2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 **010014**

參展科別 數學

作品名稱 一刀兩斷

得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 洪允東、翁立衛

作者姓名 曾靖國、吳泓寬、黃唯洋

關鍵字 披薩定理、蚶線、牛頓恆等式

作者簡介

我是曾靖國，目前就讀於國立臺灣師範大學附屬高級中學高二 1346 班。從小就喜歡數學。

小時候，爸爸就常教我數學，小學一年級時的老師，送了我一套數學問題的書，國中時又有老師訓練我參加數學競賽，也養成我願意思考數學難題的習慣。

高中因為讀的是數理資優班，加入數學專研，又經老師介紹到這個難題，就決定投入研究。研究過程從一開始的暴力硬算，到後來為了解決圓奇數刀用牛頓恆等式的解法，完全出乎我意料，相信日後學了更高深的數學一定能提出更好的證法。

我是吳泓寬，目前就讀師大附中高二 1347 班。

因為是數資班，所以從高一開始就開始上專研、做科展。當時我認為科展是一種對於知識追求的呈現，一種人類富足後的後工業化時期的產物，比起寫競賽題只是多了展示這個動作而已。再加上我們的題目算是老酒換新壺，有著一些學長做的結果，以及證明的手法，還有身旁擁有國手實力的同儕在一旁研究，許多難題馬上迎刃而解。

但是到了高二，課業的壓力激增，我不禁在忙與閒之中徘徊，但我的信仰支持著我，帶著我走過一路的風風雨雨，繼續埋頭在追求知識的康莊大道上。

這次科展，是我第一次參加國際科展，也比高一時增加不少結果，希望有好的成績。

我是 黃唯洋，目前就讀於國立臺灣師範大學附屬高級中學高二 1347 班。從小就常常接觸數學，因而對它產生了興趣。

上附中後，因為國中老師的建議而去考了數理資優班，順利錄取後，也因此踏上專研之路，就這樣投入了數學專題研究。剛好我和我的組員志趣相投，一同選擇了這個難題，也努力研究到了現在，一路上雖然經歷許多困難點，但我們都能一一克服，順利撐到現在，相信日後我們的默契會越來越好，跨越更多難關。

摘要

本研究作品所探討的主題是披薩定理的延伸，在外擺線中的心臟線上，以尖點為定點，過此定點切若干刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，討論兩人依逆時針序輪流拿取的區塊面積和的關係，並討論其切割的刀數 $n(n \geq 2, n \in N)$與線段長的 $k(k \in Z)$次方和的關係。根據先前科展作品(參考文獻一)的猜測，我們也證明了有關圓的分割線段長 k 次方和關係。

Abstract

This research topic is an extension of the Pizza Theorem. Cut through the cusp of a cardioid repeatedly with all the secant lines intersecting at the same angle. The divisions are distributed counter-clockwise between two individuals. The sums of area received by each individual are compared. Besides, the relationship between the number of cuts and the sum of k^{th} power of the segments is investigated.

Based on the speculation suggested in the project for the previous science fair (reference 1), the relationship is also proven between the the number of cuts with the sum of k^{th} power of the segments in a circle.

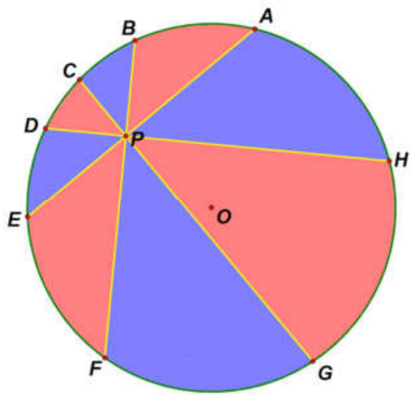
一、　前言

(一)研究動機

在第一次數學專題研究課程時，老師介紹了以前學長關於披薩定理的作品，由於本身對幾何很感興趣，再加上老師的介紹，我們覺得這份作品的題材相當有意思，所以就決定以此問題進行研究。

(二) 披薩定理介紹

如果以圓盤中任意一個指定點為中心，切下 n 刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後以逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色（下圖以切四刀為例），將圓盤分為兩個部分。那麼有下列結論：



1. 當 n 是大於 2 的偶數，或有任一刀通過圓心時：
   兩種顏色的面積和一樣大。
2. 若任意一刀都不通過圓心，則：
   (1)當 n = 1,2 或 $n = 4m$-1($m \in N$)(n=1,2,3,7,11,15,..)時，
   包含圓心的部分面積和比較大。
   (2)當 $n = 4m$+1($m \in N$) (n = 5,9,13,17,..)時，
   包含圓心的部分面積和比較小。

(三)研究目的

1. 過圓內任一點 P 切 $n(n \geq 2, n \in N)$ 刀，使每一組相鄰割線角度皆相同， 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，探討切割刀數 n 與線段長 k 次方和的關係。

2. 將參考資料一中的圓改為外擺線中的心臟線及圓錐曲線的橢圓，而將圓內的任意指定點改為心臟線軌跡的尖點及橢圓內焦點和任一點，並使用GSP動態幾何軟體探討其切割線段長的關係。

二、　研究方法或過程

(一)研究設備及器材

1. 軟體：GSP 5.06、Microsoft Word 2010
2. 器材：電腦、紙、筆、計算機 (型號：Casio fx-991ES PLUS)

(二)文獻探討

1967 年 5 月厄普頓（L. J. Upton）在《Mathematics Magazine》中提出披薩定理等角切 4 刀的問題。隔年郭德堡（M. Goldberg）在同一期刊證明了「等角切偶數刀時，兩人會分得一樣多的披薩。」

1994 年 10 月，Larry Carter ,Stan Wagon 提出等角切 3 刀時兩人依逆時針序輪流拿取，拿到含圓心的人分得較多；切 5 刀時拿到含圓心的人分得較少的問題。同一年，兩位數學家 Paul Deiermann 及 Rick Mabry 加入研究，經過多年的研究，終於在 2009 年解決了切奇數刀的問題。

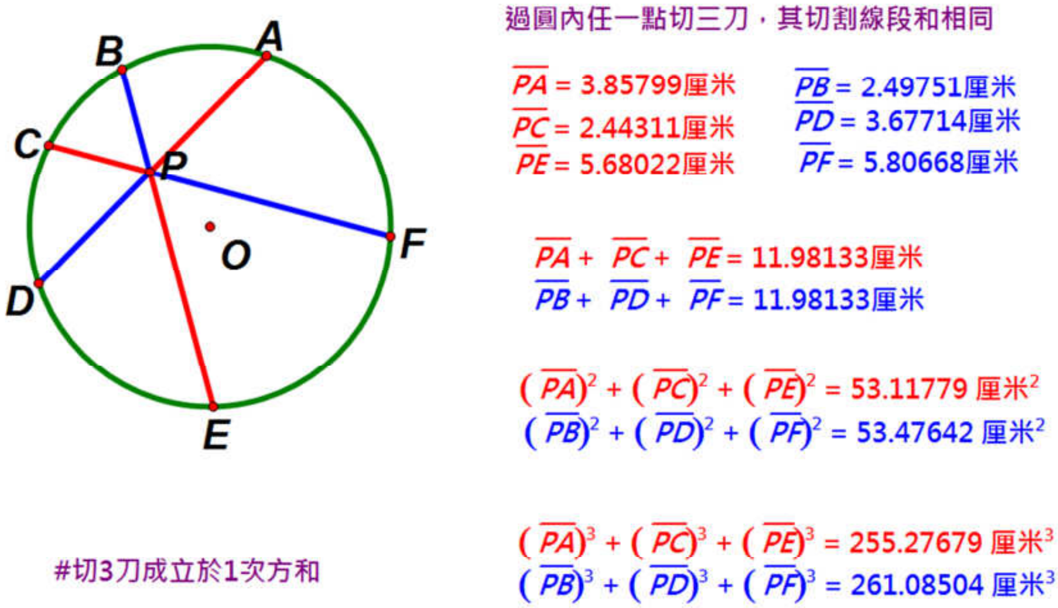
2013 年 2 月，參考文獻(一)證明了過圓內一點 P 等角切奇數刀時，P 到圓周的線段由兩人依逆時針序輪流拿取，兩人所取的線段長度和相等。

我們的貢獻則是證明圓內任一點 P 切 $2n(n \in N)$ 刀，使每一組相鄰割線角度皆相同， 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度 $2k(k \in Z)$ 次方和相等，其中 $1-n \leq k \leq n-1$。也證明了在切 $2n+1(n \in N)$ 刀的情況下，各組取出的線段長 $2k+1(k \in Z)$ 次方和相等，其中 $-n \leq k \leq n-1$。以及證明由心臟線尖點切刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度的 $k(k \in Z)$ 次方和相等，其中 $0 \leq k \leq n-1$。

