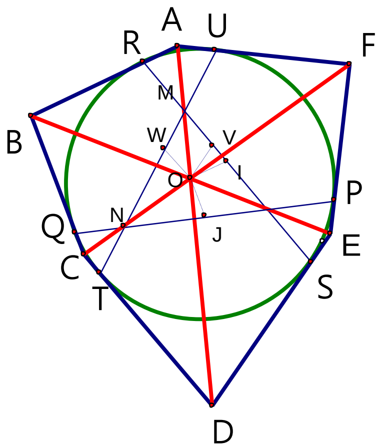
又由切線長定理得 $\overline{AR}=\overline{AU}$，$\overline{DT}=\overline{DS}$，所以有 $\overline{AR'}=\overline{AU'}$，$\overline{DT'}=\overline{DS'}$，可得

$\overleftrightarrow{AD}$ 為圓 II、圓 III 的等冪軸，同理，$\overleftrightarrow{BE}$ 為圓 I、圓 II 的等冪軸、$\overleftrightarrow{CF}$ 為圓 I、圓 III 的等冪軸

設 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 O 點，則 O 點同時與圓 I、圓 II、圓 III 等冪，

所以 O 點也在 $\overleftrightarrow{CF}$ 上，即 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 交於一點 O。

【證法二】再證 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 交於一點



1° 設 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 O

過 O 作 $\overline{OW}//\overline{DT}$ 交 $\overline{TU}$ 於 W，$\overline{OV}//\overline{DS}$ 交 $\overline{RS}$ 於 V

$\overline{OW}=\overline{OV}$ ($\dfrac{\overline{WO}}{\overline{TD}}=\dfrac{\overline{MO}}{\overline{MD}}=\dfrac{\overline{OV}}{\overline{DS}}$ 且 $\overline{TD}=\overline{DS}$)

同理，過 O 作 $\overline{OI}//\overline{BR}$ 交 $\overline{RS}$ 於 I，$\overline{OJ}//\overline{BQ}$ 交 $\overline{QP}$ 於 J

則 $\overline{OI}=\overline{OJ}$

又因 $\angle OVI=\angle RSE$（內錯角），$\angle RSE=\angle ARS$（夾同弧弦切角），$\angle ARS=\angle OIV$（內錯角）

而有，$\angle OVI=\angle OIV$，$\therefore \overline{OV}=\overline{OI}$，$\overline{OW}=\overline{OJ} \Rightarrow \overline{OW}=\overline{OV}=\overline{OI}=\overline{OJ}$

2° 設$\overline{OC}$交$\overline{QJ}$於 N，$\overline{OC}$交$\overline{WT}$於 N'

則有$\dfrac{\overline{ON}}{\overline{NC}}=\dfrac{\overline{OJ}}{\overline{QC}}$($\Delta CQN\sim\Delta OJN$)，$\dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'C}}=\dfrac{\overline{OW}}{\overline{CT}}$($\Delta CTN'\sim\Delta OWN'$)

又因$\overline{CQ}=\overline{CT}$(因切線段長性質)，且$\overline{OW}=\overline{OJ}$(由 1° 可知)

$\therefore\dfrac{\overline{ON}}{\overline{NC}}=\dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'C}}$，即 N、N' 重合。$\Rightarrow\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於一點 O。

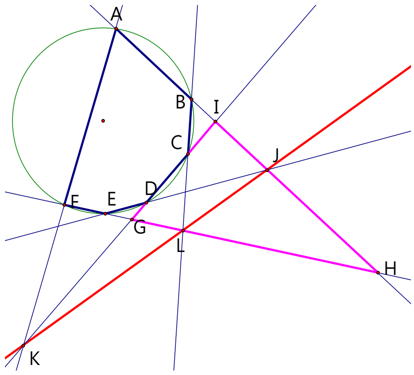
上述，有關於外切於圓的六邊形 ABCDEF，對三條對角線所共交於的點，我們稱此點為 **Brianchon point(布里昂雄點)**，並以 Br 簡記之。

四、Pascal 定理

【Pascal 定理】圓內接六邊形的三組對邊延長線交點共線

設 ABCDEF 為圓 O 的內接六邊形，及三組對邊延長線$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{CD}$和$\overleftrightarrow{FA}$分別交於 J、L、K，則 J、L、K 三點共線。

【證明】



1° 作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於 H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 I，$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於 G。

因為$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{BC}$分別截ΔGHI，由孟氏定理，得

$\dfrac{\overline{HJ}}{\overline{JI}}\times\dfrac{\overline{ID}}{\overline{DG}}\times\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EH}}=1$，$\dfrac{\overline{HA}}{\overline{AI}}\times\dfrac{\overline{IK}}{\overline{KG}}\times\dfrac{\overline{GF}}{\overline{FH}}=1$，$\dfrac{\overline{HB}}{\overline{BI}}\times\dfrac{\overline{IC}}{\overline{CG}}\times\dfrac{\overline{GL}}{\overline{LH}}=1$

相乘得$\dfrac{\overline{HJ}}{\overline{JI}}\times\dfrac{\overline{ID}}{\overline{DG}}\times\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EH}}\times\dfrac{\overline{HA}}{\overline{AI}}\times\dfrac{\overline{IK}}{\overline{KG}}\times\dfrac{\overline{GF}}{\overline{FH}}\times\dfrac{\overline{HB}}{\overline{BI}}\times\dfrac{\overline{IC}}{\overline{CG}}\times\dfrac{\overline{GL}}{\overline{LH}}=1$ --------①

2° 由圓冪定理得$\dfrac{\overline{GE}\times\overline{GF}}{\overline{GC}\times\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{HA}\times\overline{HB}}{\overline{EH}\times\overline{FH}}\times\dfrac{\overline{IC}\times\overline{ID}}{\overline{AI}\times\overline{BI}}=1$ --------②

① ÷②得$\dfrac{\overline{HJ}}{\overline{JI}}\times\dfrac{\overline{IK}}{\overline{KG}}\times\dfrac{\overline{GL}}{\overline{LH}}=1$，由孟氏逆定理知 J、K、L 三點共線。

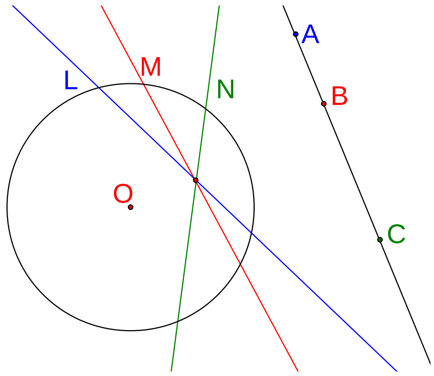
上述有關圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線，此直線稱之為 **Pascal Line(帕斯卡線)**。

五、利用極線互相導出 Brianchon 定理和 Pascal 定理

【引理 5-1】

平面上有一圓 O 及 A、B、C 三點，L、M、N 分別為 A、B、C 關於圓 O 的極線，若 A、B、C 三點共線，則 L、M、N 三線共點。

【證明】



由＜極線性質 2-5＞得，$\overleftrightarrow{AC}$ 的極點必在 L 上，

同理，$\overleftrightarrow{BC}$ 的極點必在 M、上，$\overleftrightarrow{CA}$ 的極點必在 N 上。

故 L、M、N 三線共點。

【引理 5-2】

平面上有一圓 O 及 L、M、N 三條直線，A、B、C 分別為 L、M、N 關於圓 O 的極點，若 L、M、N 三線共點，則 A、B、C 三點共線。

【證明】同上圖

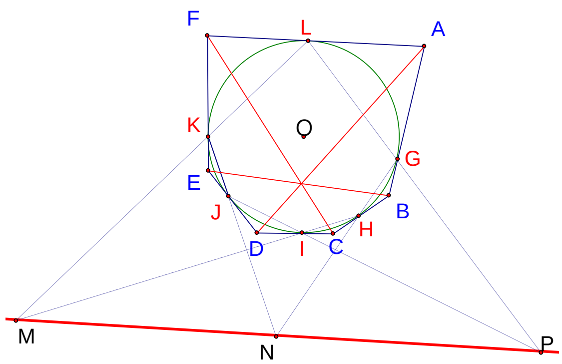
令 L、M、N 交於 D 點。由＜極線性質 2-4＞得 D 點關於圓 O 的極線必通過 A 點，

同理，D 點關於圓 O 的極線亦通過 B、C，

故 A、B、C 三點共線。

(一)利用 Pascal 定理證明 Brianchon 定理

【證明】

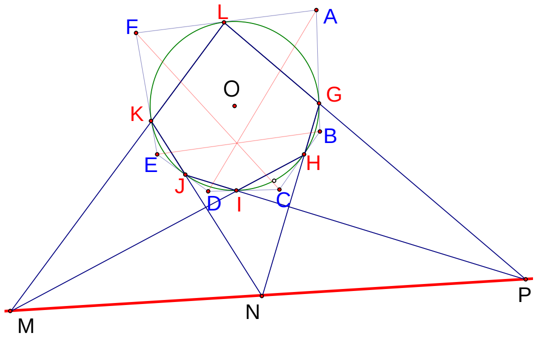


1° 作 $\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{JK}$ 交於 N，由＜極線性質 2-2＞可知 $\overleftrightarrow{BE}$ 為 N 關於圓 O 的極線，同理作 $\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{KL}$ 交於 M，$\overleftrightarrow{JI}$ 、$\overleftrightarrow{LG}$ 交於 P，則 M、P 關於圓 O 的極線分別為 $\overleftrightarrow{CF}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 。

2° 由 Pascal 定理知 N、M、P 三點共線，又由＜引理 5-1＞知 N、M、P 關於圓 O 的極線，三線共點。

(二) 利用 Brianchon 定理證明 Pascal 定理

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 N 關於圓 O 的極線為 $\overleftrightarrow{BE}$，

同理，M、P 關於圓 O 的極線分別為 $\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$。

2° 由 Brianchon 定理知 $\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$ 三線共點，

又由<引理 5-2>得 N、M、P 三點共線。

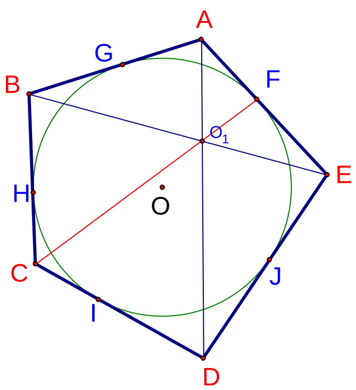
六、Brianchon 定理及 Pascal 定理的退化情形

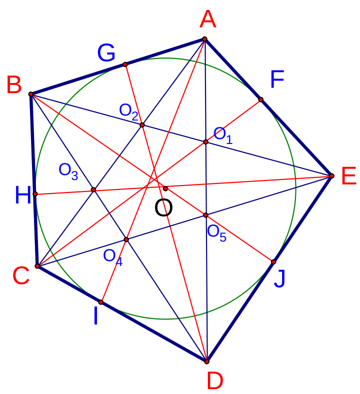
在動態環境下，倘若將圓外切六邊形的一個頂點拉動使其與相鄰的一個頂點重合，則此頂點會變為切點，此時原圓外切六邊形退化成圓外切五邊形；同理，拉動圓內接六邊形一個頂點，使其與相鄰的一個頂點重合，則邊的延長線會變為過頂點切線，此時原圓內接六邊形退化成圓內接五邊形。然後在仿造前述方法，利用極線性質便可證得六邊形退化成五邊形、四邊形、三角形後，仍具有共點或共線之性質，如下：

- **Brianchon 定理的退化情形**

【圓外切五邊形】

若 ABCDE 是圓外切五邊形，G、H、I、J、F 分別是內切圓在邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 三線共點，同理，($\overleftrightarrow{GD}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BE}$)，($\overleftrightarrow{HE}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$)，($\overleftrightarrow{AI}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$)，($\overleftrightarrow{BJ}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CE}$)三線共點。



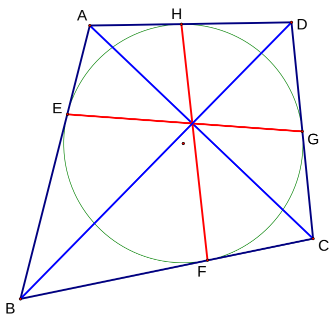


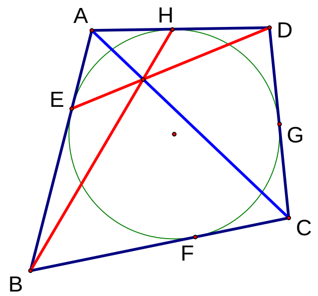
【圓外切四邊形】

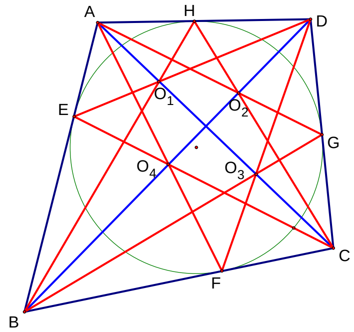
若 ABCD 是圓外切四邊形，E、F、G、H 分別為在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上的切點，則

(1) $\overleftrightarrow{AC}$ 、 $\overleftrightarrow{BD}$ 、 $\overleftrightarrow{EG}$ 、 $\overleftrightarrow{HF}$ 四線共點。

(2) $\overleftrightarrow{AC}$ 、 $\overleftrightarrow{BH}$ 、 $\overleftrightarrow{DE}$ 三線共點，同理，有另三組三線共點。

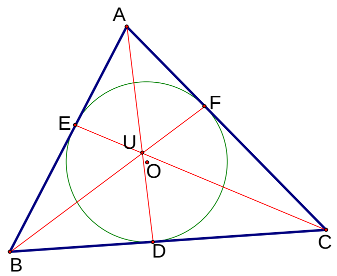






【圓外切三角形】

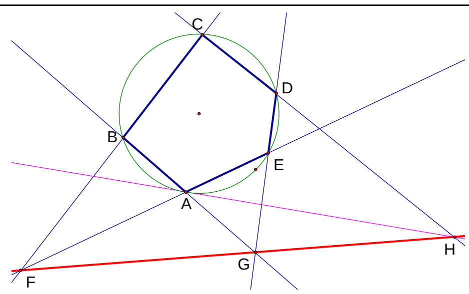
△ABC 為圓外切三角形，E、D、F 分別是在邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{BF}$ 、 $\overleftrightarrow{CE}$ 三線共點。如下面右圖。