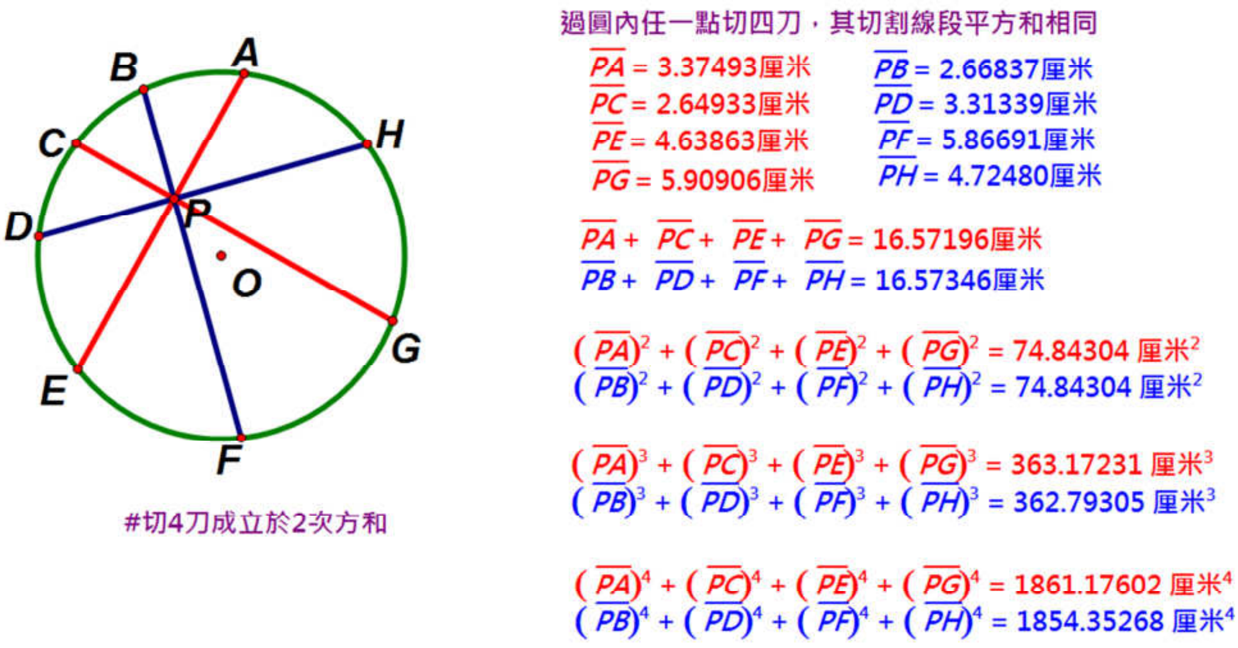
(三)先證明圓切偶數刀的部分

過圓內任一點 P 作等角切割，其切割刀數 n 與 P 到圓周上線段長的 k 次方和之 GSP 實驗：

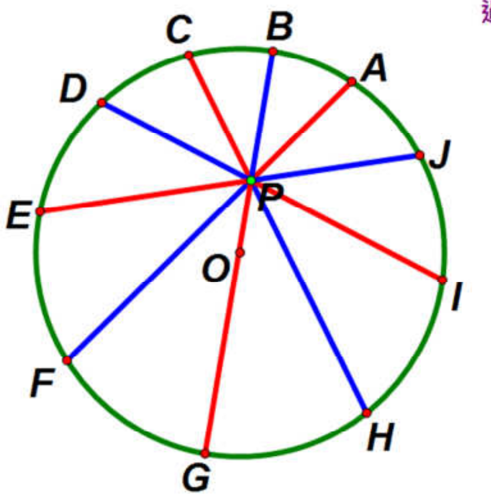
1. 過圓內任一點 P 等角切 3 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長和相等：



2. 過圓內任一點 P 等角切 4 刀,依逆時針序兩人輪流取,則取到的切割線段長平方和相等：



3. 過圓內任一點 P 等角切 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長一次方和、三次方和相等：



#切5刀成立於1,3次方和

過圓內任一點切五刀，其切割線段一次方和及三次方和相同

$\overline{PA}$ = 3.41269厘米
$\overline{CP}$ = 3.38895厘米
$\overline{PE}$ = 5.16079厘米
$\overline{PI}$ = 5.22175厘米
$\overline{PG}$ = 6.70571厘米

$\overline{PB}$ = 3.17382厘米
$\overline{DP}$ = 4.07578厘米
$\overline{FP}$ = 6.23634厘米
$\overline{PH}$ = 6.28003厘米
$\overline{JP}$ = 4.12393厘米

$\overline{PA}+\overline{CP}+\overline{PE}+\overline{PG}+\overline{PI}$ = 23.88990厘米
$\overline{PB}+\overline{DP}+\overline{FP}+\overline{PH}+\overline{JP}$ = 23.88990厘米

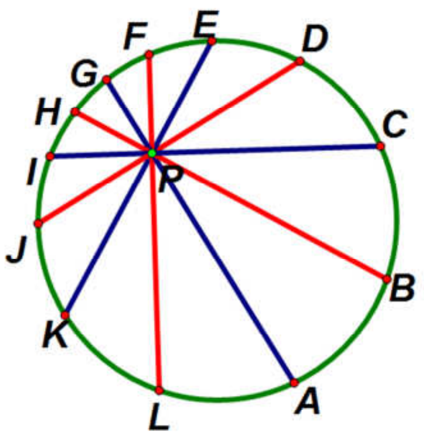
$(\overline{PA})^2+(\overline{CP})^2+(\overline{PE})^2+(\overline{PG})^2+(\overline{PI})^2$ = 121.99850 厘米^2
$(\overline{PB})^2+(\overline{DP})^2+(\overline{FP})^2+(\overline{PH})^2+(\overline{JP})^2$ = 122.02263 厘米^2

$(\overline{PA})^3+(\overline{CP})^3+(\overline{PE})^3+(\overline{PG})^3+(\overline{PI})^3$ = 660.03207 厘米^3
$(\overline{PB})^3+(\overline{DP})^3+(\overline{FP})^3+(\overline{PH})^3+(\overline{JP})^3$ = 660.03207 厘米^3

$(\overline{PA})^4+(\overline{CP})^4+(\overline{PE})^4+(\overline{PG})^4+(\overline{PI})^4$ = 3742.36894 厘米^4
$(\overline{PB})^4+(\overline{DP})^4+(\overline{FP})^4+(\overline{PH})^4+(\overline{JP})^4$ = 3734.65802 厘米^4

$(\overline{PA})^5+(\overline{CP})^5+(\overline{PE})^5+(\overline{PG})^5+(\overline{PI})^5$ = 22011.90367 厘米^5
$(\overline{PB})^5+(\overline{DP})^5+(\overline{FP})^5+(\overline{PH})^5+(\overline{JP})^5$ = 21840.60973 厘米^5

4. 過圓內任一點 P 等角切 6 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長二次方和、四次方和相等：



#切6刀成立於2,4次方和

過圓內任一點切六刀，其切割線段二次方和及四次方和相同

$\overline{PA}$ = 6.76895厘米
$\overline{PC}$ = 5.72994厘米
$\overline{EP}$ = 3.17672厘米
$\overline{PG}$ = 2.16251厘米
$\overline{PI}$ = 2.55464厘米
$\overline{PK}$ = 4.60787厘米
$\overline{BP}$ = 6.68309厘米
$\overline{PD}$ = 4.36243厘米
$\overline{PF}$ = 2.46134厘米
$\overline{HP}$ = 2.19029厘米
$\overline{PJ}$ = 3.35544厘米
$\overline{LP}$ = 5.94714厘米

$\overline{PA}+\overline{PC}+\overline{EP}+\overline{PG}+\overline{PI}+\overline{PK}$ = 25.00062厘米
$\overline{BP}+\overline{PD}+\overline{PF}+\overline{HP}+\overline{PJ}+\overline{LP}$ = 24.99973厘米

$(\overline{PA})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{EP})^2+(\overline{PG})^2+(\overline{PI})^2+(\overline{PK})^2$ = 121.17751 厘米^2
$(\overline{BP})^2+(\overline{PD})^2+(\overline{PF})^2+(\overline{HP})^2+(\overline{PJ})^2+(\overline{LP})^2$ = 121.17751 厘米^2

$(\overline{PA})^3+(\overline{PC})^3+(\overline{EP})^3+(\overline{PG})^3+(\overline{PI})^3+(\overline{PK})^3$ = 654.95035 厘米^3
$(\overline{BP})^3+(\overline{PD})^3+(\overline{PF})^3+(\overline{HP})^3+(\overline{PJ})^3+(\overline{LP})^3$ = 655.05087 厘米^3

$(\overline{PA})^4+(\overline{PC})^4+(\overline{EP})^4+(\overline{PG})^4+(\overline{PI})^4+(\overline{PK})^4$ = 3794.42436 厘米^4
$(\overline{BP})^4+(\overline{PD})^4+(\overline{PF})^4+(\overline{HP})^4+(\overline{PJ})^4+(\overline{LP})^4$ = 3794.42436 厘米^4

$(\overline{BP})^5+(\overline{PD})^5+(\overline{PF})^5+(\overline{HP})^5+(\overline{PJ})^5+(\overline{LP})^5$ = 22917.19771 厘米^5
$(\overline{PA})^5+(\overline{PC})^5+(\overline{EP})^5+(\overline{PG})^5+(\overline{PI})^5+(\overline{PK})^5$ = 22943.95798 厘米^5

$(\overline{PA})^6+(\overline{PC})^6+(\overline{EP})^6+(\overline{PG})^6+(\overline{PI})^6+(\overline{PK})^6$ = 142561.24227 厘米^6
$(\overline{BP})^6+(\overline{PD})^6+(\overline{PF})^6+(\overline{HP})^6+(\overline{PJ})^6+(\overline{LP})^6$ = 141992.77753 厘米^6

根據圓的切割刀數及切割線段的 k 次方和 GSP 實驗，我們的猜測如下：

過圓內任一點 P 切 $n(n \ge 2, n \in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同， P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則

1. 若 $n = 2m(m \in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $-m+1 \le k \le m-1$
2. 若 $n = 2m+1(m \in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m \le k \le m-1$

最後，我們也證明了上述的猜測。(定理一、定理二)

引理一

設 1 的 $n(n \geq 3, n \in N)$次單位根為$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots\ldots, \omega^{n-1}, \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

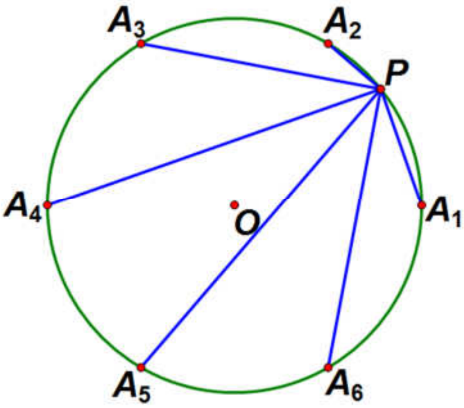
則$(\omega^0)^k+(\omega^1)^k+\ldots\ldots+(\omega^{n-1})^k=0$，其中$k \in Z$, k 不是 n 的倍數。

證明：

由等比級數求和公式，

$(\omega^0)^k+(\omega^1)^k+\ldots\ldots+(\omega^{n-1})^k=\frac{1-\omega^{nk}}{1-\omega^k}=\frac{1-1^k}{1-\omega^k}=0$

引理二



對任意正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 內接於圓 O，圓周上取一點 P，

連接$\overline{PA_j}(j = 1,2,\ldots,n)$，則$\sum_{j=1}^{n}(\overline{PA_j})^{2k}$之值為

$n \cdot C_k^{2k} \cdot r^{2k}$ ，其中 k=1, 2, …, n-1。

證明：

以圓心 O 為原點建立複平面,$\overrightarrow{OA_1}$為 x 軸,$\overrightarrow{Oy}$為 y 軸,$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{Oy}$

$\therefore$ A_j的座標$re^{i\frac{2\pi(j-1)}{n}}$, j=1,2,……,n (r 為圓半徑長)

設 P 的座標為$re^{i\theta}$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{PA_j}\right)^{2k}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\overline{OP}-\overline{OA_j}\right|^{2k}$$

$$=r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left|e^{i\theta}-e^{i\frac{2\pi(j-1)}{n}}\right|^{2k} \text{(設}Z \in \mathbb{C}\text{,則 } |Z|^2 = Z \times \overline{Z} \quad ; \quad \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}\text{)}$$

$$=r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(e^{i\theta}-e^{i\frac{2\pi(j-1)}{n}}\right)\left(e^{-i\theta}-e^{-i\frac{2\pi(j-1)}{n}}\right)\right]^{k}$$

$$(\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta})$$

$$=r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left\{2-e^{i\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}-e^{i\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}\right\}^{k}$$