■ Pascal 定理的退化情形

【圓內接五邊形】

圓內接五邊形 ABCDE，$\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 F，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 交於 G，與過 A 的切線與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 H，則 F、G、H 三點共線。同理，有另外四種相同組合，各形成一組三點共線。

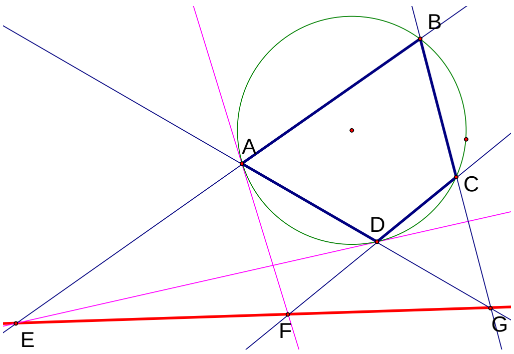


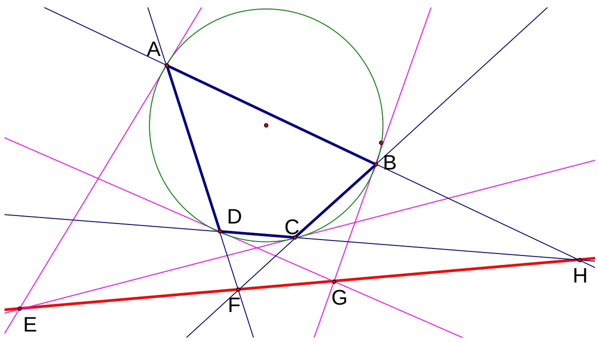
【圓內接四邊形】

設 ABCD 為圓內接四邊形

(1) $\overleftrightarrow{AB}$ 與過 D 點切線交點 E、$\overleftrightarrow{CD}$ 與過 A 點切線交點 F、$\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 G，則 E、F、G 三點共線。如下左圖。

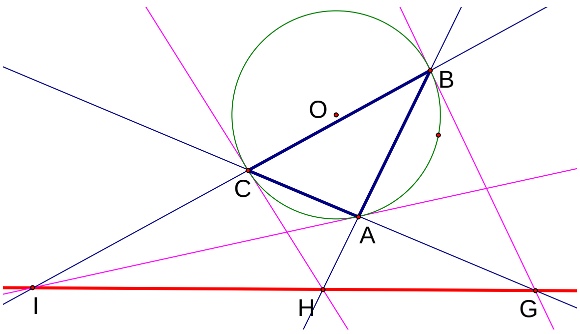
(2) 兩組對邊延長線交點及兩組相對頂點的切線交點，則四點共線。如下右圖。





【圓內接三角形】

△ABC 為圓內接三角形，三組頂點的切線與對邊延長線的交點，三點共線。



七、Brianchon 定理及 Pascal 定理在圓錐曲線上的推廣

Brianchon 定理與 Pascal 定理對偶，點線互換對圓均成立，若通過投射和取截景的方法，將可進一步推廣到所有圓錐曲線上，同時知道 Brianchon 定理及 Pascal 定理之逆定理也成立，故可得到下面結論：

1. 內接於圓錐曲線上的任意六邊形的三組對邊延長線交點共線。
2. 若一六邊形的三組對邊延長線交點共線，則六邊形的六頂點必在同一個圓錐曲線上。
3. 外切於圓錐曲線上的任意六邊形的三組對角線共點。
4. 若一六邊形的三組對角線共點，則六邊形必外切於一個圓錐曲線上。

肆、研究結果與討論

無論圓外切的三組對角線共點或圓內接三組對邊延長線交點共線，我們嘗試不同對應的組合，可發現其它共點與共線的關係，我們分別統稱它為廣義 Brianchon Point 與廣義 Pascal Line。

一、圓外切六邊形的共點情形

(一) 圓外切六邊形的可能共點情形

【定理 1-1-1】圓外切六邊形之廣義 Brianchon Point

設 ABCDEF 為圓 O 的外切六邊形，G、H、I、J、K、L 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$ 上的切點。則($\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{AD}$)，($\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$、$\overleftrightarrow{BE}$)，($\overleftrightarrow{HL}$、$\overleftrightarrow{IK}$、$\overleftrightarrow{CF}$)均分別三線共點。

【證法一】

1° 令$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{AD}$交於 M，$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{AD}$交於 M' 。

過 A 點分別作$\overline{AX}$//$\overline{JD}$，$\overline{AY}$//$\overline{DI}$，並分別交$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GI}$於 X、Y。

2° $\angle MXA=\angle LJD$(同位角)，又$\angle LJD=\angle ALJ$(夾同弧弦切角)

可得$\angle MXA=\angle ALJ \therefore \angle AXL=\angle ALX \Rightarrow \overline{AX}=\overline{AL}$，

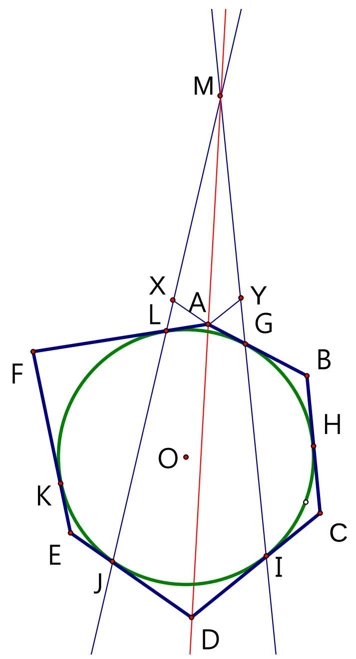
同理，$\overline{AY}=\overline{AG}$，

又因$\overline{AG}=\overline{AL}$（圓切線性質），$\therefore \overline{AX}=\overline{AY}$。

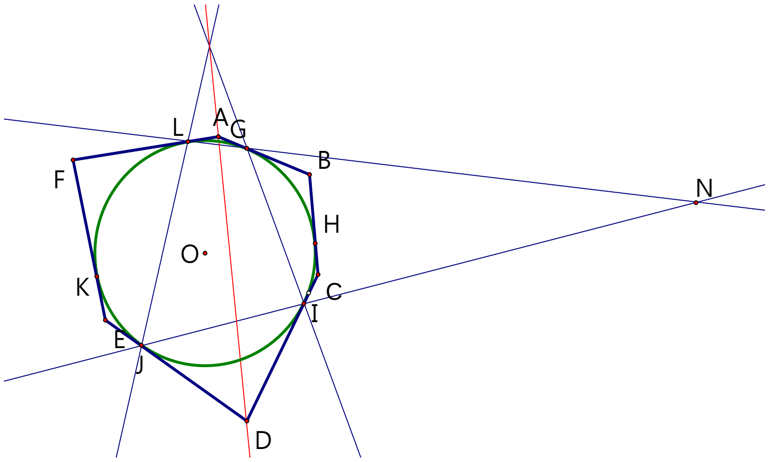
3° $\triangle MXA \sim \triangle MJD \Rightarrow \dfrac{\overline{AX}}{\overline{JD}}=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$，同理，$\dfrac{\overline{AY}}{\overline{DI}}=\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'D}}$

又因$\overline{AX}=\overline{AY}$，$\overline{JD}=\overline{DI}$，故$\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\dfrac{\overline{M'A}}{\overline{M'D}}$ $\therefore M=M'$。

$\therefore \overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{AD}$三線共點。



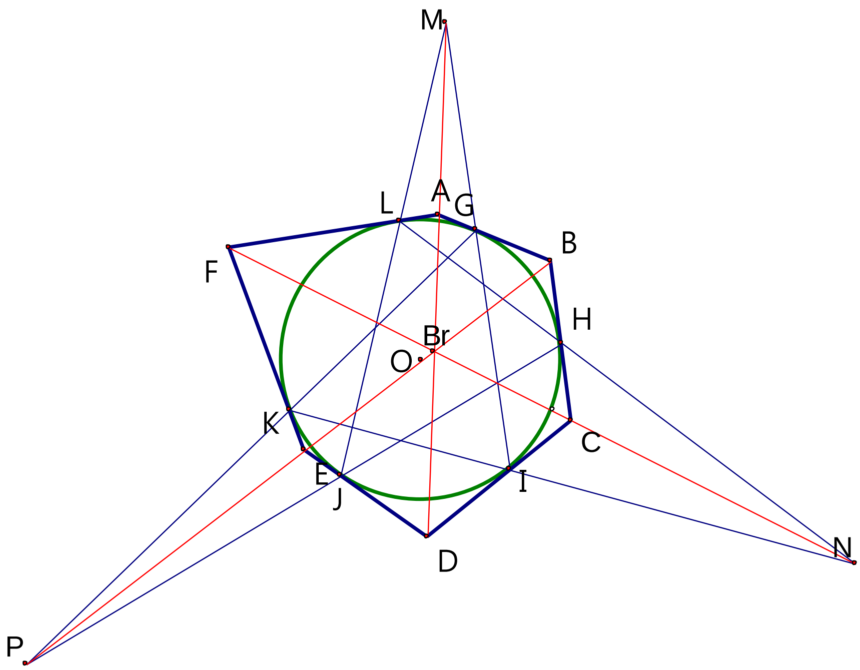
【證法二】



1° 作 $\overleftrightarrow{GL}$ 、$\overleftrightarrow{JI}$ 交於 N，由<極線性質 2-2>可知，A、D 皆在 N 關於圓 O 的極線上，即 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 N 關於圓 O 的極線。

2° 由<極線性質 2-3>可知 $\overleftrightarrow{GI}$ 、$\overleftrightarrow{LJ}$ 的交點在 N 關於圓 O 的極線上，也就是 $\overleftrightarrow{AD}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{GI}$ 、$\overleftrightarrow{LJ}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 三線共點。

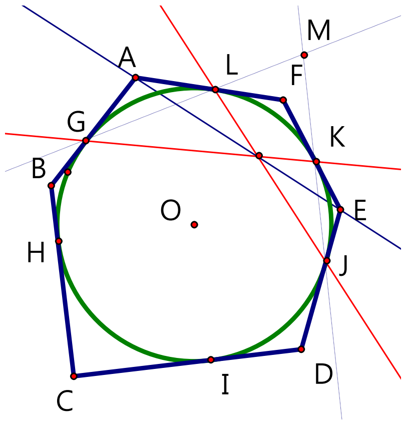
根據 Brianchon 定理與上述結果，可發現這類型組合的圓外切六邊形所有可能的廣義 Brianchon Point，如下圖：



【定理 1-1-2】圓外切六邊形之廣義 Brianchon Point

設 ABCDEF 為圓 O 的外切六邊形，且 G、H、I、J、K、L 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{FA}$ 上的切點，則($\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{JL}$)三線共點，同理，($\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{IK}$)，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$)，($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{JH}$、$\overleftrightarrow{GI}$)，($\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{HL}$)，($\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{LH}$、$\overleftrightarrow{GK}$)亦分別三線共點。

【證明】



1° 作 $\overleftrightarrow{GL}$、$\overleftrightarrow{JK}$ 交於 M，由<極線性質 2-2>可知 $\overleftrightarrow{AE}$ 為 M 關於圓 O 的極線。

2° 根據<極線性質 2-3>可知 $\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GK}$ 的交點在 M 關於圓 O 的極線上，即 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{JL}$ 三線共點。

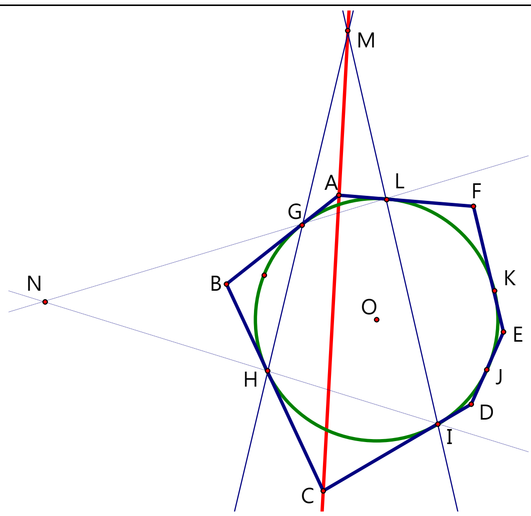
【定理 1-1-3】圓外切六邊形之廣義 Brianchon Point

設 ABCDEF 為圓 O 的外切六邊形，且 G、H、I、J、K、L 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{FA}$ 上的切點，則($\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{LI}$)三線共點，同理，($\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{HK}$、$\overleftrightarrow{GL}$)，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$)，($\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{LK}$)，($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{GJ}$)，($\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{KJ}$、$\overleftrightarrow{IL}$)亦分別三線共點。

【證明】

1° 作 $\overleftrightarrow{GL}$、$\overleftrightarrow{HI}$ 交於 N，由＜極線性質 2-2＞可知 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 N 關於圓 O 的極線。

2° 由＜極線性質 2-3＞可知 $\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{IL}$ 的交點在 N 關於圓 O 的極線上，即 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{LI}$ 三線共點。



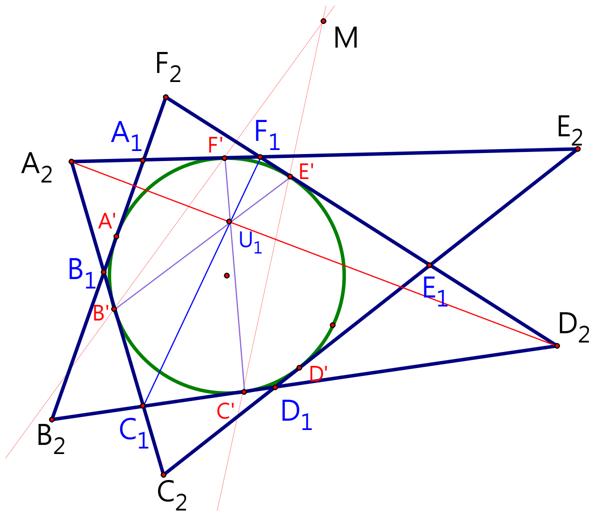
(二) 圓外切六邊形外延圖形的共點共線情形

【定理 1-2-1】圓外切六邊形外延圖形的廣義 Brianchon Point

> 圓外切六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各邊與圓分別切於 A'、B'、C'、D'、E'、F'，且各邊延長相交交點依序為 A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2，如下圖，則有下列共點情形：
>
> (1) ($\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 、$\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$)，($\overleftrightarrow{A_1D_1}$ 、$\overleftrightarrow{A'D'}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 、$\overleftrightarrow{B_2E_2}$)，($\overleftrightarrow{B_1E_1}$ 、$\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{A'D'}$ 、$\overleftrightarrow{C_2F_2}$) 分別四線共點。
>
> (2) ($\overleftrightarrow{A_1D_1}$ 、$\overleftrightarrow{C_2F_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$)，($\overleftrightarrow{B_1E_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 、$\overleftrightarrow{B_2E_2}$)，($\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 、$\overleftrightarrow{B_2E_2}$ 、$\overleftrightarrow{C_2F_2}$)三線共點。

【證明】

(1) 四線共點



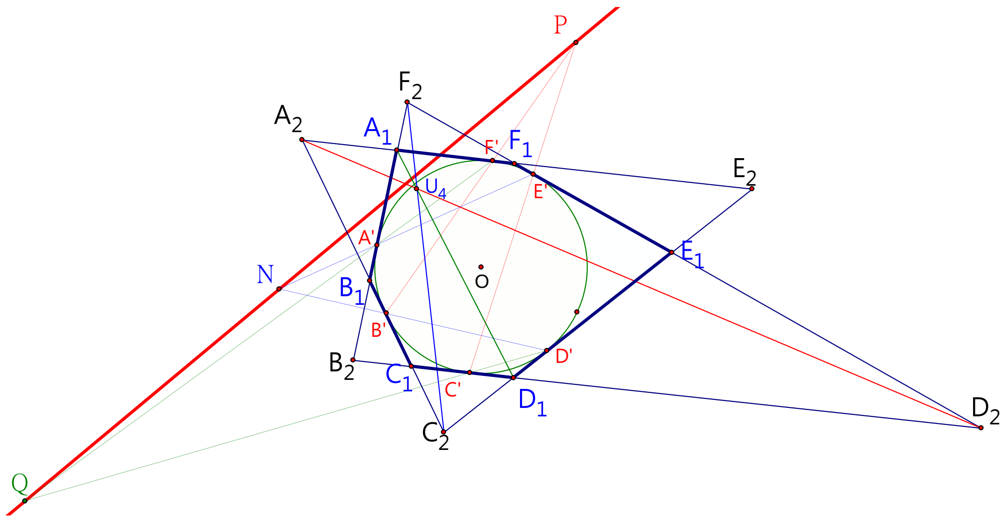
1° 作 $\overleftrightarrow{B'F'}$ 、$\overleftrightarrow{C'E'}$ 交於 M。由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 為 M 關於圓 O 的極線。

2° 由＜極線性質 2-3＞得 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 的交點在 M 關於圓 O 的極線，即 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 三線共點。

3° 又根據＜引理 3-2＞得 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 、$\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 三線共點。

由上述可知 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 、$\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 四線共點。

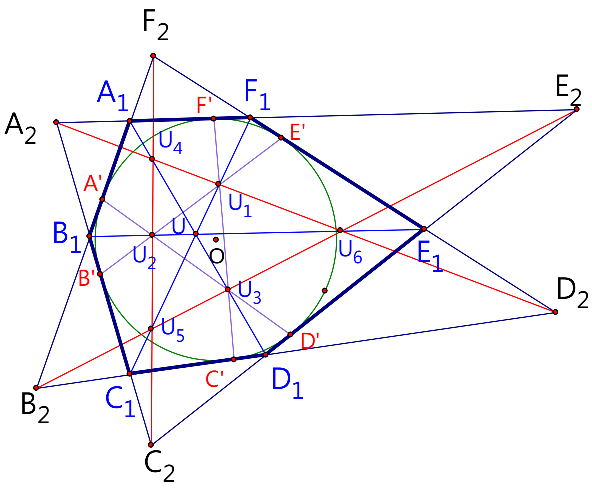
(2) 三線共點



1° 作 $\overleftrightarrow{A'F'}$、$\overleftrightarrow{C'D'}$ 交於 Q，$\overleftrightarrow{A'E'}$、$\overleftrightarrow{B'D'}$ 交於 N，$\overleftrightarrow{C'E'}$、$\overleftrightarrow{B'F'}$ 交於 P，考慮圓內接六邊形 A'B'C'D'E'F'，由 Pascal 定理得 N、P、Q 三點共線。

2° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{C_2F_2}$ 為 N 關於圓 O 的極線，同理 $\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 為 P 關於圓 O 的極線，$\overleftrightarrow{A_1D_1}$ 為 Q 關於圓 O 的極線。再由＜引理 5-1＞知 $\overleftrightarrow{C_2F_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_1D_1}$ 三線共點。

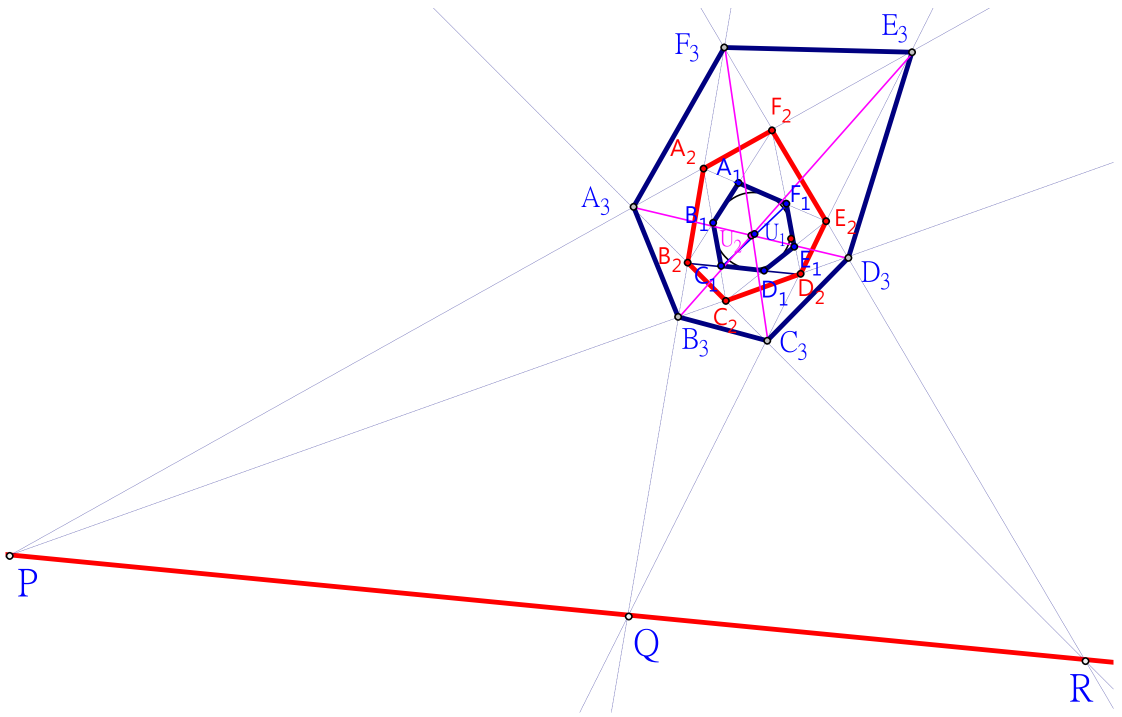
由上述結果同理可證，其相對位置的共點情形，如下圖所示：第一種四線共點情形如 U_1 、U_2 、U_3 ，第二種三線共點情形如 U_4 、U_5 、U_6 。



【圓外切六邊形的遞延圖形】

接下來的部分，為方便敘述，我們稱任意圓外切六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為第一層六邊形；各邊延長線交點 A_2 、B_2 、C_2 、D_2 、E_2 、F_2 可得第二層六邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ，再延伸各邊取交點形成第三層六邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ ，以此類推，第 n 層六邊形為 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 。又根據 Brianchon 定理及 Pascal 定理之逆定理與在圓錐曲線上的推廣，我們得到以下的發現：

1. 當 n 為奇數時，第 n 層六邊形均有一個 Brianchon Point(不一定同一點)；依據逆定理，其必有一個內切圓錐曲線。
2. 當 n 為偶數時，第 n 層六邊形均有一條 Pascal Line(不一定同一線)；依據逆定理，其必有一個內接圓錐曲線。



(三) 圓外切五邊形、四邊形、三角形的共點情形

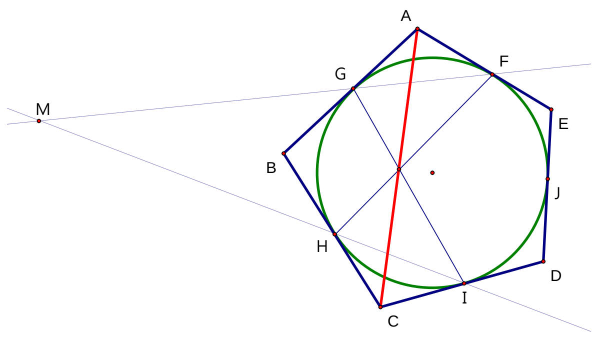
【定理 1-3-1】圓外切五邊形的廣義 Brianchon Point

若 ABCDE 是圓外切五邊形，F、G、H、I、J 分別是內切圓在邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DE}$ 、$\overline{EA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{GI}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 三線共點，同理，($\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{HJ}$ 、$\overleftrightarrow{GI}$)，($\overleftrightarrow{CE}$ 、$\overleftrightarrow{IF}$ 、$\overleftrightarrow{HJ}$)，($\overleftrightarrow{DA}$ 、$\overleftrightarrow{JG}$ 、$\overleftrightarrow{IF}$)，($\overleftrightarrow{BE}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 、$\overleftrightarrow{JG}$)亦分別三線共點。

【證明】

1° 作 $\overleftrightarrow{FG}$ 、$\overleftrightarrow{HI}$ 交於 M，由<極線性質 2-2>可知 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 M 關於圓 O 的極線。

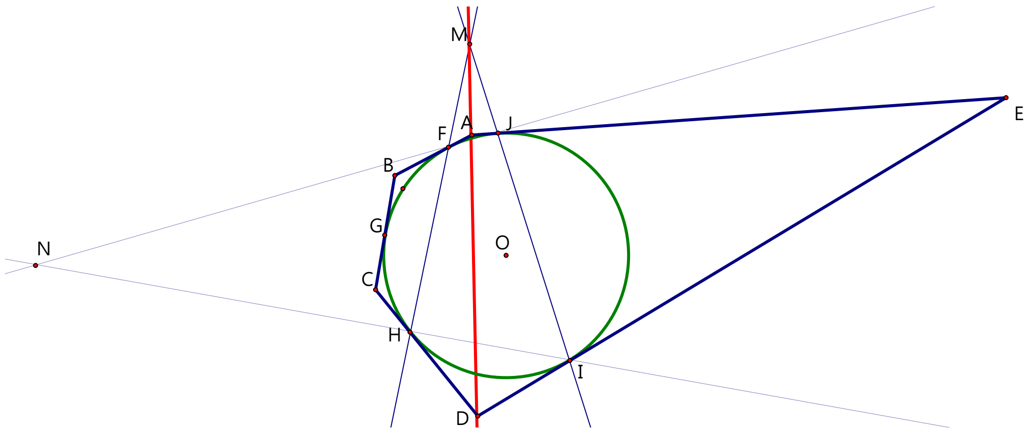
2° 由<極線性質 2-3>可知 $\overleftrightarrow{GI}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 的交點在 M 關於圓 O 的極線上，即 $\overleftrightarrow{GI}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$ 三線共點。



【定理 1-3-2】圓外切五邊形之廣義 Brianchon Point

設 ABCDE 為圓 O 的外切五邊形，且 F、G、H、I、J 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overleftrightarrow{DE}$ 、 $\overleftrightarrow{EA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{HF}$ 、 $\overleftrightarrow{IJ}$ 三線共點，同理，($\overleftrightarrow{AC}$ 、 $\overleftrightarrow{FG}$ 、 $\overleftrightarrow{HJ}$)，($\overleftrightarrow{CE}$ 、 $\overleftrightarrow{GJ}$ 、 $\overleftrightarrow{HI}$)，($\overleftrightarrow{BE}$ 、 $\overleftrightarrow{GI}$ 、 $\overleftrightarrow{EF}$)，($\overleftrightarrow{CE}$ 、 $\overleftrightarrow{HI}$ 、 $\overleftrightarrow{GJ}$)亦分別三線共點。

【證明】



1° 作 $\overleftrightarrow{FJ}$ 、 $\overleftrightarrow{HI}$ 交於 N，由<極線性質 2-2>可知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 N 關於圓 O 的極線。

2° 由<極線性質 2-3>可知 $\overleftrightarrow{FH}$ 、 $\overleftrightarrow{IJ}$ 的交點在 N 關於圓 O 的極線上，即 $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{HF}$ 、 $\overleftrightarrow{IJ}$ 三線共點。

【定理 1-3-3】圓外切四邊形的 Brianchon Point

若 ABCD 是圓外切四邊形，E、F、G、H 分別為在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上的切點，則對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ ，以及對邊切點連線 $\overline{EG}$ 、 $\overline{FH}$ ，這四條線會共點。

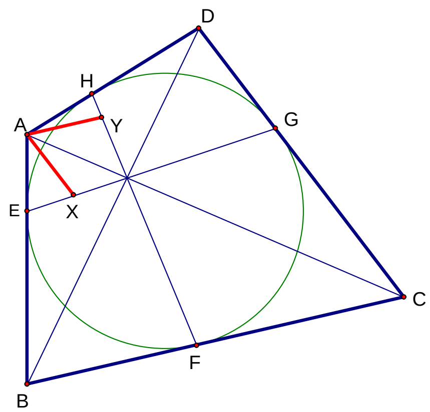
【證法一】

1° 過 A 作 $\overline{AX}$ // $\overline{CG}$ 交 $\overline{EG}$ 於 X， $\overline{AY}$ // $\overline{CF}$ 交 $\overline{HF}$ 於 Y

$\angle AXE = \angle EGD$ (同位角)　　$\angle EGD = \angle AEG$ (切線角)

$\therefore \angle AXE = \angle EGD = \angle AEG \Rightarrow \overline{AX} = \overline{AE}$

同理， $\overline{AY} = \overline{AH}$ ；又因 $\overline{AE} = \overline{AH}$ (切線長性質)



$\therefore \overline{AX}=\overline{AY}$。

2° 設 $\overline{AC}$、$\overline{EG}$ 交於 M，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 M'