(利用多項式定理，令$-e^{i\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}$取 x次、$-e^{i\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}$取$y$次、2取 $(k-x-y)$ 次)

$$=r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{x=0}^{k}\sum_{y=0}^{k-x}\frac{k!}{(k-x-y)!x!y!}\times(-1)^{x+y}\times e^{xi\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}\times e^{yi\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}\times 2^{(k-x-y)}$$

將$e^{xi\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}\times e^{yi\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}$作化簡為 $e^{(x-y)i\theta}\times e^{(x-y)i\left[-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}$

$\because e^{(x-y)i\theta}$為定值

$\therefore$只需計算$e^{(x-y)i\left[-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}$

$\because -k\le x-y\le k(k=1,2,\dots,n-1,k\in N)$

(1) $x-y\neq 0$($x-y$不是n的倍數)

$\Rightarrow$由引理一$r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left\{e^{i\left[-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}\right\}^{x-y}=0$

$\Rightarrow$除了 $x=y$ 時，其他項均等於 0

(2) $x-y=0$($x-y$是n的倍數)

算出$r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left\{2-e^{i\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}-e^{i\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}\right\}^{k}$的確切值

$$r^{2k}\sum_{j=1}^{n}\left\{2-e^{i\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}-e^{i\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}\right\}^{k}\ (e^{i\left[\theta-\frac{2\pi(j-1)}{n}\right]}\text{和}e^{i\left[\frac{2\pi(j-1)}{n}-\theta\right]}\text{都取}m\text{次})$$

$$=r^{2k}\cdot n\cdot\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}C_{k-2m}^{k}C_{m}^{2m}\cdot 2^{k-2m}\text{(多項式定理)}$$

$$=n\cdot C_{k}^{2k}\cdot r^{2k}\ (\text{由}(1+x)^{2k}=(1+2x+x^2)^k\text{中的}x^k\text{係數可知}\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}C_{k-2m}^{k}C_{m}^{2m}\cdot 2^{k-2m}=C_{k}^{2k})$$

引理二推廣參考文獻(五)的結果，該結果只推到二次與四次方和成立，本引理將成立的範圍推至 $2k$ ($k\in Z$)次方和成立，其中$1-n\le k\le n-1$。利用以上引理，得到本研究的主要結果定理一，此定理將參考文獻(一)的二次方和相等，推廣至任意 $2k$ ($k\in Z$)次方和相等，其中$1-n\le k\le n-1$。

定理一

過圓內任一點 P 切 $2n(n\ge 2,n\in N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度 $2k$ ($k\in Z$)次方和相等，其中$1-n\le k\le n-1$。

證明：

過圓內任一點 P 切$\overline{A_1B_1},\overline{A_2B_2},\dots\dots\overline{A_{2n}B_{2n}}$ 共 $2n$ 刀，使其相鄰割線夾角皆相同，

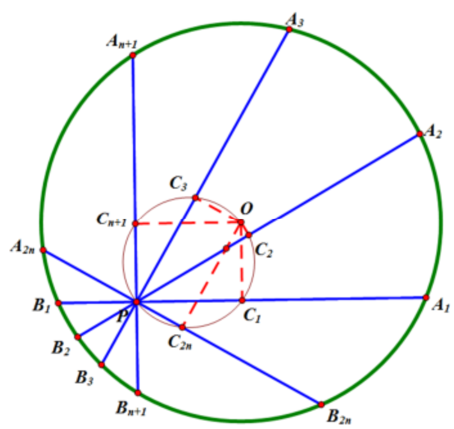
設圓心 O 半徑 r，$\overline{OP}=a$， $\overline{A_iB_i}$的中點設為C_i, i=1~$2n$

$\because \angle PC_iO=90°$

$\therefore P,C_i,O$皆落在以$\overline{OP}$為直徑的圓

$\because$相鄰割線夾角皆相同

$\therefore$此 $2n$ 個垂足可構成一正 $2n$ 邊形



由引理二(看成 2 個正 n 邊形)

$\sum_{p=0}^{n-1}\left(\overline{OC_{2p+1}}\right)^{2k}=\sum_{p=1}^{n}\left(\overline{OC_{2p}}\right)^{2k}$,($k$=1,2,…,$n$-1) …(1)

$\overline{PA_i}^{2k}+\overline{PB_i}^{2k}$(因為切偶數刀，同一割線被$P$分成的兩部分均由同一人取得), i=1,2,…,2n

$=(\overline{C_iA_i}+\overline{C_iP})^{2k}+(\overline{C_iA_i}-\overline{C_iP})^{2k}$

$=2\sum_{j=0}^{k}C_{2j}^{2k}\left(\overline{C_iA_i}\right)^{2j}\overline{C_iP}^{(2k-2j)}$…(2)

$\overline{C_iA_i}^2=r^2-\overline{OC_i}^2$；$\overline{C_iP}^2=a^2-\overline{OC_i}^2$ 將此二值代入(2)

可得一含有 r、a、$\overline{OC_i}$的式子

∵r、a 為定值

∴只需計算含有$\overline{OC_i}$的項

設$\overline{OC_{2p+1}}=x$，展開為$a_0x^{2k}+a_1x^{2(k-1)}+\ldots\ldots+a_k$

把 $p=0\sim n-1$的所有項相加，則得

$$a_0\sum_{p=0}^{n-1}\overline{OC_{2p+1}}^{2k}+a_1\sum_{p=0}^{n-1}\overline{OC_{2p+1}}^{2(k-1)}+\ldots\ldots+na_k$$

由(1)得知 當$1\le k\le n-1$的範圍內命題成立

再證$0\sim -2n+2$的範圍

由內冪性質知 $\overline{PA_i}\times\overline{PB_i}$為定值(=$L$)

$\Rightarrow\overline{PB_i}^{2k}=\frac{L^{2k}}{\overline{PA_i}^{2k}}=L^{2k}\times\overline{PA_i}^{-2k}$

$$\because\sum_{q=0}^{n}(\overline{PA_{2q}}^{2k}+\overline{PB_{2q}}^{2k})=\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{PA_{2q+1}}^{2k}+\overline{PB_{2q+1}}^{2k})$$

$$\therefore\sum_{q=0}^{n}(L^{2k}\times\overline{PB_{2q}}^{-2k}+L^{2k}\times\overline{PA_{2q}}^{-2k})=\sum_{q=0}^{n-1}(L^{2k}\times\overline{PB_{2q+1}}^{-2k}+L^{2k}\times\overline{PA_{2q+1}}^{-2k})$$

$$\Rightarrow L^{2k}\sum_{q=0}^{n}(\overline{PB_{2q}}^{-2k}+\overline{PA_{2q}}^{-2k})=L^{2k}\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{PB_{2q+1}}^{-2k}+\overline{PA_{2q+1}}^{-2k})$$

$$\Rightarrow\sum_{q=0}^{n}(\overline{PA_{2q}}^{-2k}+\overline{PB_{2q}}^{-2k})=\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{PA_{2q+1}}^{-2k}+\overline{PB_{2q+1}}^{-2k})$$

可見對$-k$ 亦成立。

(四)再證明圓切奇數刀的部分

$\boxed{\text{引理三}}$

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(-1)^k \frac{n}{n-k} C_k^{n-k}(2\cos\theta)^{n-2k}$$

證明：詳見參考文獻(二)

$\boxed{\text{引理四}}$

牛頓恆等式(Newton's identities)

設 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$ ，

$S_k = {x_1}^k + {x_2}^k + \cdots + {x_n}^k,\ k=0,1,2,\cdots$

則 $S_k-\sigma_1 S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k k\sigma_k=0,$ 當 $1\le k\le n$ 時 ；

$S_k-\sigma_1 S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n S_{k-n}=0,$ 當 $k>n$ 時 。

其中 $\begin{cases}\sigma_1 = x_1+x_2+\cdots+x_n \\ \sigma_2 = \displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \\ \cdots\cdots \\ \sigma_n = x_1 x_2\cdots x_n\end{cases}$ 為 n 個不定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的基本對稱式。

證明：

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n\cdots\cdots(1)$$

1. 當 $k>n$ 時, (1)式兩邊同乘 x^{k-n} 得

$$x^{k-n}f(x)=x^k-\sigma_1 x^{k-1}+\sigma_2 x^{k-2}-\cdots+(-1)^k\sigma_n x^{k-n}$$

$$\because f(x_i)=0,\ i=1,2,\cdots n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\left[{x_i}^k-\sigma_1 {x_i}^{k-1}+\sigma_2 {x_i}^{k-2}-\cdots+(-1)^k\sigma_n {x_i}^{k-n}\right]=0$$

$$\Rightarrow S_k-\sigma_1 S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n S_{k-n}=0$$

2. 當 $1\le k\le n$ 時, 由(1)式得 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-x_n}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$

$$\Rightarrow \frac{x^{k+1}f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{x-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-{x_i}^{k+1}}{x-x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^{k+1}}{x-x_i}$$

$\Rightarrow x^{k+1}f'(x)=f(x)\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_i x^{k-1}+\cdots+{x_i}^k)+g(x),$ 其中 $g(x)=f(x)\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{{x_i}^{k+1}}{x-x_i}$ 且 $\deg g(x)<n$

$\Rightarrow x^{k+1}f'(x)=f(x)(nx^k+S_1x^{k-1}+S_2x^{k-2}+\cdots+S_k)+g(x)\cdots\cdots(2)$

由(1)得 $f'(x)=nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^k(n-k)\sigma_kx^{n-k-1}+\cdots$

比較(2)是兩邊 x^n 的係數, 得

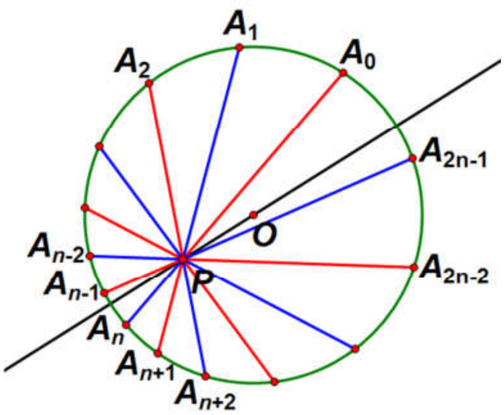
$(-1)^k(n-k)\sigma_k=S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k\sigma_k\cdot n$

即$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0$

定理二

過圓內任一點 P 切 $2n+1(n\in N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度 $2k+1(k\in Z)$次方和相等，其中 $-n\le k\le n-1$。

證明：



原命題等價於以下問題，

過圓 O 內一點 P 切 n 刀(n是奇數)

令 $\angle A_0PO=\theta$

則 $\sum_{i=1}^{n}(\overline{PA_{2i-1}})^{2k+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{PA_{2i}})^{2k+1}\quad(0\le k<\frac{n-1}{2},k\in Z)$

令 $\prod_{m=0}^{n-1}\left[x-a\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})\right]=f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$

因為 $\cos n\alpha=\cos n\theta$ 的方程式中 α 有 n 個解，分別為 $\theta+\frac{2m\pi}{n}$ ，$m=0\sim n-1$

由引理三，$\cos n\theta=\cos n\alpha=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2\cos\alpha)^{n-2k}$ ，令 $\cos\alpha=x$ ，

變成 $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2x)^{n-2k}-\cos n\theta=0$，同除此方程式的最高係數(常數)使首項係數為 1，令為 $p(x)$，$p(x)$ 和 $f(x)$ 的根都相等，$\deg f(x)=\deg p(x)$，且首項係數都為 1，故 $p(x)$ 和 $f(x)$ 係數一一相等，

再觀察 $p(x)$ 的係數知 $a_1,a_3......a_{n-2}=0$ 且 $a_0,a_2......a_{n-1}$ 是常數,只有 a_n 隨 θ 變動

令 $a_0,a_1......a_{n-1}$ 此 $2n$ 個數為 $(-1)^i\overline{PA_i}(i=0,1......2n-1)$,

令 $\overline{OP}=\frac{a}{2},\overline{PA_m}\cdot\overline{PA_t}=1(m=0,2......2n-2,|m-t|=n,1\le t\le 2n-1)$,

則 $\overline{PA_m},\overline{PA_t}$滿足$x-\frac{1}{x}=a\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})$

則以此 $2n$ 個數為根的方程式為 $f(x-\frac{1}{x})=0=\sum_{i=0,i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)}^{n}\left[a_i(x-\frac{1}{x})^{n-i}+a_n\right]$

同乘$x^n(x\neq 0)\Rightarrow x^n f(x-\frac{1}{x})$的最高次項為$2n$ 次方

除了 $a_n x^n$此項係數不為定值,其餘x^t(t是奇數)的係數皆為0 , x^t(t是偶數)的係數皆為常數

令$x^n f(x-\frac{1}{x})=\sum_{i=0,i\neq n}^{2n}(b_i x^{2n-i}+a_n x^n)$

由引理四

$\Rightarrow b_1=S_1=0$

$b_0S_2+b_1S_1+b_2S_0=0\Rightarrow S_2$為定值

(1) S_k(k為奇數)

$\sum_{i=0}^{k}b_iS_{k-i}=0$

設$S_t=0$(t為小於k的奇數)

$k=n$時,

有$a_n\cdot S_0$這項故$S_n\neq 0$

$\Rightarrow k>n$時假設不成立

由數學歸納法可知$S_1,S_3......S_{n-2}=0$

(2)S_k(k為偶數)

$\sum_{i=0}^{k}b_iS_{k-i}=0$

其中第一個出現$a_n\cdot S_0$這項的k(此時$k=2n$)

之後的k(包含$2n$)皆非定值

$\therefore S_0,S_2......S_{2n-2}$為定值。

(五)心臟線切割面積和(兩人取)

引理五

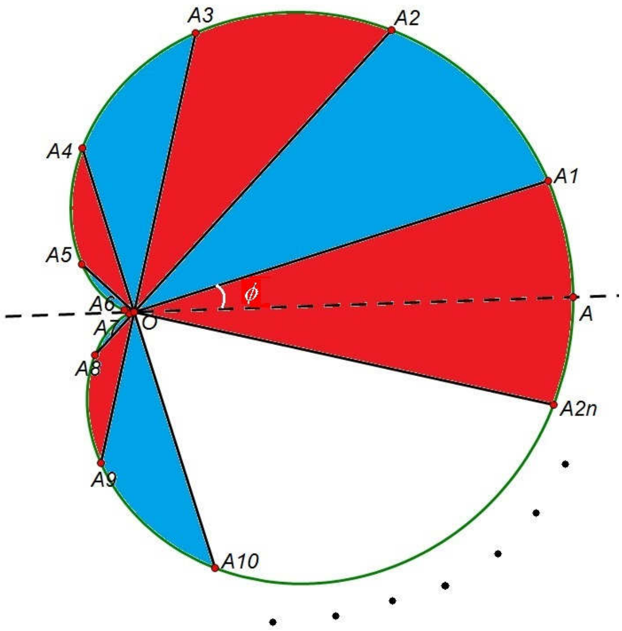
$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha+k\beta)=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)$$

證明：詳見參考文獻(四)

定理三

過心臟線上的尖點切$n(n\in N,\ n\geq 2)$刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後按逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色，則兩種顏色的面積和一樣大。

證明：



設心臟線方程式為$r=a(1+\cos\theta)$，$\angle AOA_1=\phi$

則藍色區塊面積和為

$$\int_{\phi}^{\phi+\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2}r^2d\theta+\int_{\phi+\frac{2\pi}{n}}^{\phi+\frac{3\pi}{n}}\frac{1}{2}r^2d\theta+\cdots+\int_{\phi+\frac{(2n-2)\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2n-1)\pi}{n}}\frac{1}{2}r^2d\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\phi+\frac{2k\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}}\frac{1}{2}r^2d\theta=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\phi+\frac{2k\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}}\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\phi+\frac{2k\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\phi+\frac{2k\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\phi+\frac{2k\pi}{n}}^{\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot n+2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}]-2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[\phi+\frac{2k\pi}{n}]\\+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin 2[\phi+\frac{(2k+1)\pi}{n}]-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin 2[\phi+\frac{2k\pi}{n}]\end{array}\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\pi+2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[(\phi+\frac{\pi}{n})+k\cdot\frac{2\pi}{n}]-2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[\phi+k\cdot\frac{2\pi}{n}]\\+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin 2[(\phi+\frac{\pi}{n})+k\cdot\frac{2\pi}{n}]-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin 2[\phi+k\cdot\frac{2\pi}{n}]\end{array}\right\}$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[(\phi+\frac{\pi}{n})+k\beta]-2\sum_{k=0}^{n-1}\sin[\phi+k\beta]\\+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin[(2\phi+\frac{2\pi}{n})+k\cdot 2\beta]-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sin[2\phi+k\cdot 2\beta]\end{array}\right\},\text{其中}\beta=\frac{2\pi}{n}$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^2+0\ (\text{由引理五，右式之分子}\sin\frac{n\beta}{2}=\sin\pi=0,\ \sin\frac{n\cdot 2\beta}{2}=\sin 2\pi=0)$$

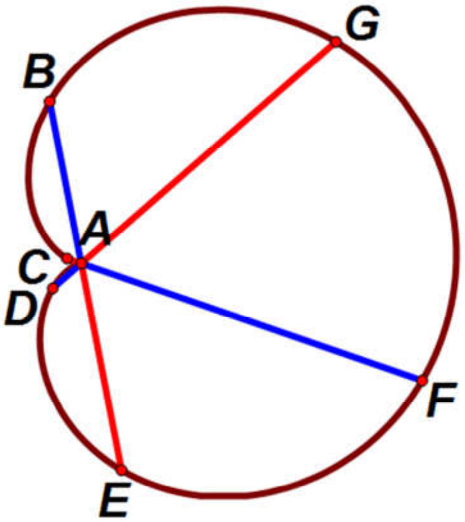
$$=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\pi a^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\text{心臟線面積})\ \#$$

(六)心臟線切割線段長和(兩人取)

我們想把切圓形披薩的成功經驗，推廣至其它曲線上。經過許多嘗試及實驗發現：在心臟線上，過尖點等角切割 n 刀，則線段長的 k 次方和有如下的關係

1. 過心臟線尖點等角切割 3 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長和、平方和相同，實驗結果如下：



過心臟線尖點切三刀(切割線段和、平方和相同)

$\overline{AB}$ = 3.27560厘米　$\overline{AC}$ = 0.29704厘米
$\overline{AD}$ = 0.74972厘米　$\overline{AE}$ = 4.18095厘米
$\overline{AF}$ = 7.15951厘米　$\overline{AG}$ = 6.70684厘米

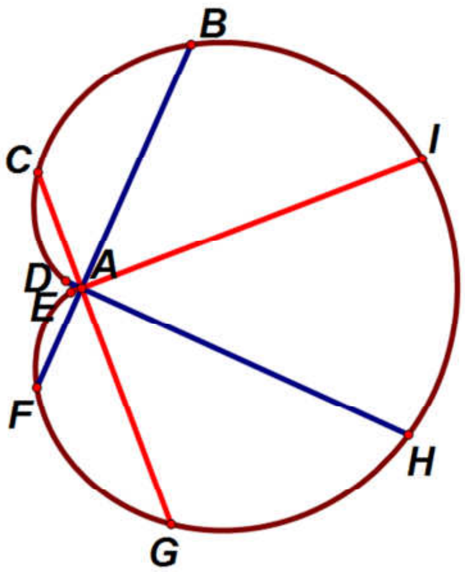
$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AF}$ = 11.18484厘米
$\overline{AC}+\overline{AE}+\overline{AG}$ = 11.18484厘米

$(\overline{AB})^2+(\overline{AD})^2+(\overline{AF})^2$ = 62.55028 厘米^2
$(\overline{AC})^2+(\overline{AE})^2+(\overline{AG})^2$ = 62.55028 厘米^2

$(\overline{AB})^3+(\overline{AD})^3+(\overline{AF})^3$ = 402.55399 厘米^3
$(\overline{AC})^3+(\overline{AE})^3+(\overline{AG})^3$ = 374.79556 厘米^3

#切3刀成立於1,2次方和

2. 過心臟線尖點等角切割 4 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長和、平方和及立方和相同，實驗結果如下：



過心臟線尖點切四刀(切割線段和、平方和、立方和相同)

$\overline{AB}$ = 6.38783厘米　$\overline{AC}$ = 2.94791厘米
$\overline{AD}$ = 0.41614厘米　$\overline{AE}$ = 0.27560厘米
$\overline{AF}$ = 2.60863厘米　$\overline{AG}$ = 6.04855厘米
$\overline{AH}$ = 8.58032厘米　$\overline{AI}$ = 8.72085厘米

$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AF}+\overline{AH}$ = 17.99291厘米
$\overline{AC}+\overline{AE}+\overline{AG}+\overline{AI}$ = 17.99291厘米