$\dfrac{\overline{AX}}{\overline{CG}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$ ($\because \Delta AXM \sim \Delta CGM$)　　$\dfrac{\overline{AY}}{\overline{CF}}=\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{CM'}}$ ($\because \Delta AYM' \sim \Delta CFM'$)

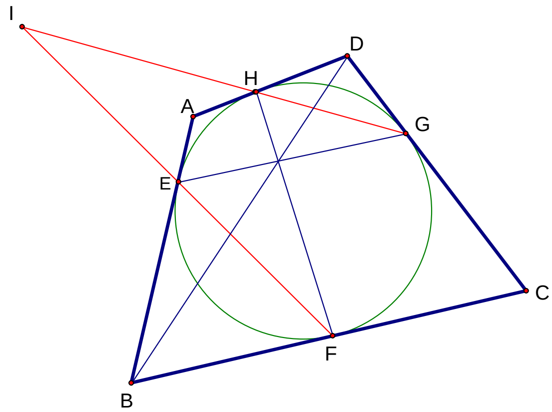
又因 $\overline{CG}=\overline{CF}$ (切線長性質)，$\overline{AX}=\overline{AY}$ (由 1° 可知)

$\therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}}=\dfrac{\overline{AM'}}{\overline{CM'}}$，即 M、M' 重合。$\Rightarrow$ $\overline{AC}$、$\overline{FH}$、$\overline{EG}$ 三線共點，

同理 $\overline{BD}$、$\overline{FH}$、$\overline{EG}$ 三線共點，$\therefore$ $\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 四線共點

【證法二】

1° $\overleftrightarrow{EF}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 交於 I，由<極線性質 2-2>得知 $\overleftrightarrow{BD}$ 為 I 關於圓的極線。



2° 由<極線性質 2-3>得知 $\overleftrightarrow{EG}$ 和 $\overleftrightarrow{FH}$ 的交點在 $\overleftrightarrow{BD}$ 上，

所以 $\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FH}$ 三線共點。

同理可知，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FH}$ 三線共點。

故 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FH}$ 四線共點。

【定理 1-3-4】圓外切四邊形的 Brianchon Point

> 若 ABCD 是圓外切四邊形，E、F、G、H 分別是內切圓在邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 上的切點，則 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 三線共點，以及 $\overleftrightarrow{DB}$、$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{FG}$ 三線共點。(若三線平行則表示交於無窮遠點。)

【證法一】

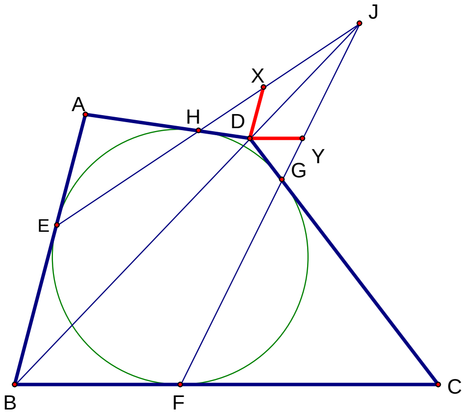
1° 另 $\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{BD}$ 交於 J，$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{GF}$ 交於 J'。

2° D 點分別作 $\overleftrightarrow{DX}$ // $\overleftrightarrow{BE}$，$\overleftrightarrow{DY}$ // $\overleftrightarrow{BF}$，並分別交 $\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{GF}$ 於 X、Y。

3° ∠JXD=∠HEB(同位角)，又∠HEB=∠EHD(夾同弧的弦切角)

可得$\angle JXD=\angle EHD$， $\therefore \angle DXH=\angle DHX$，同理，$\angle DYG=\angle DGY$，

又因$\overline{DH}=\overline{DG}$ (圓切線性質)，$\therefore \overline{DX}=\overline{DY}$ 。



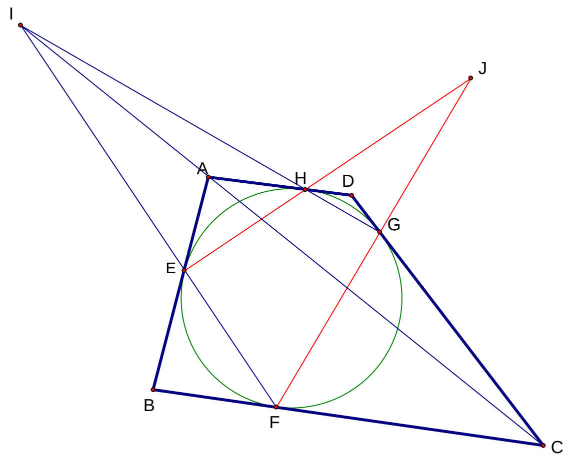
4° $\triangle JXD \sim \triangle JEB$，同理$\triangle JYD \sim \triangle JFB$，

$\Rightarrow \dfrac{\overline{DX}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{JD}}{\overline{JB}}$ ，同理，$\dfrac{\overline{DY}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{J'D}}{\overline{J'B}}$

又因$\overline{DX}=\overline{DY}$ ，$\overline{BE}=\overline{BF}$ ，故$\dfrac{\overline{JX}}{\overline{JE}}=\dfrac{\overline{J'Y}}{\overline{J'E}}$ 。

$\therefore \overleftrightarrow{FJ}$ 、$\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{HJ}$三線共點。

【證法二】



1° $\overleftrightarrow{EF}$和$\overleftrightarrow{GH}$交於 I，$\overleftrightarrow{EH}$和$\overleftrightarrow{FG}$交於 J，由<極線性質 2-2>得知$\overleftrightarrow{BD}$為 I 關於圓的極線。

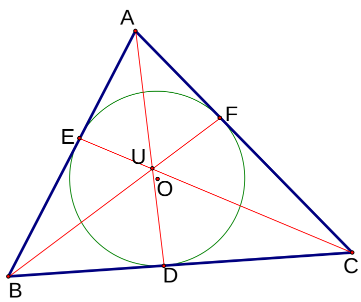
2° 由<極線性質 2-3>得知 J 在$\overleftrightarrow{BD}$上，故$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{FG}$三線共點。

同理，$\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{EF}$ 、$\overleftrightarrow{GH}$三線共點。

【定理 1-3-4】圓外切三角形的 Brianchon Point

若 ABC 是圓外切三角形，D、E、F 分別為在$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 上的切點，則頂點與對邊切點連線$\overline{AD}$ 、$\overline{BF}$ 、$\overline{CD}$三條線共點。

【證明】



已知圓 O 為$\triangle ABC$的內接圓，$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別與圓 O 交於 D 、E 、F 三點，且$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$（因為圓外一點到切點兩切線段等長)，故由西瓦逆定理可知，$\overline{AD}$ 、$\overline{BF}$ 、$\overline{EC}$三線共點。

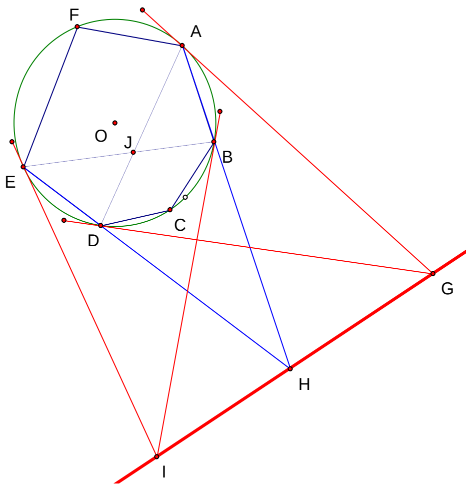
二、圓內接六邊形的共線情形

(一) 圓內接六邊形可能的共線情形

【定理 2-1-1】圓內接六邊形的廣義 Pascal Line

圓內接六邊形 ABCDEF，分別過 A、D 作切線交於 G，過 B、E 作切線交於 I，，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組亦會形成 Pascal Line

【證明】



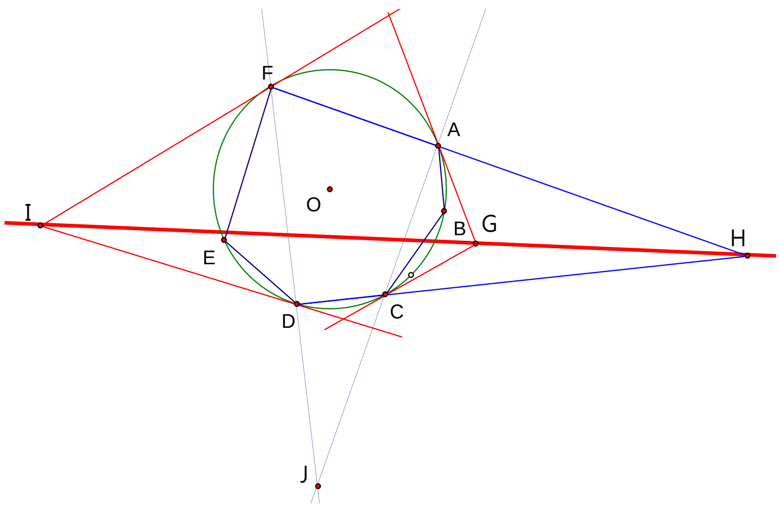
1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BE}$ 為 I 關於圓 O 的極線。

2° 令 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 J，由<極線性質 2-3>知 J 亦在 H 關於圓 O 的極線上，故 G、H、I 各自關於圓 O 的極線共點。由＜引理 5-2＞知，G、H、I 三點共線，且此線為 J 關於圓 O 的極線。

【定理 2-1-2】圓內接六邊形的廣義 Pascal Line

圓內接六邊形 ABCDEF，分別過 A、C 作切線交於 G，過 F、D 作切線交於 I，，$\overleftrightarrow{AF}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組共線情形。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{DF}$ 為 I 關於圓 O 的極線。

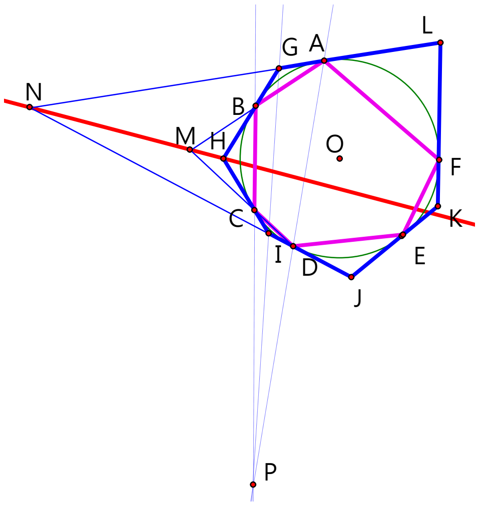
2° 令 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$ 交於 J，由<極線性質 2-3>知 J 亦在 H 關於圓 O 的極線上，故 G、H、I 各自關於圓 O 的極線共點。

3° 由＜引理 5-2＞知，G、H、I 三點共線，且此線為 J 關於圓 O 的極線。

【定理 2-1-3】圓內接六邊形的廣義 Pascal Line

設 ABCDEF 為圓 O 的內接六邊形，分別過 A、B、C、D、E、F 作圓 O 切線，兩兩切線分別交於 G、H、I、J、K、L，則過 B 與過 C 的切線交於 H，過 A 與過 D 的切線交於 N，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於 M，則 H、M、N 三點共線，同理，另有五組共線情形。

【證明】

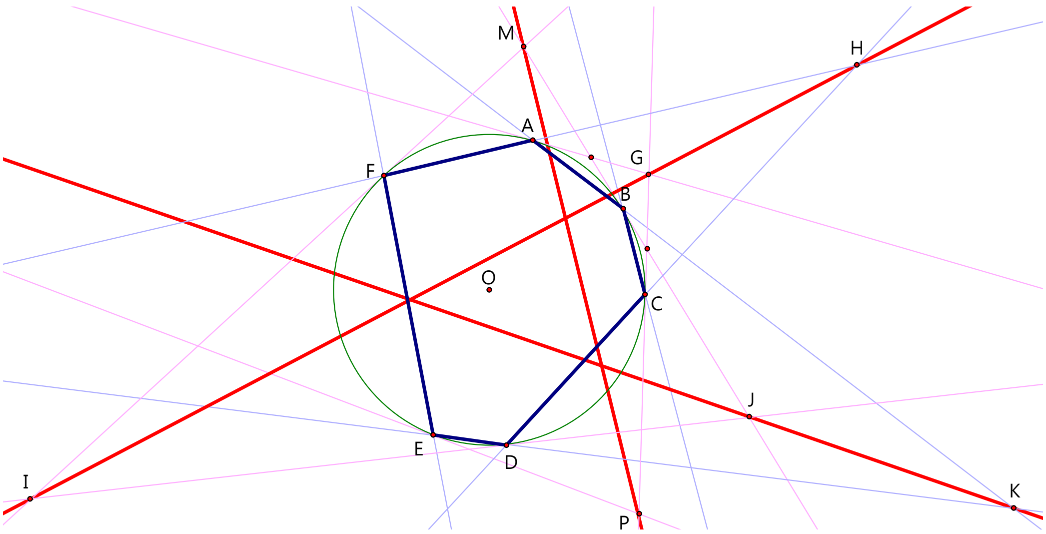


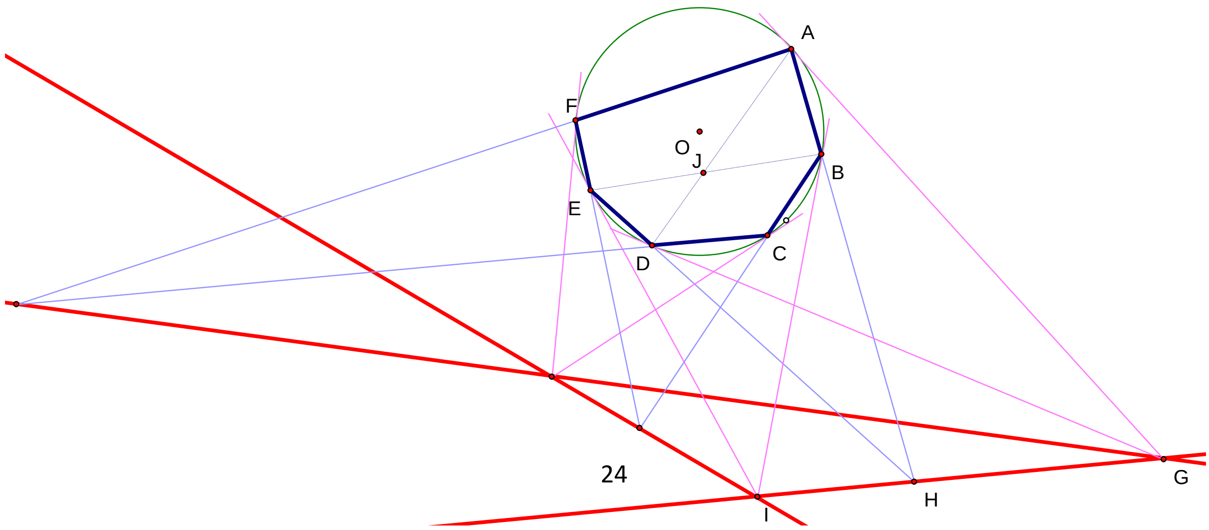
1° 由＜極線性質 2-2＞知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 N 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{GI}$ 分別為 M、H 關於圓 O 的極線。

2° 由＜定理 1-1-3＞可知 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{GI}$ 三線共點。

3° 由＜引理 5-2＞可知 H、M、N 三點共線。

根據 Pascal 定理與上述結果，可發現這類型組合圓內接六邊形所有可能的廣義 Pascal Line，如下圖：



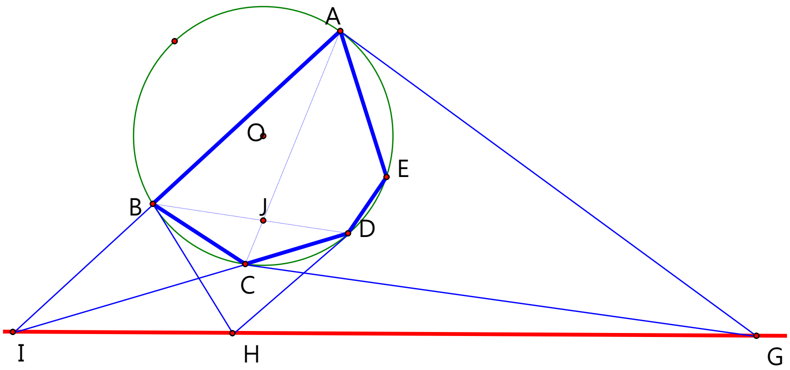


(二) 圓內接五邊形、四邊形、三角形的共線情形

【定理 2-2-1】圓內接五邊形的共線情形

設 ABCDE 為圓 O 的內接五邊形，分別過 A 與 C 作切線交於 G，過 B 與 D 作切線交於 H，$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於 I，則 G、H、I 三點共線，同理，另有四組共線情形。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BD}$ 為 H 關於圓 O 的極線。

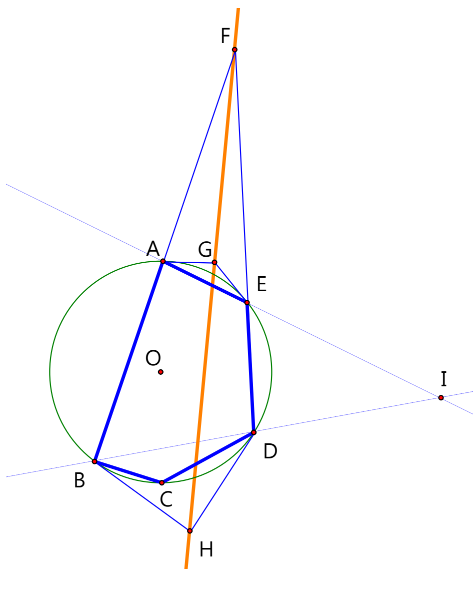
2° 令 $\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{BD}$ 交於 J，由<極線性質 2-3>可知 J 亦在 I 關於圓 O 的極線上，故 G、H、I 各自關於圓 O 的極線共點。

3° 由＜引理 5-2＞可知 G、H、I 三點共線，且此線為 J 關於圓 O 的極線。

【定理 2-2-2】圓內接五邊形的共線情形

設 ABCDE 為圓 O 的內接五邊形，分別過 A 與 E 作切線交於 G，過 B 與 D 作切線交於 H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 交於 F，則 F、G、H 三點共線，同理，另有四組共線情形。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AE}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BD}$ 為 H 關於圓 O 的極線。

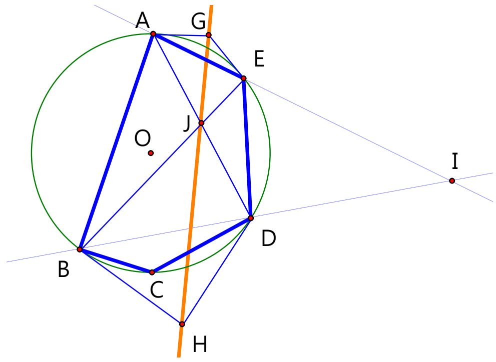
2° 令 $\overleftrightarrow{AE}$ 、$\overleftrightarrow{BD}$ 交於 I，由<極線性質 2-3>可知 I 亦在 F 關於圓 O 的極線上，故 F、G、H 各自關於圓 O 的極線共點。

3° 由＜引理 5-2＞可知 F、G、H 三點共線，且此線為 I 關於圓 O 的極線。

【定理 2-2-3】圓內接五邊形的共線情形

設 ABCDE 為圓 O 的內接五邊形，分別過 A 與 E 作切線交於 G，過 B 與 D 作切線交於 H，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 J，則 G、H、J 三點共線，同理，另有四組共線情形。

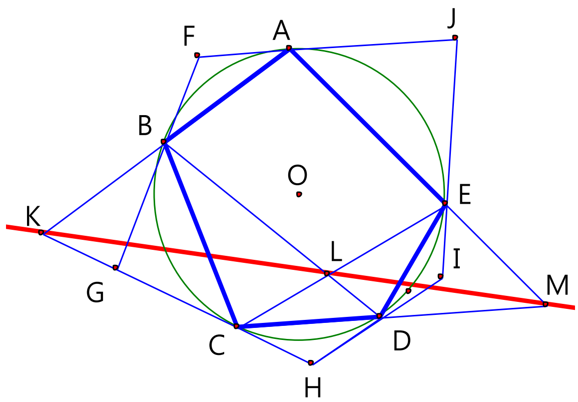
【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AE}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BD}$ 為 H 關於圓 O 的極線。

2° 令 $\overleftrightarrow{AE}$ 、$\overleftrightarrow{BD}$ 交於 I，由<極線性質 2-3>可知 G、H、J 的極線必在 I 上，故 G、H、J 三點共線。

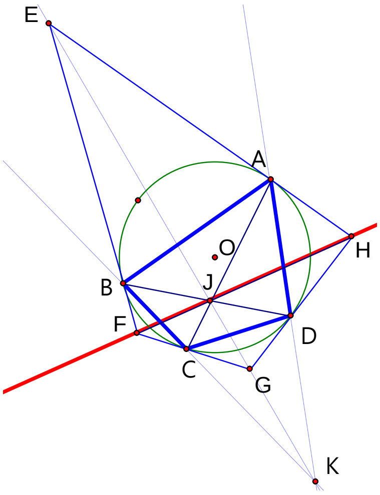
上述，若圓內接五邊形 ABCDE 分別過頂點作切線兩兩分別交於 F、G、H、I、J，則過 C 的切線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 相交於 K，$\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{CE}$ 相交於 L，$\overleftrightarrow{AE}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 相交於 M，則 K、L、M 三點共線。此類型的共線情形共有 10 組。



【定理 2-2-4】圓內接四邊形的共線情形

設 ABCD 為圓 O 的內接四邊形，分別過 A、B、C、D 作圓 O 切線，兩兩切線分別交於 E、F、G、H，$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於 I 點，則 F、H、I 三點共線，同理，另有三組共線情形。

【證明】



1° 由＜極線性質 2-2＞可知，$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{EG}$ 分別為 F、H、I 關於圓 O 的極線。

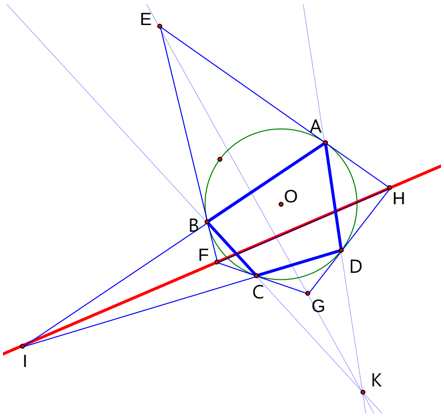
2° 由＜定理 1-3-3＞可知 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{EG}$ 三線共點 K。

3° 有＜引理 5-2＞可知 F﹑H﹑I 三點共線。

【定理 2-2-5】圓內接四邊形的共線情形

設 ABCD 為圓 O 的內接四邊形，分別過 A、B、C、D 作圓 O 切線，兩兩切線分別交於 E、F、G、H，$\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{BD}$ 交於 J 點，則 F、H、J 三點共線，同理，另有三組共線情形。

【證明】



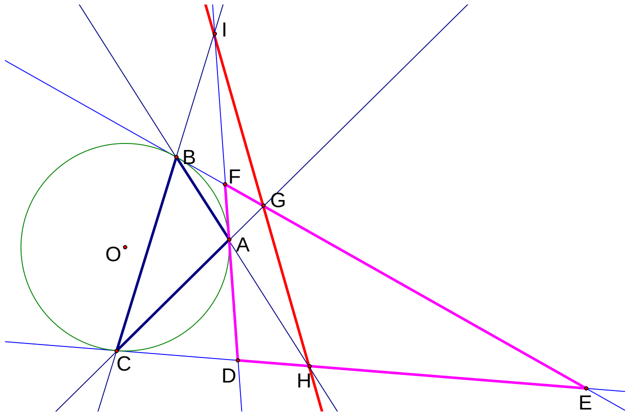
1° 由＜極線性質 2-2＞可知 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 分別為 F、H 關於圓 O 的極線。

2° 令 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AD}$ 交於 K，根據＜極線性質 2-3＞可知，F﹑H﹑J 必在 K 關於圓 O 的極線上，故 F﹑H﹑J 三點共線。

【定理 2-2-6】圓內接三角形的共線情形

設 ABC 為圓 O 的內接三角形，分別過 A、B、C 作切線 L、M、N，若 $\overleftrightarrow{AB}$ 和直線 N 交於 H、$\overleftrightarrow{BC}$ 和直線 L 交於 I、$\overleftrightarrow{CA}$ 和直線 M 交於 G，則 H、I、G 三點共線。

【證明】



1° 已知圓O_1為$\triangle ABC$的外接圓，延長$\triangle ABC$三邊長並畫出三頂點與圓切線，以兩兩切線交點構出$\triangle DEF$。

2° 以$\overleftrightarrow{CG}$為截線對$\triangle DEF$做孟氏定理，則可得：$\frac{\overline{EG}}{\overline{GF}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=1\cdots$①

同理，以$\overleftrightarrow{BH}$為截線對$\triangle DEF$做孟氏定理，得$\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HE}}=1\cdots$②

以$\overleftrightarrow{CI}$為截線對$\triangle DEF$做孟氏定理，得$\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{FI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=1\cdots$③

由①×②×③得到$\frac{\overline{EG}}{\overline{GF}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}\times\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HE}}\times\frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{FI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=1$，

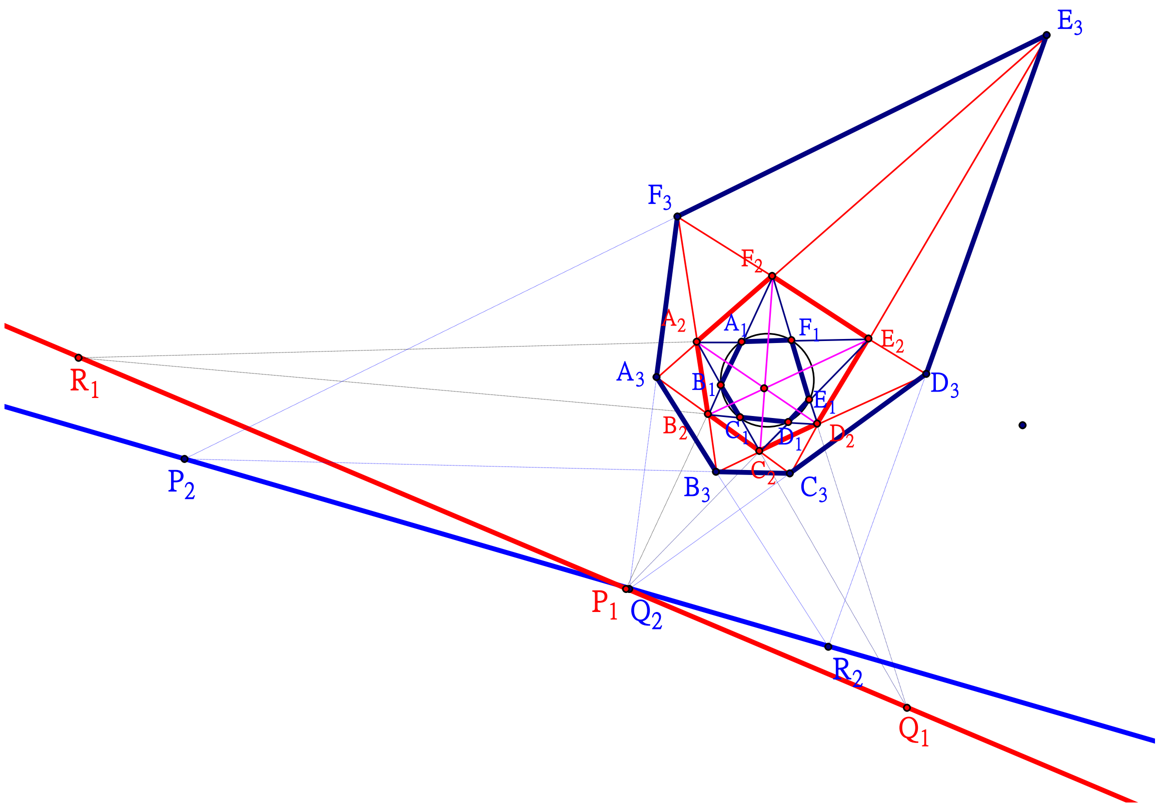
又因為圓外一點到兩切點距離相等，得出$\frac{\overline{EG}}{\overline{GF}}\times\frac{\overline{FI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HE}}=1$。