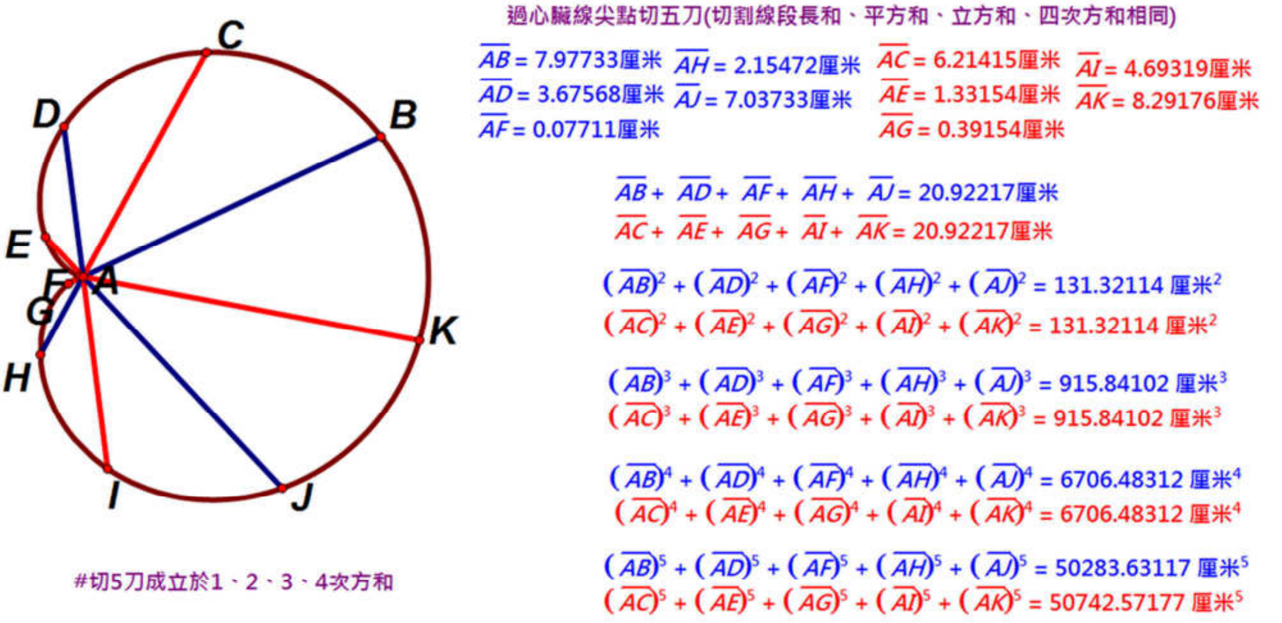
$(\overline{AB})^2+(\overline{AD})^2+(\overline{AF})^2+(\overline{AH})^2$ = 121.40433 厘米^2
$(\overline{AC})^2+(\overline{AE})^2+(\overline{AG})^2+(\overline{AI})^2$ = 121.40433 厘米^2

$(\overline{AB})^3+(\overline{AD})^3+(\overline{AF})^3+(\overline{AH})^3$ = 910.17389 厘米^3
$(\overline{AC})^3+(\overline{AE})^3+(\overline{AG})^3+(\overline{AI})^3$ = 910.17389 厘米^3

$(\overline{AB})^4+(\overline{AD})^4+(\overline{AF})^4+(\overline{AH})^4$ = 7131.51127 厘米^4
$(\overline{AC})^4+(\overline{AE})^4+(\overline{AG})^4+(\overline{AI})^4$ = 7198.08241 厘米^4

#切4刀成立於1、2、3次方和

3. 過心臟線尖點等角切割 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長和、平方和、立方和及四次方和相同，實驗結果如下：



從上述實驗中，我們猜測「心臟線過尖點切 $n(n\geq 2, n\in N)$刀，使每組相鄰割線夾角均相等，將尖點到心臟線的線段由兩人依逆時針輪流拿取，則有 $k(0\leq k\leq n-1, k\in Z)$次方和相等且 k 次方和成定值」，定理四即是該猜測的證明。

$\boxed{\text{定理四}}$

過心臟線尖點切 $n(n\geq 2)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段， 則各組取出的線段長度的 k 次方和相等，$0\leq k\leq n-1,\ \ k\in Z$ 。

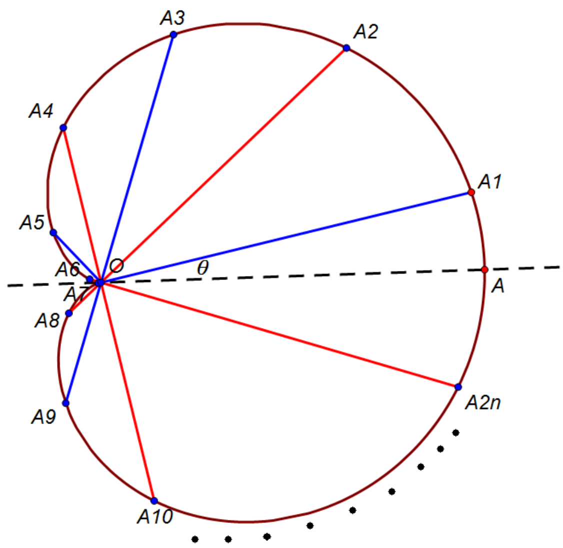
證明：

圖中 O 為心臟線的尖點，過尖點等角切 n 刀，

$\overline{OA}$ 為心臟線的對稱軸，

$\overline{OA_i}$ 為其中兩人要取的線段(i=1,2,3….2n)，

且 $\overline{OA_i}$ 和 $\overline{OA_{i+1}}$ 夾角皆為 $\dfrac{\pi}{n}$ ，



我們由心臟線的方程式 $r(\theta)=1+\cos\theta$，

計算輪流取時取到 $\overline{OA_1}$ 的人的線段長度的 k 次方和，

令 $\overline{OA_1}$ 和 $\overline{OA}$ 夾角為 θ，$\overline{OA_1}=1+\cos\theta$，

此人還會取到 $\overline{OA_3}$ $\overline{OA_5}$ …….，

所以此人取到的值等於 $\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\dfrac{2m}{n}\pi)]^k$

$$\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]^k$$

$$=n+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{p=1}^{k}C_p^k\cdot 1^{(k-p)}\cdot\cos^p(\theta+\frac{2m}{n}\pi)$$

$$= n+\sum_{m=0}^{n-1}[\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\cos^p(\theta+\frac{2m}{n}\pi)+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1} C_p^k\cdot\cos^p(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]$$

$$= n+\sum_{m=0}^{n-1}\{\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}[e^{i(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{-i(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]^p+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}[e^{i(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{-i(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]\}$$

$$= n+\sum_{m=0}^{n-1}[\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{q=0}^{p}C_q^p\cdot e^{iq(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}\cdot e^{-i(p-q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}$$

$$+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{q=0}^{p}C_q^p\cdot e^{iq(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}\cdot e^{-i(p-q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]\text{..........}(*)$$

觀察$\sum_{q=0}^{p}C_q^p\cdot e^{iq(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}\cdot e^{-i(p-q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}$，

q=0~p 時，會發現$e^{iq(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}$和$e^{-i(p-q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}$的次方有類似互補的關係，則提出中間項($q=\frac{p}{2}$時)

又$\sum_{q=0}^{p}C_q^p\cdot e^{iq(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}\cdot e^{-i(p-q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}=\sum_{q=0}^{p}C_q^p\cdot e^{-i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}$，則

$$(*)=n+\sum_{m=0}^{n-1}\{\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\{C_{\frac{p}{2}}^p+\sum_{q=0}^{\frac{p}{2}-1}C_q^p[e^{-i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]\}$$

$$+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}}C_q^p[e^{-i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]\}$$

$$= n+n\cdot\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_{\frac{p}{2}}^p+\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor}\sum_{q=0}^{\frac{p}{2}-1}C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}C_q^p\cdot[e^{-i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]$$

$$+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1}\sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}}C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}C_q^p\cdot[e^{-i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}+e^{i(p-2q)(\theta+\frac{2m}{n}\pi)}]$$

$$=\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor}\sum_{q=0}^{\frac{p}{2}-1}C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_q^p\cdot[\frac{e^{-i(p-2q)(\theta+2\pi)}-e^{-i(p-2q)\theta}}{e^{-i(p-2q)\frac{2}{n}\pi}-1}+\frac{e^{i(p-2q)(\theta+2\pi)}-e^{i(p-2q)\theta}}{e^{i(p-2q)\frac{2}{n}\pi}-1}]$$

$$+\sum_{p=1\, p\equiv 1(\bmod 2)}^{2\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil -1}\sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}}C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_q^p\cdot[\frac{e^{-i(p-2q)(\theta+2\pi)}-e^{-i(p-2q)\theta}}{e^{-i(p-2q)\frac{2}{n}\pi}-1}+\frac{e^{i(p-2q)(\theta+2\pi)}-e^{i(p-2q)\theta}}{e^{i(p-2q)\frac{2}{n}\pi}-1}]$$

$$+n+n\cdot\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_{\frac{p}{2}}^p(\text{註}:p-2q\le k\le n-1)$$

$$= n+n\cdot\sum_{p=2\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_{\frac{p}{2}}^p=n\cdot\sum_{p=0\, p\equiv 0(\bmod 2)}^{2\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor} C_p^k\cdot\frac{1}{2^p}\cdot C_{\frac{p}{2}}^p$$

因為$\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]^k$之值和$\theta$起始值無關，

所以$\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]^k=\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m+1}{n}\pi)]^k$，即兩人輪流取到的線段 k 次方和相同

因為$\sum_{p=0}^{2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\sum_{p\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)} C_{k-p}^{k}\cdot 2^{k-p}\cdot C_{\frac{p}{2}}^{p}$可看成有 k 袋球每袋 2 顆，共 $2k$ 顆，

k 袋中取 k-p 袋，每袋拿一顆出來(每袋 2 種拿法)，共 k-p 顆，

再從剩餘的 p 袋中拿$\frac{p}{2}$袋出來，共拿 k 顆，等價於C_k^{2k}

則$\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]^k=\frac{1}{2^k}\times n\times C_k^{2k}$。

我們發現定理四的證明中一人所取到的 k 次方和與θ起始值無關，因此得到系理一。

系理一

過心臟線尖點切 mn($m,n\geq 2$, $m,n\in N$)刀，使每組相鄰割線夾角均相同，然後按逆時針（或順時針）的順序分給 $2m$ 人，則每人拿取的線段長 k 次方和相同，$0\leq k\leq n$-1，$k\in Z$。