故 I、G、H 三點共線。

【圓內接六邊形的遞延圖形】

接下來的部分，為方便敘述，我們稱任意圓內接六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為第一層六邊形；各邊延長線交點 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 、 E_2 、 F_2 可得第二層六邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ，再延伸各邊取交點形成第三層六邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ ，以此類推，第 n 層六邊形為 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 。又根據 Brianchon 定理及 Pascal 定理之逆定理與在圓錐曲線上的推廣，我們得到以下的發現：

1. 當 n 為奇數時，第 n 層六邊形均有一條 Pascal Line，依據逆定理，其必有一個內接圓錐曲線。
2. 當 n 為偶數時，第 n 層六邊形均有一個 Brianchon Point，依據逆定理，其必有一個內切圓錐曲線。



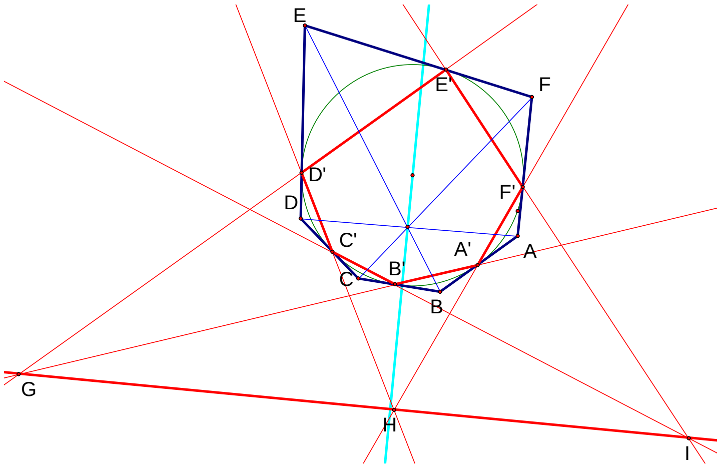
三、圓外切內接六邊形的共點共線關係

圓外切六邊形的 BrianchonPoint 與其內切圓圓心的連線，我們稱之為**布里昂雄連心線**。

【定理 3-1】圓外切內接六邊形的共點共線關係

以圓外切六邊形 ABCDEF 的六個切點作出圓內接六邊形 A'B'C'D'E'F'，則圓外切六邊形 ABCDEF 的布里昂雄連心線與圓內接六邊形 A'B'C'D'E'F' 的 Pascal Line 互相垂直。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{BE}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 分別為 H、I 關於圓 O 的極線。

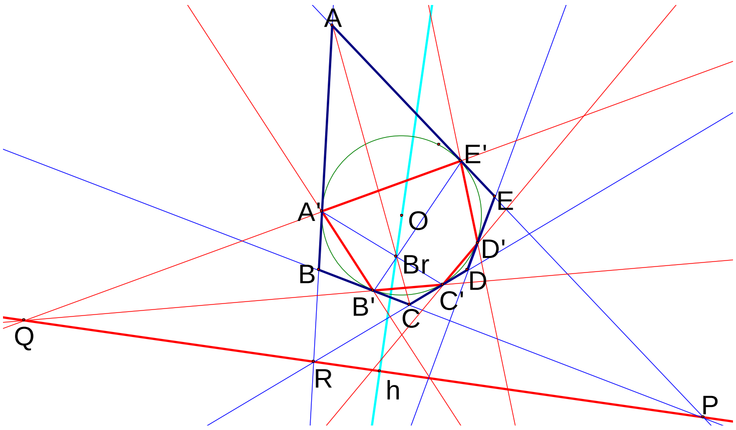
2° 由 Brianchon 定理以及 Pascal 定理知道，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 會共點，G、H、I 會共線。

3° 由＜引理 5-2＞知，這裡的與 Brianchon Point 與 Pascal Line 互為極點與極線的關係，故 Brianchon Point 與圓心的連線會垂直於 Pascal Line。

【定理 3-2】圓外切內接五邊形的共點共線關係

以圓外切五邊形 ABCDE 的五個切點作出圓內接五邊形 A'B'C'D'E'，則圓外切五邊形 ABCDE 的布里昂雄連心線與圓內接五邊形 A'B'C'D'E' 的 Pascal Line 互相垂直。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{B'E'}$ 為 P 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$ 分別為 Q、R 關於圓 O 的極線。

2° 由 Brianchon 定理以及 Pascal 定理知道，$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$ 會共點，P、Q、R

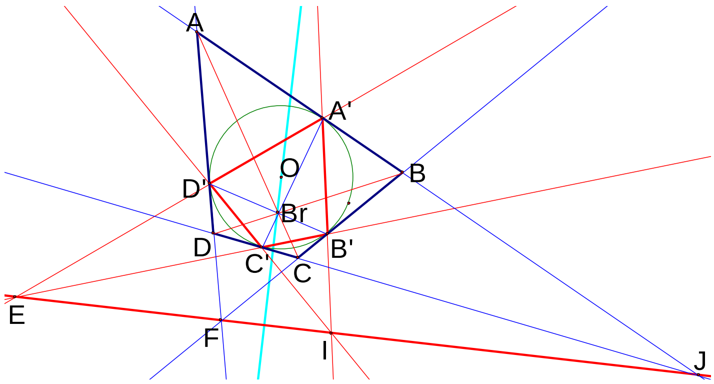
會共線。

3° 由＜引理 5-2＞知，這裡的與 Brianchon Point 與 Pascal Line 互為極點與極線的關係，故 Brianchon Point 與圓心的連線會垂直於 Pascal Line。

【定理 3-3】圓外切內接四邊形的共點共線關係

以圓外切四邊形 ABCD 的四個切點作出圓內接四邊形 A'B'C'D'，則圓外切四邊形 ABCD 的布里昂雄連心線與圓內接四邊形 A'B'C'D' 的 Pascal Line 互相垂直。

【證明】



1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 E 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{B'D'}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$ 分別為 F、I、J 關於圓 O 的極線。

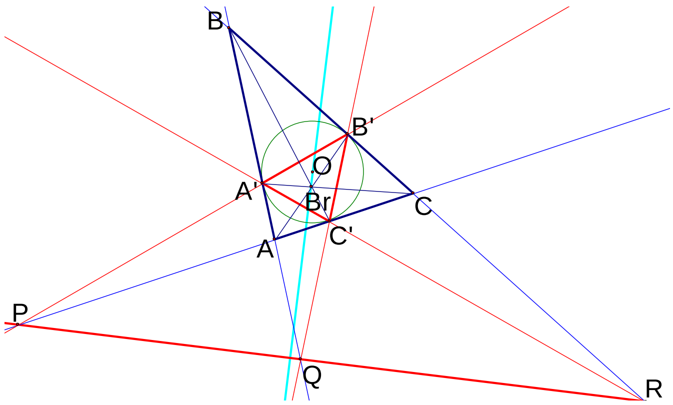
2° 由 Brianchon 定理以及 Pascal 定理知道，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{B'D'}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$ 會共點，E、F、I、J 會共線。

3° 由＜引理 5-2＞知，這裡的與 Brianchon Point 與 Pascal Line 互為極點與極線的關係，故 Brianchon Point 與圓心的連線會垂直於 Pascal Line。

【定理 3-4】圓外切內接三角形的共點共線關係

以圓外切三角形 ABC 的三個切點作出圓內接三角形 A'B'C'，則圓外切三角形 ABC 的布里昂雄連心線與圓內接三角形的 Pascal Line 互相垂直。

【證明】

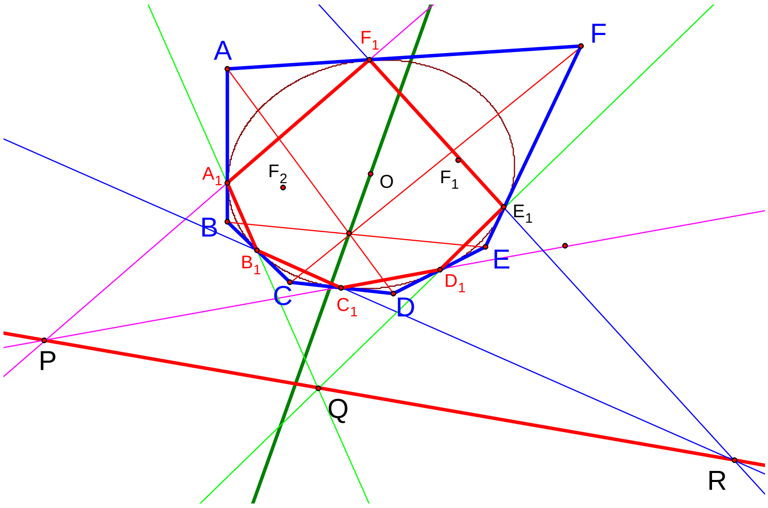


1° 由<極線性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{BC'}$ 為 P 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{A'C}$、$\overleftrightarrow{AB'}$ 分別為 Q、R 關於圓 O 的極線。

2° 由 Brianchon 定理以及 Pascal 定理知道，$\overleftrightarrow{BC'}$、$\overleftrightarrow{A'C}$、$\overleftrightarrow{AB'}$ 會共點，P、Q、R 會共線。

3° 由<引理 5-2>知，這裡的與 Brianchon Point 與 Pascal Line 互為極點與極線的關係，故 Brianchon Point 與圓心的連線會垂直於 Pascal Line。

透過投影性質，我們嘗試將圓外切內接六邊形推廣到圓錐曲線外切內接六邊形，例如橢圓外切內接六邊形，則我們可發現橢圓外切六邊形仍具有 Brianchon Point、橢圓內接六邊形仍有 Pascal Line，但橢圓外切內接六邊形的布里昂雄連心線與 Pascal Line 不一定互相垂直。



四、雙心六邊形的共點共線關係

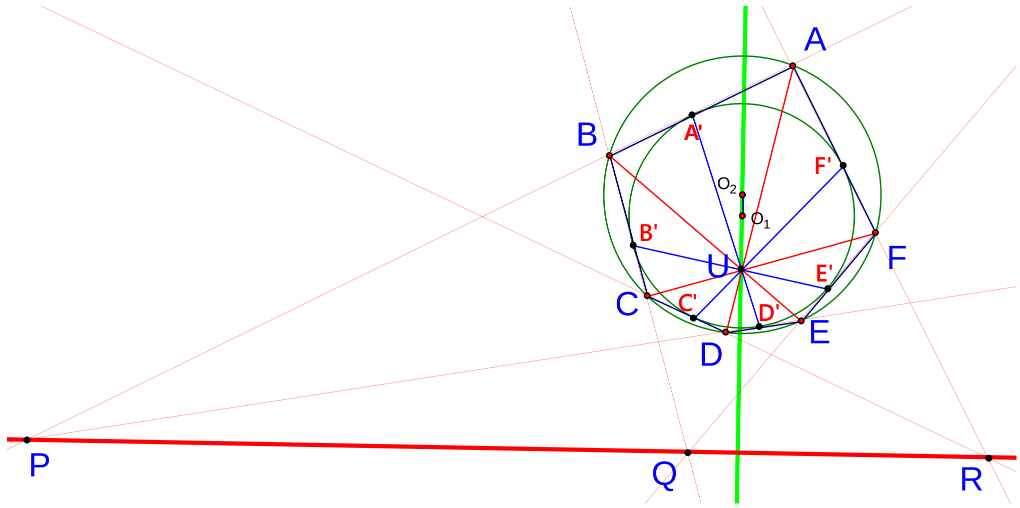
【定理 4-1】雙心六邊形 Brianchon Point & Pascal Line 的關係

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓 O_1、內接圓 O_2，切點分別為**A′、B′、C′、D′、E′、F′**，如圖，則

(1) $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 三線共交於 Brianchon Point，且為定點。

(2) 布里昂雄連心線通過外接圓圓心 O_2 (也就是 U 和 O_1、O_2 三點共線)，並與 Pascal Line 互相垂直。

【證明】



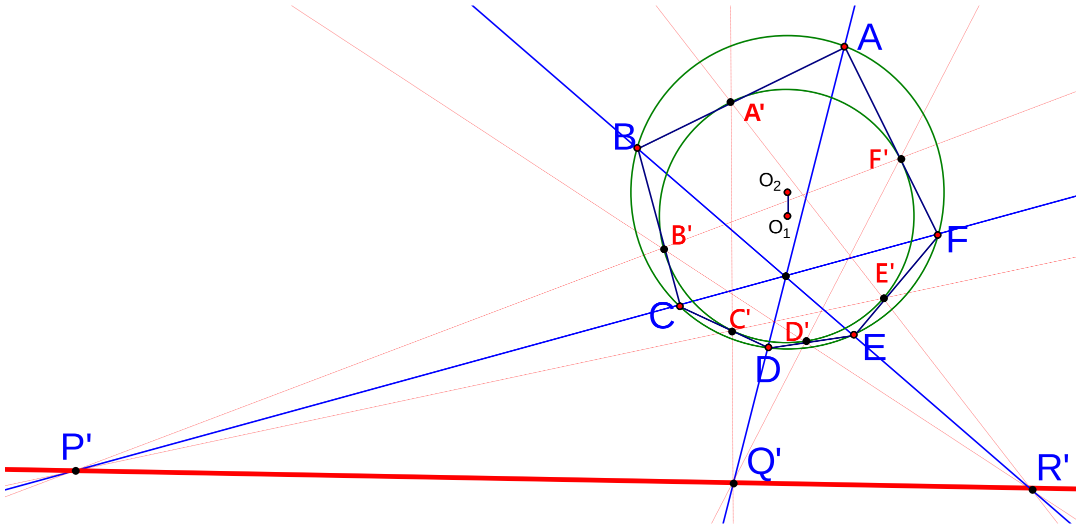
1° 依據<極線性質 2-2>，可知 $\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 分別為 P、Q、R 對於圓 O_1 的極線，由<引理 5-1>可知，$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 必共於交一點，且此點為 Pascal Line 對於圓 O_1 的極點。配合<引理 3-2>即可得 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$ 六線共點，即為 Brianchon Point。令其交點為 U，則可知 $\overline{O_1U}$ 必垂直於 Pascal Line。

2° 由上述及<極線性質 2-3>，可知 P、Q、R 對於圓 O_1 的極線同時通過 U 點。由<引理 5-1>可得 U 點為 Pascal Line 對於圓 O_1 的極點。可得 O_1、O_2、U 共線，且此線與 Pascal Line 垂直。