證明：

過尖點切 mn 刀，有 $2mn$ 條切割線段，分給 $2m$ 人，

每人拿取 n 條切割線段且相鄰兩條交角為$\frac{2\pi}{2mn}\times m=\frac{2\pi}{2n}$，

看成過心臟線尖點切 $n(n\geq 2)$刀，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段時，一人所取到的情形。

由定理四知一人所取到的 k 次方和與θ起始值無關，

故 $2m$ 人拿取的線段長 k 次方和相同，$0\leq k\leq n$-1，$k\in Z$。

(七)討論圓和心臟線的切割線段和關係

$\sum_{m=0}^{n-1}[1+\cos(\theta+\frac{2m}{n}\pi)]^k$ (切n刀兩人輪流取)

$=\sum_{m=0}^{n-1}[2\sin^2(-\frac{\theta}{2}+\frac{-m}{n}\pi)]^k$ (引理二中圓的半徑為1)

所以$\sum_{m=0}^{n-1}[\sin^2(-\frac{\theta}{2}+\frac{-m}{n}\pi)]^k=\frac{1}{2^{2k}}\cdot n\cdot C_k^{2k}$

(八)蚶線切割線段長和(兩人取)

$\boxed{\text{定理五}}$

過蚶線尖點切 $n(n \ge 2, n \in N)$ 刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，尖點到蚶線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度 $k(0 \le k \le n-1, k \in Z)$ 次方和相等。

證明：

蚶線的極座標方程式：$r = f(\theta) = 2a\cos\theta + b$

等價於證明：$\sum_{m=0}^{n-1}\left[2a\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})+b\right]^k = \sum_{m=0}^{n-1}\left[2a\cos(\theta+\frac{2m+1}{n}\pi)+b\right]^k$，

對 $0 \le k \le n-1, k \in Z$ 成立

先說明 $\sum_{m=0}^{n-1}\left[2a\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})+b\right]^k$ 之值和 θ 取值無關，則 θ 代入 $\theta+\frac{1}{n}\pi$ 即得右半部

$$\sum_{m=0}^{n-1}\left[2a\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})+b\right]^k$$
$$=\sum_{m=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}C_i^k\cdot 2^i a^i\cos^i(\theta+\frac{2m\pi}{n})\cdot b^{(k-i)}\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{k}C_i^k(2a)^i\cdot b^{(k-i)}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\cos^i(\theta+\frac{2m\pi}{n})$$

令 $\prod_{m=0}^{n-1}\left[x-\cos(\theta+\frac{2m\pi}{n})\right]=f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}...+(-1)^n\sigma_n$

由引理三知 $\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}$ 為定值(不隨 θ 變)、σ_n 隨 θ 變

又由引理四知 $S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2}...+(-1)^{k+1}k\sigma_k(1\le k\le n)$

易知 S_1,S_2 為定值

若 S_k 為定值，S_{k+1} 亦為定值 $(k\le n-2)$

$\therefore S_1,S_2...S_{n-1}$ 為定值

$\Rightarrow\sum_{i=0}^{k}C_i^k(2a)^i\cdot b^{(k-i)}\cdot\sum_{m=0}^{n-1}\cos^i(\theta+\frac{2m\pi}{n})$ 為定值

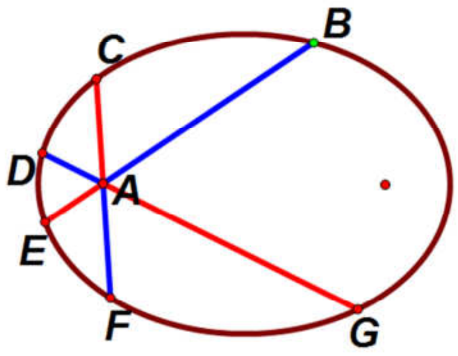
所以定理五成立。

(九)橢圓、圓錐曲線切割線段長和(兩人取)

以橢圓內部焦點為定點，過此點切 n 刀使相鄰割線夾角均相同，其切割刀數 n 與焦點到橢圓上的線段長 k 次方和之 GSP 實驗

1. 過橢圓內一焦點 A 等角切 3 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和、負二次方和相等：

過橢圓焦點切3刀，兩人取到的線段長-1、-2次方和相等



$\overline{AB}$ = 5.86539厘米　$\overline{AC}$ = 2.41805厘米
$\overline{AD}$ = 1.56722厘米　$\overline{AE}$ = 1.61414厘米
$\overline{AF}$ = 2.65631厘米　$\overline{AG}$ = 6.58134厘米

$(\overline{AB})^{-1} + (\overline{AD})^{-1} + (\overline{AF})^{-1} = 1.18503$
$(\overline{AC})^{-1} + (\overline{AE})^{-1} + (\overline{AG})^{-1} = 1.18503$

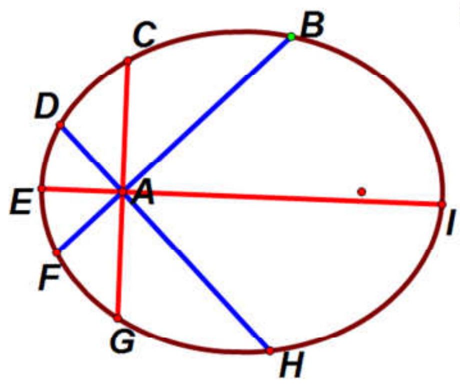
$(\overline{AB})^{-2} + (\overline{AD})^{-2} + (\overline{AF})^{-2} = 0.57793$
$(\overline{AC})^{-2} + (\overline{AE})^{-2} + (\overline{AG})^{-2} = 0.57793$

$(\overline{AB})^{-3} + (\overline{AD})^{-3} + (\overline{AF})^{-3} = 0.31809$
$(\overline{AC})^{-3} + (\overline{AE})^{-3} + (\overline{AG})^{-3} = 0.31202$

#切3刀成立於-1,-2次方和

2. 過橢圓內一焦點 A 等角切 4 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和、負二次方和、負三次方和相等：

過橢圓內焦點切4刀，兩人取到的線段長-1、-2、-3次方和相等



$\overline{AB}$ = 6.12919厘米　$\overline{AC}$ = 3.52841厘米
$\overline{AD}$ = 2.45326厘米　$\overline{AE}$ = 2.15975厘米
$\overline{AF}$ = 2.39721厘米　$\overline{AG}$ = 3.36824厘米
$\overline{AH}$ = 5.79094厘米　$\overline{AI}$ = 8.52604厘米

$(\overline{AB})^{-1} + (\overline{AD})^{-1} + (\overline{AF})^{-1} + (\overline{AH})^{-1} = 1.16061$
$(\overline{AC})^{-1} + (\overline{AE})^{-1} + (\overline{AG})^{-1} + (\overline{AI})^{-1} = 1.16061$

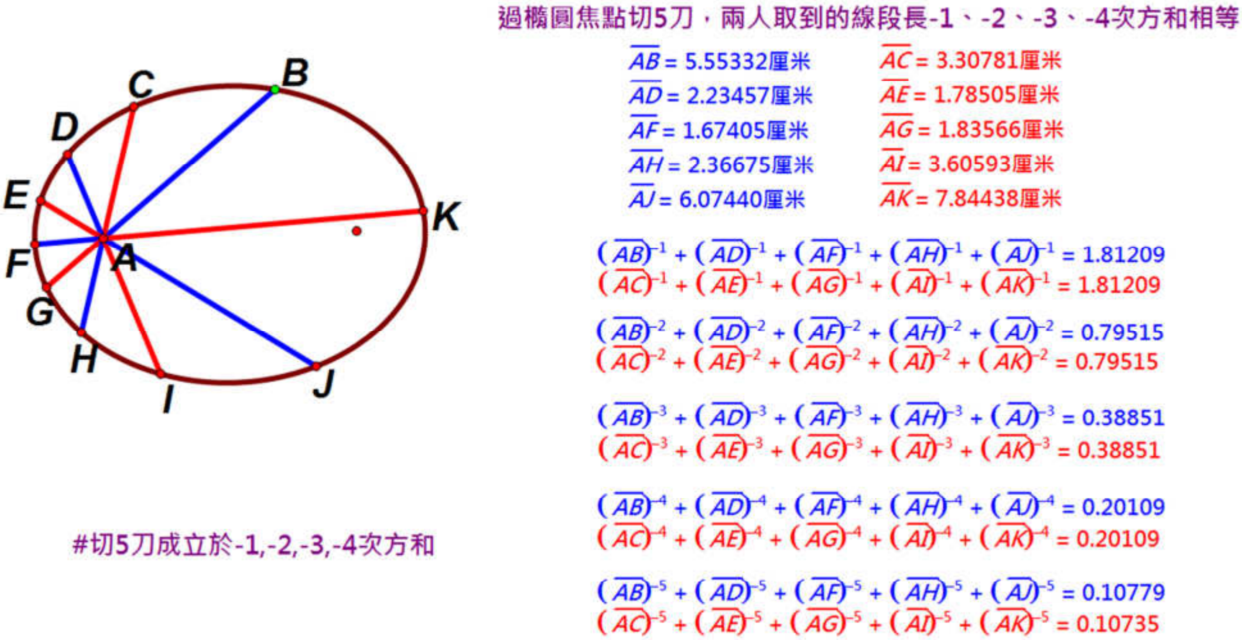
$(\overline{AB})^{-2} + (\overline{AD})^{-2} + (\overline{AF})^{-2} + (\overline{AH})^{-2} = 0.39661$
$(\overline{AC})^{-2} + (\overline{AE})^{-2} + (\overline{AG})^{-2} + (\overline{AI})^{-2} = 0.39661$

$(\overline{AB})^{-3} + (\overline{AD})^{-3} + (\overline{AF})^{-3} + (\overline{AH})^{-3} = 0.14981$
$(\overline{AC})^{-3} + (\overline{AE})^{-3} + (\overline{AG})^{-3} + (\overline{AI})^{-3} = 0.14981$

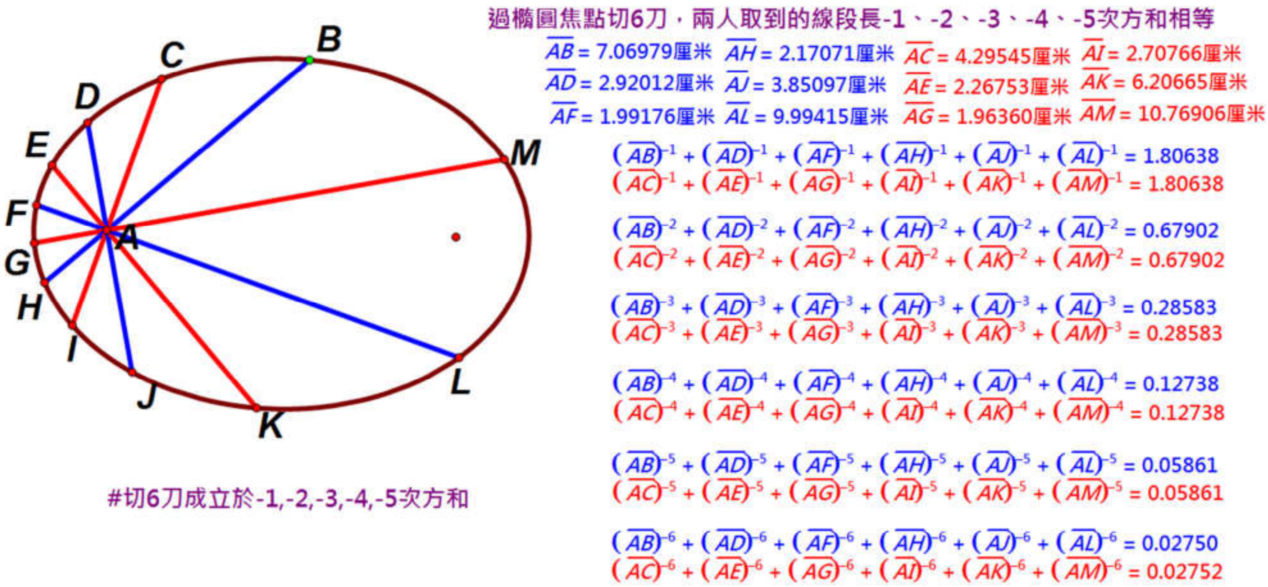
$(\overline{AB})^{-4} + (\overline{AD})^{-4} + (\overline{AF})^{-4} + (\overline{AH})^{-4} = 0.05949$
$(\overline{AC})^{-4} + (\overline{AE})^{-4} + (\overline{AG})^{-4} + (\overline{AI})^{-4} = 0.06037$

#切4刀成立於-1,-2,-3次方和

3. 過橢圓內一焦點 A 等角切 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和、負二次方和、負三次方和、負四次方和相等：



4. 過橢圓內一焦點 A 等角切 6 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和、負二次方和、負三次方和、負四次方和、負五次方和相等：



根據橢圓的切割刀數及切割線段的 k 次方和 GSP 實驗，我們的猜測如下：

過橢圓內部焦點為定點，過此點切 $n(n\geq 2)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，焦點到橢圓的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則兩人取出的線段長度 k 次方和相等且為定值，其中$1-n\leq k\leq 0(k\in Z)$。

並猜測此性質在其他圓錐曲線也成立，並證明之。

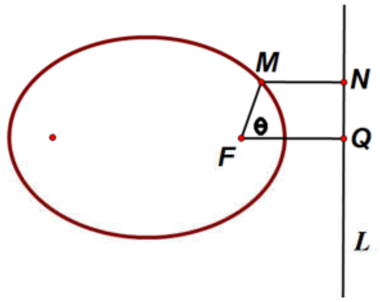
定理六

過圓錐曲線焦點切 n 刀，使相鄰割線角度均相同，將焦點到圓錐曲線的所有線段以逆時針依序取一段，則兩人取到的線段長 k 次方和相同，其中 $1-n \le k \le 0$ 。

定義：

平面上到一定點 F (焦點)和到定直線 L (準線)的距離之比等於常數 e (離心率)的點集合稱為圓錐曲線；當 $0<e<1$ 時為橢圓，當 $e=1$ 時為拋物線，當 $e>1$ 時為雙曲線。

證明：



令 $\overline{FQ}=q, \overline{FM}=\rho, \angle MFQ=\theta$

$$\overline{MN}=\left|q-\rho\cos\theta\right|$$

$$\frac{|\rho|}{|q-\rho\cos\theta|}=e, \rho=\pm e(q-\rho\cos\theta)$$

$$\rho=\frac{eq}{1+e\cos\theta} \vee \rho=\frac{-eq}{1+e\cos\theta}$$ 皆表同一圖形

取 $\rho=\dfrac{eq}{1+e\cos\theta}$

$$\left(\frac{eq}{1+e\cos\theta}\right)^{-k}=\left(\frac{1}{q}\cdot\cos\theta+\frac{1}{eq}\right)^{k}$$ 型如蚶線

由定理五的證明可知定理六成立

三、　研究結果與討論

(一) 研究結果

1. 圓內任一點 P 切 $n(n\ge 2, n\in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同， P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：
   (1)若 $n=2m(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $-m+1\le k\le m-1$ 。
   (2)若 $n=2m+1(m\in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k+1$ 次方和相等，其中 $-m\le k\le m-1$ 。
2. 由心臟線尖點切 $n(n\ge 2)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度的 k 次方和相等（$0\le k\le n-1,\ \ k\in Z$ ）。
3. 過心臟線上的尖點切 $n(n\in N,\ n\ge 2)$ 刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後按逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色，則兩種顏色的面積和一樣大。
4. 過圓錐曲線焦點切 n 刀，使相鄰割線角度均相同，將焦點到圓錐曲線的所有線段以逆時針依序取一段，則兩人取到的線段長 k 次方和相同，其中 $1-n\le k\le 0$ 。