【定理 4-2】雙心六邊形的廣義 Pascal Line

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓 O_1、內接圓 O_2，切點分別為 **A'**、**B'**、**C'**、**D'**、**E'**、**F'**，如圖則 **(1)**($\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{F'B'}$、$\overleftrightarrow{E'C'}$)、($\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{A'C'}$、$\overleftrightarrow{F'D'}$)、($\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{B'D'}$、$\overleftrightarrow{A'E'}$)均分別共交於一點 **P'**、**Q'**、**R'**。 **(2)** **P'**、**Q'**、**R'** 三點共線，此線也是 Pascal Line。

【證明】



(1)　由＜定理 1-1-1＞可得證。

(2)

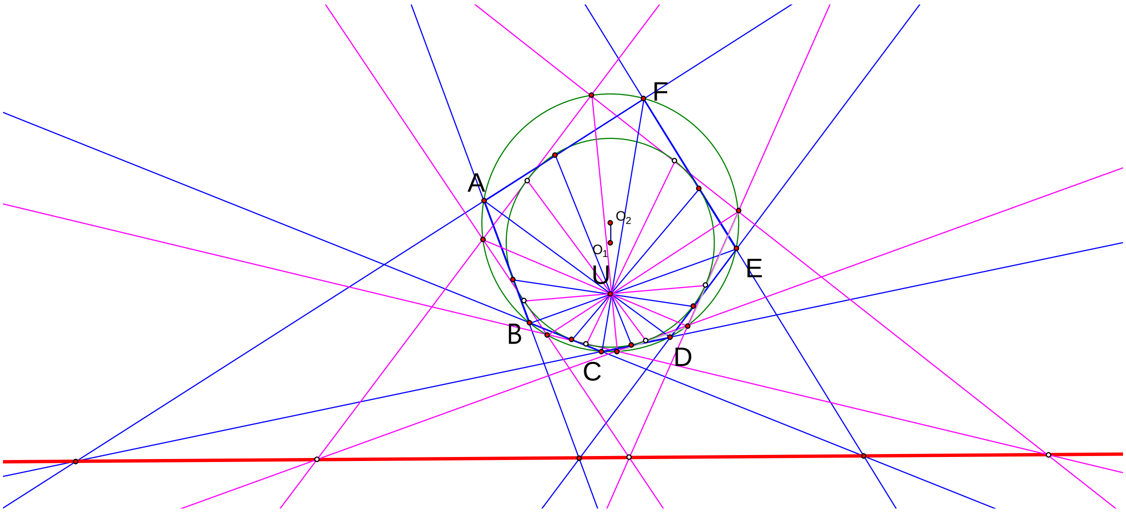
1°　由<極線性質 2-3>得到**P′**點關於圓O_1的極線必通過$\overleftrightarrow{F'B'}$、$\overleftrightarrow{E'C'}$的交點，同理，**Q′**關於圓$O_1$的極線必分別通過$\overleftrightarrow{A'C'}$、$\overleftrightarrow{F'D'}$之交點，**R′**關於圓$O_1$的極線必分別通過$\overleftrightarrow{B'D'}$、$\overleftrightarrow{A'E'}$之交點。

2°　由＜定理 4-1＞可知$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$六線共點於 U。由上述，可知**P′**、**Q′**、**R′**分別關於圓O_1的極線，皆交於一點 U。依據<引理 5-2>可得，**P′**、**Q′**、**R′**三點共線。

3°　作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{DE}$交於 P 點，作$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於 Q 點，根據＜定理 4-1＞可知$\overline{PQ}$即為 Pascal Line。且 Q 點關於圓O_1的極線為$\overleftrightarrow{B'E'}$、P 點關於圓$O_1$的極線為$\overleftrightarrow{A'D'}$。

4°　因為 U 為 Pascal Line 關於圓O_1的極點，又為$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$之交點，故得到 P、Q、**P′**、**Q′**、**R′**五點共線。又 P、Q 在 Pascal Line 上，所以 **P′**、**Q′**、**R′**皆在 Pascal Line 上。

當兩圓固定時，拉動六邊形，雙心六邊形 ABCDEF 是可變動，所以不是唯一的。但可發現所有雙心六邊形所產生的 Brianchon Point 均為同一點且為定點，及 Pascal Line 均為同一直線且為定線，如下圖。

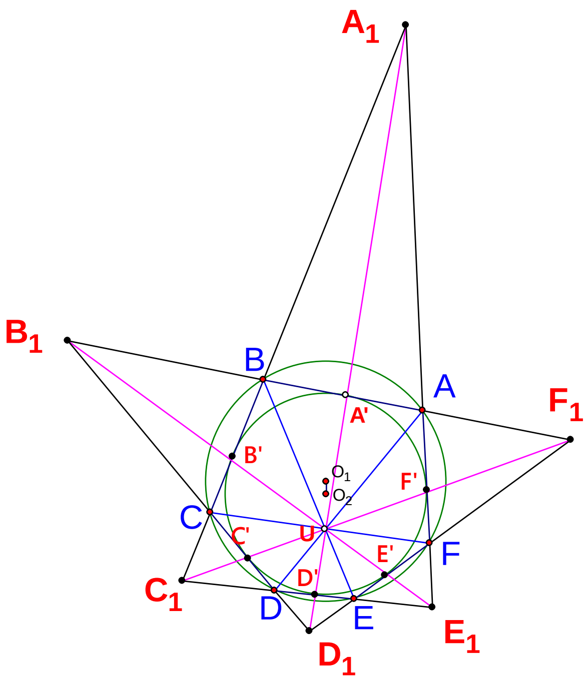


【定理 4-3】雙心六邊形外延圖形的 Brianchon Point & Pascal Line

任意雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓 O_1、內接圓 O_2，各邊延長依序分別交於 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1形成六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，則

(1) 六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$三組對角線 $\overleftrightarrow{A_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_1E_1}$、$\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 也會共交於 Brianchon Point。

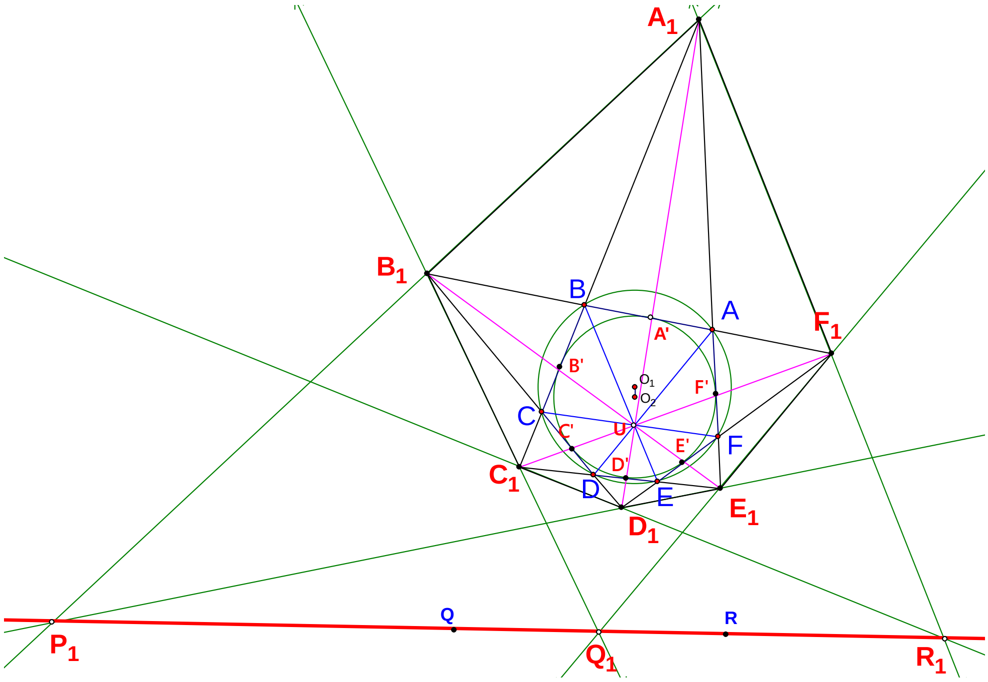
(2) 六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的三組對邊延長線交點 P_1、Q_1、R_1仍會在 Pascal Line 上。



【證明】

(1) 由＜定理 1-2-1＞及＜定理 4-1＞知，$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$、$\overleftrightarrow{IL}$ 九線共點。

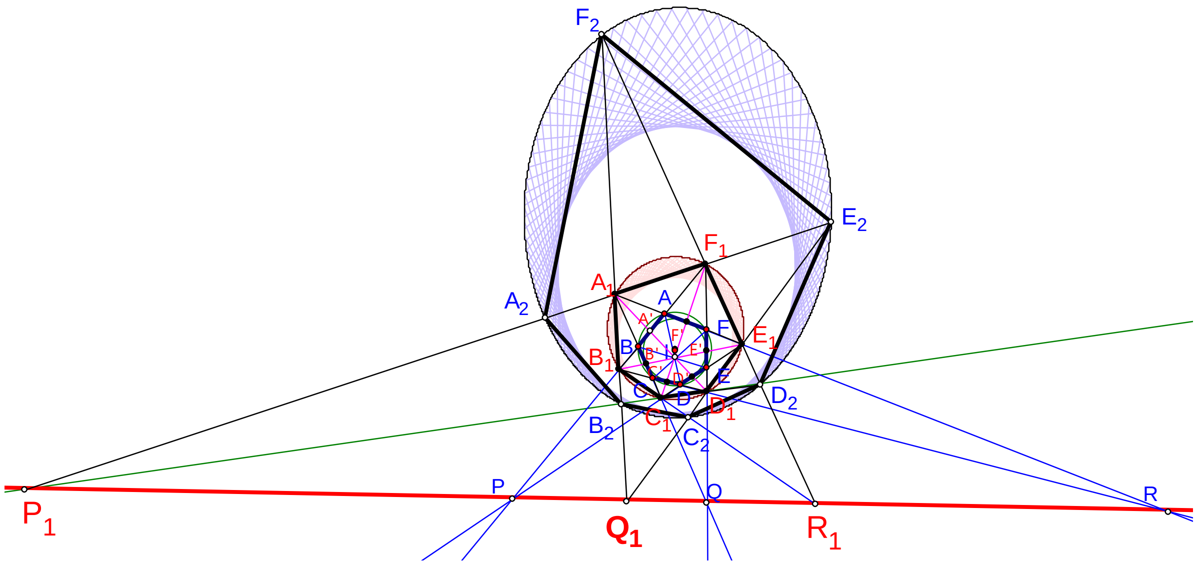
(2)



由＜圓外切六邊形的遞延圖形＞可知，對於任意圓外切六邊形的第二層遞延圖形必有 Pascal Line。

任意雙心六邊形 ABCDEF(第 0 層六邊形)外切於圓 O_1、內接圓 O_2，各邊延長依序分別交於 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1形成六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，稱為第 1 層六邊形；第 1 層六邊形各邊延長依序分別交於 A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2形成六邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，稱為第 2 層六邊形，以此類推，則**雙心六邊形的遞延圖形**第 n 層六邊形 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$具有下列性質：

1. 每一層六邊形都內接於一個固定的圓錐曲線，也都同時外切於另一個固定的圓錐曲線。
2. 每一層六邊形都具有 Brianchon Point，且所有的 Brianchon Point 都固定在同一定點。
3. 每一層六邊形都具有 Pascal Line，且所有的 Pascal Line 都固定在同一條定線。
4. 布里昂雄連心線通過外接圓錐曲線的中心，且與 Pascal Line 互相垂直。



上述當拉動六邊形旋轉時，則對所有六邊形 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$，與其**外接或**內切的圓錐曲線均為固定的圓錐曲線(包含了橢圓和雙曲線)。

五、雙心五邊形、四邊形、三角形的共點共線

【定理 5-1】雙心三角形的 Brainchon Point & Pascal Line 性質

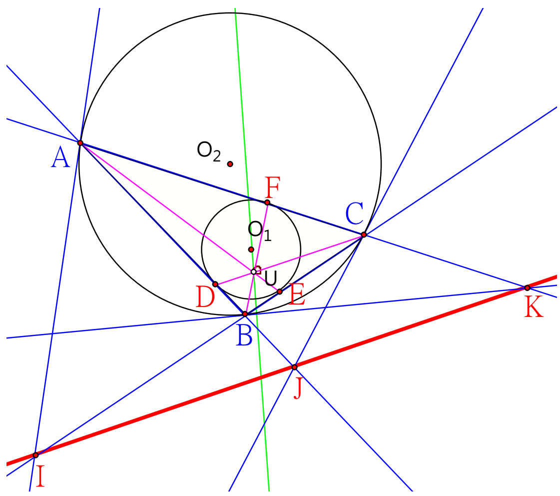
△ABC 為與圓 O_1 外切、與圓 O_2 內接的雙心三角形，且 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 分別切圓 O_1 於 D、E、F。過 A、B、C 作切線並分別交 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 於 J、I、K。則：

(1) $\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$ 共交於一點 U，即 Brianchon Point。

(2) I、J、K 三點共線，即 Pascal Line。

【證明】

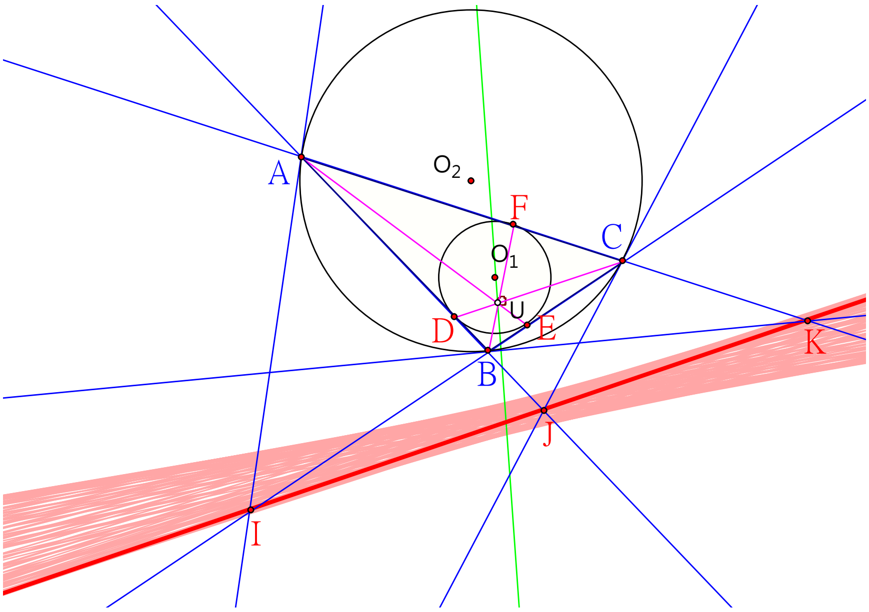
由<定理 1-3-4>及<定理 2-2-7>，可知△ABC 必同時具有 Brianchon Point 及 Pascal Line。