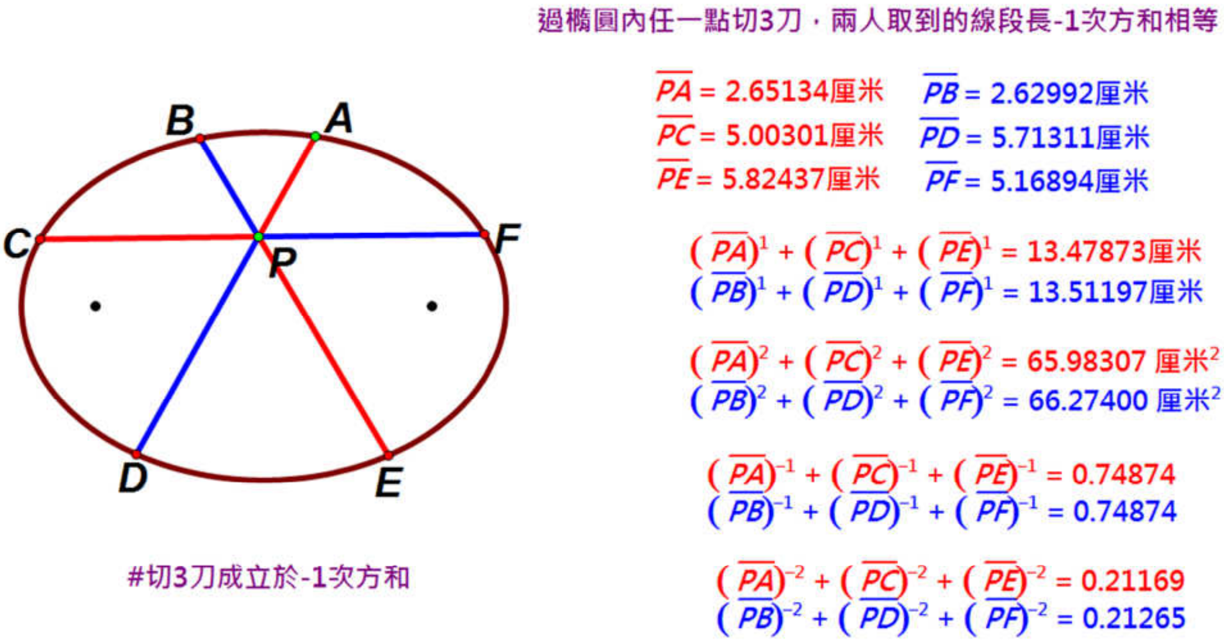
(二) 遇到的問題與解決方法

在進行 GSP 的實驗時，所成的心臟線軌跡無法構造面積，使得我們無法有效預測面積分割的大小及其關係。解決方法為預先學習並使用高等數學中的極坐標積分法。

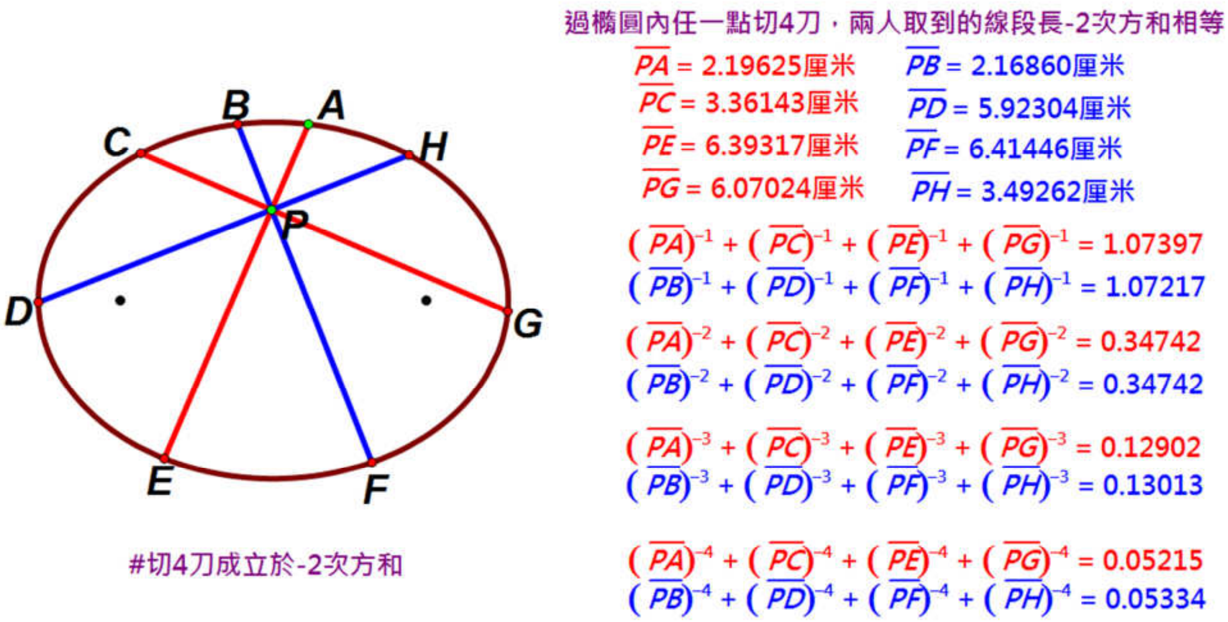
(三) 實驗與猜測

1. 過橢圓內任一點 P ，過此點切 n 刀使相鄰割線角度均相同，其切割刀數 n 與 P 到橢圓上的線段長 k 次方和之 GSP 實驗

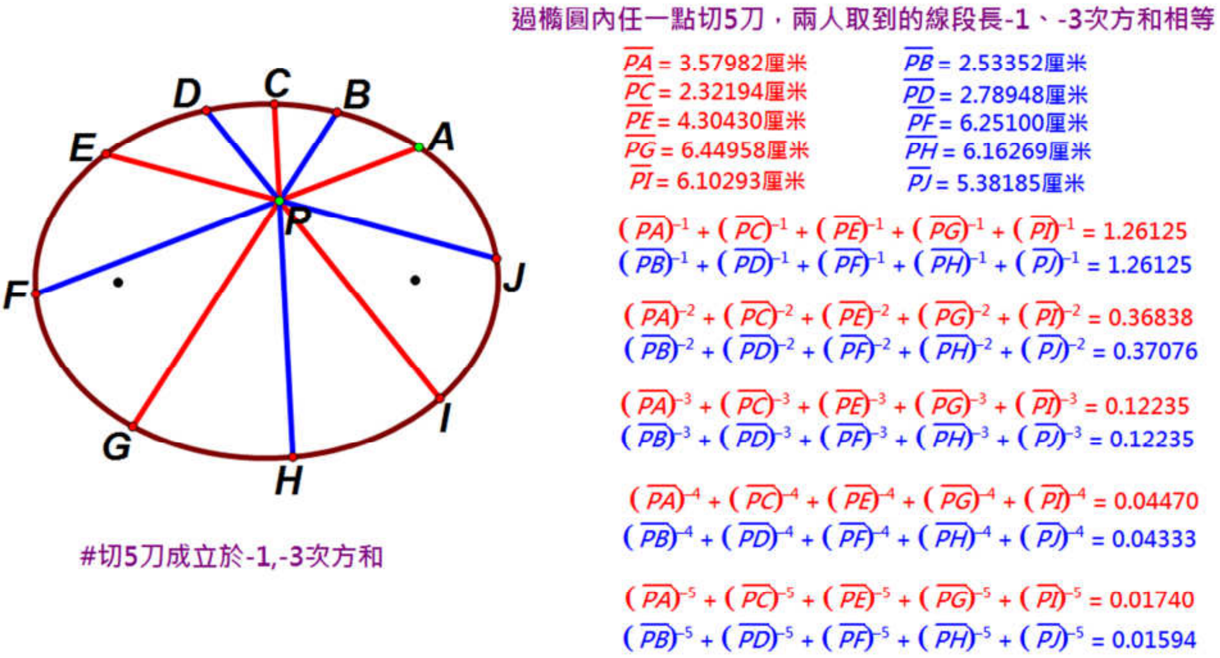
(1) 過橢圓內任一點 P 等角切 3 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和相等：



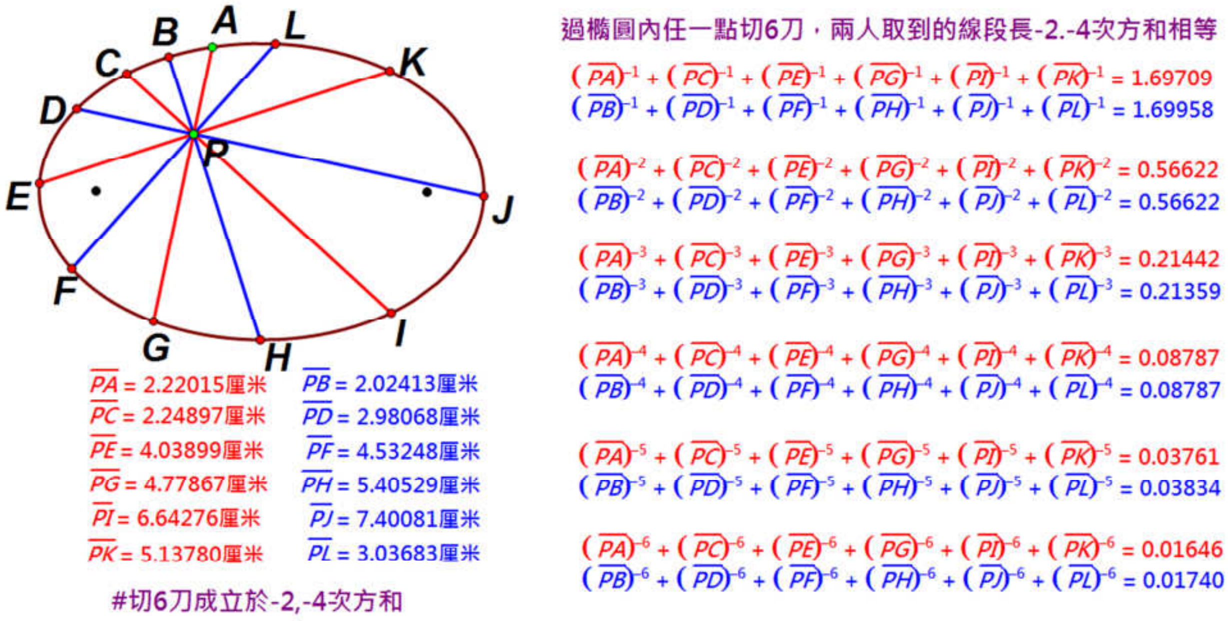
(2) 過橢圓內任一點 P 等角切 4 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負二次方和相等：



(3) 過橢圓內任一點 P 等角切 5 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負一次方和、負三次方和相等：



(4) 過橢圓內任一點 P 等角切 6 刀，依逆時針序兩人輪流取，則取到的切割線段長的負二次方和、負四次方和相等：



2. 根據橢圓的切割刀數及切割線段的 k 次方和 GSP 實驗，我們的猜測如下：

猜測一

過橢圓內任一點 P 切 $n(n \geq 2, n \in N)$ 刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P 點到橢圓的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段， 則：

(1)若 $n = 2m(m \in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k$ 次方和相等，其中 $-m+1 \leq k \leq 0$

(2)若 $n = 2m+1(m \in N)$ 時，則各組取出的線段長度 $2k-1$ 次方和相等，其中 $-m+1 \leq k \leq 0$

四、 結論與應用

(一) 已證明的結論

理論	內容
引理一	設 1 的 $n(n\geq 3, n\in N)$次單位根為$\omega^0,\omega^1,\omega^2,\ldots\ldots,\omega^{n-1}, \omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 則$(\omega^0)^k+(\omega^1)^k+\ldots\ldots+(\omega^{n-1})^k=0$，其中 $k\epsilon$Z, k 不是 n 的倍數。
引理二	對任意正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 內接於圓 O，圓周上取一點 P，連接$\overline{PA_j}(j=1,2,\ldots,n)$， 則$\sum_{j=1}^{n}(\overline{PA_j})^{2k}$之值為$n\cdot C_k^{2k}\cdot r^{2k}$，其中 $k=1, 2, \ldots, n-1$。
引理三	$\cos n\theta=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}C_k^{n-k}(2\cos\theta)^{n-2k}$
引理四	牛頓恆等式(Newton's identities) 設$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$ $S_k=x_1{}^k+x_2{}^k+\cdots+x_n{}^k,\ k=0,1,2,\cdots$ 則$S_k=x_1{}^k+x_2{}^k+\cdots+x_n{}^k,\ k=0,1,2,\cdots$ ， $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0$, 當$k>n$時 其中$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\\ \cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$ 為n個不定元的基本對稱式。
引理五	$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha+k\beta)=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)$
定理一	過圓內任一點P切$2n$ 刀($n\epsilon N$)，使每組相鄰割線夾角相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則兩人輪流取的線段長 $2k$ ($1-n\leq k\leq n-1, k\in Z$)次方和相等。
定理二	過圓內任一點P切$2n+1$ 刀($n\epsilon N$)，使每組相鄰割線夾角相同，P 點到圓周的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則兩人輪流取的線段長 $2k+1$ ($-n\leq k\leq n-1, k\in Z$)次方和相等。
定理三	過心臟線上的尖點切$n(n\in N, n\geq 2)$刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後按逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色，則兩種顏色的面積和一樣大。
定理四	過心臟線尖點切 $n(n\geq 2$，$n\epsilon N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，尖點到心臟線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則各組取出的線段長度的 k($0\leq k\leq n-1, k\in Z$)次方和相等。

定理五	過蚶線尖點切$n(n \ge 2, n \in N)$刀，使每一組相鄰割線角度皆相同， 尖點到蚶線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段， 則各組取出的線段長度$k(0 \le k \le n-1, k \in Z)$次方和相等。
定理六	以圓錐曲線內部焦點為定點，過此點切$n(n \ge 2, n \in N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，焦點到曲線的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則兩人取出的線段長度$k(1-n \le k \le 0, k \in Z)$次方和相等且為定值。

(二) 未來展望：

我們希望能證明研究過程中所引發的猜想，並將披薩定理的相關結果推導至橢圓上。橢圓內任一點P切$n(n \ge 2, n \in N)$刀，使每一組相鄰割線夾角皆相同，P點到橢圓的所有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，則：

(1)若$n = 2m(m \in N)$時，則各組取出的線段長度$2k$次方和相等，其中$1-m \le k \le 0$

(2)若$n = 2m+1(m \in N)$時，則各組取出的線段長度$2k+1$次方和相等，其中$1-m \le k \le 0$

五、 參考文獻

(一)呂映霆、蘇哲寬，2013 年，有趣的切披薩問題，2013 臺灣國際科展作品說明書

(二)林柏含、王語萱、郭書寒，2004 年，找出$\cos n\theta$與$\sin n\theta$的一般項公式，第四十四屆全國中小學科展高中組作品說明書，p.16
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040414.pdf

(三)披薩定理 - 維基百科，自由的百科全書
http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%8A%AB%E8%96%A9%E5%AE%9A%E7%90%86

(四)常庚哲，神奇的複數：如何利用複數解中學數學難題，九章出版社，p.88~ 90，1985 年

(五)許勝傑、朱冠勳、張良宇、董貴翔，2010 年，點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討，第五十屆全國中小學科展高中組作品說明書，p.27
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/040410.pdf

(六)趙文敏，1990，心臟線，科學月刊，第 21 卷第 5 期
http://163.27.3.193/Science/home/page.asp?peri=245&order=6

(七)Rick Mabry and Paul Deiermann (2009),Of Cheese and Crust：A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results, American Mathematical Monthly,Vol.116, No.5, p. 423-438

【評語】010014

本篇作品問題的引入非常簡單，就是考慮過定點的等角分割，在定點落在圓內部或心臟線的尖點時，作者得到了線段的次方和及面積和的恆等式。

作者成功地將問題作了轉化，利用一些已知的等式，給出非常美妙的證明，非常具有吸引力。

本篇作品的文字部份還有潤飾的空間，部分省略跳躍的步驟應當補足，利用段落與註記，將文章細緻化。