上述當兩圓固定不動，拉動△ABC 時，雙心三角形 ABC 不是唯一的，且有下列的發現：

(1) 雙心三角形的所有 Brianchon Point 並不是一個定點，布里昂雄連心線未通過外接圓圓心 O_2 但其 Brianchon Point 的軌跡構成一個圓錐曲線(橢圓)，且中心與 O_1 、 O_2 共線。

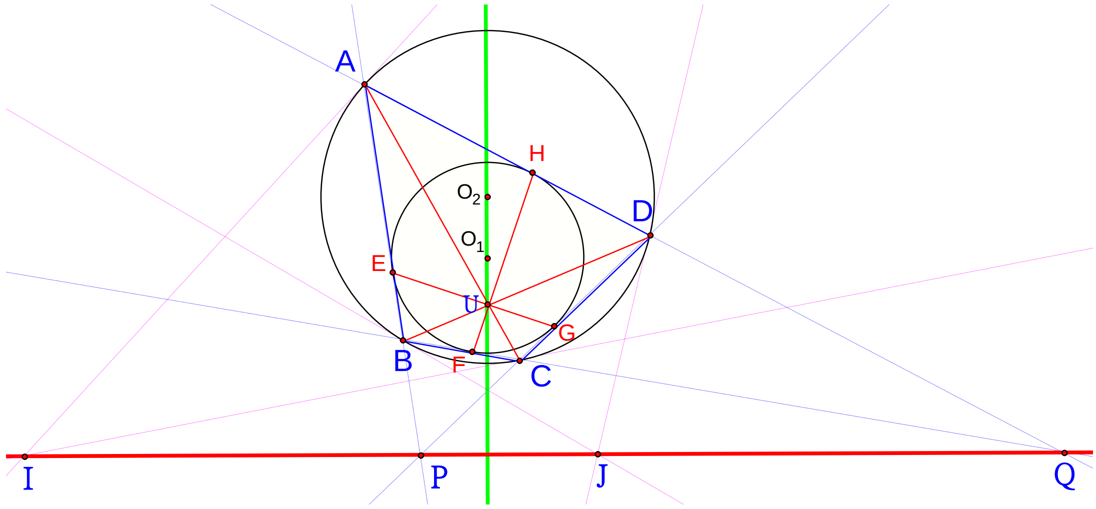
(2) 雙心三角形的所有 Pascal Line 並不是一個定線，其軌跡構成一個雙曲線，但中心與 O_1、O_2 共線與雙曲線貫軸重合。



【定理 5-2】雙心四邊形 Brainchon Point & Pascal Line 的性質

ABCD 為與圓 O_1 外切、與圓 O_2 內接的雙心四邊形，且 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 分別切圓 O_1 於 E、F、G、H，則 (1) $\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 共交於 Brianchon Point。 (2) 兩組對邊延長線交點 P、Q，以及兩組對邊頂點切線交點 I、J，四點共線，即 Pascal Line。

【證明】



上述當兩圓固定不動，拉動 ABCD 時，雙心四邊形 ABCD 不是唯一的，且有下列的發現：

(1) 雙心四邊形的所有 Brianchon Point 為定點、Pascal Line 為定線。

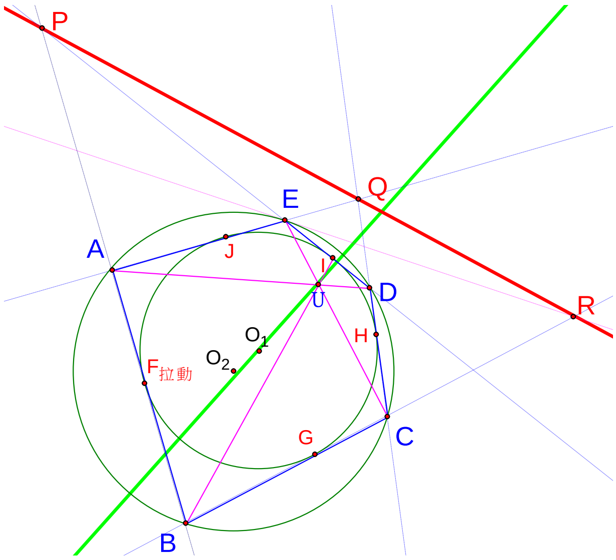
(2) 布里昂雄連心線通過外接圓圓心 O_2，也就是 Brianchon Point 和 O_1、O_2 共線，且與 Pascal Line 互相垂直。

從文獻探討的 Brainchon 定理及 Pascal 定理的退化情形中，我們可以知道圓外切五邊形有五個 Brianchon Point，而當圖形變成雙心五邊形的話，這五個點又會有什麼樣的關係呢？

【定理 5-3】雙心五邊形的 Brainchon Point & Pascal Line 性質

ABCDE 為與圓 O_1 外切、與圓 O_2 內接的雙心四邊形，且 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$ 分別切圓 O_1 於 F、G、H、I、J，則
(1) $\overline{AD}$、$\overline{CE}$、$\overline{BI}$ 共交於 Brianchon Point。
(2) $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$、$\overline{AE}$ 與 $\overline{CD}$ 兩組邊延長線交點 P、Q，以及過 E 點切線與 $\overline{BC}$ 邊延長線交點 R，三點共線，即 Pascal Line。

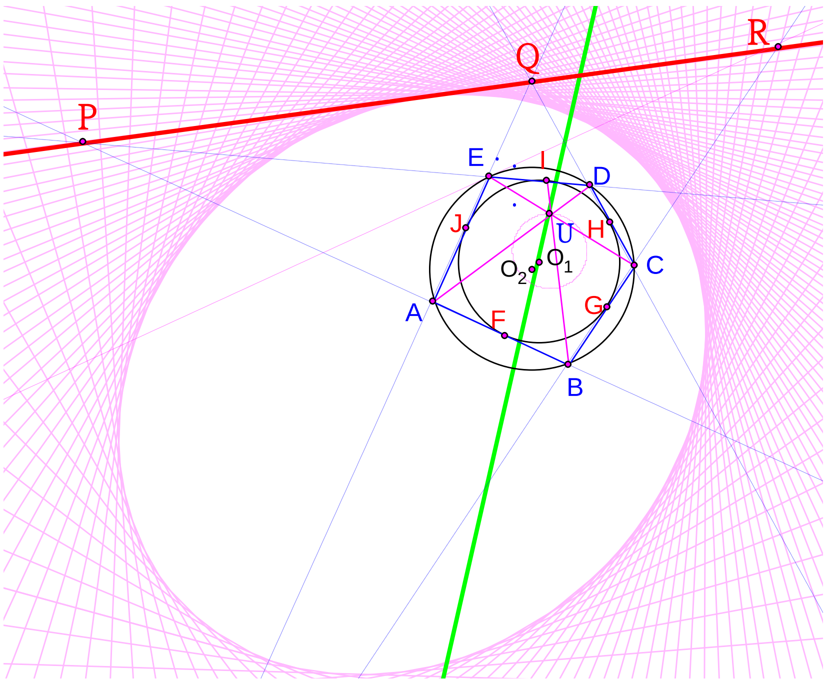
【證明】



上述當兩圓固定不動，拉動 ABCDE 時，雙心五邊形 ABCDE 不是唯一的，且有下列的發現：

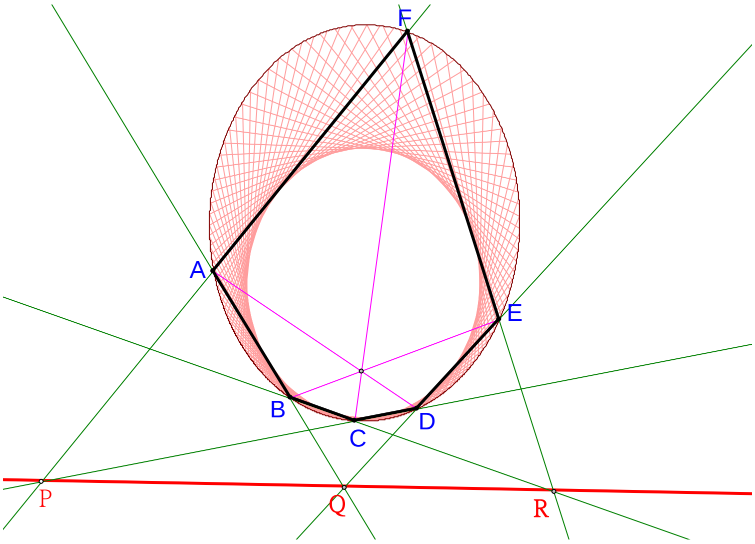
(1) 雙心五邊形的所有 Brianchon Point 並不是為定點，布里昂雄連心線未通過外接圓圓心 O_2，但其軌跡構成一個橢圓，且中心與 O_1、O_2 共線。

(2) 雙心五邊形的所有 Pascal Line 並不是一個定線，其軌跡構成一個圓錐曲線(橢圓或雙曲線)，中心與 O_1、O_2 共線恰與其長軸(或貫軸)重合。



六、雙心六邊形在圓錐曲線上的推廣

根據<定理 4-1>，雙心六邊形同時具有定點 Brianchon Point 與定線 Pascal Line 且與布里昂雄連心線互相垂直，其對圓均成立。若通過投射和取截景的方法，將可進一步推廣到所有圓錐曲線上，得知其仍存在定點 Brianchon Point 與定線 Pascal Line，惟 Pascal Line 不一定與布里昂雄連心線互相垂直。



伍、研究結論、應用及未來展望

本研究一開始，我們嘗試用極線性質解釋 Brianchon 定理及 Pascal 定理之間共點共線的對偶關係，透過條件變換，探索其各種組合所產生共點共線的情形，然後進一步探討雙心六邊形的共點共線情形以及退化情形。正如研究主題名稱「心心照我心」，我們發現了更多共點、共線及特殊的關係，也利用極線性質證明這些新的發現。最後以投影原理想法，將雙心六邊形推廣到圓錐曲線的可能不變性質。茲將結論說明如下：

一、從 Brianchon 定理「圓外切六邊形三組對角線共交點(Brianchon Point)」出發，變換條件，我們發現更多的**廣義 Brianchon Point**；另外在圓內接五邊形、四邊形或三角形等退化情形，也有同樣的發現。

二、同理，從 Pascal 定理「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線(Pascal Line)」出發，變換條件，我們發現更多的**廣義 Pascal Line**；另外在圓內接五邊形、四邊形或三角形等退化情形，也有同樣的發現。

三、給定圓外切六邊形連接切點形成內接六邊形(或相反)，則圓外切六邊形所產生的 Brianchon Point 與圓心連線(稱之為**布里昂雄連心線)**會與圓內接六邊形所產生的 Pascal Line 互相垂直。此種結果對五邊形、四邊形、三角形的情形時也成立。

四、同時外切與內接於兩個定圓的雙心六邊形，其共點共線有下列特殊的情形：

(一) 不僅三組對頂點連線(對角線)共交點(Brianchon Point)，其三條對邊切點連線也會共交於 Brianchon Point，且此時其為定點，位置不隨六邊形轉動而改變，換句話說「**雙心六邊形的三組頂點連線與三條對邊切點連線六線共交於定點 Brianchon Point**」。

(二) **布里昂雄連心線通過外接圓圓心**，也就是 Brianchon Point 與兩圓心三點共線；當兩圓固定時，此**布里昂雄連心線**亦為固定不動的定線。

(三) 同理，不僅三組對邊延長線交點共線(Pascal Line)，六個切點所構成的六邊形的三組對邊延長線交點也會共線於 Pascal Line，且此時其為定線，位置不隨六邊形轉動而改變，換句話說「**雙心六邊形的**三組對邊延長線交點以及其切點所成六邊形的三組對邊延長線交點，六組交點共定線 Pascal Line」。

(四) **布里昂雄連心線與** Pascal Line 兩線互相垂直。

五、將雙心六邊形進行圖形外延或內朔，可觀察得到下面結論：

(一) 當雙心六邊形的邊外延出一個六角星(或頂點連接成一個六邊形)時，其三組對角線也會共交於定點 Brianchon Point；其三組對邊延長線交點也會共定線 Pascal Line。

(二) 當雙心六邊形的切點內朔出一個六角星(或頂點連接成一個六邊形)時，其三組對角線也會共交於定點 Brianchon Point；其三組對邊延長線交點也會共定線 Pascal Line。

(三) 上述，無論進行六邊形的外延或內朔所產的六邊形必同時擁有內切圓錐曲線和外接圓錐曲線，且所產生的 Brianchon Point 與 Pascal Line 不變。如此遞延下去，亦不會改變。

六、同時外切與內接於兩定圓的雙心五邊形、四邊形、三角形，其共點共線有下列情形：

(一) 雙心四邊形與雙心六四邊形有相同的結果：Brianchon Point 為定點，Pascal Line 為定線，布里昂雄連心線通過外接圓圓心，也就是 Brianchon Point 與兩圓心三點共線；且布里昂雄連心線與 Pascal Line 互相垂直。

(二) 雙心五邊形和三角形：Brianchon Point 並非定點(所以布里昂雄連心線非定線)，其軌跡圖形為橢圓，而 Pascal Line 也並不是定線，其軌跡圖形形成一個圓錐曲線(橢圓或雙曲線)的包絡線。但兩圓心連線通過圓錐曲線的中心點，且與其長軸(或貫軸)重合。

七、透過投影性質，我們嘗試將上述共點共線的結果推廣到圓錐曲線上，我們也會有 Brianchon Point 與 Pascal Line 共點共線的相關發現，惟布里昂雄連心線不一定與 Pascal Line 互相垂直。

Brianchon 定理及 Pascal 定理是射影幾何學中的兩大定理，射影幾何與物體受光線照射投影的現象有關。本研究從兩大定理出發，發現更多線共點、以及更多交點共線的現象，將有助於未來在物理光學上應用，以及在投影藝術創作上的發想。

陸、參考資料

1. 黃家禮(1997)。幾何明珠。台北：九章出版社。
2. 高中數學第四冊。

【評語】010025

本作品討論雙心多邊形在 Brianchom 與 Pascal 定理之下的特殊性質,問題有趣,但可惜的是因原來的兩定理只有在六邊形成立，使得問題無法推廣到更一般的情形，是可惜之處。